Über ein Oszillationstheorem.

Von Otto Haupt in Erlangen.

In einer Arbeit hat Liouville[1]) folgende Randwertaufgabe betrachtet:

Gegeben sei die lineare (homogene) Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(P_{n-1}\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}(P_2\frac{d}{dx}(P_1\frac{dy}{dx}))\cdots\right)\right)+\lambda\, Q\, y=0,$$

wobei P_ν (für $\nu=1,\ldots,n-1$; $2\leqq n$) und Q reelle, eindeutige Funktionen der reellen Veränderlichen x im Intervall $a\leqq x\leqq b$ seien, welche dort nur positive Werte annehmen, und wobei Q stetig, ferner P_ν $(n-\nu)$-mal stetig differenzierbar sein soll ($\nu=1,\ldots,n-1$). Schließlich bezeichne λ einen Parameter.

Die Randbedingungen sind folgende:

$$y(a)=A_0\geqq 0,\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}=A_1\geqq 0,\quad \left[\frac{d}{dx}(P_1\frac{dy}{dx})\right]_{x=a}=A_2\geqq 0,$$

$$\ldots,\left[\frac{d}{dx}(P_{n-2}\frac{d}{dx}(\ldots))\right]_{x=a}=A_{n-1}\geqq 0,$$

$$\Big[B_0y+B_1\frac{dy}{dx}+B_2\frac{d}{dx}(P_1\frac{dy}{dx})+\ldots$$

$$\ldots+B_{n-1}\frac{d}{dx}(P_{n-2}\frac{d}{dx}(\ldots))\Big]_{x=b}=0,$$

wobei die $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ nicht-negative Zahlen seien, die nicht sämtlich Null sind; auch die $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sollen nicht sämtlich Null sein.

---

1) Journal de mathématiques pures et appliquées T. 3 (1838), S. 561 ff.

Liouville stellt für diese Randwertaufgabe ein Entwickelungs- und Oszillationstheorem auf. Als bemerkenswert an der Aufgabe erscheint dabei der Umstand, daß sie (wenigstens hinsichtlich der Randbedingungen) inhomogen ist. In der Tat sind meines Wissens solche inhomogene Probleme neuerdings kaum in Angriff genommen, abgesehen von einer Arbeit von Hilb[1]), in welcher u. a. der Entwickelungssatz für ein, dem Fall $n = 2$ der obigen Aufgabe entsprechendes, Problem bewiesen wird (dabei ist indes auch die Differentialgleichung sowie die Randbedingung in $x = b$ inhomogen, was für unseren Fall ebenfalls zulässig ist, soweit das Entwickelungstheorem in Frage kommt).

Zweck vorliegender Notiz ist es, einen Kontinuitätsbeweis für das erwähnte Oszillationstheorem zu skizzieren, der fast unmittelbar zu Verallgemeinerungen des Theorems führt, indem er nämlich z. B. auch solche Fälle erfaßt, in welchen $Q(x)$, $P_1(x)$, . . ., $P_{n-1}(x)$; A_0, . . ., A_{n-1}; B_0, . . ., B_{n-1} (geeignet gewählte) Funktionen von λ sind.

Zusatz: Was den Beweis des Entwickelungssatzes angeht, so wird man ihn (vgl. auch Hilb, a. a. O.) wohl am besten mit der Cauchyschen Methode führen unter Heranziehung asymptotischer Darstellungen für die Lösungen der Differentialgleichung bei großen Werten von $|\lambda|$. Da das Problem nicht symmetrisch ist, so muß dabei neben dem ursprünglichen Problem das zu ihm „adjungierte" betrachtet werden, wie es ja auch Liouville tut; die Eigenfunktionen des ursprünglichen Problems und des adjungierten bilden zusammen ein biorthogonales Funktionensystem. Der in Rede stehende Beweis gilt natürlich auch, wenn $Q(x)$, $P_1(x)$, . . ., $P_{n-1}(x)$ usw. (in geeigneter Weise) von λ abhängen.

Beim Beweise des Oszillationstheorems erfordert wesentlich die Sicherstellung der Realität sämtlicher Eigenwerte besondere Hilfsmittel; denn diese Realität ist hier nicht (wie etwa im Falle eines (homogenen) symmetrischen Problems) von vornherein garantiert. Liouville's diesbezüglicher Beweisgedanke ist — kurz ausgedrückt — der, zunächst die „Vollständigkeit" des Systems der Eigenfunktionen zu zeigen und

1) Crelles Journal 140 (1911), S. 205 ff. Dort auch ein Hinweis auf Entwickelungssätze von Herglotz in Mathematische Annalen 65 (1908), S. 87 ff.

aus dieser Vollständigkeit sodann die Realität der Eigenwerte zu erschließen. (Auf eine nähere Besprechung des Liouvilleschen Beweises muß hier verzichtet werden.) Einfacher und weittragender dürfte die Kontinuitätsmethode sein, die hier in folgender Überlegung angewandt werden kann: Man sucht zuerst einen Spezialfall, in welchem das Theorem, und insbesondere die Realität der Eigenwerte, einfach zu beweisen bezw. bekannt ist. Man betrachtet also z. B. die spezielle Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \lambda y = 0$$

und die speziellen Randbedingungen

$$y(a) = 1, \; \left[\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right]_{x=a} = 0,$$
$$\nu = 1, \ldots, n-1;$$
$$y(b) = 0.$$

Führt man statt x die neue unabhängige Veränderliche ξ ein vermöge

$$\xi = \sqrt[n]{\lambda}\,(x-a),$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{d^n \eta}{d\xi^n} + \eta = 0$$

und die Randbedingungen gehen über in

$$\eta(0) = 1, \; \eta^{(\nu)}(0) = 0,$$
$$\nu = 1, \ldots, n-1;$$
$$\eta\left((b-a)\sqrt[n]{\lambda}\right) = 0.$$

Die Frage nach der Realität der Eigenwerte ist folglich gleichbedeutend mit der Frage nach der Realität der Nullstellen von

$$g(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{n!} + \frac{\lambda^2}{(2n)!} - \frac{\lambda^3}{(3n)!} + \cdots$$

Aber $g(\lambda)$ hat in der Tat[1]) die gewünschte Eigenschaft, besitzt übrigens nur positive Nullstellen.

1) Siehe G. Polya, Tohoku mathematical Journal 19 (1921), S. 241.

Im weiteren Verlauf des Beweises zeigt man jetzt, daß bei „zulässigen“ Änderungen von Differentialgleichung und Randbedingungen die Oszillationszahlen ungeändert bleiben und daß Eigenwerte „im Unendlichen“ nicht verloren und gewonnen werden. Da nun alle Eigenwerte in dem von uns gewählten Spezialfall reell sind und zu verschiedenen Oszillationszahlen gehören, so können bei zulässigen Änderungen komplexe Eigenwerte auch nicht dadurch entstehen, daß Eigenwerte zusammenrücken, die ursprünglich reell waren. Damit ist das Oszillationstheorem bewiesen.

Die Tatsache, daß bei unseren Problemen alle Eigenwerte reell sind, führt umgekehrt wieder zu neuen ganzen (transzendenten) Funktionen mit lauter reellen Nullstellen.

Eine ausführlichere Behandlung der erörterten Fragen wird an anderer Stelle erscheinen.

Artikel/Article: Über ein Oszillationstheorem. 203-206