Über die ästhetische Betrachtungsweise in der Mathematik.

Von Wolfgang Krull.

Akademische Antrittsrede, gehalten am 11. Januar 1930 anläßlich der Übernahme des Ordinariats für Mathematik an der Universität Erlangen.

Der Mathematiker befindet sich gegenüber den Vertretern fast aller übrigen Wissenschaften in einem großen Nachteil. Der Jurist, der Philologe, der Zoologe, der Chemiker, der Mediziner kann von den Gedanken, die ihn beschäftigen, ohne Schwierigkeit auch zu den außenstehenden Nichtfachmännern sprechen. Er wird ihnen vielleicht keinen erschöpfenden Begriff geben können von den tiefer liegenden Problemen, mit denen er selber gerade ringt, aber sofern er sich an die elementaren Dinge und an der Oberfläche hält, wird es ihm leicht sein, verständlich zu bleiben, und er wird auch bei dem ungeschulten Zuhörer dankbares Interesse finden.

Anders in der Mathematik! Da scheint es doch wirklich so zu sein, daß das Verständnis der Mathematik einen besonderen sechsten Sinn erfordert. Die wenigen, die diesen Sinn besitzen, werden sich mit Leidenschaft auf die Mathematik werfen, die übrigen werden nichts von ihr wissen wollen oder je nach Umständen in ihr ein notwendiges Übel sehen. Hierin liegt natürlich für den Mathematiker auch ein gewisser Vorteil. Er ist mehr als ein anderer Wissenschafter davor geschützt in Gesellschaft dem Nichteingeweihten durch Fachsimpeln lästig zu werden. Im allgemeinen entsteht daraus aber für den Mathematiker eine nicht immer angenehme Vereinzelung, die ich besonders heute schmerzlich empfinde, wo ich Ihnen doch gerne von den besonderen Reizen, die mich an die Mathematik fesseln, einen Begriff geben möchte. Ich glaube, ich kann mir in dieser Lage nur dadurch helfen, daß ich jedes Eingehen auf objektive Inhalte der Mathematik vermeide und Ihnen nur meine subjektive Einstellung zu dieser Wissenschaft in großen Zügen auseinandersetze. Ein solches persönliches Glaubensbekenntnis erscheint mir nicht allzu anmaßend, denn es gibt einige wesentlich verschiedene Standpunkte, die man auch als innerlich Beteiligter der Mathematik gegenüber einnehmen kann, und ich weiß nicht, ob gerade mein Standpunkt, von dem ich immerhin weiß, daß ihn verschiedene Kollegen weitgehend teilen, schon irgendwo fest und scharf umrissen und ausführlich dargestellt worden ist.

Gewöhnlich stellt sich der Außenstehende die Mathematik als eine besonders trockene Wissenschaft vor. Wer von ihr gar nichts weiß, sieht in dem Mathematiker nur eine Art von Rechner. Ich erinnere mich sogar, daß in einem bekannten Roman — „Freund Hein" von Emil Strauß — offenbar die Ansicht vertreten wird, das Wesen der Mathematik bestände in dem Auswendiglernen von Logarithmentafeln! Wer die Mathematik etwas näher kennt, der sieht im allgemeinen ihren Hauptwert in der unumstößlichen Sicherheit ihrer Lehrsätze und meint, zu dem Mathematiker gehöre im wesentlichen ein scharfer, unbeirrbarer Verstand, aber auch nicht mehr. Ich hingegen möchte in aller Schärfe betonen: der wirkliche Mathematiker muß vor allen Dingen Fantasie besitzen, natürlich eine besondere, eine „mathematische" Fantasie, und ich glaube mit Bestimmtheit behaupten zu können, daß gerade der Besitz dieser Fantasie unter den Mathematikstudenten den zukünftigen Forscher vor dem begabten Durchschnitt auszeichnet.

Ich möchte Ihnen nun in Kürze auseinandersetzen, daß die mathematische Fantasie, wenigstens unter gewissen Verhältnissen, der künstlerischen verwandt sein kann.

Mathematik und Kunst — das klingt nach äußersten Gegensätzen, und ich würde mir bei ihrer Zusammenstellung sehr keck vorkommen, wenn ich mich nicht auf einige vertrauenswürdige Gewährsmänner berufen könnte. So sagt z. B. Kronecker, einer der bedeutendsten Mathematiker der vorletzten Generation, in einem lateinischen Distichon:

NOS MATHEMATICI SUMUS ISTI VERI POETAE
SED QUOD FINGIMUS NOS ET PROBARE DECET

also: „wir Mathematiker sind die wahren Dichter, nur müssen wir das, was unsere Fantasie schafft, auch beweisen."

