

Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXXIII.

Zu der Redaktion von Euklids Elementen
durch *Naşîr al Dîn al Ṭûsî*.

Von Eilhard Wiedemann.

Wohl kein Werk der exakten Wissenschaften hat neben dem Almagest in dem Maße die Aufmerksamkeit der islamischen Gelehrtenwelt immer von neuem auf sich gelenkt wie die Elemente des Euklid. Ziemlich der letzte, aber wohl auch der bedeutendste ihrer Bearbeiter ist *Naşîr al Dîn al Ṭûsî* (1201—1274), der Günstling des Mongolenfürsten *Hûlâgû*. — *Al Ṭûsî* nennt sein Werk *Tahrîr al Uşûl*, Redaktion der Elemente¹⁾. Daß sich auch abendländische Gelehrte auf dies Werk von *al Ṭûsî* gestützt haben, macht H. Suter (Einiges von *Naşîr al Dîns* Euklidausgabe, *Bibl. math.* [2] Bd. 6, S. 3. 1892) wenigstens für Ch. Clavius (1537—1612) sehr wahrscheinlich.

Ich gebe eine Übersetzung des Vorworts und des Anfangs der ersten Buches und schließe daran eine Reihe von Bemerkungen.

Übersetzung des Vorwortes.

Die mathematischen Wissenschaften sind das „Organ“, die „Vermittelung“, mit der man das Band, die Verflechtung (*‘Aqd*)

1) Zu den einzelnen Handschriften, den verschiedenen Redaktionen und weiterer Literatur vgl. M. Steinschneider, Die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen. *Zeitschr. d. deutsch. morgenl. Ges.* Bd. 50, S. 170. 1896. H. Suter, Die Mathematiker usw. *Abhandl. zur Gesch. der math. Wissensch.* Heft X, S. 151. 1900.

Eine Darstellung des Lebens und der Tätigkeit von *Naşîr al Dîn al Ṭûsî* soll an anderer Stelle erscheinen.

der theoretischen Philosophie knüpft. Die propädeutischen (mathematischen) Wissenschaften werden in vier Teile geteilt, die Geometrie, die Arithmetik, die Musik und *al Migistî* (Almagest, Astronomie). Letzteres ist ihr Endziel. Es gab ein Werk der Elemente (*al Uşûl*); es heißt *al Ustuquşşât* (= *στοιχεῖα* Grundbegriffe, Elemente), auf das alle anderen mathematischen Wissenschaften in früherer Zeit zurückgeführt wurden; es war in fünfzehn Büchern angeordnet. Ein griechischer König (wohl Ptolemäus Soter 323—285) plante seiner Schwierigkeiten Herr zu werden. Das Werk bereitete ihm aber große Schwierigkeiten. Da erkundigte er sich bei jedem Gelehrten, der zu ihm kam, nach Nachrichten über das Werk. Einer von diesen machte ihn auf einen Mann in *al Şûr* (Tyros) mit Namen Euklid aufmerksam und teilte ihm mit, daß er unter den Geometern und Arithmetikern hervorrage. Der König ließ ihn kommen und befahl ihm das Werk von allen Fehlern und Mängeln zu reinigen und es sachgemäß zu disponieren. Er tat dies und disponierte es in dreizehn Bücher. Unter seinem Namen wurde das Werk dann bekannt. Die beiden letzten Bücher unterdrückte er, da die in ihnen behandelten Probleme zu den Voraussetzungen gehören, auf denen die Beweise für die Verhältnisse der Körper beruhen, die in dem dreizehnten Buch behandelt werden. Auch die Art unterdrückte er, wie man eine der in ihm erwähnten Figuren in eine andere einzeichnet und zwar, weil alles dies sich deutlich ergibt aus diesen Figuren selbst und aus anderen (wohl im gleichen Buch erwähnten) oder aus den früheren Büchern.

