Zur Theorie der Exponentialfunktion und der Kreisfunktionen.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Inhalt: Es wird gezeigt, daß die Funktionalgleichung[1] [2]) für e^x bezw. $\cos x$ nur eine einzige Lösung besitzt, falls man (von geeigneten Anfangsbedingungen abgesehen) die Nebenbedingung stellt, daß die Lösung eine Primitivfunktion (ein „unbestimmtes Integral“) besitzt[3]). Trotzdem die genannte Nebenbedingung verhältnismäßig schwach ist, gestaltet sich der Beweis sowohl einfach als völlig elementar; um letzteres deutlich zu machen, ist der Beweis im einzelnen ausgeführt. Der Eindeutigkeitsbeweis führt in bekannter Weise zum Nachweise der Existenz der Lösungen. Ein entsprechender Eindeutigkeitssatz gilt für eine von Herrn T. Levi-Civita behandelte Funktionalgleichung, worauf am Schlusse kurz eingegangen wird[4]).

1. Exponentialfunktion.

Satz: Vor.: Es sei $f(x)$ eine nicht konstante, für alle reellen x eindeutige, reelle, endliche Funktion von x, die der Funktionalgleichung

---

1) Betr. die in Rede stehenden Funktionalgleichungen vgl. man: Encyklopédie des sciences mathématiques, II 26: S. Pincherle, Équations et opérations fonctionelles, S. 50—51. Leipzig-Paris 1912.

2) Eine Funktionalgleichung für den Sinus behandelt E. B. van Vleck, Annals of Mathematics (2) 11, S. 161—165 (1910) und (2) 13, S. 154 (1912).

3) Die von uns gegebene Behandlung lehnt sich an eine von J. Andrade (Bull. Soc. math. France 28, S. 61—63 [1900]) gegebene Behandlung der Funktionalgleichung des Kosinus an. Andrade setzt aber die Stetigkeit der Lösung voraus.

4) T. Levi-Civita, Atti d. Reale Acc. d. Lincei, Rend., Cl. de scienze fisiche, mat. e nat. 22_2, S. 181 (1913). Vgl. auch P. Stäckel, ebenda, S. 392, sowie C. Stephanos, Rend. d. Circolo matematico di Palermo 18, S. 360—362 (1904).

$$\text{(I)} \qquad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

genügt. Ferner sei $f(x)$ für alle x die Ableitung einer (für alle x) eindeutigen reellen (endlichen) Funktion $F(x)$[5]).

$$\text{Beh.:} \quad f(x) = e^{kx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(kx)^\nu}{\nu!},$$

wobei k eine von Null verschiedene, sonst beliebige reelle Zahl ist.

Bew.: Wir nehmen zunächst eine Analysis vor, d. h.: Unter der Annahme, daß (I) eine Lösung der geforderten Beschaffenheit besitzt, suchen wir Eigenschaften von $f(x)$ zu ermitteln, durch die $f(x)$ eindeutig bestimmt wird. — Zunächst zeigt (I): Es ist $f(x) \neq 0$ für alle x und es gilt $f(0) = 1$. Wäre nämlich $f(x_0) = 0$ für passendes x_0, so wäre $f(x + x_0) = 0$ für alle x, gegen die Voraussetzung; wegen $f(0) \cdot [f(0) - 1] = 0$ ist nun $f(0) = 1$. Jetzt sei $F(x)$ ein Integral von $f(x)$, für welches

$$\text{(1)} \qquad F(0) = 0$$

Integration von (I) nach y liefert

$$\text{(I'')} \qquad C(x) + F(x+y) = f(x) F(y).$$

Um die überall eindeutige, endliche, reelle Funktion $C(x)$ zu erhalten, setzt man $y = 0$ in (I''). Wegen (1) folgt $C(x) + F(x) = 0$. Daher lautet (I'')

$$\text{(I')} \qquad f(x) F(y) = F(x+y) - F(x)$$

für beliebige reelle x und y.