Noch viel wichtiger aber sind für mich hier im Augenblicke einige Abschnitte aus der Vorrede, die der Züricher Mathematiker Speiser seiner Gruppentheorie vorausgeschickt hat. In jener Vorrede spricht Speiser zunächst von den ungehobenen mathematischen Schätzen, die in den musikalischen Werken Bachs liegen, und er stellt vor allem über den Zusammenhang zwischen bildender Kunst und Mathematik bei den Ägyptern folgende merkwürdige Behauptung auf (ich zitiere hier nicht wörtlich, sondern nur dem Sinne nach):

Wenn man den Stand der Mathematik bei den Ägyptern wirklich gerecht beurteilen will, so sehe man nicht nur auf die arithmetischen Kenntnisse, die in ihren Rechenbüchern niedergelegt sind, sondern auf die elementar-geometrischen Kenntnisse, die ihrem Vermessungswesen zugrunde liegen. Man analysiere dagegen genau alle die wundervollen Ornamente, mit denen sie ihre Tempelwände und Statuen bedeckt haben. Dann erst wird man recht würdigen können, welch hoher mathematischer Geist in jenem Volke lebte.

Auf den von Speiser betonten Zusammenhang zwischen Mathematik und Musik will ich hier nicht näher eingehen, obwohl ich persönlich glaube, daß sich Mathematik und Musiktheorie sehr gut vergleichen lassen. Indes, ich bin musikalisch nicht genügend gebildet, und außerdem ist die ganze Frage doch wohl nicht genügend geklärt, — Speiser spricht ja auch nur von den ungehobenen Schätzen in den Werken Bachs.

Aber was soll die Bemerkung über den Zusammenhang zwischen ägyptischer Kunst und Mathematik bedeuten?

Stellen Sie sich einmal, bitte, möglichst lebhaft eine große ornamentenbedeckte Fläche, etwa eine Tempelwand, eine schmiedeeiserne Türe oder auch nur ein reiches Tapetenmuster vor! Worauf beruht der besondere Reiz, den Ihnen das Betrachten der geschmückten Fläche gewährt? Als Grundgebilde des Ornaments erscheint vielleicht eine ganz einfache Figur, ein Quadrat, ein Kreis mit einbeschriebenem Dreieck, ein Sechseck. Diese Figur kehrt immer von neuem wieder, in immer neuen Verschlingungen, aber nach einem gewissen Gesetz, das bald ohne weiteres in die Augen springt, bald auch nur dem aufmerksamen Beschauer sich entschleiert. Dieses Gesetz nun, auf dem in gewissem Sinne der künstlerische Reiz des Ornamentes beruht, läßt sich mathematisch fassen. Vielleicht mache ich Ihnen das an einem ganz einfachen Beispiel kurz klar:

Betrachten Sie etwa die Bedeckung einer Fläche mit einem Quadratnetz und denken Sie sich vielleicht noch, damit die

Sache nicht gar zu kahl aussieht, in jedes Quadrat einen Kreis eingezeichnet. Dann haben Sie schon ein zwar einfaches, aber doch ganz brauchbares Tapetenmuster. Wir können nun das Quadratmuster dadurch erhalten, daß wir von einem Kreis in einem festen Quadrat ausgehen und diesen Kreis dann in horizontaler und vertikaler Richtung immer um dieselbe Strecke, nämlich um die Seitenlänge des Quadrats beliebig oft verschieben. Wir haben also ein bestimmtes System von geometrischen Operationen, in unserem Fall sind es ausschließlich Schiebungen, in komplizierteren Fällen werden noch Drehungen, Spiegelungen und dergl. dazukommen, mit deren Hilfe wir das Gesamtornament aus einer bestimmten Grundfigur erzeugen können. Diese Gesamtheit von Operationen stellt nun ein mathematisches Gebilde dar, eine sogenannte „Gruppe".