Das Werk ist eine Grundlage (*Maudû'*), da in ihm die Prinzipien (*Uşûl*) aufgestellt (und dargelegt) werden, aber nicht die Konsequenzen (*Furû'*), denn deren Zahl ist unendlich. Aus diesem Grund wird eine zählbare Reihe von Sätzen aufgestellt, die zu den axiomatisch aufgestellten Prinzipien gehören, und die nur in dieser Wissenschaft klargelegt werden. Sie sind für die Probleme des Werkes bestimmt, die eine durchaus einleuchtende Erklärung erhalten können.

Nach einiger Zeit trat in Askalon ein in den mathematischen Wissenschaften hervorragender Mann auf, der Hypsikles hieß; er fügte dem Werk zwei Bücher hinzu, nachdem er sie von ihren Mängeln befreit hatte. Durch sie erhielt das Werk wieder

fünfzehn Bücher. Dann wurde es in fünfzehn Büchern angeordnet in das Arabische übertragen. Von den Übertragungen waren unter den Vertretern dieser Wissenschaften zwei besonders bekannt. Die eine ist die von *Tâbit b. Qurra al Harrâni* verbesserte [ältere] Übersetzung und die andere die Übertragung und Verbesserung von *Haggâg b. Maṭar*.

Eine große Anzahl der Späteren befaßte sich mit der weiteren Befreiung des Werkes von Mängeln; dabei strebten diese danach, das Werk zu kürzen und alles klar auseinanderzusetzen. Einige strichen die Behauptungen (*Da'âwî*, d. h. die an das Problem sich anschließenden Beweise) und begnügten sich mit dem Beispiel. Wieder andere strichen einen Teil der Probleme, indem sie der Ansicht waren, daß sie sich aus dem Werke ohne weiteres ergäben. Einige faßten eine Anzahl von Sätzen in einen einzigen zusammen. Einige führten das stillschweigend vorausgesetzte oder nur angedeutete vollkommen durch²⁾, nämlich das, was Euklid unberücksichtigt ließ, und auf das sich doch die Beweise der Sätze des Werkes stützen. Er (Euklid) ging davon aus, daß der, der ihre Lösung wünscht, dies dank seines Verstandes und unter Berücksichtigung der in dem Werk eingeschlagenen Methode vermag. Einige wiesen auf die Zahlen (Nummern) früherer Probleme hin, auf die sich die Beweise Späterer stützen, und zwar durch die den Zahlen entsprechenden Buchstaben a b g d (= 1, 2, 3, 4); dabei schrieben einige diese in den laufenden Text (*Matn*), andere auf den Rand, noch andere zwischen die Zeilen. Als nun die Abschriften von Hand zu Hand gingen (d. h. immer neu abgeschrieben wurden), da wurden die Buchstaben, die im laufenden Text standen, falsch abgeschrieben, und diejenigen an den Rändern und zwischen den Zeilen wurden ja gar nicht mehr geschrieben; sie wurden ganz fortgelassen. Das Buch bedurfte einer Kommentierung und einer klaren Auseinandersetzung, damit dadurch den Studierenden seine Nutznießung erleichtert würde. Als ich das, was ich oben besprochen habe, eingehend erwog, da faßte ich den festen Entschluß, das Werk in dreizehn *Maqâlas* (Bücher) zu disponieren, wie dies Euklid tat. Dabei schlug

2) „*Min al Qawwa ilâ al Fîl* aus der Kraft (ex potentia) in die Tat (in actum) übertragen“ wird wohl am besten so übersetzt,

