

Klassifikation und Darstellung der reellen räumlichen Kollineationen mit invarianter nicht-ausgearteter Fläche zweiten Grades.

Von Fritz Seel in Erlangen.

Inhaltsangabe.

	Seite
Einleitung	169

Kapitel I: Vorbereitungen und Methodisches.

§ 1. Starre Transformationen in Geometrien mit nicht-ausgearteter Fläche 2. Grades als fundamentalem Gebilde	171
§ 2. Gerade Linien auf den nicht-ausgearteten Flächen 2. Ordnung	172
§ 3. Komplexe Kollineationen, die ein nicht-ausgeartetes Gebilde zweiten Grades invariant lassen	175
§ 4. Reelle uneigentliche Kollineationen („Umlegungen“, speziell „Spiegelungen“), die ein nicht-ausgeartetes Gebilde 2. Grades invariant lassen	177
§ 5. Reelle eigentliche Kollineationen („Bewegungen“), die ein nicht-ausgeartetes Gebilde 2. Grades invariant lassen	180
A. Realität der Schiebungen	180
B. Fixelemente	181
C. Hilfssätze zur Untersuchung der Realitätsverhältnisse	183
D. Aufbau	189
E. Ausscheidung von allgemeinen Kollineationstypen des Raumes, falls die Invarianz einer quadratischen nicht-ausgearteten Fläche gefordert wird	190

Kapitel II: Reelle eigentliche Kollineationen, welche eine nullteilige Fläche invariant lassen.

§ 1. Invariantes Tangentialtetraeder	194
§ 2. Ausgezeichnete Fläche und Realität der Bewegungen	195
§ 3. Fixflächen	199

Kapitel III: Reelle eigentliche Kollineationen, welche eine ovale Fläche invariant lassen.

§ 1. Ausscheidung der Bewegungstypen (12) und (13)	199
§ 2. Die Bewegungen des Typs (1), (2) und (4)	200

	Seite
A. Realitätsverhältnisse des invarianten Tangentialtetraeders . . .	200
B. Ausgezeichnete Fläche und Realität der Bewegungen . . .	201
C. Fixflächen	203
D. Darstellung der Einzelbewegungen	208
a) Die Bewegungen des Typs (2) (Rotationen)	208
b) Die Bewegungen des Typs (4) (Spezielle Rotationen) . . .	209
c) Die Bewegungen des Typs (1) (Schraubungen)	210
d) Die Bewegungen des Typs (2), (1) und (4) innerhalb der reellen isotropen Fixebenen	210
§ 3. Die Bewegungen des Typs (11)	212

Kapitel IV: Reelle eigentliche Kollineationen, welche eine ringartige Fläche invariant lassen.

§ 1. Die Bewegungen des Typs (1), (2) und (4)	213
A. Lage und Realitätsverhältnisse des invarianten Tetraeders . .	213
B. Bewegungen, bei denen das invariante Tangentialtetraeder reell ist	214
a) Ausgezeichnete Fläche und Fixflächen	214
b) Darstellung der Einzelbewegungen	215
α) Die Bewegungen des Typs (2) (Rotationen)	215
β) Die Bewegungen des Typs (1) (Schraubungen)	216
γ) Die Bewegungen des Typs (4) (Spezielle Rotationen und Schiebungen)	217
δ) Die Bewegungen des Typs (2), (1) und (4) innerhalb der reellen isotropen Fixebenen	218
C. Bewegungen, bei denen das invariante Tangentialtetraeder nur die beiden konjugierten Polaren als reelle Bestandteile hat .	219
a) Ausgezeichnete Fläche, Fixflächen und Realität der Be- wegungen	219
b) Darstellung der Einzelbewegungen	221
α) Die Bewegungen des Typs (2) (Rotationen)	221
β) Die Bewegungen des Typs (1) (Schraubungen)	221
γ) Die Bewegungen des Typs (4) (Spezielle Rotationen und Schiebungen)	221
D. Bewegungen, bei denen das invariante Tangentialtetraeder nur zwei Fixerzeugende der gleichen Schar als reelle Bestand- teile hat	223
a) Ausgezeichnete Fläche und Fixflächen	223
b) Realität der Bewegungen	225
c) Übersicht der möglichen reellen Einzelbewegungen . . .	227
d) Auffindung einer zweiten reellen Fixflächenschar bei ge- eigneter Beschaffenheit der Transformationskoeffizienten .	230
e) Darstellung der reellen Einzelbewegungen	232
α) Die reellen Bewegungen des Typs (4) (Schiebungen) .	232
β) Die reellen Bewegungen des Typs (1)	236

	Seite
§ 2. Die Bewegungen des Typs (11), (Rotationen um eine reelle isotrope Gerade)	238
A. Koordinatentetraeder und Bewegungsgleichungen	238
B. Ausgezeichnete Fläche	239
C. Fixflächen und Fixkurven	241
§ 3. Die Bewegungen des Typs (12)	244
A. Lage und Realitätsverhältnisse der Fixelemente	244
B. Bewegungen des Typs (12), welche zwei imaginäre Erzeugende der ausgezeichneten Fläche invariant lassen	245
C. Bewegungen des Typs (12), welche nur reelle Erzeugende der ausgezeichneten Fläche invariant lassen	251
§ 4. Die Bewegungen des Typs (13), (Schiebungen mit einer einzigen Doppelpunktserzeugenden)	253

Einleitung.

Durch die grundlegenden Arbeiten von Cayley¹⁾ und Felix Klein²⁾ wurde es möglich, die verschiedenen nichteuklidischen Geometrien systematisch aufzubauen, indem man ein entsprechendes Gebilde 2. Grades als „Eich-Gebilde“ einer sogenannten absoluten Maßbestimmung auszeichnete. Unter diesem Gesichtspunkt ergaben sich aber nicht nur die beiden nichteuklidischen Geometrien im engeren Sinne, nämlich die sogenannte hyperbolische bzw. elliptische Geometrie, welche Gauß, Bolyai und Lobatschefskij bzw. Riemann vom axiomatischen Standpunkt aus entwickelt hatten, sondern je nach der Art des ausgezeichneten quadratischen Gebildes eine große Anzahl verschiedenartiger Maßbestimmungen, die logisch völlig gleichberechtigt nebeneinander stehen³⁾. Wenn trotzdem in der bisherigen Literatur nur 3 Gattungen, nämlich die euklidische, die hyperbolische und die elliptische Geometrie vorzugsweise behandelt wurden, so geschah dies wohl deshalb, weil nur diese drei Systeme auf die Außenwelt anwendbar erscheinen. Die anschauliche Forderung, daß die reellen Ebenen eines von einer beliebigen,

1) A sixth memoir upon Quantics, Philos. Trans. of the Royal Society of London, 1859.

2) Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie, Göttg. Nachr. 1871.

3) Eine genaue und sehr übersichtliche Klassifikation dieser Maßbestimmungen findet sich in den Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. 28 (1910): Sommerville, Classification of Geometries with Projective Metric.

im Endlichen gelegenen reellen Geraden getragenen Ebenenbüschels untereinander stets nur einen endlich großen Winkel einschließen, ist nämlich nur in diesen 3 Geometrien wegen der dort bestehenden elliptischen Winkelmessung realisiert, wobei man sich bei der hyperbolischen Geometrie noch auf das Innere der in dieser Geometrie ausgezeichneten ovalen quadratischen Fläche (ohne reelle Erzeugende) beschränken muß¹⁾. Vom abstrakten Standpunkt aus erscheint diese einseitige Bevorzugung der genannten 3 Geometrien ungerechtfertigt.

Die folgende Arbeit beabsichtigt eine anschauliche Darstellung aller möglichen reellen nicht-singulären — im folgenden sind immer nicht-singuläre Kollineationen gemeint — Kollineationen im dreidimensionalen projektiven Raum, welche eine beliebige, jedoch nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades, deren Gleichung bei Bezug auf ein reelles Koordinatentetraeder reelle Koeffizienten besitzen möge²⁾, invariant lassen. Diese Kollineationen stellen gerade alle möglichen reellen starren Transformationen dar, die in den Geometrien, welchen die invariante, nicht-ausgeartete Fläche 2. Grades als „Eichfläche“ der Maßbestimmung zugrunde liegt, möglich sind. Der größte Teil der Untersuchungen ist den reellen Kollineationen mit invarianter ringartiger Fläche 2. Grades (mit reellen Erzeugenden) gewidmet, welche den reellen starren Transformationen in einer von den nichteuklidischen Geometrien im engeren Sinne verschiedenen Geometrie entsprechen. Auch hierbei ist eine durchaus anschauliche Darstellung dieser Kollineationen möglich, ja es lassen sich sämtliche reellen eigentlichen Kollineationen mit invarianter nullteiliger quadratischer Fläche, welche mit den reellen Bewegungen der elliptischen Geometrie gleichbedeutend sind, ferner auch mit Ausnahme eines einzigen Bewegungstyps die reellen Bewegungen mit invarianter ovaler quadratischer Fläche, welche reellen Bewegungen der hyperbolischen Geometrie entsprechen, in die obige Geometrie

1) Siehe etwa Felix Klein, Gesammelte mathematische Abhandlg. I — im folgenden mit „Klein I“ zitiert — Seite 252 oder Felix Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, bearbeitet von W. Rosemann — kurz mit „Klein-Rosemann“ zitiert — Seite 189.

2) Bei Klein-Rosemann in vielleicht etwas mißzuverstehender Weise als „reelle Flächen“ bezeichnet.

mit ausgezeichnete ringartiger Fläche einordnen, während die speziellen Spiegelungen, auf die wir uns bei Behandlung der uneigentlichen Kollineationen beschränken, sogar bei allen drei Typen von ausgezeichneten Flächen eine gemeinsame, anschaulich völlig übereinstimmende Darstellung gestatten. Bei allen Überlegungen werden, abgesehen von einigen Fixflächen- und Realitätsuntersuchungen, vorzugsweise geometrische Betrachtungsweisen angewendet, welche vor analytischen Darstellungen den Vorteil einer großen anschaulichen Durchsichtigkeit besitzen. Auf eine klare Trennung von Reellem und Imaginärem ist besonderer Wert gelegt.

Kapitel I:

Vorbereitung und Methodisches.

§ 1. Starre Transformationen in Geometrien mit nicht-ausgearteter Fläche 2. Grades als fundamentalem Gebilde.

Als starre Transformationen seien solche eindeutigen Punkttransformationen bezeichnet, bei denen alle Längen- und Winkelmaße ungeändert bleiben. Solche Transformationen werden Geraden in Geraden und Ebenen in Ebenen überführen, also Kollineationen oder, was das gleiche ist, projektive Transformationen sein. Da ferner die Punkte der fundamentalen Fläche als unendlich ferne Punkte anzusehen sind, werden bei diesen Transformationen alle Punkte der Fundamentalfläche wieder in solche übergehen, d. h. die starren Transformationen sind Kollineationen, welche das fundamentale Gebilde in sich überführen. Es ist aber auch umgekehrt bei den nicht-ausgearteten Maßbestimmungen jede Kollineation, die das fundamentale Gebilde in sich überführt, eine starre Transformation. Denn bei projektiven Transformationen sind Doppelverhältnisse invariant, Entfernungen und Winkel sind aber bei nicht-ausgearteten Maßbestimmungen durchweg durch Logarithmen von Doppelverhältnissen in bezug auf das ausgezeichnete Gebilde festgelegt, also können sich bei projektiven Transformationen, welche das ausgezeichnete nicht-ausgeartete Gebilde als Ganzes invariant lassen, Entfernungen und Winkel nicht ändern, d. h. die Transformation ist starr. Daß dies bei ausgearteten Maßbestimmungen nicht mehr der Fall zu sein braucht, zeigt die

euklidische Geometrie, bei der es außer den starren Transformationen die Ähnlichkeitstransformationen gibt, welche gleichfalls das fundamentale Gebilde in sich überführen. Aus diesem Grunde ist ja auch eine absolute Streckenmessung ohne Verwendung metrischer Begriffe in der euklidischen Geometrie nur möglich, wenn man zuvor eine Einheitsstrecke festlegt.

§ 2. Gerade Linien auf den nicht-ausgearteten Flächen 2. Ordnung.

In den späteren Überlegungen werden die auf den nicht-ausgearteten Flächen 2. Ordnung verlaufenden Geraden eine wesentliche Rolle spielen. Vor allem werden die Realitätsverhältnisse dieser Geraden wichtig werden, weshalb schon hier einiges darüber vorausgeschickt werden soll.

Wenn wir unter der zu einer imaginären Geraden konjugiert imaginären Geraden eine solche Gerade verstehen, welche gerade die zu den Punkten der ersten konjugiert imaginären Punkte enthält, so können wir unter den imaginären Geraden des Raumes zwei Arten unterscheiden, nämlich erstens solche, welche mit ihrer konjugiert imaginären Geraden einen — notwendig reellen — Schnittpunkt haben, und die man als „nieder-imaginär“ oder „imaginär I. Art“ bezeichnet, und zweitens solche, welche ihre konjugiert imaginäre Gerade nicht schneiden, und die man „hochimaginär“ oder „imaginär II. Art“ nennt¹⁾. Zunächst will ich²⁾ ein allgemeines Kriterium erwähnen, das zu entscheiden gestattet, ob man es mit hoch- oder nieder-imaginären Geraden zu tun hat. Eine imaginäre Gerade sei gegeben durch ihre Strahlenkoordinaten $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$, bzw. durch ihre Achsenkoordinaten $q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23}$. In beiden Fällen erfüllen die Linienkoordinaten, wenn sie wirklich eine Gerade darstellen, die Relation: $(p, p) \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$ bzw. $(q, q) = 0$.

Setzt man nun: $p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + i s_{\alpha\beta}$ (r, s reell), so erhält man bzw.

$$q_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + i s_{\alpha\beta}$$

1) Ausführlicheres über diese Fragen findet man in Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Band II (1923) — im folgenden stets mit „Heffter II“ zitiert — Art. 256 und Klein-Rosemann Seite 48f.

2) Ich folge dabei der autographierten Vorlesung Felix Kleins über nichteuklidische Geometrie, ausgearbeitet von Fr. Schilling (II. Teil, 1890).

durch einfache Rechnung, die in der erwähnten Ausarbeitung der Klein'schen Vorlesung ausgeführt ist, als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine imaginäre Gerade nieder-imaginär ist:

$$(r, r) = (s, s) = 0.$$

Nun nehmen wir die nicht-ausgearteten quadratischen Flächen in der folgenden normierten Form an, welche ja bei Bezug der Flächengleichung auf ein geeignetes reelles Polartetraeder stets erreichbar ist:

Ringartige Fläche:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0;$$

Ovale Fläche:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0;$$

Nullteilige Fläche:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Die Anwendung folgender umkehrbar eindeutigen, komplexen Transformationen: ($\varrho \neq 0$)

$$\begin{array}{lll} \varrho y_1 = x_1 + x_3 & \text{bezw. } \varrho y_1 = x_1 + ix_3 & \text{bezw. } \varrho y_1 = x_1 + ix_3 \\ \varrho y_2 = x_2 + x_4 & \varrho y_2 = x_2 + x_4 & \varrho y_2 = x_2 + ix_4 \\ \varrho y_3 = x_1 - x_3 & \varrho y_3 = x_1 - ix_3 & \varrho y_3 = x_1 - ix_3 \\ \varrho y_4 = -x_2 + x_4 & \varrho y_4 = -x_2 + x_4 & \varrho y_4 = -x_2 + ix_4 \\ \text{Det. } D = -4 & D = -4i & D = 4 \end{array}$$

führt für alle drei Flächen auf die Gestalt: $y_1 y_3 - y_2 y_4 = 0$. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir setzen ¹⁾:

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{y_1}{y_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda; & \frac{y_2}{y_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda; \\ \text{oder } 2. \frac{y_1}{y_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu; & \frac{y_4}{y_3} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu. \end{array}$$

Auf der quadratischen Fläche laufen zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden und zwar wird durch Angabe von λ und μ je eine Erzeugende der ersten und eine der zweiten Schar eindeutig festgelegt und umgekehrt. Die Gleichungen dieser beiden Erzeugenden-Scharen sind:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \lambda y_4 \\ y_2 = \lambda y_3 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} y_1 = \mu y_2 \\ y_4 = \mu y_3 \end{array} \right\}$$

1) Ich erwähne ausdrücklich, daß ich im folgenden die scheinbaren Ausnahmefälle, die durch Nullwerden der Nenner entstehen können, außer acht lasse, da man ja immer durch Übergang zur homogenen Form, also durch Einführung von $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ mit geeigneten Festsetzungen diese Ausnahmen beseitigen kann.

Jede Erzeugende der einen Schar hat mit jeder der anderen einen Schnittpunkt, während zwei verschiedene Erzeugende der gleichen Schar sich nicht schneiden.

a) Bei ringartigen Flächen, bei denen das zugrunde liegende Tetraeder der y_i -Koordinaten reell ist, erhalten wir für reelle λ und μ zwei reelle Scharen von Erzeugenden. Für komplexe λ und μ mit nicht verschwindendem Imaginärteil bestätigt man durch Anwendung des erwähnten Kriteriums nach einfacher Rechnung, daß in diesem Fall die Erzeugenden hoch-imaginär sind. Da sich zwei Erzeugende verschiedener Scharen stets schneiden, müssen also die imaginären Erzeugenden ringartiger Flächen mit ihren konjugiert imaginären in der gleichen Schar liegen. Daß mit einer imaginären Erzeugenden auch die dazu konjugiert imaginäre Gerade Erzeugende der Fläche ist, ist ja klar, weil die Flächengleichung reell ist und daher mit einem imaginären auch der dazu konjugiert imaginäre Punkt auf der Fläche liegt. Zusammenfassend können wir also sagen: Die auf den ringartigen Flächen vorkommenden zwei Scharen von Erzeugenden enthalten nur reelle und hoch-imaginäre Geraden. Dabei enthält eine Schar mit einer hoch-imaginären Erzeugenden auch die dazu konjugiert imaginäre Erzeugende.

b) Für ovale Flächen lauten die Gleichungen der beiden Erzeugenden-Scharen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + ix_3 &= \lambda (x_4 - x_2) \\ x_2 + x_4 &= \lambda (x_1 - ix_3) \end{aligned} \right\} \quad \text{und} \quad \left. \begin{aligned} x_1 + ix_3 &= \mu (x_2 + x_4) \\ x_4 - x_2 &= \mu (x_1 - ix_3) \end{aligned} \right\}$$

Reelle Erzeugende sind auf diesen Flächen nicht vorhanden. Durch Anwendung des genannten Kriteriums erhält man nach einfacher Rechnung das Resultat, daß alle Erzeugenden der ovalen Flächen sowohl für reelle als auch komplexe Werte λ und μ nieder-imaginär sind. Da zwei Erzeugende derselben Schar sich niemals schneiden, folgt ferner, daß die Erzeugenden der einen Schar gerade die konjugiert imaginären Geraden zu den Erzeugenden der anderen Schar sind.

c) Auf den nullteiligen Flächen gibt es keine reellen Punkte, also müssen, da eine nieder-imaginäre Erzeugende stets einen reellen Punkt besitzt, nämlich ihren Schnittpunkt mit der konjugiert-imaginären Erzeugenden, die Erzeugenden bei nullteiligen Flächen hoch-imaginär sein. Daraus folgt ebenso, wie

bei den ringartigen Flächen, daß konjugiert-imaginäre Erzeugende stets in derselben Schar liegen.