Man kann sogar — und das scheint mir für unsere Betrachtungen sehr interessant — nicht nur hinter einem großen Ornamentenmuster, sondern auch hinter manchem schönen Einzelornament mathematische Gesetzmäßigkeiten entdecken. Ich denke da z. B. an die Schneckenlinie, die gerade mich diesen Sommer in Oslo an dem dort gefundenen Wikingerprunkschiff so entzückte. Diese Linie kann durch eine einfache mathematische Konstruktion erhalten werden: man befestige einen Stab im Zentrum der zu konstruierenden Schneckenlinie, nehme außerhalb des Zentrums auf dem Stabe einen beweglichen Punkt an; dann lasse man gleichzeitig den Stab mit fester Geschwindigkeit um das Zentrum rotieren und den Punkt auf dem Stabe mit einer gewissen abnehmenden Geschwindigkeit gegen das Zentrum wandern. Bei diesem Prozeß, den man mathematisch etwas ungenau als die Ausführung einer kontinuierlichen Gruppe von Drehstreckungen bezeichnen kann, beschreibt der bewegliche Punkt gerade eine Schneckenlinie, die dann auf Grund ihrer Erzeugung die Eigenschaft besitzt, bei der genannten Gruppe von Drehstreckungen in sich überzugehen. Diese in der Schneckenlinie verkörperte mathematische Gesetzmäßigkeit entzückte den Basler Mathematiker Jakob Bernoulli, der sie zuerst entdeckte, so sehr, daß er ein Bild der Schneckenlinie mit der auf jene Gesetzmäßigkeit bezüglichen Unterschrift: „EADEM MUTATA RESURGO" über seinem Grabe anbringen ließ. Und ich persönlich glaube, daß gerade die hinter der Schneckenlinie steckende mathematische Gruppe ihren ästhetischen Wert bedingt. Mag ich mit dieser Überzeugung nun zu weit gehen oder nicht, auf jeden Fall habe ich Ihnen gezeigt, daß sich hinter den Werken der bildenden Kunst vielfach mathematische Gesetzmäßigkeiten entdecken lassen. Und es wird sich daher der Künstler unter Umständen gefallen lassen müssen, daß man ihn als einen — wenn auch unbewußten — Mathematiker bezeichnet. In diesem Sinne ist die Speisersche Bemerkung über die Bedeutung der bildenden Kunst der Ägypter für die Mathematik dieses Volkes zu verstehen.

Was haben nun meine bisherigen Darlegungen für einen Wert für die Gedanken, die ich Ihnen auseinandersetzen wollte? Hier stehen wir an einem Punkt, wo wir genau aufpassen müssen. Was wollte ich Ihnen zeigen? Ich wollte zeigen, daß die Fantasie und die Schaffensgrundsätze des Mathematikers in gewisser Hinsicht denen des Künstlers verwandt sind. Meine bisherigen Betrachtungen haben klargestellt, daß mathematische Gesetzmäßigkeiten künstlerischen Wirkungen zugrunde liegen können, und daß man beim bildenden Künstler unter gewissen Umständen mathematische Leistungen feststellen kann. Damit ist offenbar für den Kernpunkt, um den es sich handelt, noch nichts bewiesen. Denn man könnte ja sagen, gut, der Künstler arbeitet manchmal mit mathematischen Ideen, aber der Mathematiker, der hat doch ganz andere Ziele im Auge als irgendwelche künstlerischen Wirkungen! Wenn er eine Gruppe untersucht, die dem Aufbau irgendeines Ornaments zugrunde liegt, was kümmert ihn da das Ornament selbst? Er will doch nur die einzelnen Eigenschaften der Gruppe auseinanderlegen und klarstellen, gleichgültig, auf welchem Wege er das fertig bringt, während die ästhetische Wirkung des Kunstwerks darauf beruht, daß es die Gesamtheit der Eigenschaften der Gruppe nicht begrifflich getrennt, sondern mit einem Schlage intuitiv erfaßbar dem Beschauer vor Augen stellt.

Aber wenn man diese Behauptungen aufstellt, dann befindet man sich meines Erachtens in einem gründlichen Irrtum über die Absichten des Mathematikers. Es handelt sich für den Mathematiker nicht allein darum, Sätze zu finden und zu beweisen, sondern er will diese Sätze auch derart anordnen und zusammenstellen, daß sie nicht nur als richtig, sondern als zwingend und selbstverständlich erscheinen. Ein solches Streben aber ist für mein Gefühl ein ästhetisches und kein erkenntnistheoretisches. Von diesem Standpunkt aus gewinnt der Gruppentheoretiker ein ganz neues Verhältnis zur bildenden Kunst. Ein schönes Ornament soll ja die Gesamtheit der Eigenschaften der dahinter steckenden Gruppe in besonders eindrucksvoller Weise dem Beschauer vor Augen stellen. Die innige Versenkung in das Betrachten eines schönen Ornaments kann daher dem Mathematiker leicht eine Anregung zu einer besonders eleganten Untersuchung der zugehörigen Gruppe liefern. Ja, unter Umständen wird der Mathematiker in einem geeigneten Ornament geradezu die schönste Darstellung des für ihn wesentlichen mathematischen Sachverhalts sehen. Daß ich da nicht nur leere Behauptungen aufstelle, zeigt am besten das Werk eines Mannes, dessen Namen mit Erlangen aufs innigste verknüpft ist.

