Beweis einer Normenrelation [1].

Von Heinrich Grell in Jena.

Bezeichnet $\mathfrak{R}$ den Ring der ganzen rationalen Zahlen, $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung, d. h. das System aller ganzen algebraischen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$, $\mathfrak{O}$ diejenige einer endlichen Erweiterung K von $\varkappa$; bedeutet ferner N bzw. $\mathfrak{n}$ die in $\mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{R}$ genommene, N_0 die in $\mathfrak{O}$ bezüglich $\mathfrak{o}$ gebildete Norm eines Ideals des jeweiligen Ringes, so gilt bekanntlich für ein Ideal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ aus $\mathfrak{O}$ die Gleichung

$$\mathrm{N}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) = \mathfrak{n}\,(\mathrm{N}_0(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})).$$

Die üblichen Beweise dieser Relation benutzen ausnahmslos die Äquivalenz zweier Normendefinitionen, der Hilbertschen, die als Produkt der untereinander konjugierten Ideale, und der Dedekindschen, die im wesentlichen als Determinante der Übergangssubstitution einer entsprechenden linear unabhängigen Modulbasis des Ideals zu einer ebensolchen des Ringes erklärt ist. Beim Nachweis ihrer Gleichwertigkeit beruft man sich entweder (wie z. B. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923; Beweis zu Satz 107) auf die endliche Anzahl der Idealklassen, letzten Endes also auf die Theorie der absolut algebraischen reellen Körper — wodurch eine Übertragung des Gedankenganges von den algebraischen Zahl- auf die Funktionenkörper nicht ohne weiteres möglich ist —, oder man muß mindestens als wesentliche Voraussetzungen die heranziehen, daß der Quotientenkörper K von $\mathfrak{O}$ endliche algebraische Erweiterung *erster Art* über dem Körper P der Rationalzahlen

---

1) Die folgende Note ist gedacht als Ergänzung des § 4 meiner Arbeit „Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern" (Math. Ann. 97, S. 524—558) [1927], die im folgenden mit G II zitiert wird; auf die ihr vorangehende „Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe" (Math. Annalen 97, S. 490—523) [1927] wird durch G I verwiesen.

und weiter $\mathfrak{O}$ die *Haupt*ordnung von K ist. Diese letzte Beschränkung hat sich auch ein von der Äquivalenz der beiden Normbegriffe unabhängiger Beweis der Normenrelation aufzuerlegen, den mir nachträglich E. Noether angab; er beruht auf der Theorie der zu einem Körper gehörigen zerlegbaren Formen.

In dieser Note wird *die Normenrelation* unter Zugrundelegung des gegenüber dem Hilbertschen umfassenderen Dedekindschen Normbegriffes ganz abstrakt-allgemein *für den Fall bewiesen, daſs von den drei ineinandergeschachtelten nullteilerfreien Ringen* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{O}$ *mit gemeinsamem Einheitselement der Ring* $\mathfrak{O}$ *und damit auch* $\mathfrak{o}$ *endliche* $\mathfrak{R}$-*Ordnungen sowie* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{o}$ *Multiplikationsringe sind*, ohne daß der Quotientenkörper K von $\mathfrak{O}$ als Erweiterung erster Art des Quotientenkörpers P von $\mathfrak{R}$ vorausgesetzt zu werden braucht. Dabei versteht man mit W. Krull unter einem Multiplikationsring einen nullteilerfreien Ring mit Einheitselement, in dem für die Ideale aus Teilbarkeit Produktdarstellung folgt, oder, was dasselbe ist, in dem sich jedes Ideal eindeutig darstellen läßt als Potenzprodukt von Primidealen [2]). Den Kernpunkt des Beweises bildet eine Überlegung aus der Darstellungstheorie. Es wird nämlich die bez. $\mathfrak{o}$ ($\mathfrak{R}$) gebildete *Norm eines Ideals* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ aus $\mathfrak{O}$ *aufgefaſst als Determinante einer Darstellung eines* $\mathfrak{R}$-*Modulisomorphismus von* $\mathfrak{O}$ *und* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ *in* $\mathfrak{o}$ ($\mathfrak{R}$); die Normenrelation ergibt sich aus der Betrachtung des Verhältnisses der Isomorphismusdarstellungen in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{R}$ [3]). Zu dem genannten Isomorphismus aber gelangt man mit Hilfe der Theorie der verallgemeinerten endlichen Abelschen Gruppen. Um sie anwenden zu können, muß zunächst $\mathfrak{R}$ sowohl wie $\mathfrak{o}$ als Hauptidealring vorausgesetzt werden. Nachträglich befreit man sich von dieser Einschränkung mittels der Theorie der Quotientenringe, die einen Multiplikationsring in einen zu ihm in einfacher idealtheoretischer Beziehung stehenden Hauptidealring verwandeln lehrt, sowie auf Grund eines Hilfssatzes, der — abgesehen von den bei seinem jetzigen Beweis nicht mehr notwendigen Voraussetzungen über die Quotientenkörper der betreffenden Ringe — genau der Satz 4