§ 3. Komplexe Kollineationen, die ein nicht-ausgeartetes Gebilde zweiten Grades invariant lassen¹⁾.

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß durch Angabe von λ und μ je eine Erzeugende der ersten und eine der zweiten Schar eindeutig festgelegt wird und umgekehrt. Da nun einerseits bei den folgenden Betrachtungen das ausgezeichnete Gebilde zweiten Grades in sich übergehen soll, andererseits Kollineationen Gerade in Gerade überführen, so ist evident, daß durch Kollineationen, welche das quadratische Gebilde in sich überführen, entweder Erzeugende der einen Schar in Erzeugende der gleichen Schar oder in solche der anderen Schar transformiert werden, da auf der ausgezeichneten Fläche nur diese beiden Scharen von Erzeugenden vorhanden sind²⁾. Wir werden also zunächst zwei Arten von Kollineationen unterscheiden können, nämlich

1. solche, bei denen die Erzeugenden der einen Schar umkehrbar eindeutig in Erzeugende der gleichen Schar übergehen („eigentliche“ Kollineationen) und die durch eine Beziehung der Form $\lambda = f_1(\lambda')$; $\mu = f_2(\mu')$ dargestellt sind.

2. solche, bei denen die Erzeugenden der einen Schar umkehrbar eindeutig in Erzeugende der anderen Schar übergeführt werden („uneigentliche“ Kollineationen) und die durch eine Beziehung der Form $\mu = f_1(\lambda')$; $\lambda = f_2(\mu')$ dargestellt sind. Da die Funktionen, welche die obigen beiden Kollineationen darstellen, für jeden reellen und komplexen Wert von λ und μ analytisch und umkehrbar eindeutig sind, müssen sie linear sein (mit nicht verschwindender Determinante). Wir können also ansetzen:

1) Ich folge dabei Klein-Rosemann, S. 111 ff.

2) Eine dritte Möglichkeit, die sich etwa noch denken ließe, nämlich die, daß ein Teil der Erzeugenden der einen Schar in Erzeugende der gleichen Schar, ein anderer Teil in Erzeugende der anderen Schar übergeht, ist deshalb unmöglich, weil bei Kollineationen zwei sich schneidende Gerade wieder in sich schneidende Gerade übergehen, was hierbei wegen der besonderen Schnittpunktverhältnisse der beiden Scharen nicht der Fall wäre.

Gleichung der eigentlichen Kollineation:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}; \quad \mu = \frac{a\mu' + b}{c\mu' + d}; \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \\ (\alpha d - \beta c \neq 0)$$

Gleichung der uneigentlichen Kollineationen:

$$\mu = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}; \quad \lambda = \frac{a\mu' + b}{c\mu' + d}$$

Eine eigentliche Kollineation läßt sich eindeutig in folgende beiden speziellen Kollineationen zerlegen:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}; \quad \mu = \mu'$$

$$\text{und } \lambda' = \lambda''; \quad \mu' = \frac{a\mu'' + b}{c\mu'' + d}$$

Man bezeichnet diese beiden speziellen Kollineationen als Schiebungen 1. bzw. 2. Art. Geometrisch ist ihre Bedeutung leicht einzusehen: Bei der Schiebung 1. Art (bzw. 2. Art) sind die Erzeugenden der zweiten (bzw. ersten) Schar einzeln invariant, die Punkte der Erzeugenden der ersten (bzw. zweiten) Schar werden längs der Erzeugenden der anderen Schar verschoben. Andererseits läßt sich jede uneigentliche Kollineation aus einer eigentlichen Kollineation:

$$\lambda = \frac{a\lambda' + b}{c\lambda' + d}; \quad \mu = \frac{a\mu' + b}{\gamma\mu' + \delta}$$

und der speziellen uneigentlichen Kollineation:

$$\mu' = \lambda''; \quad \lambda' = \mu''$$

zusammensetzen.

Daß die Kollineationen, die wir bisher auf der nicht-ausgearteten ausgezeichneten Fläche betrachtet haben, im Raum eindeutig eine bestimmte Kollineation festlegen, wird ausführlich bei Klein-Rosemann Seite 113 ff. gezeigt. Wir wollen hier nur die Kollineation angeben, die der speziellen uneigentlichen Kollineation $\mu = \lambda'$; $\lambda = \mu'$ im Raum entspricht, da dies im folgenden gebraucht wird:

$$\begin{array}{lll} qY_1 = Y_1' & & \\ qY_2 = & Y_4' & (q \neq 0) \\ qY_3 = & Y_3' & D = -1 \\ qY_4 = & Y_2' & \end{array}$$

§ 4. Reelle uneigentliche Kollineationen, („Umlegungen“, speziell „Spiegelungen“), die ein nicht-ausgeartetes Gebilde 2. Grades invariant lassen.

In § 3 haben wir gezeigt, daß jede beliebige uneigentliche Kollineation sich aus einer bestimmten eigentlichen Kollineation und der speziellen uneigentlichen Kollineation $\lambda = \mu'$ $\mu = \lambda'$ zusammensetzen läßt. Wenn hierbei die uneigentliche Kollineation reell ist, so ist auch die eigentliche, welche mit der speziellen uneigentlichen zusammengesetzt gerade die Ausgangskollineation ergibt, notwendig reell, weil, wie wir im folgenden sehen werden, die spezielle uneigentliche Kollineation stets reell ist. Da aber die reellen eigentlichen Kollineationen in den folgenden Kapiteln ausführlich behandelt werden, genügt es hier zur Veranschaulichung der reellen starren Transformationen, die durch eine uneigentliche Kollineation vermittelt werden, diese spezielle uneigentliche Kollineation zu betrachten. Es besteht bei dieser Kollineation die Möglichkeit einer gemeinsamen Behandlung bei allen drei Typen von Fundamentalfächen. Aus diesem Grunde will ich diese Darstellung hier gleich vorwegnehmen, um mich dann in den folgenden Kapiteln nur noch mit eigentlichen Kollineationen beschäftigen zu müssen. Wenn wir in der Gleichung der speziellen uneigentlichen Kollineation im Raum:

$$\begin{array}{rcl} \varrho y_1 & = & y_1' \\ \varrho y_2 & = & y_4' \\ \varrho y_3 & = & y_3' \\ \varrho y_4 & = & y_2' \end{array} \quad D = -1$$

vermöge der in § 2 angegebenen Transformationen zu den x_i -Koordinaten, deren Koordinatentetraeder reell ist, übergehen, so erhalten wir bei allen drei Fundamentalfächen die gemeinsame reelle Form:

$$\begin{array}{rcl} \varrho x_1 & = & x_1' \\ \varrho x_2 & = & -x_2' \\ \varrho x_3 & = & x_3' \\ \varrho x_4 & = & x_4' \end{array} \quad D = -1$$

Man erkennt, daß hierbei nur eine Koordinate im Vorzeichen geändert wird. Wir werden daher diese Transformation in Anlehnung an die Ausdrucksweise der euklidischen Geometrie als

„Spiegelung“ an der Ebene $x_2 = 0$ bezeichnen, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß es sich hierbei um eine nicht-euklidische Spiegelung handelt. Daß die Bezeichnung „Spiegelung“ genau dem entspricht, was man auch in der euklidischen Geometrie darunter versteht, geht aus folgender Überlegung hervor, die gleichzeitig zur Veranschaulichung der speziellen uneigentlichen Kollineation dienen soll.

Bei der oben angegebenen speziellen uneigentlichen Kollineation geht die Ebene E ($x_2 = 0$) des Polartetraeders, auf welches die fundamentale Fläche bezogen ist, punktweise in sich über, also bleibt sicher auch der Pol P ($x_1 = x_3 = x_4 = 0$) dieser Ebene in bezug auf die ausgezeichnete Fläche fest. E und P sind dabei sicher reell, da ja das Polartetraeder der x_i -Koordinaten reell ist. Jede Gerade durch P geht, da sie die Fixpunktsebene E im projektiven Raum stets schneidet, auch als Ganzes in sich über. Da ferner in der nicht-euklidischen Geometrie Gerade, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, definiert sind als die Geraden, welche durch den Pol der Ebene bezüglich der ausgezeichneten Fläche gehen, folgt, daß auch jede Gerade durch P senkrecht steht auf E . Ein beliebiger Punkt A , der nicht Fixpunkt ist, — man sieht aus der Gleichung der Kollineation sofort, daß nur die Punkte der Ebene E und der Punkt P Fixpunkte sind — kann bei obiger Kollineation nur auf einer Geraden durch P wandern und möge dabei in einen anderen Punkt A' übergehen. Durch die gleiche Transformation geht aber, wie man aus den Transformationsformeln sofort sieht, andererseits der Punkt A' in A über. Daraus folgt, daß A und A' harmonisch liegen zu P und dem Schnittpunkt S ihrer Verbindungsgeraden mit der Ebene E ¹⁾. Insbesondere trennen sich also A , A' und S , P gegenseitig. Nun wissen wir aber, daß unsere betrachtete Kollineation eine starre Trans-

1) Dabei wende ich folgende bekannten Sätze aus der projektiven Geometrie an:

a) Eine projektive Transformation auf einer Geraden, welche ein nicht zusammenfallendes Punktpaar vertauscht, ist eine Involution. b) Eine Involution auf einer Geraden, welche zwei nicht zusammenfallende Fixpunkte hat (hier S und P) und nicht die Identität ist, führt jeden Punkt in den zu ihm in bezug auf die beiden Fixpunkte harmonischen Punkt über. (Folgt aus der Erhaltung des Doppelverhältnisses.)

formation ist, also nicht-euklidisch gemessene Abstände zweier Punkte erhält. Da S Fixpunkt ist, folgt daraus, daß A und A' von S die gleiche nicht-euklidische Entfernung haben. Dabei ist, falls der Punkt A reell ist, wegen der Realität von P auch die Gerade AP , also auch der Schnittpunkt S mit der reellen Ebene E reell, ferner auch der Punkt A' , da ja die Transformation reell ist. Zusammenfassend können wir also sagen:

1. Nicht-euklidisch betrachtet, wandern bei der speziellen uneigentlichen Kollineation die nicht festbleibenden Punkte auf zu der Ebene E senkrechten Geraden in ihre abstandsgleichen Spiegelbilder. Es ist also das genaue Analogon zu einer euklidischen Spiegelung an einer Ebene. Dem Punkt P entspricht dabei in der euklidischen Geometrie der unendlich ferne Punkt in der zu der spiegelnden Ebene senkrechten Richtung.

2. Euklidisch-anschaulich betrachtet, wandern bei der speziellen uneigentlichen Kollineation die nicht auf der Ebene E liegenden Punkte auf Geraden durch den fixen Pol P von E bezüglich der ausgezeichneten Fläche und zwar so, daß Original- und Bildpunkt zu P und dem Schnittpunkt S ihrer Verbindungsgeraden mit E harmonisch liegen. Die Punkte der Ebene E , sowie der Pol P sind die einzigen Fixpunkte.

Speziell geht jeder Punkt der ausgezeichneten Fläche, soweit er nicht Fixpunkt ist, über in den zweiten Schnittpunkt, welchen seine Verbindungslinie mit P mit der ausgezeichneten Fläche hat. Ja, es geht sogar jede nicht-ausgeartete quadratische Fläche, welche das reelle x_1 -Koordinatentetraeder als Polartetraeder besitzt, in sich über. Denn die Verbindungslinie des Poles P mit irgendeinem Punkt S der zugehörigen Polarebene E schneidet jede nicht-ausgeartete quadratische Fläche, in bezug auf die P und E Pol und Polarebene sind, in Punkten, welche zu P und S harmonisch liegen. Daraus folgt, daß Spiegelungen mit invarianter Fläche irgend eines nicht-ausgearteten Typs gleichzeitig auch Flächen der anderen nicht-ausgearteten Typen invariant lassen, d. h., daß z. B. eine Spiegelung mit invarianter nullteiliger Fläche gleichzeitig auch ovale und ringartige Flächen als Fixflächen besitzt und daher auch aufgefaßt werden kann als Spiegelung mit invarianter ovaler oder ringartiger Fundamentalfäche. Das ist die tiefere Grund, weshalb eine gemeinsame Behandlung und anschaulich völlig überein-

stimmende Darstellung bei allen drei Typen von ausgezeichneten Flächen möglich war.

Ein sehr anschauliches Bild dafür, daß sich bei einer solchen Abbildung gerade die beiden Erzeugenden-Scharen vertauschen, hat Felix Klein in seiner Vorlesung über nicht-euklidische Geometrie angegeben. Man wähle als Pol das eigene Auge und betrachte das mit seinen Erzeugenden versehene einschalige Hyperboloid so, daß man sich die uns zugekehrte Seite mit der uns abgekehrten bei der Zentralprojektion vertauscht denkt. Dann sieht man direkt anschaulich, daß sich dabei die beiden Erzeugenden-Scharen gerade miteinander vertauschen. Bemerkte sei noch folgende allgemeine Tatsache, die sich aus obigem ergibt: Die Flächen konstanten nicht-euklidischen Abstandes von einer Ebene schneiden die Geraden durch den Pol dieser Ebene in bezug auf die ausgezeichnete Fläche in Punkten, welche zum Pol und zum Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene harmonisch liegen.

Allgemein wollen wir die durch eine uneigentliche Kollineation dargestellte Transformation als „Umlegung“ bezeichnen im Gegensatz zu den in den nächsten Kapiteln zu behandelnden eigentlichen Kollineationen, die wir „Bewegungen“ nennen wollen.

§ 5. Reelle eigentliche Kollineationen („Bewegungen“), die ein nicht-ausgeartetes Gebilde 2. Grades invariant lassen.

A. Realität der Schiebungen.

In einem früheren Abschnitt haben wir bewiesen, daß jede Erzeugendenschar einer nullteiligen und ringartigen Fläche zu sich selbst konjugiert imaginär ist¹⁾, daß dagegen auf einer ovalen Fläche beide Scharen gegenseitig konjugiert imaginär sind. Nun kann man leicht bestätigen, daß diese Beziehungen, welche zwischen den Erzeugenden-Scharen bestehen, auch für die beiden Schiebungs-Scharen gelten, d. h., daß z. B. die konjugiert imaginäre Schiebung zu einer Schiebung 1. Art bei einer ovalen Fundamentalfäche eine Schiebung 2. Art ist usw.²⁾. Im

1) Reelle Erzeugende sind ebenfalls zu sich selbst konjugiert imaginär.

2) Der Nachweis dieser Tatsache ergibt sich leicht, indem man die allgemeine Gleichung einer Schiebung 1. Art, wie sie etwa bei Klein-Rosemann Seite 114 angegeben ist, vermöge der Formeln, welche die y_1 -Koordinaten durch die reellen x_1 -Koordinaten auszudrücken gestatten, in die

Anschluß an diese Tatsache ist bei Klein-Rosemann Seite 115 f. der Satz bewiesen: Die beiden Schiebungen, in welche eine reelle eigentliche Kollineation zerlegt werden kann, sind im Fall der ringartigen und nullteiligen Flächen stets reell, im Fall der ovalen Flächen stets zueinander konjugiert imaginär (also nicht reell, weil sonst beide Schiebungs-Scharen einander gleich wären).

B. Fixelemente.

Die Gleichung einer eigentlichen Kollineation der fundamentalen Fläche in sich hatten wir dargestellt in der Form:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}; \quad \mu = \frac{a\mu' + b}{c\mu' + d}; \quad \begin{matrix} (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \\ (ad - bc \neq 0) \end{matrix}$$

Die Erzeugenden, die bei der eigentlichen Kollineation fest bleiben, erhalten wir aus der quadratischen Gleichung:

$$\text{für die erste Schar: } \gamma\lambda^2 - (\alpha - \delta)\lambda - \beta = 0$$

$$\text{für die zweite Schar: } c\mu^2 - (a - d)\mu - b = 0$$

Wir sehen daraus, daß in jeder der beiden Scharen entweder zwei oder eine oder schließlich alle Erzeugenden fest bleiben. Bleiben in beiden Scharen gleichzeitig alle Erzeugenden fest, so ist die Transformation die Identität, von der wir im folgenden immer absehen wollen.

Um einen Einblick in die bei den einzelnen Fundamentalflächentypen möglichen Konstellationen von Fixelementen zu bekommen, verwenden wir folgende Hilfssätze:

Hilfssatz I: Bei jeder Kollineation des Raumes, welche die ausgezeichnete Fläche invariant läßt, gibt es auf dieser Fläche mindestens einen Fixpunkt¹⁾.

Hilfssatz II: Existieren auf der ausgezeichneten Fläche zwei verschiedene Fixpunkte, durch die keine gemeinsame Erzeugende geht, so gibt es bei jeder eigentlichen Kollineation der ausgezeichneten Fläche in sich auf dieser mindestens vier verschiedene, nicht komplanare Fixpunkte.

Beweis: Mit jedem auf der invarianten Fläche liegenden Fixpunkt geht auch die Tangentialebene an die Fläche in diesem Punkt in sich über. Da ferner eine eigentliche Kollineation

konjugiert imaginäre Form umschreibt und diese neue Form mit der allgemeinen Gleichung einer Schiebung 1. bzw. 2. Art vergleicht.

1) Zum Beweis dieser Tatsache siehe etwa Heffter III, Art. 436.

Erzeugende verschiedener Scharen nicht miteinander vertauschen kann, bleiben folglich auch die beiden Erzeugenden durch diesen Fixpunkt, in welchen ja die Tangentialebene die ausgezeichnete Fläche schneidet, einzeln invariant. Durch zwei nicht auf der gleichen Erzeugenden liegende Fixpunkte gibt es also je zwei Fixerzeugende, die alle voneinander verschieden sind. Da aber jede Erzeugende der einen Schar jede der anderen Schar schneidet, haben diese vier verschiedenen Fixerzeugenden noch zwei weitere Schnittpunkte, die ebenfalls Fixpunkte sein müssen. Die so nachgewiesenen vier Fixpunkte sind alle voneinander verschieden. Denn würden zwei dieser Fixpunkte zusammenfallen, dann gingen durch diesen Punkt zwei verschiedene Erzeugende der gleichen Schar. Ferner liegen die vier Fixpunkte sicher nicht in einer Ebene. Sonst müßten ja alle vier Fixerzeugenden in dieser Ebene liegen und es würden sich dann zwei verschiedene Erzeugende der gleichen Schar schneiden, da in der projektiven Ebene zwei verschiedene Gerade immer einen Schnittpunkt haben.

Hilfssatz III: Liegt auf der ausgezeichneten Fläche ein imaginärer Fixpunkt P_1 , so gibt es bei einer reellen eigentlichen Kollineation im Falle der nullteiligen und ovalen Fundamentalflächen sicher auf der ausgezeichneten Fläche mindestens vier verschiedene, nicht komplanare Fixpunkte.