Ich denke an den großen vor wenigen Jahren verstorbenen Mathematiker Felix Klein, der einst als junger Ordinarius hier — vielleicht gerade an dieser Stelle, wo ich jetzt stehe — das „Erlanger Programm" entwickelt hat, das inzwischen zu einem klassischen Werk der Mathematik geworden ist. Felix Klein ging bei seinen großen Untersuchungen über Algebra und Funktionentheorie seiner genialen Intuition folgend vielfach allzu rasch vor, und so kommt es, daß viele seiner Beweise nicht einwandfrei und auch manche seiner Behauptungen überhaupt falsch sind. Gleichwohl hat Kleins Darstellung immer einen eigentümlich fesselnden Reiz, und man wird manche fehlerhafte Arbeit von Klein hoch über manche fehlerfreie Behandlung desselben Gegenstandes stellen.

Worin liegt aber das Bestechende der Kleinschen Arbeiten? Klein besaß eine starke geometrische Anschauungskraft und hat sich bei all seinen Untersuchungen wesentlich nach geeigneten geometrischen Bildern gerichtet. Wenn Sie nun die Abbildungen etwa in seinen Abhandlungen über automorphe Funktionen betrachten, so werden Sie erstaunt sein, wie schön diese meist aus ganz einfachen Grundgebilden, etwa aus Kreisbogendreiecken zusammengesetzten Figuren aussehen. Nun, diese Schönheit beruht eben darauf, daß die genannten Figuren die ihnen zugrunde liegenden mathematischen Zusammenhänge in einer außerordentlich einfachen und durchsichtigen Weise veranschaulichen, und da Klein auf ihrer Betrachtung aufbaut, besitzen bei ihm auch alle abgeleiteten Resultate diejenige Selbstverständlichkeit, die der mathematische Forscher nach den früher auseinandergesetzten Grundsätzen zu fordern hat. Dementsprechend werden Kleins Abhandlungen immer lesenswert bleiben, auch für den, der genau weiß, daß sie hinsichtlich ihrer Strenge nicht immer befriedigen.

Bei der Betrachtung der Kleinschen Beispiele sind wir nun zwangsläufig auf einen anderen Punkt gekommen, den wir eingehender besprechen müssen. Ich sagte, vom ästhetischen Standpunkt ist manche fehlerhafte Kleinsche Arbeit über manche fehlerfreie eines Andern zu stellen. Damit will ich natürlich unter keinen Umständen behaupten, der Mathematiker solle nur auf eine elegante und bestechende Darstellung sehen, ohne Rücksicht darauf, ob die Behauptungen, die er aufstellt, auch richtig sind. Eine solche Forderung ist selbstverständlich glatter Unsinn. Denn schon in dem Kroneckerschen Distichon, das ich Ihnen zu Anfang meines Vortrages erwähnte, heißt es in dem zweiten Vers sehr richtig:

„SED QUOD FINGIMUS NOS ET PROBARE DECET"
„aber das, was wir bilden, müssen wir auch beweisen".

Hat der Mathematiker intuitiv einen Zusammenhang erkannt, so muß er selbstverständlich die Beweise, mit denen er die Richtigkeit seiner Einfälle zeigt, mit strengster Selbstkritik nachprüfen. Aber gerade im Punkte der Strenge der Beweise zeigt sich doch ein großer Unterschied zwischen dem Mathematiker, dem die klare zwingende — oder anders ausgedrückt — die schöne Darstellung der gefundenen Ergebnisse nicht nur eine Nebenaufgabe, sondern eine Hauptforderung bedeutet, und dem andern Mathematiker, dem der Wert der Mathematik vor allem in der unumstößlichen Gewißheit und logischen Unantastbarkeit ihrer Sätze zu liegen scheint. Sie sehen, ich gebe hier zu, daß die letztere Ansicht von der Bedeutung der Mathematik, die ich in der Einleitung als die Durchschnittsansicht des gebildeten Laien bezeichnete, auch unter den Mathematikern ihre Anhänger hat. Z. B. steht wohl David Hilbert in Göttingen, der Altmeister der deutschen Mathematiker, in gewisser Hinsicht auf diesem Standpunkt. Es liegt mir auch selbstverständlich vollkommen fern, die Berechtigung einer derartigen Anschauung zu bestreiten. Ich will Ihnen hier nur klar machen, daß ich selbst anders denke, und zeigen, welchen Einfluß auf die Forschungsrichtung der grundsätzliche Standpunkt hat, den man der Mathematik gegenüber einnimmt.