ich eine Methode der Darstellung ein, bei der der ursprüngliche Text und der Kommentar zu einem Ganzen verarbeitet war. Ferner wollte ich all das, was nur stillschweigend vorausgesetzt oder nur angedeutet war, vollkommen durchführen, soweit auf ihm die Beweise der Sätze beruhten. Auch trennte ich die einzelnen Voraussetzungen voneinander nach einer Methode, wie sie der Behandlung solcher Probleme angemessen ist. Ferner lenkte ich die Aufmerksamkeit auf die verschiedene Art, in der jeder Satz auftreten kann, falls solche Unterschiede vorhanden sind, und auf eine Erklärung, wenn diese nötig war. Die Probleme der beiden letzten Bücher unterschied ich von den anderen durch einen besonderen Hinweis. Und ich weise mit Worten, nicht mit Zahlzeichen auf jeden Satz hin, der als Einleitung zu einigen Beweisen des Werkes vorkommt. Ich gebe nur diese Zahl, wenn diese einleitende Bemerkung und das Resultat sich in ein und derselben *Maqâla* befinden; außer dieser Zahl gebe ich auch die *Maqâla* an, wenn sie sich in zwei *Maqâlas* befinden. Ich werde auch ein und denselben Satz bei demselben Problem viele Male wiederholen, falls man seiner bedarf. Dadurch soll das Werk in seinem Wert vollkommen werden und alles das in sich vereinigen, was der, der es studiert, nur irgend wünscht.

Bemerkungen zum Vorwort.

A. Schon der Anfang des Vorwortes zu der Rezension der Elemente ist dadurch interessant, daß bei den propädeutischen Wissenschaften der Ausdruck *al Miğistî*, der Titel eines Werkes, neben Geometrie, Musik, Arithmetik für Astronomie verwendet wird. Ebenso verfährt *Ibn Sînâ* in der *Schifâ'* (s. S. 225). Das Endziel ist das Studium und das volle Verständnis des Almagest.

B. Zwischen den Elementen von Euklid und dem Almagest wurden die unten aufgeführten mittleren Bücher (*Mutawassitât*)³⁾ studiert. Mit der Redaktion der einzelnen hat sich *al Tûsî*, wie wir aus Bücherverzeichnissen wissen, eingehend beschäftigt. *Al Tûsî* scheint sie aber auch in ein Werk zusammengefaßt

3) Die von M. Steinschneider benutzte Form *Mutawassatât* dürfte nicht richtig sein.

zu haben, in dem „Werk der mittleren Bücher zwischen der Geometrie und der Astronomie“.

Nach *H. Chalîfa* (Bd. V, Nr. 11358, S. 17) heißen „*al Mutawassitât*, zwischengeschaltete mittlere Werke, diejenigen Werke, die die Eigentümlichkeit besitzen, daß sie bei dem mathematischen Aufbau (*Tartîb*) zwischen die Elemente Euklids und den *Almagest* von Ptolemäus treten. Dahin gehören die Werke *Sphaerica* und ähnliche, wie dies *al Tûsî* in dem *Tahrîr* (Redaktion) der *Sphaerica* von Menelaus auseinandergesetzt hat. Einige der Neueren fügten ihnen die *Lemmata* des Archimedes hinzu.“

Das Folgende ist eine von M. Steinschneider zusammengestellte Liste der mittleren Bücher. Die letzten Schriften 15 bis 18, sind natürlich erst später zu den mittleren Büchern der Antike hinzugefügt worden.

*1. Euklid. *Data*.

*2. . . . *Optica* (und die pseudepigraphische *Catoptrica*).

*3. . . . *Phaenomena*.

*4. Theodosius *Sphaerica*.

*5. Autolycus *Sphaera mota*.

6. Archimedes *de Sphaera et Cylindro*.

7. . . . *Dimensio circuli*.

*8. Theodosius *de habitationibus*.

*9. Autolycus *de ortu et occasu siderum inerrantium*.

*10. Theodosius *de diebus et noctibus*.

*11. Aristarch *de solis et lunae magnitudinibus et distantiiis*.

*12. Hypsicles (*Anaphorica*, *de ascensionibus*).

*13. Archimedes (*Lemmata*, *Assumta*).

14. Menelaus *Sphaerica*.

15. *Thâbit ben Qurra Data*.

16. *Muhammed b. Mûsâ* (*de mensura figurarum*).

17. *Thâbit b. Kurra* *de Figura sectore, Transversalenfigur*.

18. *Naşîr al Dîn al Tûsî* *de Figura secantis proprietatibus*, über die Eigenschaften der Transversalenfigur.

Mit den mittleren Büchern hat sich in gewohnter eingehender bibliographisch-kritischer Weise M. Steinschneider (*Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Zeitschrift f. Math. und Phys. Bd. 10, S. 456—498. 1865*) beschäftigt.