Beweis: Da die Flächengleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm x_4^2 = 0$ nur reelle Koeffizienten hat, liegt mit dem einen imaginären Fixpunkt P_1 auch der dazu konjugiert imaginäre Punkt P_2 auf der Fläche. Dieser ist, da es sich um imaginäre (nicht reelle) Punkte handelt, sicher verschieden von P_1 . Außerdem ist mit P_1 auch P_2 Fixpunkt, da die Kollineation reell ist. Wir haben dann auf der ausgezeichneten Fläche zwei konjugiert imaginäre Fixpunkte. Diese sind voneinander verschieden und liegen nicht auf der gleichen Erzeugenden. Sonst müßte diese Erzeugende ja als Verbindungslinie konjugiert imaginärer Punkte reell sein, was bei ovalen und nullteiligen Flächen unmöglich ist. Daraus folgt nun nach Hilfssatz II die Existenz von vier verschiedenen, nicht komplanaren Fixpunkten auf der ausgezeichneten Fläche.

Hilfssatz IV: Wenn es auf der ausgezeichneten Fläche mindestens drei verschiedene, nicht in einer Geraden liegende Fixpunkte gibt, welche mit P_1 , P_2 und P_3 bezeichnet sein mögen,

dann gibt es bei jeder eigentlichen Kollineation der ausgezeichneten Fläche in sich auf dieser noch einen vierten Fixpunkt P_4 , der mit den drei anderen nicht in der gleichen Ebene liegt.

Beweis: Haben zwei der drei vorhandenen Fixpunkte, etwa P_1 und P_2 , keine Erzeugende gemein, so folgt die Behauptung nach Hilfssatz II. Liegen dagegen P_1 und P_2 auf der gleichen Erzeugenden, dann liegt P_3 nach Voraussetzung nicht auf dieser Erzeugenden. Durch P_1 und P_2 geht dann aber außer ihrer Verbindungslinie noch je eine weitere Fixerzeugende, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, da sie Erzeugende der gleichen Schar sind. P_3 hat also mit mindestens einem der beiden Punkte P_1 und P_2 keine Erzeugende gemein. Somit ist in jedem Fall Hilfssatz II anwendbar.

Hilfssatz V: Eine Gerade von Doppelpunkten kann bei reellen eigentlichen, von der Identität verschiedenen Kollineationen nie Erzeugende einer ovalen Fundamentalfläche sein.

Beweis: Blicke eine Erzeugende einer ovalen Fläche bei einer reellen eigentlichen, von der Identität verschiedenen Kollineation der Fläche in sich punktweise fest, so müßte, da mit einem Flächenpunkt auch die Tangentialebene durch diesen Punkt festbleibt und sich Erzeugende verschiedener Scharen nicht miteinander vertauschen können, jede Erzeugende der anderen Schar als Ganzes in sich übergehen. Die reelle Kollineation wäre dann also eine Schiebung. Nach § 5, A. gibt es aber bei ovalen Flächen als absolutem Gebilde keine reellen Schiebungen.

C. Hilfssätze zur Untersuchung der Realitätsverhältnisse.

Eine wesentliche Rolle spielen im folgenden die Realitätsuntersuchungen. Wir haben dabei zunächst ein selbstkonjugiertes¹⁾ Koordinatentetraeder zur Verfügung, dessen Realitätsverhältnisse bekannt sind. Über Lage und Realität des Einheitspunktes dieses Tetraeders werden jedoch keinerlei einschränkende Voraussetzungen gemacht. Der Lösung der Aufgabe, wie man von einem solchen Tetraeder zu einem reellen Koordinatentetraeder gelangen kann, ohne seine spezielle Lage im einzelnen formelmäßig

1) Ein Tetraeder heißt selbstkonjugiert, wenn es mit einem imaginären Eckpunkt stets gleichzeitig auch den konjugiert imaginären Punkt als Eckpunkt besitzt.

zu kennen, um dann in diesem reellen Koordinatensystem Gleichungen und Kollineationen auf Realität zu untersuchen, dienen die folgenden Hilfssätze, von denen die ersten beiden nur als Vorbereitung für Hilfssatz VI gelten sollen.

Hilfssatz VIa: Zwei selbstkonjugierte Tetraeder, mit gleichen Realitätsverhältnissen¹⁾ sind durch reelle lineare Transformationen mit nicht verschwindender Determinante ineinander überführbar.

Beweis: Es gibt im ganzen bei beiden Tetraedern 3 Realitätsmöglichkeiten:

1. Sind alle vier Eckpunkte des einen und folglich nach Voraussetzung auch des anderen Tetraeders reell, so ist die Richtigkeit des Satzes klar, da man ja sogar fünf reelle unabhängige Punkte durch eine reelle, lineare, nicht-singuläre Transformation in fünf reelle andere Punkte in allgemeiner Lage überführen kann.

2. Ist ein Eckpunkt des einen Tetraeders imaginär, so ist nach Voraussetzung ein anderer Eckpunkt des gleichen Tetraeders dazu konjugiert imaginär. Die beiden anderen Eckpunkte mögen reell sein. Aus der Annahme, daß die vier Eckpunkte linear unabhängig sind, folgt sofort, daß dann auch Real- und Imaginärteile der Koordinaten der Tetraedereckpunkte untereinander linear unabhängig sind: Seien nämlich $a_1 + ib_1$, $a_1 - ib_1$, c_1 , d_1 , ($l = 1, 2, 3, 4$), (a_l, b_l, c_l, d_l reell) die Koordinaten der Eckpunkte, welche auf irgend ein reelles Koordinatensystem bezogen sein mögen. Dann ist, wenn ich die Determinante etwas abgekürzt schreibe:

$$0 \neq \begin{vmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_1 - ib_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_1 - ib_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix} = -2i \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Insbesondere folgt daraus, daß a_1 oder b_1 oder c_1 oder d_1 nicht gleichzeitig für alle l -Werte verschwinden, sodaß diese Größen als Koordinaten von vier reellen, linear unabhängigen Punkten gedeutet werden können. Genau die gleichen Über-

1) Dabei verstehe ich unter gleichen Realitätsverhältnissen, daß die Anzahl der reellen und konjugiert imaginären Eckpunkte bei beiden Tetraedern die gleiche ist.

legungen gelten auch für die Koordinaten der Eckpunkte des zweiten Tetraeders, die mit Strichen versehen sein mögen. Nun gibt es nach 1. sicher eine reelle, lineare, nicht-singuläre Transformation, welche $\varrho_1 a_1$ in a'_1 , $\varrho_2 b_1$ in b'_1 , $\varrho_3 c_1$ in c'_1 und $\varrho_4 d_1$ in d'_1 überführt, wo ϱ_i von Null verschiedene Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Diese reelle Transformation führt aber die komplexen Punkte $a_1 + ib_1$ und $a_1 - ib_1$ nur dann in die entsprechenden Punkte des zweiten Tetraeders über, wenn die Transformation so gewählt werden kann, daß $\varrho_1 = \varrho_2$ wird. Daß dies in der Tat immer möglich ist, ja daß man sogar alle ϱ_i etwa $= 1$ setzen kann, folgt daraus, daß man nach Wahl von $\varrho_1 = 1$, wenn man die als Koordinaten von reellen Punkten aufgefaßten Real- und Imaginärteile der konjugiert imaginären Eckpunkte, ferner die Koordinaten der beiden reellen Eckpunkte in die allgemein mit reellen Koeffizienten angesetzte Transformationsgleichung einsetzt, zur Bestimmung dieser sechzehn Koeffizienten sechzehn inhomogene Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante erhält. Daß die Transformation selbst nicht singulär ist, ist klar, da anderfalls die durch a'_1 , b'_1 , c'_1 und d'_1 dargestellt gedachten vier reellen Punkte in einer Ebene liegen müßten¹⁾.

Bemerkt sei übrigens noch nebenbei, daß es wegen der notwendigen Zusatzbedingung $\varrho_1 = \varrho_2$ im allgemeinen nicht mehr möglich zu sein braucht, auch noch einen beliebigen, von den vier Eckpunkten des Tetraeders unabhängigen reellen Punkt in einen beliebigen, von den Eckpunkten des zweiten Tetraeders unabhängigen reellen Punkt durch die gleiche reelle Transformation überzuführen, wie das etwa bei fünf reellen unabhängigen Punkten immer möglich ist.

3. Wenn je zwei Punkte der beiden Tetraeder paarweise konjugiert imaginär sind, führen genau die analogen Überlegungen zum Ziel. Die lineare Unabhängigkeit der Real- und Imaginärteile ergibt sich wieder aus folgender Umformung der von Null verschiedenen Determinante:

$$0 \neq \begin{vmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_1 - ib_1 \\ c_1 + id_1 \\ c_1 - id_1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_1 - ib_1 \\ c_1 \\ c_1 - id_1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

1) Siehe M. Bôcher, Einf. in die höh. Algebra. 1925, S. 77.

Im übrigen gilt genau das Analoge, wie bei 2., nur muß hier außer der Bedingung $\varrho_1 = \varrho_2$ auch noch die Bedingung $\varrho_3 = \varrho_4$ erfüllt sein, was ja für $\varrho_1 = 1$ der Fall ist. Damit ist der Satz allgemein bewiesen.

Hilfssatz VIb: Es sei $y^* = A(x^*)$ eine lineare, nicht-singuläre¹⁾ Koordinatentransformation, die das selbstkonjugierte Fundamentaltetraeder²⁾ Y^* in ein reelles X^* -Fundamentaltetraeder überführt; ferner bedeute Y irgend ein Tetraeder mit den gleichen Realitätseigenschaften wie Y^* . Dann führt auch die Koordinatentransformation $y = A(x)$ bei „passender“ Wahl des Einheitspunktes das Fundamentaltetraeder Y in ein reelles Fundamentaltetraeder X über.

Beweis: Da die beiden Tetraeder Y^* und Y die Voraussetzungen von Hilfssatz VIa erfüllen, gibt es eine reelle Kollineation II , welche die Eckpunkte des Y^* -Tetraeders in die des Y -Tetraeders überführt. Als Einheitspunkt möge in dem Fundamentaltetraeder Y der Punkt gewählt sein, der aus dem Einheitspunkt von Y^* durch die Kollineation II hervorgeht. Dann läßt sich die Kollineation II , wenn wir sie als Kollineation zweier Räume ineinander auffassen, wobei in dem einen Raum das Fundamentaltetraeder Y^* , in dem anderen das Fundamentaltetraeder Y als Bezugstetraeder der Koordinatenbestimmung zugrunde gelegt ist, in der einfachen Form darstellen³⁾:

$$\varrho y_i^* = y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Durch die gleiche reelle Kollineation II wird aber das reelle Fundamentaltetraeder X^* einschließlich seines reellen Einheitspunktes sicher wieder in ein reelles — das ist das Wesentliche — Fundamentaltetraeder X übergeführt und wir können die Kollineation II auch in der Form

$$\varrho x_i^* = x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{darstellen.}$$

Da nun nach Voraussetzung die Koordinatentransformation $y^* = A(x^*)$ die y_i^* - und x_i^* -Koordinaten miteinander in Beziehung bringt, stellt die aus $y^* = A(x^*)$ vermöge der Trans-

1) Im folgenden lasse ich die Bezeichnung „linear, nicht-singulär“ weg, da alle folgenden Transformationen diese Eigenschaft haben.

2) Ein Fundamentaltetraeder sei im Gegensatz zum Tetraeder schlechthin ein Koordinatentetraeder mit Einheitspunkt.

3) Siehe etwa Heffter II, S. 110 oder Schoenflies, Einf. in die analyt. Geometrie. 1925, S. 166f, 227.

formation Π hervorgehende Koordinatentransformation $y = B(x)$ eine Beziehung dar zwischen den y_i - und x_i -Koordinaten, deren Fundamentaltetraeder gerade durch die Kollineation Π aus den Fundamentaltetraedern der y_i^* - bzw. x_i^* -Koordinaten hervorgegangen waren. Nach der oben angegebenen analytischen Form der Kollineation Π ist aber $A = B$.

Damit ist der Satz bewiesen. Gleichzeitig geht aus dem Beweis hervor, inwiefern der Einheitspunkt des Y-Tetraeders „passend“ gewählt werden muß. Es ist damit gemeint, daß als Einheitspunkt des Fundamentaltetraeders Y eben der Punkt zu wählen ist, der vermöge der Transformationsgleichungen $y = A(x)$ einem reellen Einheitspunkt des reellen X-Tetraeders entspricht, wenn man die Transformation $y = A(x)$ als Punkttransformation, also als Beziehung zwischen den auf das gleiche Koordinatentetraeder bezogenen Koordinaten verschiedener Punkte auffaßt¹⁾.

Aus diesem Satz folgt nun unmittelbar der für das folgende grundlegende

Hilfssatz VI: Die Koordinatentransformation $y = A(x)$ führt das selbstkonjugierte Fundamentaltetraeders Y dann und nur dann bei „passender“ Wahl des Einheitspunktes in ein reelles X-Fundamentaltetraeder über, wenn durch die Transformation $x = A^{-1}(y)$ die Realitätsverhältnisse von Y richtig wiedergegeben werden, sofern man die x_i als Koordinaten eines reellen Fundamentaltetraeders auffaßt²⁾.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Daß sie auch hinreichend ist, ergibt sich so: Da nach Voraussetzung die Transformation $x = A^{-1}(y)$ unter der Annahme der Realität des X-Tetraeders die Realitätsverhältnisse des Y-Tetraeders richtig wiedergibt, gibt es sicher eine Transformation $x^* = A^{-1}(y^*)$, welche den Übergang zwischen einem reellen Fundamental-

1) Die Notwendigkeit der besonderen Behandlung des Einheitspunktes hat ihren Grund darin, daß Hilfssatz VIa nicht mehr allgemein gilt, wenn man außer den beiden Tetraedern auch noch beliebig vorgegebene Einheitspunkte ineinander transformieren will.

2) Damit ist gemeint, daß etwa zwei Ebenen des Y-Tetraeders, welche zueinander konjugiert imaginär sind, d. h. von denen jede die zu den Punkten der anderen konjugiert imaginären Punkte enthält, vermöge dieser Transformation in den x_i -Koordinaten in explizit konjugiert imaginärer Form, also etwa als $x_1 + ix_2 = 0$ bzw. $x_1 - ix_2 = 0$ erscheinen.

tetraeder X^* und einem Fundamentaltetraeder Y^* , das die gleichen Realitätsverhältnisse, wie Y , hat, vermittelt. Nach Hilfssatz VIb stellt dann $y = A(x)$ in der Tat einen Übergang von dem ganz speziell gewählten Tetraeder Y zu einem reellen Fundamentaltetraeder X dar, wenn in Y der Einheitspunkt „passend“ gewählt ist.

In den Betrachtungen der folgenden Kapitel haben wir in allen Fällen, wo ein Übergang zu Koordinaten eines reellen Bezugstetraeders X notwendig wird, stets zuerst ein spezielles selbstkonjugiertes y_i -Koordinatentetraeder zur Verfügung, dessen Realitätsverhältnisse bekannt sind. Der Einheitspunkt dieses Tetraeders Y ist jedoch in keiner Weise festgelegt. Wir können also gemäß Hilfssatz VI jederzeit leicht eine Koordinatentransformation L angeben, die auf ein reelles Fundamentaltetraeder X führt und dann erst vermöge dieser Transformation den Einheitspunkt des Tetraeders Y „passend“ wählen. Die Schwierigkeit liegt nur darin, daß wir die Gleichung der fest vorgegebenen ausgezeichneten Fläche in den y_i -Koordinaten noch nicht sofort explizit angeben können, da die Lage des „passenden“ Einheitspunktes noch gar nicht bekannt ist, bevor wir die Transformation L festgelegt haben¹⁾. Wir können aber die Gleichung der ausgezeichneten Fläche zunächst in den y_i -Koordinaten allgemein mit noch unbestimmten Koeffizienten ansetzen²⁾, dann durch eine gemäß Hilfssatz VI gewählte Transformation L zu einem reellen Koordinatentetraeder X übergehen und die transformierte Flächengleichung in den x_i -Koordinaten auf ihren Charakter untersuchen. So erhalten wir für die noch unbestimmten Koeffizienten gewisse Bedingungen dafür, daß die angesetzte Flächengleichung die Signatur hat, welche der Typ der ausgezeichneten Fläche erfordert.

Natürlich besteht in der expliziten Wahl der Transformation L noch eine gewisse Freiheit, die wir im speziellen Fall dazu

1) Bekanntlich kann ja z. B. dieselbe Gleichung, wenn man sie auf zwei verschiedene Koordinatentetraeder bezieht, die sich lediglich durch die Lage ihrer Einheitspunkte unterscheiden, sogar zwei Flächen verschiedener Signatur darstellen.

2) Dabei kommt als vereinfachender Umstand hinzu, daß im folgenden das Y -Tetraeder in den in Frage kommenden Fällen stets Tangential-Tetraeder an die ausgezeichnete Fläche ist, sodaß die Flächengleichung doch schon etwas spezieller angesetzt werden kann.

benützen können, unnötige Komplikationen in den Rechnungen zu vermeiden und z. B. für die Gleichung der ausgezeichneten Fläche bzw. der Fixflächen in den reellen Koordinaten eine einfache Form zu erhalten, die möglichst sofort den Charakter dieser Flächen zu erkennen gestattet. Es muß aber bemerkt werden, daß die Bedingungen, die wir für die zunächst unbestimmten Koeffizienten der ausgezeichneten Fläche erhalten, von der expliziten Wahl der Transformation L nicht unabhängig sind.

D. Aufbau.

Beim Aufbau der Arbeit ist folgender Gesichtspunkt maßgebend: Wir gehen zunächst aus von einer Klassifikation der allgemeinen eindeutigen Kollineationen des Raumes, wie sie etwa in Heffter II Art. 264 oder in einer Arbeit von R. Baldus¹⁾ dargestellt sind, und untersuchen, welche Folgen die Forderung der Invarianz einer nicht-ausgearteten quadratischen Fläche hat. Es gelingt unter Berücksichtigung dieser Forderung bei Beschränkung auf reelle eigentliche Kollineationen durch verhältnismäßig einfache Betrachtungen von den 14 allgemeinen räumlichen Kollineationstypen sofort 8 Typen als unmöglich auszuscheiden. Bei nullteiligen bzw. ovalen Fundamentalfächen ist ferner die Ausscheidung von drei bzw. zwei weiteren Typen möglich. Dadurch vereinfachen sich ganz wesentlich die Überlegungen über die bei den einzelnen ausgezeichneten Flächentypen überhaupt noch möglichen Fälle von Bewegungen. Bei einigen Bewegungstypen werden wir auch durch die Forderung der Invarianz der ausgezeichneten Fläche notwendige Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Bewegung und den Koeffizienten der Gleichung der ausgezeichneten Fläche erhalten. Man kann nun diese Beziehungen auffassen entweder als Bedingungen für die Transformationskoeffizienten bei vorgegebener ausgezeichneter Fläche oder als Bedingungen für die aus-

1) R. Baldus: Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen. Sitzungsberichte der Bayr. Akad. der Wissenschaften, Math.-Naturwissensch. Abteilung, 1928.