Der Mathematiker, dem es vor allen Dingen um die unumstößliche Gewißheit seiner Ergebnisse zu tun ist, wird danach streben, seine Sätze auf möglichst wenig unbewiesene Voraussetzungen zu begründen. Er wird infolgedessen z. B. sich in der Geometrie erst dann wohl fühlen, wenn er diese Wissenschaft vollständig auf die Arithmetik zurückgeführt hat, die im allgemeinen dem Mathematiker als das sicherste Fundament erscheint. Er wird ferner die Grundlagen der Arithmetik einer scharfen Durchprüfung unterziehen, wird z. B. untersuchen, wie weit die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche als logisch einwandfreier Begriff anzusehen ist, er wird versuchen, so weit als möglich mit den ganzen Zahlen auszukommen, ja er wird danach streben, das System der ganzen Zahlen auf ein noch einfacheres, etwa ein logisches System zurückzuführen, kurz er wird das treiben, was man heutzutage in der Mathematik als Grundlagentheorie bezeichnet.

Den mehr ästhetisch eingestellten Mathematiker wird die Grundlagentheorie mit ihren peinlichen und notgedrungen oft verzwickten und unschönen Untersuchungen weniger interessieren. Er wird selbstverständlich unbedingt seine Beweise der seiner Zeit entsprechenden Strenge anpassen, aber er wird sich nicht den Kopf zerbrechen, ob seine Sätze damit auch in einer Weise bewiesen sind, die man unter allen Umständen, in aller Zukunft als absolut einwandfrei ansehen muß. Während es den Grundlagentheoretiker höchst bedenklich stimmen muß, wenn er sieht, daß uns die Beweise der großen Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts heute sehr oft nicht mehr stichhaltig scheinen, wird den ästhetisch eingestellten Mathematiker gerade der Gedanke trösten, daß ein Leibniz oder Euler für uns nichts von seiner mathematischen Größe verloren hat, auch wenn wir uns darüber klar sind, daß die von diesen Meistern gefundenen Sätze vielfach von ihnen in einer Weise bewiesen wurden, die wir heute nicht mehr als einwandfrei gelten lassen können. Dafür wird aber für den mathematischen Ästhetiker nicht nur das Finden von neuen Sätzen, sondern auch die befriedigende Darstellung der gewonnenen Ergebnisse zu einem oft qualvollen Problem. Es darf ihm doch nicht vorkommen, daß der Leser seiner Arbeiten nur gleichsam von der

Last der Beweise erdrückt zugeben muß, daß die aufgestellten Behauptungen richtig sein müssen, ohne aber das Gefühl los zu werden, daß sie genau so gut hätten falsch sein können. Er muß unter allen Umständen die von Schopenhauer gerügten „Mausefallen-Beweise" vermeiden. Dagegen muß er seinen Stoff so anordnen, daß zwingend ein Satz aus dem andern folgt, sodaß der Leser, noch bevor er die Beweise im einzelnen durchgeprüft hat, gleichsam auf einen Blick sieht, daß die Ergebnisse gar nicht anders hätten lauten können. Natürlich ist eine derartige Darstellung ein Ideal, das nur in seltenen Fällen erreicht wird. Der ästhetisch empfindende Forscher wird daher unter Umständen einen Satz nicht nur einmal, sondern oft beweisen, und es gibt in der Tat berühmte mathematische Sätze, für die zehn, zwanzig oder mehr Beweise existieren. Ich glaube, dieser Umstand zeigt unwiderleglich, daß in der Mathematik ästhetische Gesichtspunkte eine große Rolle spielen.

Noch nicht untersucht habe ich indessen die Frage, ob diese ästhetischen Momente auch für die Weiterentwicklung der Mathematik, für die Ableitung neuer Sätze und die Schöpfung neuer Theorien entscheidend sein können. Ich möchte Ihnen an einem Beispiel zeigen, daß derartige Möglichkeiten tatsächlich bestehen. Ich kann Ihnen damit gleichzeitig klarmachen, daß der Schönheitsbegriff des Mathematikers natürlich ein ganz besonderer, eben mathematischer Schönheitsbegriff ist, dessen Besitz wohl gerade den zum Verständnis der Mathematik nötigen sechsten Sinn darstellt, von dem ich in der Einleitung gesprochen habe.

Bei dem Beispiel, um das es sich handelt, verlassen wir das Gebiet der Geometrie, das ich zum Ausgangspunkt meiner Betrachtungen gewählt hatte, und begeben uns dafür auf das Gebiet der elementaren Zahlenlehre.