Da $F'(x) = f(x)$ (nach Voraussetzung) und da $f(x)$ nicht überall Null, also $F(x)$ nicht konstant ist, so gibt es (mindestens) ein reelles y_0, für welches $F(y_0) \neq 0$. Aus (I') folgt nun

$$\text{(I*)} \qquad f(x) = \frac{1}{F(y_0)} \big(F(x+y_0) - F(x)\big).$$

5) Es genügt übrigens, anzunehmen, daß $f(x)$ in einer (beliebig vorgegebenen) Umgebung einer (beliebig gewählten) Stelle x_0 Ableitung ist. Denn ist $f(x)$ Ableitung im Intervall $a < x < b$, so auch in $a + y_0 < x < b + y_0$, wo y_0 beliebige reelle Zahl; wegen (I) gilt nämlich: $f(z) = f(z-y_0) \cdot f(y_0)$ und $(z-y_0)$ liegt in $a < x < b$, wenn z in $a + y_0 < x < b + y_0$. Da y_0 beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung. — Die Voraussetzung, daß $f(x)$ überall endlich sei, kann ersichtlich auch abgeschwächt werden, worauf wir aber der Kürze wegen nicht eingehen.

Da $F(x)$ und folglich die rechte Seite von (I*) differenzierbar ist, so ist auch $f(x)$ differenzierbar, und zwar ergibt sich bei Benutzung von (I):

$$f'(x) = \frac{1}{F(y_0)} \{ f(x+y_0) - f(x) \} = \frac{f(y_0) - 1}{F(y_0)} \cdot f(x).$$

Wäre nun $f(y_0) - 1 = o$, so wäre $f'(x) = o$ für jedes x und daher $f(x) = konst.$ gegen die Voraussetzung. Wir haben mithin: $[f(y_0) - 1] : F(y_0) = k \neq o$, und

(I**) $$f'(x) = kf(x).$$

Daher ist $f(x)$ beliebig oft differenzierbar[6]) und zwar gilt:

(I**, λ) $$f^{(\lambda)}(x) = k^\lambda f(x), \qquad \lambda = 1, 2 \ldots .$$

Nun ist $f(x)$, weil differenzierbar, in jedem endlichen Intervall $c \leqq x \leqq d$ stetig und daher beschränkt; also etwa $|f(x)| < M$ in $c \leqq x \leqq d$. Zufolge (I**, λ) ist dann $|f^{(\lambda)}(x)| < |k|^\lambda M$. Die Taylorsche Formel mit Lagrangeschem Restglied liefert daher, wegen $f(o) = 1$, $f^{(\lambda)}(o) = k^\lambda$ $(\lambda \geqq 1)$:

(T) $$f(x) = \sum_{\nu=o}^{n} \frac{1}{\nu!} (kx)^\nu + \frac{1}{(n+1)!} (kx)^{n+1} R_n(x),$$

wo $|R_n(x)| < M$, $c \leqq x \leqq d$.

Daraus folgt schließlich: $f(x) = \sum_{\nu=o}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (kx)^\nu = e^{kx}$.

Unsere Analysis hat somit ergeben: Die einzige, ev. vorhandene, nicht-triviale Lösung von (I), unter den im Satze gemachten Voraussetzungen, ist e^{kx}, wo $k \neq o$ eine reelle Zahl bedeutet. Der Satz ist somit bewiesen, falls noch verifiziert wird, daß erstens e^{kx} für beliebiges reelles $k \neq o$ wirklich Lösung von (I) und zweitens, daß e^{kx} eine Ableitung ist. Letzteres folgt aus einem elementaren Satz über Potenzreihen, ersteres beweist man etwa unter Zuhilfenahme von (T) mittels einfacher Abschätzungen.