Ich folge der Baldus'schen Arbeit, weil in ihr bei den angegebenen Figuren alle wesentlichen Fixelemente (vor allem auch die Fixgeraden) eingezeichnet sind, und weil bei der Baldus'schen Klassifikation die Typen (11) und (13) getrennt erscheinen, die bei Heffter dem einen Typ V, 2 entsprechen.

gezeichnete Fläche bei vorgegebener Transformation. Wir wollen stets in diesen Fällen die letzte Auffassung annehmen, also die Transformation selbst nicht weiter beschränken.

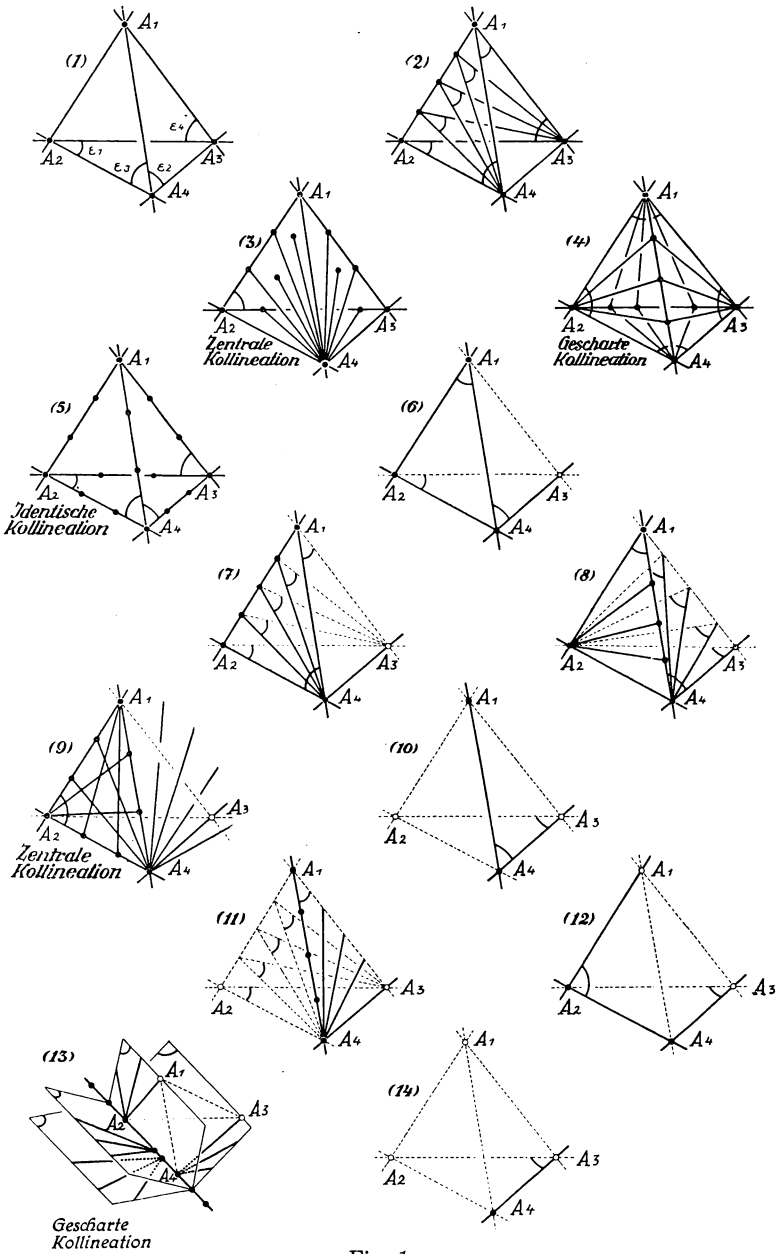
Schließlich sei noch der Grundgedanke erwähnt, durch den die Einordnung sämtlicher reeller Bewegungen mit nullteiliger ausgezeichnete Fläche und — mit einer Ausnahme — auch der reellen Bewegungen mit ovaler Fundamentalfläche in die reellen Bewegungen mit ringartiger Fundamentalfläche ermöglicht wird. Es wird sich zeigen, daß alle reellen Bewegungen mit invarianter nullteiliger Fläche reelle ringartige Fixflächen besitzen. Es können also alle diese Bewegungen auch aufgefaßt werden als Bewegungen, welche eine reelle ringartige quadratische Fläche invariant lassen, womit sofort die Einordnungsmöglichkeit gegeben ist, da ja dann ein gleicher Bewegungstyp im Falle ringartiger Fundamentalflächen vorkommen muß. Analoges läßt sich auch — mit Ausnahme eines einzigen Bewegungstyps, für den die Unmöglichkeit der Einordnung später bewiesen wird — für die reellen Bewegungen mit ovaler Fundamentalfläche zeigen.

E. Ausscheidung von allgemeinen Kollineationstypen des Raumes, falls die Invarianz einer quadratischen nicht-ausgearteten Fläche gefordert wird.

In Verfolgung des in D. dargestellten Gedankengangs behaupte ich, daß folgende allgemeinen Kollineationstypen des Raumes bei eigentlichen reellen Kollineationen mit invarianter nicht-ausgearteter quadratischer Fläche unmöglich sind, falls wir dabei von der Identität absehen¹⁾:

- | | | | | |
|----|-----|------|----------|----------|
| a) | Typ | (3) | [IV, 3] | [(111)1] |
| b) | " | (5) | [V, 4] | [(1111)] |
| c) | " | (6) | [II, 1] | [211] |
| d) | " | (7) | [III, 3] | [2(11)] |
| e) | " | (8) | [IV, 2] | [(21)1] |
| f) | " | (9) | [V, 3] | [(211)] |
| g) | " | (10) | [IV, 1] | [31] |
| h) | " | (14) | [V, 1] | [4] |

1) Dabei gebe ich die Typen in der Bezeichnung der erwähnten Baldus'schen Arbeit (siehe dort Fig. 3) an und füge in Klammern den entsprechenden Typ in der Bezeichnungsweise der Heffter'schen Klassifikation, ferner den zugehörigen Elementarteilertypus bei.



Beweis¹⁾: a) Bei Typ (3) enthalten zwei sich schneidende Fixgerade außer ihrem Schnittpunkt stets noch je mindestens einen weiteren Fixpunkt. Nach Hilfssatz I existiert auf der ausgezeichneten Fläche ein Fixpunkt. Die beiden durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden sind folglich Fixgerade. Diese enthalten bei der vorliegenden Kollineation also außer ihrem Schnittpunkt je noch einen weiteren Fixpunkt. Nach Hilfssatz IV gibt es dann auf der ausgezeichneten Fläche einen vierten Fixpunkt, der nicht in der durch die beiden Fixerzeugenden bestimmten Ebene liegt. Der Punkt A_4 (siehe Fig. 1) muß also in jedem Fall ein Fixpunkt der Fläche sein. Die durch A_4 gehenden Erzeugenden, welche Fixgeraden sind, enthalten außer A_4 noch je einen weiteren Fixpunkt. Diese beiden Fixpunkte, welche mit P_1 bzw. P_2 bezeichnet sein mögen, liegen einerseits in der Ebene ε_4 , andererseits sind sie Punkte der ausgezeichneten Fläche. Durch P_1 und P_2 geht dann je noch eine weitere Fixerzeugende, die verschiedenen Scharen angehören und beide ebenfalls ganz in der Ebene ε_4 liegen müssen, da außer den Geraden durch A_4 nur die Geraden der Ebene ε_4 Fixgerade sind. Weil aber alle Punkte der Ebene ε_4 Fixpunkte sind, sind alle Punkte dieser beiden, verschiedenen Scharen angehörenden Erzeugenden Fixpunkte, woraus folgt, daß die eigentliche Kollineation nur die Identität sein kann. Denn es bleiben dann sowohl alle Erzeugenden der ersten als auch alle der zweiten Schar fest. Von der Identität wollen wir aber im folgenden immer absehen.

b) Typ (5) ist die Identität, die wir stets ausschließen wollen.

c) Bei Typ (6) muß nach Hilfssatz I einer der drei Fixpunkte A_1, A_2, A_4 ein Fixpunkt der Fläche sein. Ist A_1 bzw. A_2 dieser Fixpunkt der Fläche, so sind A_1A_2 und A_1A_4 bzw. A_1A_2 und A_2A_4 die durch diesen Fixpunkt gehenden Fixerzeugenden. Denn es gibt ja durch die beiden Punkte jeweils nur diese zwei Fixgeraden. Also sind auch A_2 und A_4 bzw. A_1

1) Siehe dazu Fig. 1. Die gezeichneten Figuren für die einzelnen Typen dienen nur zur Veranschaulichung der gegenseitigen Lage von Fixelementen, sie sind aber keineswegs notwendig reell. Dick ausgefüllte Punkte und ausgezogene Geraden bedeuten Fixelemente. Die Zeichnungen sind der Baldus'schen Arbeit entnommen.

und A_4 Fixpunkte der Fläche. Nach Hilfssatz IV müßte dann noch ein vierter Fixpunkt existieren, was bei dieser Kollineation nicht der Fall ist. Ist aber A_4 Fixpunkt der Fläche, so ist mindestens eine der beiden Geraden A_1A_4 und A_2A_4 Fixerzeugende durch A_4 , also mindestens einer der beiden Punkte A_1 und A_2 ein Fixpunkt der Fläche. Dann sind aber wieder die ersten Schlüsse anwendbar.

d) Bei Typ (7) sind genau die gleichen Schlüsse wie unter c) bei Typ (6) anwendbar: Nach Hilfssatz I muß einer der Punkte auf der Geraden A_1A_2 oder der Punkt A_4 ein Fixpunkt der Fläche sein. Ist nun ein Punkt der Geraden A_1A_2 Fixpunkt der Fläche, so folgt wie bei Typ (6), daß sowohl der Punkt A_4 als auch alle Punkte der Geraden A_1A_2 Fixpunkte der Fläche sind, was nach Hilfssatz IV einen weiteren Fixpunkt außerhalb der Ebene ε_3 erfordern würde. Falls aber A_4 Fixpunkt der Fläche ist, so ist mindestens eine der Fixgeraden der Ebene ε_3 Fixerzeugende, also mindestens ein Punkt der Geraden A_1A_2 ein Fixpunkt der Fläche. Dann sind aber wieder die ersten Schlüsse anwendbar.

e) Liegt bei Typ (8) ein von A_4 verschiedener Fixpunkt auf der ausgezeichneten Fläche, so gelten genau die analogen Schlüsse wie bei Typ (7). Ist aber der Punkt A_4 ein Fixpunkt der Fläche, so sind die Überlegungen wie bei Typ (7) nur anwendbar, wenn mindestens eine der Geraden A_1A_4 und A_2A_4 Fixerzeugende durch A_4 ist. Ist dies aber nicht der Fall, d. h. sind zwei von A_1A_4 und A_2A_4 verschiedene Fixgerade der Ebene ε_2 die durch A_4 gehenden Fixerzeugenden, so führt folgende Überlegung zu einem Widerspruch: ε_2 wäre dann Tangentialebene im Punkt A_4 an die Fläche. Die Gerade A_1A_4 wäre also eine lauter Fixpunkte enthaltende Tangente an die Fläche. Dann müßte aber die konjugierte Polare zu dieser Fixpunkt tangente eine von A_1A_4 verschiedene Fixgerade der Tangentialebene ε_2 sein und selbst ein ganzes Büschel von Fixebenen tragen, nämlich die Polarebenen zu den Tangenten-Fixpunkten. Diese Forderung wird aber durch Typ (8) nicht erfüllt.

f) Bei Typ (9) gibt es eine ganze Ebene von Fixpunkten. Ist diese Ebene Tangentialebene an die ausgezeichnete Fläche, dann gibt es zwei Erzeugende verschiedener Scharen, nämlich

die Schnittgeraden der Tangentialebene mit der Fläche, deren sämtliche Punkte Fixpunkte sind. Die Kollineation müßte dann die Identität sein. Ist aber die Fixpunktebene nicht Tangentialebene an die Fläche, so schneidet sie die nicht-ausgeartete Fläche in einem nicht-ausgearteten Kegelschnitt, dessen sämtliche Punkte Fixpunkte sind. Es gäbe dann sicher drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Fixpunkte der Fläche, was nach Hilfssatz IV einen weiteren Fixpunkt außerhalb der Fixpunktebene erfordern würde. Diese Forderung wird aber durch die Kollineationen des Typs (9) nicht erfüllt.

g) Bei Typ (10) muß nach Hilfssatz I entweder A_1 oder A_4 ein Fixpunkt der Fläche sein. Ist es der Punkt A_4 , so ist die Fixgerade A_1A_4 sicher eine der beiden durch A_4 gehenden Fixerzeugenden, also auch A_1 ein Fixpunkt der Fläche. Der Fixpunkt A_1 liegt also in jedem Fall auf der ausgezeichneten Fläche. Dann müßte es aber durch A_1 außer der Geraden A_1A_4 eine weitere Fixgerade geben, nämlich die zweite durch A_1 gehende Fixerzeugende, und diese Bedingung ist bei Typ (10) nicht erfüllt.

h) Bei Typ (14) müßte aus dem gleichen Grunde durch A_4 außer A_3A_4 eine zweite Fixgerade gehen, was durch diese Kollineation nicht geleistet wird¹⁾.

Kapitel II:

Reelle eigentliche Kollineationen, welche eine nullteilige Fläche invariant lassen.

§ 1. Invariantes Tangentialtetraeder.

Nach Hilfssatz I gibt es bei jeder Kollineation, welche die ausgezeichnete Fläche invariant läßt, auf dieser mindestens einen Fixpunkt. Dieser Fixpunkt ist bei nullteiligen Fundamentalflächen notwendig imaginär, da die Fläche nur imaginäre Punkte enthält. Nach Hilfssatz III läßt dann eine reelle eigentliche Kollineation auf der ausgezeichneten nullteiligen Fläche vier verschiedene, nicht komplanare Punkte fest. Bei nullteiligen Flächen als absolutem Gebilde scheiden also auch die Balduschen Kollineationstypen (11) [Heffter V, 2], [Elementarteiler-

1) Alle diese Überlegungen gelten übrigens nicht nur für reelle, sondern für beliebige komplexe, aber eigentliche Kollineationen.

typus [(31)], (12) [III, 1] [22] und (13) [V, 2] [(22)] aus, bei denen eine solche Anordnung der Fixpunkte unmöglich ist. Es bleiben dann in diesem Fall nur die Typen (1) [I] [1111], (2) [II, 2] [(11) 11] und (4) [III, 2] [(11) (11)] übrig.

Durch die vier verschiedenen, nicht komplanaren Fixpunkte der invarianten Fläche ist ein invariantes Tetraeder festgelegt, dessen Realitätsverhältnisse bekannt sind. Aus den Beweisen

von Hilfssatz II und III folgt nämlich, daß zwei dieser Fixpunkte, etwa P_2 und P_4 (siehe Fig. 2), als konjugiert-imaginär angenommen werden können.

Die andern beiden sind dann gerade die Schnittpunkte der durch P_2 und P_4 gehenden, paarweise konjugiert-imaginären Fixerzeugenden. Und zwar sind, da bei nullteiligen Flächen konjugiert-imaginäre Erzeugende in

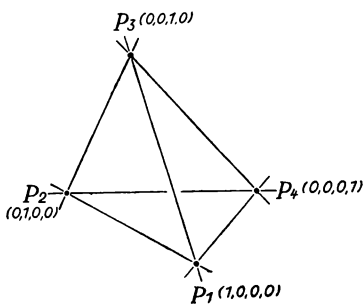


Fig. 2.

der gleichen Schar liegen, P_1P_4 und P_2P_3 bzw. P_1P_2 und P_3P_4 konjugiert-imaginäre Erzeugende. Der imaginäre Punkt P_3 enthält also auch gerade die zu den Erzeugenden durch P_1 konjugiert-imaginären Erzeugenden, woraus folgt, daß auch P_1 und P_3 konjugiert-imaginäre Punkte sind. Dann sind aber die Geraden P_2P_4 und P_1P_3 , welche gerade konjugierte Polaren bezüglich der ausgezeichneten Fläche¹⁾ sind, als Verbindungslinien konjugiert-imaginärer Punkte reell.

§ 2. Ausgezeichnete Fläche und Realität der Bewegungen.

Wählen wir nun das invariante Tangentialtetraeder der ausgezeichneten Fläche als Koordinatentetraeder — ohne jedoch den Einheitspunkt schon festzulegen — und versehen wir die Eckpunkte entsprechend mit den Koordinaten $P_4(0, 0, 0, 1)$, $P_1(1, 0, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0, 0)$, $P_3(0, 0, 1, 0)$, so hat die Gleichung der ausgezeichneten Fläche bei Bezug auf dieses Tetraeder die

1) Im folgenden lasse ich den Zusatz „bezüglich der ausgezeichneten Fläche“ weg. Pol und Polare sind also, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, stets in bezug auf die invariante ausgezeichnete Fläche zu verstehen.

Form: $y_1 y_3 - k_1 y_2 y_4 = 0^1$), wobei der Koeffizient k_1 zunächst noch unbestimmt (jedoch $\neq 0$) ist. Nun sind die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ bzw. $y_2 = 0$ und $y_4 = 0$ des Tetraeders sicher zueinander konjugiert-imaginär. Nach Hilfssatz VI vermittelt also die Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 + i x_2 & (\varrho \neq 0) \\ \varrho y_2 &= x_3 + i x_4 & D = 4 \\ \varrho y_3 &= x_1 - i x_2 \\ \varrho y_4 &= x_3 - i x_4 \end{aligned}$$

einen Übergang zu Koordinaten eines reellen x_i -Koordinatentetraeders, in dem die Gleichung der ausgezeichneten Fläche lautet: $x_1^2 + x_2^2 - k_1 (x_3^2 + x_4^2) = 0$.

Bei Bezug auf das mit „passendem“ Einheitspunkt versehene y_i -Tetraeder stellt also die angesetzte Flächengleichung dann und nur dann eine nullteilige Fläche dar, wenn k_1 reell und < 0 ist.