2) Vgl. G II § 1, 3.

3) Diese *Deutung* des Beweises gab mir nachträglich E. Noether.

aus G II § 2, 3 ist; er besagt, daß jede endliche $\mathfrak{R}$-Basis des Ringes $\mathfrak{O}$ auch eine endliche $\mathfrak{R}'$-Basis des Ringes $\mathfrak{O}'$ wird, wo $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{O}'$ die aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{O}$ in bestimmter Weise konstruierten Quotientenringe bezeichnen.

Die *Voraussetzungen*, unter denen die Normenrelation bewiesen wird, sind insbesondere *sämtlich erfüllt*, wenn als Ringe $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{o}$ die *Hauptordnungen* eines endlichen algebraischen Zahlkörpers (oder Funktionenkörpers einer Variablen mit beliebigem abstrakt definierten Koeffizientenkörper) P und einer endlichen algebraischen Erweiterung (erster oder auch zweiter Art) $\varkappa$ von P genommen werden, für $\mathfrak{O}$ hingegen eine *beliebige endliche Ordnung* einer endlichen algebraischen Erweiterung K von $\varkappa$ gewählt wird [4]).

Schließlich kann die in G II § 4, 2 und § 6, 2 B eingeführte Annahme, daß der Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ des dortigen Ringes Σ Erweiterung erster Art des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ des Ringes P sei, die allein deshalb gemacht werden mußte, um eine Anwendung des Satzes 4 aus G II § 2, 3 zu ermöglichen, infolge der vorhin geschilderten Ausdehnung dieses Satzes nunmehr aufgehoben werden.

Zwischen dem Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ und der nullteilerfreien endlichen $\mathfrak{R}$-Ordnung $\mathfrak{O}$ liege der Multiplikationsring $\mathfrak{o}$; $\mathfrak{R}$ enthalte das Einheitselement von $\mathfrak{O}$; $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ sei ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{O}$. Wie in der Einleitung bedeute N bzw. n die hinsichtlich $\mathfrak{R}$ genommene Norm eines Ideals aus $\mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{o}$, N_0 die bez. $\mathfrak{o}$ gebildete eines Ideals $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ des Ringes $\mathfrak{O}$. Dann besteht der

Satz: *Es ist* $n\,(N_0(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})) = N(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})$.

Beweis: I. Zunächst seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{o}$ Hauptidealringe sowie P, $\varkappa$, K die Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{O}$, und $[K:\varkappa] = g$ der Grad von K bez. $\varkappa$. Faßt man $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{O}$ als $\mathfrak{o}$-Moduln

4) Für die Erweiterungen erster Art ist die Aussage bekannt (vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96 (1926), S. 26—51; § 3, 1). Daß sie im Fall der Funktionenkörper einer Variabeln aber auch bei Erweiterungen zweiter Art gültig bleibt, entnehme ich einem Brief von F. K. Schmidt; die Veröffentlichung der diesbezüglichen Resultate ist in Aussicht gestellt.