2. Kreisfunktionen.

Für die in der Elementarmathematik (geometrisch) definierte Funktion $f(x) = \cos x$, wo x als Bogenlänge auf dem Einheits-

6) Wird die Theorie der linearen Differentialgleichungen als bekannt angenommen, so folgt aus (I**) bereits $f(x) = c\,e^{kx}$ (c Konstante, $c \neq o$).

kreis gedeutet werde, gilt bekanntlich die Funktionalgleichung

(II) $$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

Um die Funktion $\cos x$ rein arithmetisch zu definieren, hat man sie also zu suchen unter den Lösungen von (II). Zunächst gilt nun folgender

Satz: Vor.: Es sei $f(x)$ eine nicht konstante, für alle reellen x eindeutige, reelle, endliche Lösung von (II). Ferner sei $f(x)$ für alle x die Ableitung einer reellen, eindeutigen (endlichen) Funktion $F(x)$[7]).

Beh.: $f(x)=\sum_{\nu=o}^{\infty}\frac{k^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}$, wo $k \neq o$ eine (beliebige) reelle Zahl[8]).

Bew.: Analog wie für die Exponentialfunktion. — Für $x=y=o$ ergibt (II), daß $2f(o)\cdot\{f(o)-1\}=o$. Aber $f(o)\neq o$, weil andernfalls aus (II), für $y=o$, folgen würde: $2f(x)=o$, also $f(x)=konst.$, was ausgeschlossen wurde. Somit gilt $f(o)=1$.

Für $x=o$ liefert (II) jetzt: $f(y)=f(-y)$, d. h. $f(x)$ ist eine gerade Funktion.

Nun sei wieder $F(x)$ ein Integral von $f(x)$, für welches

(2) $$F(o)=o.$$

Durch Integration von (II) nach y erhalten wir

(II', 1) $$D(x)+F(x+y)-F(x-y)=2f(x)F(y).$$

Zur Bestimmung der überall eindeutigen, reellen, endlichen Funktion $D(x)$ setzen wir $y=o$ in (II', 1) und erhalten (wegen (2)) $D(x)=o$, d. h.

(II, 1) $$F(x+y)-F(x-y)=2f(x)F(y).$$

---

7) Es genügt übrigens die Annahme, daß $f(x)$ in einer (beliebig vorgegebenen) Umgebung $\mathfrak{U}$ von $x=o$ Ableitung ist. Denn gehören $x>o$ und $y_o>o$ zu $\mathfrak{U}$, so auch $x-y_o$, aber nicht notwendig $x+y_o$; zufolge (II) gilt aber: $f(x+y_o)=2f(x)f(y_o)-f(x-y_o)$, daher ist $f(x)$ auch in der Umgebung von $x+y_o$ Ableitung und — wie die Fortsetzung dieser Schlüsse zeigt — allgemein in der Umgebung jeder Stelle $x_o>o$. Da $f(x)=f(-x)$ (vgl. weiter unten), gilt das auch für $x_o<o$. — Auch die Voraussetzung, daß $f(x)$ überall endlich sei, kann abgeschwächt werden.

8) Für $k>o$ erhält man also $f(x)=\cosh kx$, für $k<o$ hingegen $f(x)=\cos kx$.

Aus (II, 1) folgt für $x = o$ wegen $f(o) = 1$, daß $F(y) + F(-y) = o$, d. h. $F(x)$ ist eine ungerade Funktion. Vertauschung von x und y in (II, 1) liefert daher

(II, 2) $F(x+y) + F(x-y) = 2F(x)f(y).$[9])

Da $f(x) = konst.$, also $F(y) = o$ für alle y, nach Voraussetzung ausgeschlossen ist, existiert ein y_0, für welches $F(y_0) \neq o$ und, wegen (II, 1),

$$f(x) = \frac{1}{2F(y_0)}\left(F(x+y_0) - F(x-y_0)\right);$$

daher ist $f(x)$ für alle x differenzierbar. Und jetzt ergibt die Differentiation von (II, 1) bezw. (II, 2) nach x bezw. y, daß $f(x+y) - f(x-y) = 2f'(x)F(y) = 2F(x)f'(y)$. Somit gilt für $y = y_0$:

(II*) $F''(x) = f'(x) = kF(x)$, wo $k = \dfrac{f'(y_0)}{F(y_0)} \neq o$ eine reelle Zahl.