Da die zu betrachtende eigentliche Kollineation jede Ebene des invarianten Tetraeders in sich überführt, muß sie die Form haben:

$$\begin{aligned} \text{I. } \varrho y_1' &= a y_1 \\ \varrho y_2' &= b y_2 \\ \varrho y_3' &= c y_3 \\ \varrho y_4' &= d y_4, \end{aligned} \quad D = a b c d \neq 0$$

aus der man durch speziellere Wahl der Koeffizienten die Bewegungstypen (1), (2) und (4) erhält. Ferner muß, damit die ausgezeichnete Fläche invariant bleibt, die Beziehung $ac = bd$ erfüllt sein. Die Untersuchung, ob und für welche Werte der Koeffizienten diese Kollineation reell ist, läßt sich sofort durch Übergang zu den reellen x_i -Koordinaten durchführen. In diesen Koordinaten lautet die Transformation I:

1) Dabei wähle ich absichtlich diese Gleichung nicht in der bezüglich der Koeffizienten homogenen Form $a_{13} y_1 y_3 + a_{24} y_2 y_4 = 0$, da in diesem Fall die Koeffizienten nur bis auf gemeinsame gleiche (eventl. komplexe), von Null verschiedene Vielfache bestimmt wären, wodurch die Diskussion der Flächengleichung in reellen Koordinaten nicht ganz so einfach wie im folgenden würde. Da die Fläche nicht ausgeartet sein soll, muß ja sicher a_{13} und $a_{24} \neq 0$ sein, sodaß sich immer obige Form erreichen läßt.

$$\begin{aligned}\text{Ir. } \varrho x_1' &= (a + c)x_1 + i(a - c)x_2 \\ \varrho x_2' &= -i(a - c)x_1 + (a + c)x_2 \\ \varrho x_3' &= (b + d)x_3 + i(b - d)x_4 \\ \varrho x_4' &= -i(b - d)x_3 + (b + d)x_4.\end{aligned}$$

Da wir den Proportionalitätsfaktor ϱ noch zur beliebigen Verfügung haben, ist diese Kollineation dann und nur dann reell, wenn $a + c$ und $i(a - c)$, ferner $b + d$ und $i(b - d)$ gleiche eventl. komplexe Vielfache von reellen Zahlen sind, also wenn

$$\begin{aligned}a + c &= tA \\ a - c &= itB \\ b + d &= tC \\ b - d &= itD\end{aligned}$$

ist, wo t eine beliebige, von Null verschiedene Konstante und A, B, C, D reelle Zahlen sind, ferner wegen $abcd \neq 0$ auch $A^2 + B^2 \neq 0$ und $C^2 + D^2 \neq 0$ ist. Daraus erhält man als notwendige und hinreichende Bedingung für Realität der Kollineation I:

$$a = \frac{t}{2} (A + iB)$$

$$c = \frac{t}{2} (A - iB)$$

$$b = \frac{t}{2} (C + iD)$$

$$d = \frac{t}{2} (C - iD)$$

Nun soll aber bei der Kollineation I auch die Beziehung $ac = bd$ oder $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ erfüllt sein. Es müssen also a und c , sowie b und d jeweils gleiche Vielfache von konjugiert-imaginären (eventl. gleichen reellen) Zahlen ($\neq 0$) sein, deren absolute Beträge einander gleich sind.

Wegen des willkürlichen Proportionalitätsfaktors ϱ kann man übrigens die Kollineation I stets so normieren, daß $ac = bd$ gleich Eins wird. Dann können wir die Kollineation in der Form schreiben:

1) ϱ ist immer ein beliebiger, von Null verschiedener Proportionalitätsfaktor und braucht in den verschiedenen Systemen von Transformationsgleichungen nicht stets dieselbe Zahl zu sein.

$$\begin{aligned}
 I^*. \quad \varrho y_1' &= a y_1 \\
 \varrho y_2' &= b y_2 \\
 \varrho y_3' &= \frac{1}{a} y_3 & a b \neq 0 \\
 \varrho y_4' &= \frac{1}{b} y_4
 \end{aligned}$$

Wenden wir nun unser Realitätskriterium auf diese normierte Form an, so muß, damit die Kollineation I^* reell ist, gelten („überstrichen“ bedeutet „konjugiert imaginär“):

$$\begin{aligned}
 a &= t u; & b &= t v; & (t, u, v \neq 0) \\
 \frac{1}{a} &= t \bar{u}; & \frac{1}{b} &= t \bar{v}; & (|u| = |v|).
 \end{aligned}$$

Wir haben hier 4 Bedingungsgleichungen, denen die Transformationskoeffizienten a und b gleichzeitig genügen sollen. Das ist nur möglich, wenn wir auch noch über den zunächst willkürlichen Faktor t gemäß dieser Gleichungen verfügen¹⁾. Man bekommt nämlich aus obigen 4 Gleichungen:

$$1 = t^2 u \bar{u} = t^2 |u|^2$$

$$\text{und} \quad 1 = t^2 v \bar{v} = t^2 |v|^2.$$

Es muß also $t^2 = \frac{1}{|u|^2} = \frac{1}{|v|^2} > 0$ und reell sein, woraus folgt, daß t selbst reell sein muß. Dann ergeben aber die obigen 4 Gleichungen wegen $\bar{a} = t \bar{u}$ und $\bar{b} = t \bar{v}$ für a und b die notwendige Bedingung, daß $a \bar{a} = 1$ und $b \bar{b} = 1$, also $|a| = |b| = 1$ sein muß. Daß diese Bedingung zur Erfüllung der obigen Gleichungen auch hinreicht, geht daraus hervor, daß für $|a| = 1$: $\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{a \bar{a}} = \bar{a}$ ist, sodaß für reelles t die Gleichungen erfüllt sind, ebenso für $|b| = 1$; ferner ist für $|a| = |b| = 1$ auch $|u| = |v|$.

1) Die Notwendigkeit der Verfügung über den zunächst willkürlichen Faktor t , die sich auch im folgenden immer ergibt, wenn wir von der Kollineationsgleichung in der normierten Form ausgehen, hat ihren eigentlichen Grund darin, daß die Multiplikation aller Kollineationsgleichungen mit irgendeinem von Null und ± 1 verschiedenen Faktor wohl die durch die Transformation dargestellte Bewegung nicht ändert, andererseits jedoch die normierte Form zerstört,

§ 3. Fixflächen.

Man erkennt, daß die Kollineation I mit der Nebenbedingung $ac = bd$ oder die Kollineation I* außer der ausgezeichneten Fläche auch jede Fläche, deren Gleichung $y_1y_3 - ky_2y_4 = 0$ (k konstant) ist, in sich überführt. Alle diese Flächen sind folglich Fixflächen und zwar, wie man durch Übergang zu den x_i -Koordinaten bestätigt, für reelles $k < 0$ nullteilige, für reelles $k > 0$ ringartige Flächen. Es besitzen also alle reellen Bewegungen mit ausgezeichnete nullteiliger Fläche invariante ringartige Flächen, weshalb wir genau die gleichen Bewegungen bei Behandlung der ringartigen Fundamentalfächen wiederfinden werden. Da nun nullteilige Fixflächen zur Aufsuchung von reellen Fixkurven der Bewegung ungeeignet sind, weil sie keine reellen Punkte enthalten und wir deshalb auch schon hier zu diesem Zweck die ringartigen Fixflächen heranziehen müßten, verschiebe ich die ganze nähere Betrachtung über die einzelnen vorkommenden Bewegungstypen auf Kapitel IV, wo uns ja die gleichen Bewegungen ohnedies wieder begegnen.

Kapitel III.

Reelle eigentliche Kollineationen, welche eine ovale Fläche invariant lassen.

§ 1. Ausscheidung der Bewegungstypen (12) und (13).

Von den zur Betrachtung übrig gebliebenen 6 Kollineationstypen (1), (2), (4), (11), (12) und (13) lassen sich bei invarianter ovaler Fläche noch die beiden Typen (12) und (13) als bei reellen eigentlichen Kollineationen nicht vorkommende Typen ausscheiden ¹⁾:

a) Bei Typ (12) muß nach Hilfssatz I einer der beiden vorkommenden Fixpunkte ein Punkt der ausgezeichneten Fläche sein. Da dann bei eigentlichen Kollineationen die beiden Erzeugenden durch diesen Punkt festbleiben, muß in jedem Fall die Gerade A_2A_4 in der Figur des Typs (12) Fixerzeugende sein. Dann liegt aber auch der zweite Fixpunkt auf der ausgezeichneten Fläche und, da die beiden verschiedenen Fix-

1) Daß jedoch entgegen anderslautenden Behauptungen in der einschlägigen Literatur Typ (11) durchaus möglich ist, wird sich im folgenden zeigen.

punkte auf einer gemeinsamen Erzeugenden liegen, muß mindestens einer von ihnen imaginär sein, weil eine Erzeugende einer ovalen Fläche nur einen reellen Punkt besitzt. Nach Hilfssatz III muß es dann aber bei einer reellen eigentlichen Kollineation der ovalen Fläche in sich auf dieser vier verschiedene Fixpunkte geben, was durch Typ (12) nicht geleistet wird.

b) Für die bei Typ (13) vorkommende Gerade von Doppelpunkten sind zunächst folgende Möglichkeiten denkbar: Erstens kann diese Gerade die ausgezeichnete Fläche in zwei verschiedenen Punkten schneiden, zweitens kann sie Tangente und drittens kann sie Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sein. Der erste Fall ist deshalb unmöglich, weil dann die zu dieser Doppelpunktsgerade gehörige konjugierte Polare als Ganzes festbleiben müßte, und diese hätte mit der Doppelpunktsgerade keinen Schnittpunkt. Bei Typ (13) gibt es aber keine Fixgerade, welche die Doppelpunktsgerade nicht schneidet. Der dritte Fall ist, da wir von der Identität absehen wollen, nach Hilfssatz V unmöglich. Bleibt also nur noch der Fall, daß die Doppelpunktsgerade Tangente an die ausgezeichnete Fläche ist. Dann wäre aber die konjugierte Polare dazu eine die Doppelpunktsgerade schneidende, von dieser verschiedene Fixgerade, welche ein Büschel von Fixebenen tragen müßte. Typ (13) enthält aber keine von der Doppelpunktsgerade verschiedene Gerade, welche ein Büschel von Fixebenen trägt. Somit ist auch Typ (13) als unmöglich nachgewiesen.

§ 2. Die Bewegungen des Typs (1), (2) und (4).

Zunächst betrachten wir die Bewegungstypen (1), (2) und (4), welche großenteils eine gemeinsame Behandlung erlauben, während Typ (11) gesonderte Untersuchungen erfordert.

A. Realitätsverhältnisse des invarianten Tangentialtetraeders.

Nach Hilfssatz I existiert auf der ausgezeichneten Fläche ein Fixpunkt F . Die durch F gehenden Erzeugenden sind also Fixgerade. Bei Typ (1), (2) und (4) enthält aber jede Fixgerade zwei voneinander verschiedene Fixpunkte. Die durch F gehenden Fixerzeugenden müssen also noch je einen weiteren Fixpunkt F_1 und F_2 tragen. Da aber eine Erzeugende einer

ovalen Fläche nur einen reellen Punkt besitzt, muß mindestens einer der Punkte F, F_1 und F_2 , welche sämtlich Fixpunkte der Fläche sind, imaginär sein. Nach Hilfssatz III gibt es dann aber bei einer reellen eigentlichen Kollineation auf der ausgezeichneten Fläche mindestens vier verschiedene, nicht komplanare Fixpunkte. Auf Grund der genau gleichen Betrachtungen, wie bei den nullteiligen Fundamentalfächen, kann man nun das invariante Tetraeder als Tangentialtetraeder wählen und etwa P_1 und P_3 (siehe Fig. 2) als konjugiert-imaginär annehmen. Da die Erzeugenden der ovalen Flächen aber nieder-imaginär sind, also konjugiert-imaginäre Erzeugende einen reellen Schnitt haben, folgt, daß erstens P_2P_3 konjugiert-imaginär zu P_1P_2 und P_3P_4 konjugiert-imaginär zu P_1P_4 ist, und daß zweitens die Punkte P_2 und P_4 reell sind. Dann sind auch die konjugierten Polaren P_2P_4 und P_1P_3 reell, sodaß wir als reelle Fixelemente erhalten: zwei konjugierte Polaren und zwei auf der Fläche liegende Fixpunkte, die Schnittpunkte der einen reellen Polaren mit der Fläche. Da die Fläche als Ganzes invariant ist, sind auch die beiden durch die reellen Fixpunkte der Fläche gehenden reellen Tangentialebenen Fixebenen. Die Schnittgerade dieser reellen Fixebenen ist gerade die zweite Polare.

B. Ausgezeichnete Fläche und Realität der Bewegungen.

Beziehen wir wieder die Gleichung der ausgezeichneten Fläche auf dieses invariante Tetraeder als Koordinatentetraeder mit noch nicht festgelegtem Einheitspunkt, so hat dieselbe die Form:

$$y_1y_3 - k_1y_2y_4 = 0 \quad (k_1 \neq 0)$$

Durch die gemäß Hilfssatz VI gewählte Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 + ix_3 \\ \varrho y_2 &= x_2 + x_4 \\ \varrho y_3 &= x_1 - ix_3 \\ \varrho y_4 &= -x_2 + x_4 \end{aligned} \quad D = -4i$$

erhalten wir für die ausgezeichnete Fläche in den neuen, auf ein reelles Fundamentaltetraeder bezogenen x_i -Koordinaten die Gleichung:

$$x_1^2 + x_3^2 + k_1(x_2^2 - x_4^2) = 0.$$

Die angesetzte Flächengleichung, bezogen auf das mit „passendem“ Einheitspunkt versehene y_i -Tetraeder, ist also dann und nur dann von ovalem Typus, wenn k_1 reell und $\neq 0$ ist.

Die zu betrachtende eigentliche Kollineation läßt sich wieder unter Beachtung der Invarianz der ausgezeichneten Fläche in der normierten Form darstellen:

$$\begin{aligned} I^*. \quad & \varrho y_1' = a y_1 \\ & \varrho y_2' = b y_2 \\ & \varrho y_3' = \frac{1}{a} y_3 \\ & \varrho y_4' = \frac{1}{b} y_4. \end{aligned}$$

Durch Übergang zu den x_i -Koordinaten erhalten wir für diese Kollineation die Gestalt:

$$\begin{aligned} Ir^*. \quad & \varrho x_1' = \left(a + \frac{1}{a}\right)x_1 + i\left(a - \frac{1}{a}\right)x_3 \\ & \varrho x_2' = \left(b + \frac{1}{b}\right)x_2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)x_4 \\ & \varrho x_3' = -i\left(a - \frac{1}{a}\right)x_1 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x_3 \\ & \varrho x_4' = \left(b - \frac{1}{b}\right)x_2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)x_4. \end{aligned}$$

Sie ist dann und nur dann reell, wenn

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= t A & b + \frac{1}{b} &= t C \\ a - \frac{1}{a} &= i t B & b - \frac{1}{b} &= t D \end{aligned}$$

ist, wo t eine zunächst beliebige, von Null verschiedene Konstante und A, B, C, D reelle Zahlen sind, ferner wegen $ab \neq 0$ auch $A^2 + B^2 \neq 0$ und $C^2 + D^2 \neq 0$ ist. Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} a &= \frac{t}{2} (A + i B) \\ \frac{1}{a} &= \frac{t}{2} (A - i B), \end{aligned}$$

also $t^2 = \frac{4}{A^2 + B^2} > 0$ und reell. Da t somit reell sein muß, erhalten wir als notwendige und, wie man leicht bestätigt, auch hinreichende Realitätsbedingung, daß b reell und $\frac{1}{a} = \bar{a}$, also $|a| = 1$ sein muß.

C. Fixflächen.

Die Kollineation I^* läßt nicht nur die ausgezeichnete Fläche, sondern jede Fläche der Form

$$y_1 y_3 - k y_2 y_4 = 0 \quad (k \text{ konstant})$$

invariant. Alle diese Flächen sind für reelles $k \neq 0$ ovale Flächen und haben mit der ausgezeichneten Fläche das gleiche Tetraeder als Tangential- und Koordinatentetraeder gemein. Da die Bewegungstypen (1), (2) und (4) Spezialfälle der allgemeinen Kollineation I^* sind, steht ferner fest, daß die eben aufgestellte Fixflächenschar diesen Bewegungstypen gemeinsam ist. Zur Frage, ob es außerdem noch weitere Fixflächen gibt, müssen wir die einzelnen Bewegungstypen getrennt betrachten.

Wenden wir die normierte Transformation:

$$\begin{aligned} Ia^*. \quad & \varrho y_1' = a y_1 \\ & \varrho y_2' = b y_2 \quad a \neq b, \quad a \neq \frac{1}{b}, \\ & \varrho y_3' = \frac{1}{a} y_3 \quad a, b \neq \pm 1. \\ & \varrho y_4' = \frac{1}{b} y_4, \end{aligned}$$

welche mit den angegebenen Nebenbedingungen die allgemeine Bewegung des Typs (1) darstellt¹⁾, auf die allgemeine Gleichung

einer quadratischen Fläche $\sum_{i,k=1}^4 a_{ik} y_i y_k = 0$, ($a_{ik} = a_{ki}$) an, so

ergibt sich, daß in diesem Fall außer den genannten keine weiteren reellen, nicht-ausgearteten Fixflächen vorhanden sind. Dabei erfordern lediglich die in Ia^* zunächst nicht ausgeschlossenen Fälle $a = -b$ bzw. $a = -b^{-1}$ noch eine besondere Diskussion, da in diesen Fällen außer den genannten Fixflächen noch eine nicht-ausgeartete Fixflächenschar $a_{14} y_1 y_4 + a_{23} y_2 y_3 = 0$ bzw. $a_{12} y_1 y_2 + a_{34} y_3 y_4 = 0$ vorhanden wäre. Beschränken wir uns aber auf reelle Bewegungen, so können diese beiden Fälle nicht eintreten. Denn nach dem abgeleiteten Realitätskriterium muß bei einer reellen derartigen Bewegung $|a| = 1$ und b reell sein, was in beiden Fällen für a den ausgeschlossenen Wert $+1$ oder -1 zur Folge hätte.

1) Man vergleiche zu den Angaben der die einzelnen Bewegungstypen darstellenden Kollineationsgleichungen stets die erwähnte Baldus'sche Arbeit.

Aus der Tatsache, daß bei Typ (1) keine ringartigen — und damit auch keine nullteiligen ¹⁾ — Fixflächen vorkommen, folgt sofort, daß diese Bewegung sich nicht in die Bewegungen mit invarianter ringartiger Fläche einordnen läßt. Dies läßt sich auch leicht geometrisch beweisen: Bei Bewegungstyp (1) existiert im Raum ein einziges invariantes Tetraeder. Käme nun die hier betrachtete Bewegung unter den Bewegungen mit ringartiger (oder nullteiliger) Fundamentalfläche vor, so müßte dort bei Bewegungstyp (1) ein gleiches invariantes Tetraeder existieren. Es wird aber im nächsten Kapitel gezeigt, daß das invariante Tetraeder des Typs (1) bei ringartigen Fundamentalflächen stets grundsätzlich andere Realitätsverhältnisse besitzt wie bei ovalen.

Im Gegensatz dazu werden wir zeigen, daß bei den Bewegungstypen (2) und (4) stets auch ringartige Fixflächen existieren.