auf, so werden nach den in G II § 1, 4 zusammengestellten Tatsachen über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen beide Moduln direkte Summe von g zyklischen, zyklisch direkt unzerlegbaren $\mathfrak{o}$-Moduln der Periode Null. Jedes Paar der zu diesen Zerlegungen gehörigen Basen von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{O}$ liefert bei eineindeutiger Zuordnung der Elemente einen $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus zwischen $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{O}$. Die Koeffizientenmatrix der die $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$-Basis durch die $\mathfrak{O}$-Basis ausdrückenden Substitution kann als eine *Darstellung* dieses $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus in $\mathfrak{o}$ angesehen werden. Die Norm $N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})$ ist dann identisch mit demjenigen Ideal des Ringes $\mathfrak{o}$, das als Basiselement die Determinante einer solchen Darstellungsmatrix hat, die durch einen beliebigen $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus zwischen den als direkte Summe von zyklischen, zyklisch direkt unzerlegbaren aufgefaßten $\mathfrak{o}$-Moduln $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{O}$ entsteht. Betrachtet man den $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{O}$ als $\mathfrak{R}$-Modulisomorphismus und die Darstellung des $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus in $\mathfrak{o}$ als Darstellung des $\mathfrak{R}$-Modulisomorphismus in $\mathfrak{o}$, so erhält man nach den üblichen Überlegungen in der Darstellungstheorie [5]) eine Darstellung dieses $\mathfrak{R}$-Modulisomorphismus in $\mathfrak{R}$ aus der gegebenen in $\mathfrak{o}$, indem man in der $\mathfrak{o}$-Darstellungsmatrix für deren Elemente ihre durch eine beliebige $\mathfrak{R}$-Modulbasis von $\mathfrak{o}$ vermittelten Darstellungsmatrizen einsetzt.

Nun wähle man speziell den $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus zwischen $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{O}$ so, daß die Darstellungsmatrix in $\mathfrak{o}$ eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_g \end{pmatrix}$$

wird; das ist zufolge der Elementarteilertheorie (vgl. G II § 1, Schluß) stets möglich. Nach dem soeben bemerkten wird dann die Determinante einer zugehörigen Darstellungsmatrix in $\mathfrak{R}$ das Produkt der g Determinanten $n(\mathfrak{o}\, s_j)$, die aus den zu den s_j in $\mathfrak{R}$ gehörigen Darstellungsmatrizen gebildet sind: $N(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) = n(\mathfrak{o}\, s_1) \ldots n(\mathfrak{o}\, s_g)$. Nun ist aber, wie in G II, S. 555, Vorbemerkung 2 gezeigt wurde,

$$n(\mathfrak{o}\, s_1) \ldots n(\mathfrak{o}\, s_g) = n((\mathfrak{o}\, s_1) \ldots (\mathfrak{o}\, s_g)) = n(\mathfrak{o}\, s_1 \ldots s_g)$$

5) Vgl. die demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinende Arbeit von E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie.

und damit wegen $\mathfrak{o}\,\mathfrak{s}_1 \ldots \mathfrak{s}_g = N_0(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})$ auch $N(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) = \mathfrak{n}(N_0(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}))$, was zu beweisen war.

II. Zum Beweis der Normenrelation für *Multiplikationsringe* $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{o}$ benötigt man die folgenden vorbereitenden Überlegungen.

Im Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ sei $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$ ein beliebiges Ideal. $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{O}'$ seien die durch Aufnahme der zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{O}$ teilerfremden Elemente aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{O}$ in den Nenner aus diesen Ringen entstehenden Quotientenringe. Dann besteht der

Hilfssatz: Ist $\mathfrak{O}$ eine endliche nullteilerfreie $\mathfrak{R}$-Ordnung, so wird jede endliche $\mathfrak{R}$-Basis eines Ideals $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{O}$ auch eine endliche $\mathfrak{R}'$-Basis des Erweiterungsideals[6]) $\mathfrak{C}\mathfrak{O}' = \mathfrak{C}'$ *von* $\mathfrak{O}'$.

Beweis des Hilfssatzes: Es genügt der Nachweis, daß man jedes Element ω' aus $\mathfrak{O}'$ als Quotienten zweier Elemente α, β aus $\mathfrak{O}$ darstellen kann, von denen der Nenner β ein zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$ teilerfremdes Element aus $\mathfrak{R}$ ist; die Behauptung folgt dann, indem man eine Darstellung des Zählers α durch eine $\mathfrak{R}$-Basis von $\mathfrak{O}$ durch das Element β dividiert.