Die mit einem * versehenen Schriften sind meist in den griechischen Handschriften vereinigt und auch von Fabricius zum kleinen Astronomen *ἀστρονόμος μικρός* gerechnet. — Ob die Sphaerica des Menelaus schon von den Griechen diesem zugezählt wurden, ist zweifelhaft (vgl. K. Manitius, Des Hypsikles Schrift Anaphorikos usw. Programm des Gymnasiums zum h. Kreuz. Dresden 1888). —

Das Werk 12 rührt nach K. Manitius (a. a. O.) bis auf die zuerst mitgeteilten Sätze nicht von Hypsikles her. — Das Werk 14 ist herausgegeben von Alex. Pascha Carathéodory, *Traité du Quadrilatère attribué à Nassir uddin el Toussy*. Constantinople 1891. — Das Werk 14 ist behandelt von A. A. Björnbo, *Studien über Menelaos Sphärik*. Abhandlungen zur Geschichte der mathemat. Wissenschaften XIV, 1902. — Das Werk 16 von *Muḥammed b. Mûsâ b. Schâkir* ist von H. Suter bearbeitet (Über die Geometrie der Söhne des *Mûsâ b. Schâkir*. *Bibliot. math.* 3 ser. Bd. 12, 259. 1902. — Das Werk 17 behandeln H. Bürger u. K. Kohl, A. Björnbo *Thâbits* Werk über den Transversalensatz. Mit Bemerkungen von H. Suter (Abh. z. Gesch. d. Naturwiss. usw., Heft VII. 1924).

C. Die zum Teil legendenhaften Erzählungen über Euklid und die Elemente finden sich in der einen oder anderen Form bei verschiedenen Schriftstellern. Antike Nachrichten darüber, daß Euklid aus Tyrus stammte, haben wir nicht. Bei dem erwähnten Könige dürfte die Erinnerung an Ptolemäus Soter eine Rolle spielen, dem Euklid gesagt haben soll: „Zur Geometrie gibt es keinen geraden (bequemen) Weg für Könige“. Von den 15 Büchern der Elemente rühren die ersten dreizehn von Euklid selbst her, das vierzehnte von Hypsikles, das fünfzehnte von einem weniger bedeutenden Mathematiker.

Zu diesem Abschnitt vgl. J. C. Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis* (Hallae 1823). — H. Suter, *Das Mathematikerverzeichnis des Fihrist von Ibn Abî Ja'qûb al Nadîm*. Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, Heft 6, S. 16. 1892 und die Anmerkungen ebenda. — M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, Bd. 1 unter Euklid.

Hier wäre noch zu bemerken, daß H. Suter darauf aufmerksam macht, daß *al Tûsî* nicht, wie J. L. Heiberg (*Literaturgesch. Studien über Euklid* S. 6) angibt, um seine Vater-

stadt *Tūs* zu ehren, Euklid als Thusianus (d. h. aus *Tūs* stammend) bezeichnet, sondern als *al Šūrī*, d. h. als Syrer.

D. An die Geschichte der Elemente reiht sich eine Besprechung der Übersetzungen und Kommentare an. An deren Spitze stellt *al Tūsī* die Übersetzungen bzw. die berichtigenden Bearbeitungen von *Thâbit b. Kurra* und *Haggâg b. Mațar*. Das Weitere lehrt uns, wie mannigfaltig Euklid bearbeitet wurde, und wie man sich bemühte Lücken auszufüllen und unklare, schwierige Stellen fortzuschaffen.

E. *Al Tūsī* selbst stellt sich die Aufgabe, das Werk von Euklid nicht einfach zu kommentieren, sondern den Kommentar und das ursprüngliche Werk zu einem einheitlichen Ganzen auszubauen, d. h. ein Handbuch der Geometrie zu schaffen. Dabei ist sehr zu bedauern, daß *al Tūsī* nicht die Quellen anführt, denen er die einzelnen sich mit Euklids Werk beschäftigenden Erörterungen entnommen hat, während er dies in so ausgiebiger Weise in dem Werk über den Transversalensatz getan hat.