Nach Hilfssatz V kann die bei Typ (2) vorkommende einzige Doppelpunktsgerade nicht Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sein. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß sie die eine oder andere der beiden konjugierten Fixpolaren ist. Ist die Polare P_1P_3 Doppelpunktsgerade, so erhalten wir die folgenden Kollineationsgleichungen:

$$\begin{array}{llll} \text{IIa}^*. & \varrho y_1' = & y_1 & \\ & \varrho y_2' = & by_2 & \\ & \varrho y_3' = & y_3 & \\ & \varrho y_4' = & \frac{1}{b} y_4 & \end{array} \quad b \neq \pm 1, \text{ reell.}$$

Ist dagegen die Polare P_2P_4 punktweise fest, so werden diese Bewegungen durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$\begin{array}{llll} \text{IIb}^*. & \varrho y_1' = & ay_1 & \\ & \varrho y_2' = & y_2 & \\ & \varrho y_3' = & \frac{1}{a} y_3 & \\ & \varrho y_4' = & y_4 & \end{array} \quad a \neq \pm 1, |a| = 1.$$

Wendet man nun wieder die Transformation IIa^* auf die allgemeine Gleichung einer quadratischen Fläche an, so erkennt

1) Denn wären nullteilige Fixflächen vorhanden, so müßte die Bewegung auch unter den reellen Bewegungen mit nullteiliger Fundamentalfläche vorkommen und, da sich alle diese Bewegungen in die Bewegungen mit invarianter ringartiger Fläche einordnen lassen, selbst ringartige Fixflächen haben.

man die Existenz weiterer, von der oben aufgestellten ovalen Fixflächenschar verschiedener Fixflächen. So sind die bei geeigneter Wahl der Koeffizienten nicht ausgearteten Flächen der Gestalt:

$$a_{11}y_1^2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{24}y_2y_4 + a_{33}y_3^2 = 0$$

Fixflächen der Kollineation IIa*, während die analogen Fixflächen der Kollineation IIb* die Form haben:

$$2a_{13}y_1y_3 + a_{22}y_2^2 + 2a_{24}y_2y_4 + a_{44}y_4^2 = 0.$$

Ich verzichte hier auf die genaue Diskussion von Lage und Gestalt dieser Fixflächenscharen. Worauf es mir ankommt, ist der Nachweis, daß sich unter diesen Fixflächen ringartige Flächen befinden. Dazu genügt es, für je eine spezielle Fläche dieser Scharen den ringartigen Typus zu zeigen: Ich wähle dafür unter den Fixflächen der Kollineation IIa* etwa die Fläche

$$y_1^2 - y_1y_3 + y_2y_4 + y_3^2 = 0,$$

die in den x_i -Koordinaten die Form

$$x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2 = 0$$

annimmt, und unter den Fixflächen der Kollineation IIb* etwa die Fläche

$$-y_1y_3 + y_2y_4 + y_2^2 + y_4^2 = 0,$$

deren Gleichung in den x_i -Koordinaten lautet:

$$-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_4^2 = 0.$$

Erst recht gelten alle diese Überlegungen für die Bewegungen des Typs (4), bei dem die beiden windschiefen Doppelpunktsgerade stets Kanten des invarianten Tetraeders und nach Hilfssatz V notwendig konjugierte Polaren der ausgezeichneten Fläche sein müssen und dessen Kollineationsgleichungen lauten¹⁾:

$$\text{IVa*} \quad \varrho y_1' = y_1$$

$$\varrho y_2' = -y_2$$

$$\varrho y_3' = y_3$$

$$\varrho y_4' = -y_4.$$

Damit ist der Nachweis für die Möglichkeit der Einordnung dieser Bewegungen in die reellen Bewegungen mit ringartiger Fundamentalfäche erbracht. Daß die Einordnung bei diesen

1) Auch die Koeffizienten dieser Gleichungen erfüllen die abgeleitete Realitätsbedingung. — Man beachte, daß die Transformation, die aus IVa* dadurch entsteht, daß man die Minuszeichen bei y_1 und y_3 anstatt bei y_2 und y_4 anbringt, mit IVa* identisch ist.

Bewegungstypen gelingt im Gegensatz zu Typ (1), liegt wesentlich daran, daß bei Typ (2) und (4) eine ganze Anzahl invarianter Tetraeder existiert, und daß sich in diesem Fall auch bei ringartigen Fundamentalflächen invariante Tetraeder angeben lassen, welche die gleichen Realitätsverhältnisse wie das hier gewählte y_i -Koordinatentetraeder haben. Obwohl es also möglich wäre, diese Bewegungen erst bei Behandlung der ringartigen Fundamentalflächen zu untersuchen, wollen wir doch hier schon die genaue Darstellung vornehmen¹⁾. Dabei kommen wir mit der ovalen Fixflächenschar $y_1y_3 - ky_2y_4 = 0$ (k reell, $\neq 0$) (bezw. in den x_i -Koordinaten: $x_1^2 + x_3^2 + k(x_2^2 - x_4^2) = 0$) völlig aus²⁾.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit folgender Tatsachen³⁾: Die genannten ovalen Fixflächen haben alle das y_i -Tetraeder als Tangentialtetraeder gemeinsam, berühren sich also in P_2 und P_4 reell, da sie dort gemeinsame reelle Tangentialebenen besitzen, haben keinen weiteren reellen Punkt gemein und liegen ferner so, daß die beiden reellen Fixpolaren konjugierte Polaren in bezug auf jede dieser Fixflächen sind. Schließlich geht durch jeden reellen Punkt, der nicht auf einer der beiden konjugierten Fixpolaren oder in einer der beiden reellen isotropen Fixebenen ($y_2 = 0$, $y_4 = 0$) liegt⁴⁾, genau eine dieser Fixflächen.

Was stellen nun die Fixflächen nichteuklidisch betrachtet dar? Zunächst behaupte ich, daß durch eine passende Trans-

1) Und zwar deshalb, weil wir erstens durch die Betrachtung des Typs (2) bequem Aufschluß bekommen über die Gestalt der Fixkurven des Typs (1), den wir ja ohnedies hier untersuchen müssen, und zweitens vor allem, weil hier die ringartigen Fixflächen nicht, wie bei den nullteiligen Fundamentalflächen, das y_i -Koordinatentetraeder als Tangentialtetraeder mit der ausgezeichneten Fläche gemeinsam haben, wodurch sich später Komplikationen in Rechnung und Darstellung ergäben, da wir natürlich im nächsten Kapitel invariante Tangentialtetraeder der ringartigen Fundamentalfläche als Koordinatentetraeder zugrunde legen.

2) Im folgenden sind unter Fixflächen nur die Fixflächen dieser Schar zu verstehen.

3) Vergl. dazu Klein-Rosemann, S. 119.

4) Für diese Punkte können die durch sie gehenden Polaren bezw. Fixebenen als Fixflächen gelten. Man erhält übrigens die ausgezeichnete Fläche reell schneidende Polare und die beiden sich in der anderen Polaren schneidenden reellen isotropen Fixebenen als reelle Grenzfälle der obigen Fixflächenschar. (Für $k = 0$ bezw. $k = \infty$).

formation I noch jeder Punkt einer solchen reellen Fixfläche, sofern er nicht auf einer der Kanten des invarianten Tetraeders liegt, in jeden anderen, nicht auf einer Kante des Tetraeders liegenden Punkt der gleichen Fixfläche übergeführt werden kann: Hat etwa ein Punkt der reellen Fixfläche die Koordinaten $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = \gamma$, $y_4 = \delta$, so gilt: $\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$ (k reell, $\neq 0$). Wenn nun etwa eine dieser Koordinaten gleich Null wäre, dann müßte auf Grund der letzten Gleichung noch eine zweite Koordinate gleich Null sein, was zur Folge hätte, daß der Punkt auf einer der Kanten des invarianten Tetraeders läge. Wir können also alle vier Koordinaten ungleich Null annehmen. Soll nun dieser Punkt in einen beliebigen anderen Punkt mit den Koordinaten α' , β' , γ' , δ' übergehen, wobei diese Größen ebenfalls ungleich Null sind und der Bedingung $\alpha'\gamma' - k\beta'\delta' = 0$ genügen, so wird dies durch die Transformation:

$$\begin{aligned} \varrho y_1' &= \frac{\alpha'}{\alpha} y_1 \\ \varrho y_2' &= \frac{\beta'}{\beta} y_2 \\ \varrho y_3' &= \frac{\gamma'}{\gamma} y_3 \\ \varrho y_4' &= \frac{\delta'}{\delta} y_4 \end{aligned} \quad \text{Det. } \neq 0$$

geleistet, welche wegen $\frac{\alpha'\gamma'}{\alpha\gamma} - \frac{\beta'\delta'}{\beta\delta} = \frac{\alpha'\gamma' - k\beta'\delta'}{\alpha\gamma} = 0$ eine spezielle Transformation der Art I ist. Insbesondere ist diese Transformation, wie man durch Übergang zu den reellen x_i -Koordinaten oder unter Berücksichtigung unserer abgeleiteten Realitätsbedingung leicht nachrechnet, reell, falls Original- und Bild-Punkt reell sind.

Da nun bei den hier in Frage kommenden starren Transformationen die nichteuklidischen Strecken und Winkel ungeändert bleiben, können wir insbesondere den Schluß ziehen, daß alle reellen Punkte einer solchen reellen Fixfläche von den beiden festbleibenden Polaren gleichen (nichteuklidisch!) senkrechten Abstand haben, da jeder reelle Punkt in jeden anderen reellen Punkt der gleichen Fixfläche — von den Fixpunkten abgesehen — übergehen kann. Wir werden die reellen Fixflächen also

als „nichteuklidische Kreiszyylinder“ mit den beiden Polaren als Mittelachsen bezeichnen.

Da die beiden reellen Fixgeraden konjugierte Polaren in bezug auf alle diese Fixflächen sind, folgt ferner noch, daß — anschaulich betrachtet — jede Gerade, welche durch die beiden konjugierten Polaren geht und eine Fixfläche schneidet, diese Fixfläche in zwei Punkten trifft, welche zu den Schnittpunkten der Geraden mit den konjugierten Polaren harmonisch liegen.

D. Darstellung der Einzelbewegungen¹⁾.

a) Bei Betrachtung der einzelnen Bewegungen beginnen wir mit Typ (2). Da hierbei stets eine der beiden konjugierten Polaren punktweise festbleibt, sind alle Ebenen des durch die andere Polare gehenden reellen Polarebenenbüschels Fixebenen. Wir erhalten also als Fixkurven auf den Fixflächen die Kegelschnitte, welche durch das durch die nicht punktweise festbleibende Polare gehende reelle Fixebenenbüschel auf den Fixflächen ausgeschnitten werden. Nichteuklidisch betrachtet, sind diese Fixkurven solche Kurven, die durch zur einen Achse der nichteuklidischen Kreiszyylinder senkrechte Ebenen auf diesen ausgeschnitten werden, also nichteuklidische Kreise. Die Bewegung selbst ist eine nichteuklidische Rotation um eine reelle Achse.

Bei der anschaulichen Vorstellung dieser Bewegung muß man berücksichtigen, daß die beiden reellen konjugierten Polaren nicht völlig gleichberechtigt sind. Denn nur auf der einen existieren ja immer zwei reelle Fixpunkte, die gleichzeitig Punkte der ausgezeichneten Fläche, also nichteuklidisch unendlich ferne Punkte sind. Während daher im Falle der Bewegung IIb* die reellen Punkte — in vollkommener Analogie zu einer euklidischen Rotation um eine im Endlichen gelegene Achse — geschlossene²⁾ Fixkurven durchlaufen, können sie sich bei der Bewegung IIa* den beiden reellen Fixpunkten der ausgezeichneten Fläche, durch die in diesem Fall jeder unserer Fixkegelschnitte geht, nur unbeschränkt nähern, ohne sie jedoch zu erreichen³⁾. Dadurch

1) Vergl. dazu Klein-Rosemann S. 122 ff. und Heffter III, S. 40 f.

2) Dabei sind auch Parabeln und Hyperbeln (in der projektiven Ebene!) als geschlossene Linien anzusehen.

3) Vergl. dazu die Figuren in Klein-Rosemann, S. 123.

wird auch klar, daß die Rotation IIb^* um die die ausgezeichnete Fläche reell schneidende Polare periodisch ist im Gegensatz zur Rotation IIa^* , bei der man bei fortgesetzter gleichsinniger Rotation um die die ausgezeichnete Fläche nicht reell schneidende Polare nie über eine gewisse Grenzlage hinauskommt, was seinerseits in der Existenz zweier reeller isotroper Fixebenen in dem von dieser Drehachse getragenen Ebenenbüschel begründet ist. Rechnerisch drückt sich das darin aus, daß bei Beschränkung auf reelle Bewegungen in IIa^* der Transformationsparameter b reell sein muß, während in IIb^* der Parameter a den absoluten Betrag eins hat, also gleich $e^{i\varphi}$ ($\varphi \neq n\pi$, n ganz) gesetzt werden kann und daher periodisch ist.

b) Es liegt die Frage nahe, ob es bei diesen Rotationen ein Analogon gibt zu einer euklidischen Rotation um den Winkel $n\pi$ (n ganz, ungerade), bei der alle zu der Drehachse senkrechten Geraden in sich übergehen, und die nach $2m$ -maliger (m ganz) Ausführung die Identität ergibt. Jedenfalls müßten in diesem Falle alle auf der punktweise festbleibenden Polaren (nichteuklidisch) senkrechten Geraden, welche ja sämtlich die zweite Polare schneiden¹⁾, Fixgeraden sein, woraus sofort folgt, daß dann auch die zweite Polare punktweise in sich übergehen müßte und daher die Bewegung vom Typ (4) wäre. In der Tat stellt die Kollineation IVa^* eine solche Bewegung dar. Dabei ist jede Verbindungslinie von Punkten der beiden reellen konjugierten Fixpunktpolaren eine Fixgerade. Da aber die Transformation außer den Punkten der beiden Polaren keine Fixpunkte besitzt, so folgt, daß sich die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien der beiden Polaren mit den einzelnen Fixflächen gerade miteinander vertauschen. Und zwar liegen diese Schnittpunkte jeweils harmonisch zu den Fixpunkten ihrer Verbindungsgeraden. Jeder von einem Fixpunkt verschiedene reelle Punkt geht also über in den zweiten Schnittpunkt, den die durch ihn gehende Verbindungslinie der beiden konjugierten Fixpolaren²⁾ mit seiner Fixfläche hat. Da nichteuklidische

1) Denn alle auf einer Geraden G (nichteuklidisch) senkrechten Geraden gehen durch die Pole der Ebenen des von G getragenen Ebenenbüschels, also durch die zu G konjugierte Polare.

2) Da die beiden Fixpolaren windschief sind, geht durch jeden nicht auf ihnen liegenden Punkt genau eine Gerade, die gleichzeitig beide Fixpolaren schneidet.

Abstände dabei erhalten bleiben, können wir die Bewegung nichteuklidisch folgendermaßen beschreiben: Alle zu der Drehachse¹⁾ senkrechten Geraden sind Fixgeraden. Die Punkte dieser Geraden gehen über in ihre bezüglich der Drehachse abstandsgleichen Spiegelbilder²⁾. Damit ist die Analogie dieser Bewegung zu der euklidischen Rotation um den Winkel $n\pi$ (n ganz, ungerade) nachgewiesen³⁾. Die Bewegungen des Typs (4) sind also nichts anderes als spezielle Rotationen⁴⁾, wie man ja auch die Bewegung IVa* in die Rotationen IIa* bzw. IIb* einordnen kann, wenn man dort die Werte $b = -1$ bzw. $a = -1$ zuläßt.

c) Schließlich bleibt nun noch die Bewegung des Typs (1) zu erörtern. Aus den angegebenen Kollineationsgleichungen ergibt sich, daß man jede Bewegung Ia* durch eine geeignete Bewegung IIa* und IIb* zusammensetzen kann. Bei einer Bewegung der Art Ia* erhalten wir also, wie man sich leicht anschaulich überlegt, auf den einzelnen Fixflächen schraubenlinienartige Fixkurven⁵⁾, die sich den beiden reellen Fixpunkten der ausgezeichneten Fläche unbeschränkt nähern, ohne dieselben jedoch zu erreichen. Die Bewegung selbst wollen wir als Schraubung um die beiden reellen konjugierten Polaren bezeichnen. Damit sind die Bewegungen beschrieben, soweit sie Punkte der Fixflächen betreffen.

d) Es bleibt nun noch die Bewegung der reellen Punkte zu untersuchen, die in den beiden reellen isotropen Fixebenen liegen, und über deren Verhalten uns die bisherige Methode keinen Aufschluß gibt. Reelle Fixelemente sind in diesen beiden Ebenen zunächst nur ein Punkt F (hier P_2 bzw. P_4) und eine

1) Dabei kann jede der beiden Fixpolaren als Drehachse aufgefaßt werden.

2) Bemerkt sei hier, daß ja jede Verbindungslinie von Punkten konjugierter Polaren auf beiden Polaren nichteuklidisch senkrecht steht.

3) Doch ist diese Analogie auch hier aus den genannten Gründen nur dann vollkommen, wenn man, was hier ja ohne weiteres möglich ist, die Polare, welche die ausgezeichnete Fläche reell schneidet, als Drehachse auffaßt.

4) Heffter bezeichnet in Band III seines Lehrbuchs (S. 41) diese Bewegung als „Umkrempelung mit reellen Achsen“. Beim Gebrauch dieser Bezeichnung muß man aber beachten, daß es sich dabei um eine eigentliche Kollineation handelt, die mit einer Art von Spiegelung nichts zu tun hat.

5) Vergl. dazu Abb. 77 in Klein-Rosemann, S. 123.

nicht mit diesem inzidente Gerade (hier P_1P_3). Im Falle der Bewegung IIa*, wo P_1P_3 Doppelpunktsgerade ist, existiert in den beiden isotropen Fixebenen ein ganzes Büschel von reellen Fixgeraden, welche alle durch den isolierten Fixpunkt F gehen.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Bewegung IIb*, bei welcher die Fixpolare, welche die ausgezeichnete Fläche reell schneidet, Doppelpunktsgerade ist. Dann existieren in den beiden isotropen Fixebenen als reelle Fixelemente nur ein Fixpunkt F (in Gestalt von P_2 bzw. P_4) und eine nicht inzidente Fixgerade (P_1P_3), die aber nun nicht punktweise festbleibt.

Sei die betrachtete isotrope Fixebene etwa $y_2 = 0$. Dann erkennt man, daß die Transformation IIb* alle in dieser Ebene liegenden Kegelschnitte der Form:

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1y_3 + cy_4^2 = 0 \end{cases} \quad (c \text{ konstant})$$

in sich überführt.

Diese Fixkegelschnitte sind, wie man sich sofort durch Übergang zu den reellen x_i -Koordinaten überzeugt, für reelle $c < 0$ reell und nicht ausgeartet und werden von P_3P_4 bzw. P_1P_4 in den konjugiert imaginären Punkten P_3 bzw. P_1 berührt. Sie erfüllen also genau die gleichen Beziehungen, wie sie auch zur Konstruktion der „Kreise“ der elliptischen Geometrie der Ebene benützt werden, und haben daher mit diesen gleiches Aussehen¹⁾. Genau das Gleiche gilt natürlich auch für die Ebene $y_4 = 0$.

Bei Kollineationstyp (1) können wir uns auch in der isotropen Fixebene die Bewegung wieder zusammengesetzt denken aus den beiden im Falle des Typs (2) möglichen Bewegungen. Die reellen Fixkurven sind dann, wie man sich leicht anschaulich überlegt, Spiralen, die sich um den reellen Fixpunkt F winden, ohne diesen jedoch zu erreichen.