Ist nun $\omega' = \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ mit $\mathfrak{O}\beta' + \mathfrak{O}\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{O}$[7]), $\mathfrak{b}$ das durch $\mathfrak{O}\beta'$ in $\mathfrak{R}$ bestimmte Verengungsideal[6]) $\mathfrak{b} = \mathfrak{O}\beta' \frown \mathfrak{R}$.[8]), so ist zunächst $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}$. Wird nämlich im Ring $\mathfrak{R}$ der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{d}\mathfrak{m}_1$ mit $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{R}$, so ist $(\mathfrak{O}\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}})(\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{O}\mathfrak{m}_1)(\mathfrak{O}\mathfrak{b})$ Idealvielfaches von $\mathfrak{O}\beta$, $(\mathfrak{O}\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}})(\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1) \leqq \mathfrak{O}\beta'$[9]), somit wegen $\mathfrak{O}\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} + \mathfrak{O}\beta' = \mathfrak{O}$ auch $\mathfrak{b}_1 \leqq \mathfrak{O}\mathfrak{b}_1 \leqq \mathfrak{O}\beta'$, woraus $\mathfrak{b}_1 \leqq \mathfrak{b}$ und damit $\mathfrak{d} = \mathfrak{R}$ folgt. Verwandelt man $\mathfrak{b}$ durch Multiplikation mit einem zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$ teilerfremden Ideal in ein Hauptideal $\mathfrak{R}\beta$, was in Multiplikationsringen immer möglich ist[2]), so fällt $\mathfrak{R}\beta$ zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$ teilerfremd aus; setzt man $\beta = \beta'\beta''$ mit β'' aus $\mathfrak{O}$, so hat man in

$$\omega' = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha'\beta''}{\beta'\beta''} = \frac{\alpha'\beta''}{\beta}$$

die gewünschte Darstellung.

---

6) Für diesen Begriff siehe G I § 3, 1.

7) Mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ wird der größte gemeinsame Teiler der Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bezeichnet.

8) Das Zeichen $\frown$ deutet den mengentheoretischen Durchschnitt zweier Mengen an.

9) $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ bedeutet: $\mathfrak{a}$ ist (echte oder unechte) Untermenge von $\mathfrak{b}$, bei *Idealen* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ also: $\mathfrak{a}$ ist Vielfaches von $\mathfrak{b}$.

III. Im folgenden wird dauernd von der in G I § 6 und G II § 1, 2 entwickelten Theorie der Quotientenringe Gebrauch gemacht.

Es mögen die gleichen Verhältnisse wie in Abschnitt I vorliegen, nur daß jetzt $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{o}$ als Multiplikationsringe angenommen werden. $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}$ bezeichne ein Ideal aus $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{O}} \frown \mathfrak{R}$ sein Verengungsideal in $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{o}'$, $\mathfrak{O}'$ seien die aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{O}$ durch Aufnahme der jeweils zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{O}$ teilerfremden Elemente in den Nenner hervorgegangenen Quotientenringe; N', n', $N'_{\mathfrak{o}'}$ sollen für $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{o}'$, $\mathfrak{O}'$ dieselbe Bedeutung besitzen wie N, n, $N_{\mathfrak{o}}$ für $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{O}$.

Nach G II § 2, 1; II sind $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{o}'$ Hauptidealringe, nach II. wird $\mathfrak{O}'$ ein endlicher $\mathfrak{R}'$-Modul: zufolge I hat man dann, wenn $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}} \cdot \mathfrak{O}' = \mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'}$ gesetzt ist,

$$N'(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'}) = n'(N'_{\mathfrak{O}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'})). \tag{1}$$

Die zu beweisende Normenrelation ergibt sich nach Definition der Norm offenbar aus (1) durch beiderseitige Durchschnittbildung mit $\mathfrak{R}$, wenn gezeigt werden kann:

a) Es ist $n(N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})) = n'(N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) \cdot \mathfrak{o}') \frown \mathfrak{R}$.

b) $(N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) \cdot \mathfrak{o}' = N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'})$.