(II**) $f''(x) = kf(x)$[10])

(II**, λ) $f^{(2\lambda)}(x) = k^\lambda f(x)$, $f^{(2\lambda+1)}(x) = k^\lambda F(x)$.

Wie bei der Exponentialfunktion zeigt man jetzt, daß gleichmäßig in jedem endlichen Intervall $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} T_n(x)$, wo $T_n(x) = \sum\limits_{\nu=o}^{n} \dfrac{k^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu}$.

Wie im Falle der Exponentialfunktion verifiziert man durch Abschätzung, daß $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} T_n(x)$ Lösung von (II) ist; ferner daß diese Lösung ein Integral besitzt. Für den Fall $k < o$, etwa $k = -1$, zeigt man weiter die Periodizität von $f(x)$ durch Nachweis der Existenz einer Nullstelle von $f(x)$[11]). — Wegen $f'' = -f$, $F'' = -F$ gilt: $\dfrac{d}{dx}(F'f - Ff') = o$ und daher

9) (II, 1) und (II, 2) liefern bereits die bekannten Additionstheoreme für den Sinus. Auch die weiteren Eigenschaften des Sinus ergeben sich im Verlaufe unseres Beweises.

10) Die Theorie der linearen Differentialgleichungen ergibt jetzt sogleich: $f(x) = \sum\limits_{\nu=o}^{\infty} \dfrac{k^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu}$.

11) Vgl. z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 192—194. Berlin 1922.

$F'f - Ff' = konst. = c$. Berücksichtigt man (II*) und $F'(x) = f(x)$, so folgt: $f^2 + F^2 = c$. Wegen $F(o) = o$, $f(o) = 1$ ist $c = 1$ und $|f(x)| \leqq 1$. — Der Nachweis endlich, daß die Periode von $f(x)$ gleich 2π, d. h. gleich der Länge der Peripherie des Einheitskreises ist, ist leicht, benötigt aber, wie die Definition der Bogenlänge zeigt, den Begriff des bestimmten Integrals[11]).

3. Verallgemeinerung der Funktionalgleichung (I).

Wir betrachten schließlich[4]) folgende Verallgemeinerung von (I):

$$\text{(III)} \qquad f(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\, Y_\nu(y), \qquad n \geqq 1.$$

Dabei bedeuten $f(x)$, $X_\nu(x)$, $Y_\nu(y)$, $\nu = 1, \ldots, n$, für alle reellen x bezw. y eindeutige, reelle, endliche Funktionen; überdies soll jedes $X_\nu(x)$, $\nu = 1, \ldots, n$, eine Primitivfunktion besitzen, im übrigen aber kann $X_\nu(x)$ ganz beliebig sein[12]). Es gilt der

Satz: Damit $f(x)$ einer Funktionalgleichung von der Form (III) genüge, ist notwendig und hinreichend, daß

$$f(x) = \sum_{\varrho=1}^{r} (P_\varrho(x) \cos \varphi_\varrho x + Q_\varrho(x) \sin \varphi_\varrho x)\, e^{\omega_\varrho \cdot x},$$

wo $P_\varrho(x)$, $Q_\varrho(x)$ beliebige reelle Polynome in x bedeuten und ω_ϱ, φ_ϱ (beliebige) reelle Zahlen ($\varrho = 1, \ldots, r$; $r \geqq 1$ beliebige natürliche Zahl).

Der Beweis verläuft entsprechend wie für (I). Man erhält ihn z. B. durch geeignete, unschwer zu findende Modifikationen der bei Stäckel[4]) angegebenen Überlegungen, weshalb wir ihn übergehen können.

---

12) Bei Levi-Civita (a. a. O.) wird $f(x)$ als regulär analytisch (in einem gegebenen Gebiete) vorausgesetzt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: 60

Autor(en)/Author(s): Haupt Otto

Artikel/Article: Zur Theorie der Exponentialfunktion und der Kreisfunktionen. 155-160