Sie wissen wohl, daß man jede ganze natürliche Zahl in einfachste Bestandteile, in sogen. Primzahlen zerlegen kann, die sich dann selbst nicht mehr in Faktoren aufspalten lassen. Z. B.: $21 = 3 \cdot 7$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, und Sie wissen auch weiter, daß diese Zerlegung nur auf eine Weise möglich ist, daß also z. B. keine zweite Zerlegung von 21 existiert, bei der etwa der Faktor 5 aufträte. Diese Tatsache wird wohl vielen von Ihnen als etwas recht gleichgültiges erscheinen. Der Mathematiker hingegen sieht in einer so einfachen Zerlegbarkeit der natürlichen Zahlen etwas Schönes, und er freut sich, wenn er in andern Gebieten ähnliche Gesetzmäßigkeiten findet. Das ist nun z. B. der Fall im Gebiet der Polynome, d. h. der aus Buchstaben gebildeten Ausdrücke, mit denen Sie auf den Mittel- oder Oberklassen der Schule geplagt wurden. So ist die Zerlegung:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

eine solche eindeutige Aufspaltung des Ausdruckes: $a^2 + 2ab + b^2$ in den zweimal auftretenden unzerlegbaren Ausdruck $a + b$. Aber in andern Gebieten, wo er es gerne wünschte, findet der Mathematiker derartige Zerlegungen nicht mehr. Z. B. im Reich aller unendlichen Dezimalbrüche sieht er sofort, daß es sinnlos wäre, nach einer derartigen Zerlegung zu fragen. Dafür wird er um so eifriger nach Teilbereichen jener großen Menge aller Dezimalbrüche suchen, in denen er wieder auf so einfache und schöne Zerlegungsgesetze hoffen kann, und als solche aussichtsreichen Teilbereiche erscheinen vor allen Dingen Systeme, die aus sogen. algebraischen Zahlen gebildet sind. Was algebraische Zahlen sind, kann ich hier nicht näher auseinandersetzen; ich kann Ihnen nur sagen, daß z. B. die Quadratwurzeln, Drittenwurzeln, mit deren „Ausziehung" Sie sich wohl auf der Schule gequält haben, darunter gehören. Nun, bei solchen algebraischen Zahlen, da kann man tatsächlich ähnliche Zerlegungen finden, nur daß sie zunächst nicht so schön eindeutig werden wie bei den gewöhnlichen ganzen Zahlen. Die Schwierigkeiten, die hier auftreten, wurden zuerst in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts bemerkt. Nun kommt das Entscheidende:

Kummer, der Entdecker dieser Schwierigkeiten, begnügte sich nicht damit, sie resigniert festzustellen, sondern er trug die Überzeugung in sich, daß auch der Aufbau der algebraischen Zahlen ebenso einfach und schön sich darbieten müßte, wie der Aufbau der gewöhnlichen ganzen Zahlen, wenn man den Ansatz nur richtig machte. Es war für ihn, sozusagen, ein ästhetisches Ideal, daß in irgendeiner Form einfachste Faktoren existieren müßten, in die man die gegebenen algebraischen Zahlen eindeutig aufspalten könnte, und er ruhte nicht, bis es ihm wenigstens im einfachsten Fall gelang, durch Einführung von idealen Faktoren neben den real gegebenen Zahlen eine derartige Aufspaltung tatsächlich zu erzielen. Sein Nachfolger und Vollender wurde dann der große, erst 1914 verstorbene Mathematiker Dedekind, der Schöpfer der allgemeinen Idealtheorie.