Die Relation b) wird in 3 Schritten bewältigt. Es wird gezeigt:

1. Bedeutet $\mathfrak{o}''$ den aus $\mathfrak{o}$ durch Aufnahme der zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{O}} \frown \mathfrak{o}$ teilerfremden Elemente in den Nenner entstandenen Quotientenring, so geht $\mathfrak{o}''$ aus $\mathfrak{o}'$ durch Zulassen der zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{o}'$ teilerfremden Elemente dieses Ringes als Nenner hervor. — Mit Hilfe dessen beweist man

2. $(N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) \cdot \mathfrak{o}') \cdot \mathfrak{o}'' = N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'}) \cdot \mathfrak{o}''$. Zuletzt hat man noch

3. Im Ring $\mathfrak{o}'$ sind $N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'})$ und $N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) \cdot \mathfrak{o}'$ Verengungsideale bez. $\mathfrak{o}''$.

ad a). Es reicht hin, nachzuweisen: Die zur Bestimmung der Norm $n(N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}))$ des Ideals $N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})$ des Ringes $\mathfrak{o}$ aus den Ringen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{o}$ zu konstruierenden Quotientenringe sind gerade $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{o}'$. Dazu setze man wieder $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}} \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}$, bilde aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ durch Aufnahme der zu $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}$ und $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{O}$ teilerfremden Elemente in die Nenner die Quotientenringe $\mathfrak{o}''$ und $\mathfrak{O}''$, bezeichne mit $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''}$ das Ideal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}} \cdot \mathfrak{O}''$, mit $N''_{\mathfrak{o}''}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''})$ die bez. $\mathfrak{o}''$ gebildete, wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{O}''$ über $\mathfrak{o}''$ (Hilfssatz des

Abschnittes II) existierende Norm dieses Ideals und schließlich mit r den Rang von $\mathfrak{O}''$ bez. $\mathfrak{o}''$. Aus der Elementarteilerstellung (vgl. G II § 1, Schluß; sowie S. 544) von $N''_{\mathfrak{o}''}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''})$ und durch nachfolgenden Übergang zu den Verengungsidealen in $\mathfrak{o}$ erkennt man dann die Richtigkeit von $\mathfrak{m}_\mathfrak{o}^r \leqq N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \leqq \mathfrak{m}_\mathfrak{o}$; es ist nämlich $(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''} \frown \mathfrak{o}'') \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''} \frown \mathfrak{o} = (\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''} \frown \mathfrak{O}) \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_\mathfrak{O} \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_\mathfrak{o}$. Somit wird auch $\mathfrak{m}_\mathfrak{R}^r \leqq N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \frown \mathfrak{R} \leqq \mathfrak{m}_\mathfrak{R}$, d. h. $N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \frown \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{m}_\mathfrak{R}$ besitzen in $\mathfrak{R}$ dieselben Primideale, und damit gilt, wie leicht einzusehen, gleiches auch für die beiden Ideale $(N(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \frown \mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{m}_\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}$, womit a) bewiesen ist.

ad b). 1. Wegen $\mathfrak{m}_\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{m}_\mathfrak{o}$ gelten die Beziehungen $\mathfrak{o}' \leqq \mathfrak{o}''$ und $\mathfrak{O}' \leqq \mathfrak{O}''$. Der Ring $\mathfrak{o}''$ geht aus $\mathfrak{o}'$ durch Aufnahme der zu $\mathfrak{m}_\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}'$ teilerfremden Elemente in die Nenner hervor: jedes zu $\mathfrak{m}_\mathfrak{o}$ teilerfremde Element aus $\mathfrak{o}$ ist auch ein zu $\mathfrak{m}_\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}'$ teilerfremdes aus $\mathfrak{o}'$; umgekehrt ist auch der Zähler α jedes zu $\mathfrak{m}_\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}'$ teilerfremden Elementes $\omega' = \dfrac{\alpha}{\beta}$ aus $\mathfrak{o}'$ ein zu $\mathfrak{m}_\mathfrak{o}$ teilerfremdes Element aus $\mathfrak{o}$, da $\mathfrak{o}'\omega' = \mathfrak{o}'\alpha$ und aus $\mathfrak{o}\alpha + \mathfrak{m}_\mathfrak{o} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{o}'\alpha + \mathfrak{m}_\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}' = \mathfrak{d}\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}'\omega' + \mathfrak{m}_\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}' = \mathfrak{o}'$ weiter $\mathfrak{d}\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}'$ zu schließen ist, was wegen $\mathfrak{m}_\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{m}_\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{d}$ nach der Theorie der Quotientenringe nur bei $\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$ möglich ist.