Übersetzung der Einleitung des ersten Buches.

An das allgemeine Vorwort schließt sich eine Einleitung, die bei Euklid fehlt. Ich teile zunächst die Übersetzung mit, bei der mich Herr Prof. Horten in Bonn freundlichst unterstützt hat. Sie lautet:

Jede Wissenschaft hat einen Gegenstand (*Maudû'*), dann Grundsätze (Ausgangspunkte, Prinzipien, *Mabâdî*) und endlich Probleme (*Mas'âl*). Der Gegenstand einer jeden Wissenschaft ist dasjenige, dessen wesentliche Akzidentien man in ihr erforscht. Dies und die Attribute (Prädikate, Kategorien), die dem Ding aus sich (*avtô*) zukommen und zwar auf Grund 1. seines Wesens (*kad'avtô*) oder 2. eines seiner Teile oder 3. einer Kategorie, die mit ihm umfanggleich ist, die aber außer ihm liegt.

Die Grundgesetze (Prinzipien) sind entweder die Definitionen der betreffenden Gegenstände oder Aussagen, die die Obersätze zu den Beweisen der auftretenden Probleme darstellen. Sie sind begründet (aufgebaut) entweder in dieser Wissenschaft selbst, ohne daß sich damit ein *circulus vitiosus* ergibt, oder in einer anderen Wissenschaft. Manchmal stehen sie in den betreffenden Werken an erster Stelle und zwar losgelöst von Beweisen, manchmal bilden sie die Einleitung parallel mit Beweisen, je-

doch nicht so, als ob sie zu den Beweisen dieser Wissenschaft gehörten. Man nennt sie *Mušâdarât*⁴⁾ und *Uşûl* (Prinzipien), die (wie Axiome) einfach aufgestellt sind. In anderen Fall tragen sie ihre Begründung in sich selbst und heißen dann allbekannte Wissenschaften (*κωναι ἔννοιαι* Axiome). Die Probleme sind die Aussagen der Beweise in ihr (der Wissenschaft), indem ihre Kategorien von ihren Gegenständen entweder bejaht oder verneint werden. Den Gegenstand dieser

4) Die Bedeutung von *al Muşâdarât* steht nicht ganz fest. In dem Kommentar zu den Elementen von *al Nairizî* ist stets *αἰθήματα*, postulata mit *Mušâdarât* übersetzt (Euclidis Elementa cum commentariis *al Nairizii* ed. R. O. Besthorn und J. L. Heiberg, Pars I, fasc. 1, S. 3 ff.). Diese engere Bedeutung hält auch H. Suter für die richtige (Zeitschr. der deutsch. morgenl. Ges. Bd. 51, S. 428. 1897). Bei *Ibn al Haiḷam*, der einen Kommentar zu den *Mušâdarât* in den Elementen des Euklid geschrieben hat, sind die *Mušâdarât* allgemeine Sätze aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik (G. Jacob und E. Wiedemann, *Zu 'Omer-i-Chajjâm*. Der Islam, Bd. 3, S. 53. 1912). Zu *Mušâdarât* vgl. auch M. Steinschneider, Orient. Literaturzeitung Bd. 4, S. 185. 1901.

Über die ausgesprochenen und versteckten Axiome Euklids hat, wie es scheint, bisher niemand im Zusammenhang gehandelt.

Mit den einzelnen Axiomen und Postulaten haben sich aber zahlreiche Gelehrte beschäftigt, so vor allem mit dem fünften Postulat des ersten Buchs, das früher als elfter Grundsatz, Axiom, bezeichnet wurde, und das lautet: „Zwei Gerade, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beiden inneren an derselben Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen genügend verlängert auf dieser Seite zusammen“. Mit diesem Postulat hat sich auch *Naşîr al Dîn al Tûsî* eingehend beschäftigt (vgl. J. Wallis, Opera omnia Bd. 2, S. 669—675).