Bei Typ (4), bei dem die beiden konjugierten Fixpolaren punktweise festbleiben, haben wir als Fixkurven innerhalb der beiden isotropen Fixebenen sowohl das reelle Fixgeradenbüschel durch den isolierten reellen Fixpunkt F als auch die reelle Kegelschnittschar. Es werden eben, da außer den

1) Siehe Klein-Rosemann, S. 104f., Fig. 63 und Heffter III, S. 18.

Punkten der beiden konjugierten Fixpolaren keine Fixpunkte existieren, auch in den isotropen Fixebenen die zwei (von den Fixpunkten verschiedenen) Schnittpunkte, welche eine durch den reellen isolierten Fixpunkt F gehende Fixgerade mit irgendeinem der Fixkegelschnitte hat, gerade miteinander vertauscht.

§ 3. Die Bewegungen des Typs (11).

Zum Schluß bleibt noch die dem Typ (11) entsprechende Bewegung zu erörtern. Nach Hilfssatz I muß einer der Fixpunkte, die bei Typ (11) nur auf der Geraden A_1A_4 (siehe Fig. 1) liegen, ein Punkt der ausgezeichneten Fläche sein. Dann bleiben aber auch die Tangentialebene und, da es sich um eine eigentliche Kollineation handelt, auch die beiden Erzeugenden durch diesen Punkt fest. Der Fixpunkt der Fläche muß also Schnittpunkt von zwei verschiedenen Fixgeraden sein, was bei Typ (11) nur für den Punkt A_4 der Fall ist. Die durch A_4 gehenden Fixerzeugenden müssen Fixgeraden der Ebene durch A_1, A_3, A_4 sein, da nur diese Ebene Fixgeraden enthält. Daraus folgt, daß diese Ebene Tangentialebene im Punkt A_4 an die ausgezeichnete Fläche sein muß. Die Doppelpunktsgerade A_1A_4 kann nach Hilfssatz V nicht Erzeugende sein. Also ist sie Tangente im Punkt A_4 an die Fläche. Die zu dieser Doppelpunktstangente konjugierte Polare muß die Tangente schneiden, von dieser verschieden sein, in der Tangentialebene liegen und ein Büschel von Fixebenen tragen. Dies wird nur durch die Gerade A_3A_4 erfüllt. Wir erhalten also das Resultat: A_1A_4 ist Tangente im Punkt A_4 an die ausgezeichnete Fläche, die dazu konjugierte Polare ist A_3A_4 , während die beiden durch A_4 gehenden Fixerzeugenden irgend zwei, von A_1A_4 und A_3A_4 verschiedene Fixgeraden der Ebene durch A_1, A_3, A_4 sind. A_4 ist der einzige auf der ausgezeichneten Fläche liegende und wegen Hilfssatz III notwendig reelle Fixpunkt.

Ferner behaupte ich, daß die Doppelpunktsgerade A_1A_4 bei einer reellen Bewegung notwendig reell ist. Denn andernfalls müßte bei einer reellen Bewegung die zu A_1A_4 konjugiert-imaginäre Gerade, die dann von A_1A_4 verschieden wäre, ebenfalls punktweise festbleiben, was offenbar bei Typ (11) nicht der Fall sein kann. Mit den reellen Fixpunkten sind aber auch die festbleibenden Polarebenen dieser Punkte reell, folglich

auch ihre Schnittlinie A_3A_4 und die ganze Tangentialebene durch A_4 .

Nun werden wir im folgenden Kapitel unter Zugrundelegung ringartiger Fundamentalfächen bei Untersuchung des Bewegungstyps (11) eine ganze Schar ovaler Fixflächen finden, die bezüglich der Ebene durch A_1, A_3, A_4 — die übrigens auch dort die gleichen Realitätsverhältnisse hat — genau so liegen, wie wir es hier für die ausgezeichnete ovale Fläche verlangen müssen. Die dort behandelten Bewegungen sind also solche, wie sie auch hier bei ovalen Fundamentalfächen auftreten. Umgekehrt könnten wir mit genau analogen Methoden wie im folgenden Kapitel auch hier die Existenz ringartiger Fixflächen nachweisen, wodurch sofort die Möglichkeit der Einordnung dieser Bewegungen in die Bewegungen des Typs (11) bei ringartigen Fundamentalfächen gegeben ist. Wir wollen uns daher mit dem Hinweis auf die Untersuchungen des nächsten Kapitels begnügen.

Kapitel IV.

Reelle eigentliche Kollineationen, welche eine ringartige Fläche invariant lassen.

Bei den ringartigen Fundamentalfächen gelingt es nicht, einen der sechs zur Betrachtung übrig bleibenden Bewegungstypen (1), (2), (4), (11), (12) und (13) auszuschneiden. Wir werden auch sehen, daß diese Typen zu durchaus möglichen Kollineationen einer ringartigen Fläche in sich gehören.

§ 1. Die Bewegungen des Typs (1), (2) und (4).

A. Lage und Realitätsverhältnisse des invarianten Tetraeders.

Zuerst wollen wir wieder die Typen (1), (2) und (4) behandeln. In der gleichen Weise wie bei ovalen Fundamentalfächen (Kap. III § 2) ergibt sich auch hier bei ringartigen Fundamentalfächen die Existenz eines invarianten Tetraeders, dessen vier Eckpunkte auf der absoluten Fläche liegen, und dessen sämtliche Ebenen Tangentialebenen an die Fläche sind. Vier Kanten des Tetraeders sind wieder Fixerzeugende der Fläche, von denen je zwei in der gleichen Schar liegen, die übrigen zwei Kanten sind konjugierte Polaren in bezug auf die

absolute Fläche. Einen wesentlichen Unterschied gegenüber den bisher betrachteten Typen von ausgezeichneten Flächen finden wir darin, daß es im vorliegenden Fall drei verschiedene Möglichkeiten der Realitätsverhältnisse bei diesem invarianten Tetraeder gibt:

1. Es können alle vier Fixerzeugenden des Tetraeders reell sein. Dann sind auch die Eckpunkte und die konjugierten Polaren reell.

2. Es können die beiden Fixerzeugenden in jeder Schar konjugiert-imaginär (hoch-imaginär) sein. Das invariante Tetraeder hat dann die gleichen Realitätsverhältnisse wie das bei nullteiligen Fundamentalfächen. Reelle Bestandteile sind dann nur die beiden konjugierten Polaren.

3. Es können die beiden Fixerzeugenden der einen Schar reell, die der anderen konjugiert-imaginär (hoch-imaginär) sein¹). Seien etwa P_2P_3 und P_1P_4 (siehe Fig. 2) konjugiert-imaginäre, P_1P_2 und P_3P_4 reelle Fixerzeugende. Dann sind einerseits die Punkte P_3 und P_4 , andererseits die Punkte P_1 und P_2 konjugiert-imaginär, da sie auf konjugiert-imaginären Geraden liegen und ihre Verbindungslinien reell sind. Die konjugierten Polaren P_1P_3 und P_2P_4 sind dann notwendig imaginär und zwar konjugiert-imaginär, da die eine zwei zu verschiedenen Punkten der anderen konjugiert-imaginäre Punkte enthält. Reelle Bestandteile dieses Tetraeders sind also nur die beiden Erzeugenden P_1P_2 und P_3P_4 der gleichen Schar.

B. Bewegungen, bei denen das invariante Tangentialtetraeder reell ist.

a) Ausgezeichnete Fläche und Fixflächen.

Wählen wir wieder das invariante, hier reelle Tangentialtetraeder als Koordinatentetraeder, wobei wir gleichzeitig den Einheitspunkt als reell annehmen, so lautet die Gleichung der

1) Den etwa denkbaren Fall, daß in der gleichen Schar eine imaginäre und eine reelle Erzeugende festbleibt, können wir deshalb bei dieser Einteilung außer acht lassen, weil bei einer reellen Kollineation mit einer imaginären Fixerzeugenden auch die dazu konjugiert-imaginäre Erzeugende, welche bei ringartigen Flächen der gleichen Schar angehört, Fixgerade ist, also auf jeden Fall dann in dieser Schar zwei konjugiert-imaginäre Fixerzeugende liegen.

ausgezeichneten Fläche: $y_1 y_3 - k_1 y_2 y_4 = 0$ ($k_1 \neq 0$), welche durch die reelle Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 + x_3 \\ \varrho y_2 &= x_2 + x_4 \\ \varrho y_3 &= x_1 - x_3 \\ \varrho y_4 &= -x_2 + x_4 \end{aligned} \quad D = -4$$

in die kanonische Form $x_1^2 - x_3^2 + k_1 (x_2^2 - x_4^2) = 0$ übergeht und folglich für reelles $k_1 \neq 0$ stets eine ringartige Fläche darstellt, eine Tatsache, die auch geometrisch sofort daraus folgt, daß die für reelles $k_1 \neq 0$ durch obige Gleichung gegebene Fläche nicht ausgeartet ist und vier reelle Fixerzeugende besitzt. Die Bewegungen selbst, welche in diesem Fall wieder durch Transformationen der Form I mit der Nebenbedingung $ac = bd$ dargestellt werden und dann und nur dann reell sind, wenn die Transformationskoeffizienten a, b, c, d reell bzw. — wegen des noch willkürlichen Proportionalitätsfaktors ϱ — gleiche (eventl. komplexe) von Null verschiedene Vielfache von reellen Zahlen sind, lassen gleichzeitig alle Flächen $y_1 y_3 - k y_2 y_4 = 0$ invariant, welche ebenfalls für reelle $k \neq 0$ von ringartigem Typ sind. Diese Fixflächen, die für die nähere Beschreibung der Einzelbewegungen ausreichen, sind also ringartige Flächen, welche untereinander und mit der ausgezeichneten Fläche das invariante y_i -Tetraeder als Tangentialtetraeder gemein haben. Damit ist Gestalt und Lage dieser Fixflächen genügend gekennzeichnet.

Genau wie bei den ovalen Fundamentalflächen geht auch hier durch jeden reellen Punkt des Raumes, der nicht in einer Ebene des invarianten Tangentialtetraeders liegt, genau eine Fixfläche dieser Schar, sodaß also diese Flächen miteinander außer den vier Erzeugenden, welche Kanten des invarianten Tetraeders sind, keinen Punkt gemein haben. Ferner ergibt sich analog, daß durch eine geeignete Kollineation der Form I noch jeder Punkt einer solchen reellen Fixfläche, sofern er nicht dem invarianten Tetraeder angehört, in jeden anderen, nicht dem invarianten Tetraeder angehörenden Punkt der gleichen Fixfläche übergeführt werden kann.

b) Darstellung der Einzelbewegungen.

a) Wir beginnen wieder mit Bewegungstyp (2). Zunächst läßt sich allgemein — unabhängig von den Realitätsverhält-

nissen des invarianten Tangentialtetraeders — behaupten, daß die einzige bei Typ (2) vorkommende Doppelpunktsgerade nur eine der beiden konjugierten Polaren sein kann. Wäre sie nämlich Erzeugende der ausgezeichneten Fläche, so wären alle Erzeugenden der anderen Schar Fixgeraden, also müßte auch die andere Fixerzeugende, welche mit der ersten der gleichen Schar angehört, punktweise festbleiben, was bei Typ (2) nicht der Fall ist.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem vorigen Kapitel besteht darin, daß hier die von den beiden reellen konjugierten Fixpolaren getragenen Ebenenbüschel je zwei reelle isotrope Ebenen enthalten, welche mit den anderen Ebenen des Büschels einen nichteuklidisch unendlich großen Winkel einschließen. Die Fixkurven der einzelnen reellen Punkte der Fixflächen sind wieder die Kegelschnitte, welche durch das festbleibende Büschel von Polarebenen, das durch die nicht punktweise festbleibende Polare geht, auf den Fixflächen ausgeschnitten werden. Aus dem zuvor genannten Grund hat man aber diese Fixkurven nicht als geschlossene Linien anzusehen, sondern die Punkte wandern unbeschränkt den beiden Eckpunkten des invarianten Tetraeders, welche der nicht punktweise festbleibenden Polaren angehören, zu, ohne dieselben zu erreichen. Trotzdem werden wir die Bewegung selbst wieder als nichteuklidische Rotation um eine feste reelle Achse bezeichnen.

β) Wie schon im vorigen Kapitel gesagt, entstehen die Bewegungen des Kollineationstyps (1) durch Zusammensetzung von zwei geeigneten Rotationen um die beiden konjugierten Polaren. Man erhält also die Fixkurven wieder durch „Zusammensetzung“ der Fixkurven, welche bei den Rotationen um die konjugierten Polaren auftreten. Die Bewegung eines Punktes kann man sich zerlegt denken in eine Bewegung längs einer Fixkurve der Rotation um die eine Polare und eine darauffolgende Bewegung längs einer Fixkurve der Rotation um die andere Polare. Man überlegt sich leicht, daß diese Fixkurven des Typs (1) nun aber mit einer euklidischen Schraubenlinie absolut keine Ähnlichkeit mehr haben. Der Grund liegt darin, daß hier die Punkte auf den Fixkurven der beiden möglichen Rotationen keine geschlossenen Linien durchlaufen, wie das bei den ovalen Fundamentalflächen wenigstens bei einer dieser Rotationen der Fall

war. Trotzdem werden wir diese Bewegung, da der nicht-euklidische Vorgang der gleiche ist wie bei den ovalen Fundamentalfächen, ebenfalls als nichteuklidische Schraubung mit zwei reellen Achsen bezeichnen.

γ) Bei Kollineationstyp (4) sind zwei sich nicht schneidende Kanten des invarianten Tetraeders punktweise fest. Daß eine dieser Fixpunktsgersten Erzeugende, die andere Polare ist, ist unmöglich, da jede der beiden Polaren jede der vier invarianten Erzeugenden schneidet. Es bleibt also erstens die Möglichkeit, daß diese beiden Fixpunktsgersten konjugierte Polaren in bezug auf die ausgezeichnete Fläche und alle unsere Fixflächen sind. In diesem Fall sind Fixgeraden alle Verbindungslinien der beiden konjugierten Fixpunkt-Polaren. Die beiden Schnittpunkte, welche diese Verbindungslinien mit irgend einer invarianten Fläche haben, müssen sich miteinander vertauschen, weil außer den Punkten der beiden Fixpolaren keine Fixpunkte vorhanden sind, und es liegen nach dem früher Gesagten die sich vertauschenden Schnittpunkte jeweils harmonisch zu den Fixpunkten ihrer Verbindungsgersten. Jeder reelle Punkt, der nicht auf einer der 4 reellen isotropen Tangential-Fixebenen liegt, geht also über in den zweiten Schnittpunkt, den die durch ihn gehende Verbindungslinie der beiden Fixpolaren mit seiner Fixfläche hat. Die Bewegung selbst ist wieder eine spezielle Rotation. Ihre analytische Form ist die gleiche wie die der Kollineation IVa* in Kap. III § 2 C.

Die zweite noch bestehende Möglichkeit ist die, daß die beiden Doppelpunktsgersten des invarianten Tetraeders bei Typ (4) Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sind, welche der gleichen Schar angehören müssen, da sie keinen Schnittpunkt besitzen. Dann bleiben aber auf der ausgezeichneten Fläche alle Erzeugende der anderen Schar als Ganzes fest. Die reelle Kollineation ist also eine reelle Schiebung. Die Fixkurven der einzelnen reellen Punkte auf den Fixflächen lassen sich leicht durch folgende Überlegung ermitteln. Da das invariante Tetraeder allen unseren Fixflächen als Tangentialtetraeder gemeinsam ist, folgt insbesondere, daß auf jeder Fixfläche zwei verschiedene Erzeugende der gleichen Schar — eben die Fixpunktsgersten des invarianten Tetraeders — punktweise festbleiben. Nun schneidet aber jede Erzeugende der Schar, welcher

die beiden Fixpunktserzeugenden nicht angehören, die beiden Fixpunktserzeugenden. Da nun jede Verbindungslinie der beiden Fixpunktserzeugenden Fixgerade sein muß, müssen also auf jeder Fixfläche die Erzeugenden der Schar, welche die beiden Fixpunktserzeugenden nicht enthält, Fixgeraden sein. Die Bewegung ist also eine reelle Schiebung auf jeder unserer Fixflächen¹⁾, und die Fixkurven der reellen Punkte sind die Erzeugenden der einen Schar auf den durch die Punkte jeweils gehenden Fixflächen. Wählen wir als Doppelpunktsgeraden Erzeugende der zweiten Schar, so ist die Bewegung auf jeder Fixfläche eben eine reelle Schiebung längs der Erzeugenden der ersten Schar.

Analytisch haben die Schiebungen des Typs (4) die Gestalt:

1. Wenn P_1P_2 und P_3P_4 punktweise festbleiben:

$$\text{IV b. } \varrho y'_1 = y_1$$

$$\varrho y'_2 = y_2 \quad a \neq 1;$$

$$\varrho y'_3 = ay_3$$

$$\varrho y'_4 = ay_4$$

2. Wenn P_1P_4 und P_2P_3 punktweise festbleiben:

$$\text{IV c. } \varrho y'_1 = y_1$$

$$\varrho y'_2 = ay_2 \quad a \neq 1;$$

$$\varrho y'_3 = ay_3$$

$$\varrho y'_4 = y_4$$

Sie sind reell, wenn a reell ist.

δ) Es bleibt nun noch die Bewegung der reellen Punkte zu untersuchen, die in den 4 reellen isotropen Ebenen des invarianten Tangentialtetraeders liegen. Im Gegensatz zu den Realitätsverhältnissen bei ovalen Fundamentalflächen ist jetzt in jeder dieser Ebenen ein ganzes reelles Dreieck invariant, bei dem zwei Seiten Erzeugende sind, während die dritte Seite eine der beiden konjugierten Polaren darstellt. Ist bei Typ (2) die in der betrachteten isotropen Fixebene liegende Fixpolare Doppelpunktsgerade, so sind die Fixkurven Gerade durch den reellen Fixpunkt F , der nicht auf dieser Fixpolaren liegt. Besitzt dagegen bei Typ (2) die in der isotropen Ebene liegende Fixpolare nur zwei reelle Fixpunkte F_1 und F_2 und hat F die

1) Das ist übrigens auch deshalb klar, weil jede unserer Fixflächen als ausgezeichnete Fläche aufgefaßt werden kann.

gleiche Bedeutung wie eben, so beweist man durch die gleichen Schlüsse wie bei den ovalen Fundamentalflächen auch hier: Die Fixkurven bestehen aus allen den Kegelschnitten, die in F_1 die Tangente F_1F , in F_2 die Tangente F_2F besitzen, die also gerade den — wegen des reellen Fixdreiecks — „Überkreisen“ (auch „Abstandslinien“ genannt) der ebenen hyperbolischen Geometrie mit F als „Mittelpunkt“¹⁾ gleichen, wobei jedoch nicht, wie in der ebenen hyperbolischen Geometrie, einer dieser Fixkegelschnitte ausgezeichnet ist. Bei Typ (1) und (4), sofern es sich bei letzterem um eine spezielle Rotation handelt, gilt hier ebenfalls das Analoge wie bei ovalen Fundamentalflächen. Jedoch haben natürlich die Fixkurven des Typs (1) hier mit Spiralen keine Ähnlichkeit mehr.