Das Auftreten des Wortes „ideal" in der Mathematik hat schon manchen meiner nichtmathematischen Freunde belustigt, wenn ich ihm davon erzählte. Denn was sollten das für Ideale sein, die da als Gegenstand der mathematischen Analyse auftraten! Sie sehen aber, es ist kein Zufall, sondern es hat seinen tieferen Sinn, wenn der Mathematiker in der Zahlentheorie von Idealen spricht. Es handelt sich für ihn da natürlich nicht um ethische Ideale, die haben in der Mathematik nichts zu suchen; wohl aber sind seine „idealen Zahlen" und „Ideale" Gebilde, die einem — vom mathematischen Standpunkt aus gesehen — ästhetischen Ideal ihre Einführung verdanken. Ich weiß natürlich nicht, ob Kummer und Dedekind bei der Prägung des Wortes „ideal" genau denselben Gedanken hatten, den ich ihnen hier unterlege. Auf jeden Fall erscheint von unserm ästhetischen Standpunkt aus das Wort durchaus zweckmäßig gewählt, während es sich sonst unter den übrigen mathematischen Ausdrücken etwas seltsam ausnähme. Daß im übrigen zum mindesten bei Dedekind der ästhetische Standpunkt eine sehr große Rolle spielte, ergibt sich mit Gewißheit aus dem einen Umstand, daß er den von ihm gefundenen Hauptsatz der allgemeinen Idealtheorie jahrelang nicht veröffentlichte, trotzdem er für ihn einen logisch vollkommen einwandfreien Beweis besaß. Aber dieser Beweis schien ihm nicht durchsichtig genug, er genügte seinen ästhetischen Forderungen nicht, und so hielt er die Publikation jahrelang zurück. Es kam ihm also nicht nur auf das Finden von Sätzen an; die richtige, das mathematische Schönheitsgefühl befriedigende Darstellung der gewonnenen Ergebnisse war für ihn eine vollständig gleichwertige Aufgabe. Indes möchte ich hier noch einmal mit aller Schärfe betonen: die Mathematik verdankt Kummer und vor allem Dedekind nicht nur in der Form, sondern auch inhaltlich ganz gewaltige Fortschritte. Gerade dadurch, daß Dedekind so großen Wert auf eine formvollendete und elegante Darstellung legte, hat er Methoden geschaffen, die in ihrer Schmiegsamkeit auf die verschiedensten mathematischen Gebiete anwendbar sind und auch heute noch die Grundlagen für immer neue Fortschritte bieten.

So muß ich für meine Person Dedekind als den Lehrer bezeichnen, der auf mich den allergrößten Einfluß hatte, trotzdem ich ihn nicht mehr persönlich, sondern nur aus seinen Werken kennen lernte.

Die ästhetische Einstellung verdammt also den Mathematiker, der sich zu ihr bekennt, keineswegs zur Unfruchtbarkeit. Im Gegenteil, sie wird für ihn ein Ansporn sein, immer neue ungeklärte Gebiete anzugreifen, um aus dem scheinbaren Chaos eine harmonische, seinen mathematischen Schönheitssinn befriedigende Ordnung zu schaffen.

Ich kann Ihnen wenigstens bestimmt versichern, der eben geschilderte Trieb bildet für meine Person den Hauptreiz zur mathematischen Weiterarbeit. Ich fühle hinter einem scheinbar verwirrten Bild, das vor mir steht, eine geheime Ordnung, die sich sofort zeigen wird, sobald man nur das Zauberwort gefunden hat, das die einzelnen Teile zwingt, sich harmonisch zum Ganzen zusammenzufügen. Da kann ich es eben nicht lassen, immer und immer wieder mit dem gegebenen Material herumzuspielen, in der Hoffnung, daß mir doch eines Tages die Erleuchtung kommen wird.

Ich selbst bin also der Mathematik gegenüber durchaus ästhetisch eingestellt. Es scheint mir aber nicht nur für meine Person, sondern auch allgemein wichtig zu sein, daß endlich einmal betont wird, daß bei den Mathematikern ästhetische Gesichtspunkte eine große Rolle spielen. Es gibt nämlich in der Mathematik — vielleicht werden Sie darüber staunen — genau wie in der Kunst verschiedene Richtungen, die sich gegenseitig bekämpfen und jeweils die Untersuchungen und Resultate der Gegenpartei zwar nicht für falsch, aber für uninteressant und wertlos erklären. So sind augenblicklich die Mathematiker in zwei große Heerlager gespalten, nämlich in die Scharen der „Konkreten“ und in die der „Abstrakten“, und es werden insbesondere die Abstrakten von den Konkreten oft scharf angegriffen. Worin besteht nun dieser große Gegensatz zwischen konkret und abstrakt?

Vielleicht denken Sie im Hinblick auf die übliche Bedeutung dieser Worte, daß die konkrete Mathematik sich mit solchen Untersuchungen befaßt, die unmittelbar eine praktische Anwendung gestatten, während die abstrakte Mathematik wesentlich Verstandesspielereien treibt. In diesem Sinne sind die

Ausdrücke auch wohl gemeint, wenn man konkret als Lob, abstrakt als Tadel auffaßt. Aber wenn Sie genauer hinsehen, so werden Sie bemerken, daß oft auch rein abstrakte Untersuchungen über kurz oder lang praktisch brauchbare Resultate lieferten, und noch häufiger werden Sie beobachten, daß Problemstellungen der konkreten Mathematik nur vom mathematischen, nicht vom praktischen Standpunkt aus bedeutungsvoll sind. Man könnte also meinen, der heutzutage teilweise so energisch betonte Gegensatz zwischen konkret und abstrakt sei überhaupt bedeutungslos. Das stimmt nun nicht, es handelt sich da sehr wohl um tiefgehende Unterschiede, nämlich um verschiedene Geschmacksrichtungen. Und diese Geschmacksrichtungen kann ich Ihnen, das ist der beste Beweis dafür, daß es sich hier wirklich um ästhetische Fragen handelt, am besten an einem Beispiel aus der Architektur klar machen.