Auf einige Schriften, die sich mit den Axiomen usw. geschichtlich beschäftigen, sei wenigstens hingewiesen. R. Bonola, deutsch von H. Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie, Wissenschaft und Hypothese IV, S. 9. Leipzig 1919. M. Simon, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Heft 11 der Abhandl. zur Geschichte der math. Wissensch. Leipzig 1902. G. Vailati, Internae al significato della differenza tra gli assiomi ed i postulati nella Geometria greca. Verhandlungen des III. internation. Mathem. Kongresses in Heidelberg, S. 575—581. 1904. G. Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia 1914. H. G. Zeuthen, Hvorledes Mathematiken i tiden fra Platon til Euklid blev rationel. (Kgl. danske Vidensk. Selsk. Skrifter. Naturvidensk og Mathem. Affd 8, Række I. 5. 1917; vgl. auch H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896.

In der neuesten Zeit sind die mit den Axiomen und Postulaten zusammenhängenden prinzipiellen Fragen vielfach und von den verschiedensten Seiten aus durch die Mathematiker erörtert worden; vgl. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 6. Aufl. Leipzig u. Berlin 1923.

Wissenschaft bildet die kontinuierliche und die diskontinuierliche Quantität, insofern als einem von den Teilen beider zu einem anderen reziproke Beziehungen und eine Relation zukommt.

Hier beginnt dann die Behandlung der Elemente selbst; davon sei nur wenig mitgeteilt.

Al Hudûd (die Definitionen): Der Punkt ist irgendein Ding, das eine bestimmte Lage (*situs*) hat und von außen unteilbar ist. Der Sinn von „Lage“ bedeutet, daß das Ding Objekt des sinnlichen Hinweises werden kann. — Am Schluß der Definitionen fehlt diejenige der parallelen Linien.

Die Postulate, die hier *al Uşûl al maudû'a*, die aufgestellten Prinzipien, heißen, sind die Euklidischen. Ihre Behandlung wird aber sehr weit ausgesponnen. Ein Satz über Teile einer Größe ist eingeschoben. Endlich kommen *al 'Ulûm al muta'ârifâ*, die allgemein bekannten Wissenschaften (*κωνὰ ἐννοιαὶ* Axiome), die *communes animi conceptiones*; usw.

Auf einige Eigenarten des Werkes sei noch hingewiesen.

Den einzelnen Büchern werden allgemeine Erörterungen vorausgeschickt.

Am Anfang des sechsten Buches behandelt *al Tûsî* z. B. das zusammengesetzte Verhältnis usw., ferner finden sich am Anfang des zehnten Buches Untersuchungen über die Verhältnisse. Diese stammen wohl aus Scholien zur fünften Definition des sechsten Buches von Euklid (vgl. A. Björnbo, Thabits Werk über den Transversalensatz. Mit Bemerkungen von H. Suter, herausgegeben und ergänzt von Dr. H. Bürger und Dr. K. Kohl. Abh. zur Gesch. der Naturw. und der Medizin, Heft VII, S. 88. 1924).

Oft faßt *al Tûsî* das Ergebnis der Entwicklung bei einem Satz am Schluß zusammen mit den Worten: „*Istibâna* (klares Endresultat) von dem vorigen“.

Ganz besonders unterscheidet sich das Werk von *al Tûsî* von demjenigen von Euklid dadurch, daß er zahlreiche Spezialfälle behandelt; schon gleich am Anfang der Definitionen bespricht er die Winkel, deren Schenkel krumme Linien sind. Bei Euklid kommen nur geradlinig begrenzte Winkel vor. Für den pythagoreischen Lehrsatz unterscheidet er 16 (!) Fälle; einige von ihnen entstehen dadurch, daß die Quadrate über ihre Seite alle oder zum Teil nach dem Innern des Dreiecks zu konstruiert sind.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1926-1927

Band/Volume: [58-59](#)

Autor(en)/Author(s): Wiedemann Eilhard

Artikel/Article: [Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. LXXIII. Zu der Redaktion von Euklids Elementen 228-236](#)