2. Bedeutet wieder $N''_{\mathfrak{o}''}$ die bez. $\mathfrak{o}''$ gebildete Norm eines Ideals aus $\mathfrak{O}''$, so ist bei $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''} = \mathfrak{m}_\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{O}''$ nach Definition $N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) = N''_{\mathfrak{o}''}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''}) \frown \mathfrak{o}$, also nach der Theorie der Quotientenringe (vgl. G I § 6) auch $(N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \cdot \mathfrak{o}') \cdot \mathfrak{o}'' = N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \cdot \mathfrak{o}'' = N''_{\mathfrak{o}''}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''})$.

Zum andern ist $N''_{\mathfrak{o}''}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''})$ aber auch gleich $N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'}) \cdot \mathfrak{o}''$. Denn nach 1. ist $\mathfrak{o}''$ Quotientenring von $\mathfrak{o}'$ und nach dem Hilfssatz aus Abschnitt II wird jede linear unabhängige $\mathfrak{o}'$-Modulbasis von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} = \mathfrak{m}_\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{O}'$ bzw. $\mathfrak{O}'$ auch eine linear unabhängige $\mathfrak{o}''$-Modulbasis von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''}$ bzw. $\mathfrak{O}''$, woraus $N''_{\mathfrak{o}''}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}''}) = N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'}) \cdot \mathfrak{o}''$ folgt. Die Kombination dieser beiden Resultate liefert nun die Behauptung unter 2.

3. Die Behauptung unter 3. folgt nach G II § 2, 1, wenn gezeigt werden kann, daß im Ring $\mathfrak{o}'$ die beiden Ideale $N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \cdot \mathfrak{o}'$ und $N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'})$ mit $\mathfrak{m}_\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}'$ dieselben Primideale besitzen.

Für $\mathfrak{m}_\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}'$ und $N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \cdot \mathfrak{o}'$ ergibt sich das aus der unter a) gewonnenen Beziehung $\mathfrak{m}_\mathfrak{o}^r \leqq N_\mathfrak{o}(\mathfrak{m}_\mathfrak{O}) \leqq \mathfrak{m}_\mathfrak{o}$ durch Multiplikation aller ihrer Glieder mit $\mathfrak{o}'$. — Aus der Elementarteilerdarstellung von $N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'})$ sieht man, daß in $N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'})$ genau die Primideale von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} \frown \mathfrak{o}'$ aufgehen. Es ist jedoch $\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} \frown \mathfrak{o}' = \mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{o}'$; denn man hat $(\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{o}') \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{O}} \frown \mathfrak{o} = (\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} \frown \mathfrak{O}) \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} \frown \mathfrak{o} = (\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} \frown \mathfrak{o}') \frown \mathfrak{o}$, also $(\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{o}') \frown \mathfrak{o} = (\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} \frown \mathfrak{o}') \frown \mathfrak{o}$, woraus nach der Theorie der Quotientenringe (G I § 6) zuletzt $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{o}' = \mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'} \frown \mathfrak{o}'$ folgt.

Durch Verbindung der Resultate unter (1), a) und b) erhält man

$$n(N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}})) = n'(N_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}) \cdot \mathfrak{o}') \frown \mathfrak{R} = n'(N'_{\mathfrak{o}'}(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'})) \frown \mathfrak{R} = N'(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}'}) \frown \mathfrak{R} = N(\mathfrak{m}_{\mathfrak{O}}),$$

womit die Normenrelation auch im allgemeinen Fall der Multiplikationsringe bewiesen ist.

Lüdenscheid, den 25. September 1928.