Es wird der eine an einem Bauwerk viel Schmuckverzierungen wünschen, er wird keine kahlen Flächen lieben, sondern er wird Wert darauf legen, möglichst viele schöne Einzelheiten bewundern zu können. Dem andern, dem Anhänger der modernen Sachlichkeit, wird es vor allem auf die große Linie ankommen, er wird nach Kräften auf jedes schmückende Beiwerk verzichten. Den Geschmack des ersteren müßte man dann — wenn man die mathematischen Bezeichnungen auf die Kunst übertragen wollte — konkret nennen, den des zweiten abstrakt. Sie werden übrigens aus meinen bisherigen Darlegungen gemerkt haben, daß ich mich persönlich zu den abstrakten Mathematikern zählen muß. Denn immer habe ich Ihnen ja als mathematisch schöne Eigenschaften Einfachheit, Klarheit, große Linie hervorgehoben. Empfände ich mehr „konkret", so hätte ich sicher statt dessen von Mannigfaltigkeit, Buntheit und dergleichen gesprochen.

Die Erkenntnis, daß der Gegensatz zwischen abstrakt und konkret einfach auf verschiedene Geschmacksrichtungen zurückzuführen ist, scheint mir praktisch von großer Bedeutung. Über Geschmäcke läßt sich ja bekanntlich nicht streiten. Statt daß also ein Mathematiker der einen Richtung die Untersuchungen der andern Seite für wertlos erklärt, soll er sich lieber damit begnügen, festzustellen, daß ihm die Probleme der Gegenpartei reizlos erscheinen, ohne aber abstreiten zu wollen, daß eben diese Probleme, von einem andern ästhetischen Blickpunkt aus gesehen, womöglich sehr schön sein können.

Doch ich darf nicht von meinem Thema abkommen, und ich darf nicht vergessen, daß ich hier nicht vor einer Versammlung von Mathematikern der verschiedenen Richtungen spreche, denen ich zum friedlichen Vergleiche rate. Vielleicht haben meine letzten Bemerkungen, die mir für die Mathematik so tröstlich erschienen, gerade Ihnen einen großen Schrecken eingejagt. Vielleicht sagen sich jetzt manche von Ihnen: bisher dachten wir noch immer, daß der Endzweck der Mathematik ihre Anwendung auf praktische Probleme sei. Jetzt sehen wir, daß mindestens einige, vielleicht sehr viele Mathematiker ganz anders eingestellt sind, daß für sie sog. ästhetische Fragen die Hauptrolle spielen, die ja für einen engen Kreis von Eingeweihten höchst reizvoll sein mögen, von denen wir Laien aber ein für allemal nichts begreifen. Hat denn eine solche Mathematik, die von vornherein nur mit dem Verständnis eines kleinen Zirkels rechnet, überhaupt noch einen Wert?

Ja, sehen Sie, da treffen wir wieder den Punkt, wo wir Mathematiker schmerzhaft unsere Vereinzelung fühlen. Je mehr wir uns selber an den Schönheiten der Mathematik begeistern, desto stärker bedauern wir, daß wir so wenige an unserm Genuß teilnehmen lassen können. Aber einen Trost haben doch gerade wir von der Schule der abstrakten Mathematik: je klarer und durchsichtiger wir unsere Darstellung gestalten, desto leichter verständlich muß sie notgedrungen werden, und bedenken Sie, vor 400 Jahren war das Rechnen noch eine schwere Kunst! Ein Melanchthon traute keinem Durchschnittsstudenten ein wirkliches Eindringen in die Geheimnisse der Bruchrechnung zu. Heutzutage muß jeder Volksschüler diese Dinge beherrschen. Vielleicht kommt es doch einmal über kurz oder lang dahin, daß etwa die Schönheiten der höheren Arithmetik, von denen ich Ihnen im Lauf meiner Rede einige Andeutungen gegeben habe, jedem Gebildeten zugänglich werden. Dieser Gedanke wird Ihnen wohl eine Utopie scheinen und mag vielleicht auch eine sein. Für mich aber bildet er jedenfalls immer den Haupttrost, so oft ich mit schmerzlichem Bedauern feststellen muß, daß ich vielen meiner besten Freunde keinen genaueren Einblick in die Natur der Reize geben kann, derentwegen ich der Mathematik mit voller Seele verfallen bin.

in der Mathematik. 207-220