Ist die Bewegung des Typs (4) jedoch eine Schiebung, so enthält jede der vier isotropen Ebenen eine punktweise festbleibende Gerade und einen nicht auf dieser liegenden isolierten Fixpunkt. Die Fixkurven sind dann gegeben durch die Geraden des Büschels, welches durch den isolierten Fixpunkt der betrachteten isotropen Ebene geht.

C. Bewegungen, bei denen das invariante Tangentialtetraeder nur die beiden konjugierten Polaren als reelle Bestandteile hat.

a) Ausgezeichnete Fläche, Fixflächen und Realität der Bewegungen.

Da das invariante Tangentialtetraeder, das wir wieder als y_i -Koordinatentetraeder zugrunde legen, in diesem Fall die gleichen Realitätsverhältnisse wie das bei nullteiligen Flächen hat, vermittelt die in Kapitel II § 2 angegebene Koordinatentransformation auch hier einen Übergang von den y_i -Koordinaten zu Koordinaten eines reellen x_i -Tetraeders. Gleichzeitig gelten dann auch hier die in Kapitel II angestellten Untersuchungen über Realität der durch die Kollineationsgleichungen I bzw. I* festgelegten Bewegungen. Die auf das mit „passendem“ Einheitspunkt versehene y_i -Tetraeder bezogene Gleichung der ausgezeichneten Fläche $y_1y_3 - k_1y_2y_4 = 0$ stellt für reelles $k_1 > 0$ eine ringartige Fläche dar, während die übrigen Fixflächen $y_1y_3 - ky_2y_4 = 0$

1) Siehe Klein-Rosemann S. 177, Abb. 119 oder Heffter III, S. 19, Fig. 7 oder Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. 1923, S. 38.

für reelles $k < 0$ nullteilig, für reelles $k > 0$ ringartig sind. Da es für die Beschreibung der Bewegungen gleichgültig ist, welche dieser Fixflächen wir als ausgezeichnete Fläche wählen, gilt die folgende Diskussion der Einzelbewegungen in gleicher Weise auch für nullteilige Fundamentalfächen. Da ferner bei nullteiligen Fundamentalfächen nur die Bewegungstypen (1), (2) und (4) möglich sind, werden durch die Untersuchungen dieses Abschnitts auch gleichzeitig alle möglichen reellen Bewegungen mit nullteiliger ausgezeichneter Fläche erschöpfend dargestellt, wie es ja in Kapitel II in Aussicht gestellt wurde.

Aus den in Kapitel II erwähnten Gründen kommen zum Zwecke der Aufsuchung reeller Fixkurven nur die ringartigen Fixflächen der genannten Schar in Frage, weshalb deren Lage zunächst genauer untersucht werden soll. Da das invariante Tetraeder allen unseren Fixflächen als Tangentialtetraeder gemeinsam ist, liegen die Fixflächen so, daß die beiden reellen Fixgeraden P_1P_3 und P_2P_4 (siehe Fig. 2) gerade konjugierte Polaren in bezug auf diese Flächen werden. Diese konjugierten Polaren dürfen sicher nicht Tangenten an die Fixflächen sein. Denn sonst müßten beide Polaren in einer gemeinsamen Ebene liegen. Ferner darf keine der beiden konjugierten Polaren eine der reellen Fixflächen in reellen Punkten schneiden. Denn da die reellen Fixflächen das gleiche invariante Tangentialtetraeder besitzen wie die ausgezeichnete Fläche, müßte sonst die schneidende Polare die Fixfläche außer in diesen beiden reellen Punkten auch in den zwei konjugiert imaginären Punkten schneiden, welche Ecken des invarianten Tetraeders sind. Die Polare hätte also mit der Fläche vier verschiedene Punkte gemein und wäre also Erzeugende der Fixfläche. Dann müßte aber die zweite Polare mit der ersten zusammenfallen. Ferner können die Fixflächen unter sich und mit der ausgezeichneten Fläche keinen reellen Punkt gemeinsam haben. Denn zwei Flächen 2. Grades schneiden sich in einer Raumkurve 4. Ordnung, die in unserem Fall in vier gerade Linien zerfällt, nämlich die vier Erzeugenden, welche als Kanten des invarianten Tetraeders allen unseren Fixflächen gemeinsam sind. Diese sind aber im vorliegenden Fall alle hochimaginär, enthalten also keinen reellen Punkt. Auf Grund unserer Feststellungen bekommen wir für die reellen Fixflächen, die natürlich auch wieder als nichteuklidische Kreiszylinder auf-

gefaßt werden können, anschaulich folgendes Bild: Die beiden Polaren sind von einschaligen Hyperboloiden umschlossen, die schließlich in hyperbolische Paraboloiden übergehen¹⁾).

b) Darstellung der Einzelbewegungen.

α) Bei den Bewegungen des Typs (2), bei denen die einzige vorkommende Doppelpunktsgerade aus den in Abschnitt B genannten Gründen nur eine der beiden reellen konjugierten Polaren sein kann, erhalten wir wieder als Fixkurven die Kegelschnitte, welche durch das festbleibende Büschel von Polarebenen durch die nicht punktweise festbleibende Polare auf unseren reellen Fixflächen ausgeschnitten werden. Diese Fixkurven sind nun aber — gleichgültig, welche der beiden Polaren Rotationsachse ist — stets geschlossene Linien²⁾, da in diesem Fall auf der ausgezeichneten Fläche überhaupt kein reeller Fixpunkt existiert und die Ebenenbüschel durch jede der beiden Polaren keine reellen isotropen Ebenen besitzen. Die Bewegungen sind also hier vollkommen analog den euklidischen Rotationen um eine im Endlichen gelegene Achse. Rechnerisch drückt sich das darin aus, daß nach dem in Kapitel II abgeleiteten Realitätskriterium die hier in Betracht kommenden Bewegungen IIa^* und IIb^* dann und nur dann reell sind, wenn $|a| = 1$ bzw. $|b| = 1$ ist, was seinerseits die Periodizität dieser Bewegungen in sich schließt.

β) Als Fixkurven des Bewegungstyps (1) erhalten wir wieder auf den einzelnen Fixflächen schraubenlinienartige Kurven, deren Ausdehnung nun aber nicht, wie bei den ovalen Fundamentalflächen, durch eine reelle isotrope Fixebene eingeschränkt wird³⁾.

γ) Ebenso ergibt die durch die Kollineationsgleichungen IVa^* dargestellte Bewegung des Typs (4) eine spezielle Rotation,

1) Vergl. Abb. 70 in Klein-Rosemann. Bei Klein-Rosemann S. 119 wird hier von elliptischen Paraboloiden gesprochen. Gemeint sind wohl auch hyperbolische Paraboloiden.

2) Dabei haben auch Parabeln und Hyperbeln (in der projektiven Ebene!) als geschlossene Linien zu gelten.

3) Bemerkt sei nebenbei, daß diese schraubenlinienartigen Fixkurven hier insbesondere geschlossene Kurven sein können, indem sie sich etwa einer Hyperbel asymptotisch nähern, die Fixkurve einer der Teilbewegungen des Typs (2) ist, aus denen sich die betrachtete Bewegung des Typs (1) zusammensetzen läßt. (Vergl. dazu Klein-Rosemann S. 124 und Abb. 78.)

die hier vollkommen — auch was die Periodizität betrifft — einer euklidischen Rotation um den Winkel $n\pi$ (n ganz, ungerade) analog ist. Dabei geht jeder reelle Punkt, sofern er nicht auf einer der beiden reellen Fixpunktspolaren liegt, über in den zweiten Schnittpunkt, den die durch ihn gehende reelle Verbindungslinie der beiden konjugierten Fixpolaren mit seiner¹⁾ Fixfläche hat.

Es bleibt nun noch der Fall zu erledigen, daß die beiden Doppelpunktsgersten des Kollineationstyps (4) der gleichen Schar angehörende Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sind. Wenden wir auf diese durch die Gleichungen IV b bzw. IV c dargestellten Bewegungen das in Kap. II § 2 für die nicht normierte Form I abgeleitete Realitätskriterium an, so ergibt sich, daß diese Bewegungen in beiden Fällen dann und nur dann reell sind, wenn $1 = tu$ und $a = t\bar{u}$, ($t, u \neq 0$) oder $a = \frac{\bar{u}}{u}$ ist. Diese Bedingung ist äquivalent damit, daß $|a| = 1$ ist²⁾.

Wie sehen nun die Bewegungen selbst aus? Jedenfalls bleiben dabei zwei verschiedene Erzeugende der gleichen Schar sowohl auf der ausgezeichneten Fläche als auch auf jeder unserer Fixflächen punktweise fest. Daraus folgt aber, daß alle Erzeugende der anderen Schar auf allen Fixflächen, einschließlich der ausgezeichneten Fläche, Fixgerade sind. Darunter befinden sich natürlich auch alle reellen Erzeugenden dieser Schar. Die betrachteten Bewegungen sind also wieder reelle Schiebungen³⁾ auf jeder der einzelnen Fixflächen und zwar längs

1) Es geht nämlich durch jeden reellen Punkt, der nicht auf einer der beiden konjugierten Fixpolaren liegt, auch hier genau eine reelle ringartige Fixfläche der genannten Schar.

2) Denn einerseits folgt aus $a = \frac{\bar{u}}{u}$, daß $|a| = 1$ ist, und andererseits ist a für $|a| = 1$ in der Form:

$$a = e^{i\varphi} = \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}}{e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\bar{u}}{u}$$

darstellbar.

3) Heffter bezeichnet diese Schiebungen als „Umkrempelung mit imaginären Achsen“. „Schiebung“ ist wohl eine der Anschauung mehr entsprechende Bezeichnung.

der Erzeugendenschar, der die beiden Fixpunktserzeugenden nicht angehören.

Dieses Resultat erscheint vielleicht zunächst etwas überraschend, weil doch die oben festgestellte Realitätsbedingung für diese Bewegungen, daß nämlich $|a| = 1$ sein muß, auf eine Periodizität der Bewegungen schließen läßt. Nun sind diese Bewegungen im vorliegenden Fall in der Tat periodisch, wie man sofort daraus erkennt, daß die reellen Fixerzeugenden, auf denen die reellen Punkte wandern, im projektiven Raum geschlossene Linien sind, die bei der betrachteten Bewegung keinen einzigen reellen Fixpunkt enthalten.

D. Bewegungen, bei denen das invariante Tangentialtetraeder nur zwei Fixerzeugende der gleichen Schar als reelle Bestandteile hat.

Dieser Fall erfordert weit umfangreichere Betrachtungen als bisher. Ich beschränke mich dabei darauf, daß etwa P_1P_2 und P_3P_4 (siehe Fig. 2) die beiden reellen Fixerzeugenden sind¹⁾.

a) Ausgezeichnete Fläche und Fixflächen.

Wählen wir wieder das invariante Tangentialtetraeder als y_i -Koordinatentetraeder mit noch nicht festgelegtem Einheitspunkt, so ist zunächst eine Koordinatentransformation anzugeben, mit deren Hilfe man von den y_i -Koordinaten zu x_i -Koordinaten gelangen kann, die auf ein reelles Tetraeder bezogen sind. Im vorliegenden Fall sind die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ bzw. $y_3 = 0$ und $y_4 = 0$ zueinander konjugiert imaginär. Wir setzen daher die Koordinatentransformation in der Form an:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 + ix_2 \\ \varrho y_2 &= x_1 - ix_2 \\ \varrho y_3 &= x_3 + ix_4 \\ \varrho y_4 &= x_3 - ix_4 \end{aligned} \quad D = -4.$$

Durch diese Transformation erhalten wir für die Gleichung der ausgezeichneten Fläche, die wir in den y_i -Koordinaten wieder in der Form $y_1y_3 - k_1y_2y_4 = 0$, ($k_1 \neq 0$) mit zunächst noch un-

1) Wenn P_1P_4 und P_2P_3 die beiden reellen Fixerzeugenden sein sollten, müssen bei den folgenden Überlegungen die Indices jeweils entsprechend geändert werden. Ich führe die Betrachtungen aber nur für den einen Fall durch, da der andere Fall nichts Neues brächte und man mit genau analogen Schlüssen zum Ziel kommt.

bestimmtem k_1 schreiben können, in den reellen x_i -Koordinaten die Beziehung:

$$(x_1x_3 - x_2x_4) \cdot (1 - k_1) + (x_1x_4 + x_2x_3) \cdot i \cdot (1 + k_1) = 0.$$

Damit diese Gleichung die ausgezeichnete Fläche darstellt, muß sicher $1 - k_1 = tA$,

$1 + k_1 = itB$ sein, wo t eine zunächst beliebige, von Null verschiedene Konstante ist und A, B reell und nicht beide gleichzeitig Null sind. Nun haben wir hier zwei Bedingungs-gleichungen für k_1 , welche gleichzeitig für beliebige A und B nur erfüllt sind, wenn wir auch über den noch willkürlichen Faktor t gemäß dieser Gleichungen verfügen.

$$\text{Wir erhalten so: } t = \frac{2}{A + iB}$$

$$\text{und somit für } k_1: k_1 = \frac{iB - A}{iB + A} = \frac{B + iA}{B - iA} = \frac{u}{\bar{u}}.$$

Diese Bedingung ist, wie bereits gesagt, äquivalent damit, daß $|k_1| = 1$ ist.

Für $|k_1| = 1$ stellt die auf das mit „passendem“ Einheitspunkt versehene y_i -Tetraeder bezogene Flächengleichung aber sicher auch eine ringartige Fläche dar, da sie nicht ausgeartet ist und zwei reelle Gerade, nämlich die beiden reellen Fixerzeugenden P_1P_2 und P_3P_4 enthält. Gleichzeitig sind alle Flächen $y_1y_3 - ky_2y_4 = 0$ für $|k| = 1$ reelle ringartige Fixflächen, die mit der ausgezeichneten Fläche das y_i -Tetraeder als Tangentialtetraeder gemein haben. Es läßt sich auch unschwer zeigen, daß durch jeden reellen Punkt, welcher von den Punkten der reellen Kanten des invarianten Tetraeders verschieden ist, eine und auch nur eine dieser Fixflächen geht. Wir erhalten nämlich für die Fixflächengleichung in den x_i -Koordinaten:

$$k[i(x_1x_4 + x_2x_3) - (x_1x_3 - x_2x_4)] + i(x_1x_4 + x_2x_3) + (x_1x_3 - x_2x_4) = 0.$$

Hieraus erkennt man, daß k für reelle x_i eindeutig bestimmbar ist und den Absolutbetrag eins hat, falls die bei k stehende eckige Klammer nicht verschwindet. Diese Klammer verschwindet aber nur, wenn sowohl $x_1x_4 + x_2x_3 = 0$ als auch $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$ ist, also gerade für die Punkte, welche die reelle Fixfläche $x_1x_4 + x_2x_3 = 0$ (für $k = 1$) mit der reellen Fixfläche $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$ (für $k = -1$) gemeinsam hat. Diese gemeinsamen Punkte liegen

aber, da zwei verschiedene Fixflächen nur die Kanten $P_1 P_2, P_3 P_4, P_1 P_4, P_2 P_3$ des invarianten Tangentialtetraeders gemeinsam haben, (bei Beschränkung auf reelle Punkte) alle auf den beiden reellen Kanten des invarianten Tetraeders.

b) Realität der Bewegungen.

Als nächstes sollen die Bewegungen selbst auf ihre Realität untersucht werden. Führen wir die allgemeine normierte Kollineationsgleichung

$$\begin{aligned} I^*. \quad \varrho y_1' &= a y_1 \\ \varrho y_2' &= b y_2 \\ \varrho y_3' &= \frac{1}{a} y_3 \\ \varrho y_4' &= \frac{1}{b} y_4 \end{aligned}$$

vermöge der angegebenen Koordinatentransformation in die reellen x_i -Koordinaten über, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= (a + b)x_1 + i(a - b)x_2 \\ \varrho x_2' &= -i(a - b)x_1 + (a + b)x_2 \\ \varrho x_3' &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x_3 + i\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)x_4 \\ \varrho x_4' &= -i\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)x_3 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x_4. \end{aligned}$$

Diese Bewegungen sind also dann und nur dann reell, wenn

$$\begin{aligned} a + b &= t A \\ a - b &= i t B \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= t C \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= i t D \end{aligned}$$

ist, wo t eine zunächst beliebige, von Null verschiedene Konstante ist und A, B, C, D reelle Zahlen bedeuten, wobei $A^2 + B^2 \neq 0$ und $C^2 + D^2 \neq 0$ ist. Aus den ersten beiden dieser Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= \frac{t}{2} (A + iB) \\ b &= \frac{t}{2} (A - iB). \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in die 3. Gleichung ein, so erhalten wir die Beziehung: $\frac{4A}{A^2 + B^2} = t^2 C$, aus der folgt, daß t^2 reell, d. h. t reell oder rein imaginär sein muß. Wir bekommen somit schließlich als notwendige und, wie man durch Einsetzen sofort bestätigt, auch hinreichende Bedingung für Realität der durch I^* dargestellten Bewegung, daß a und b gleiche reelle oder rein imaginäre Vielfache von konjugiert imaginären (evtl. gleichen reellen) Zahlen sind, in Formeln:

$$a = t a^*$$

$$b = t \bar{a}^* \text{ mit } t^2 \text{ reell, } \neq 0 \text{ und } a^* \neq 0.$$

Wir können diese Bedingung auch in der Form aussprechen, daß entweder $b = \bar{a}$ oder $b = -\bar{a}$ sein muß. Denn t muß entweder reell oder rein imaginär sein. Bei reellem t ist aber $b = \bar{a}$, während bei rein imaginärem t $b = -\bar{a}$ ist, weil dann $\bar{t} = -t$ ist. Wir können also die reelle Transformationsgleichung I^* in der Form schreiben:

$$Ir^*. \quad \varrho y_1' = a y_1$$

$$\varrho y_2' = \pm \bar{a} y_2$$

$$\varrho y_3' = \frac{1}{a} y_3$$

$$\varrho y_4' = \pm \frac{1}{\bar{a}} y_4,$$

wo entweder beidemale das obere oder beidemale das untere Vorzeichen steht.

Aus diesen Tatsachen folgt insbesondere, daß die dem Kollineationstyp (2) entsprechende Bewegung sicher stets imaginär ist: Ich habe bereits erwähnt, daß die einzige bei Typ (2) vorkommende Doppelpunktsgerade nur eine der beiden konjugierten Fixpolaren sein kann. In diesem Fall haben die Kollineationsgleichungen die in Kap. III. § 2. C. dargestellte Gestalt IIa^* und IIb^* . Damit die dadurch festgelegten Bewegungen reell wären, müßten unsere Realitätsbedingungen erfüllt sein. Das bedeutet aber im vorliegenden Fall, daß in IIa^* $b = \pm 1$ bzw. in IIb^* $a = \pm 1$ sein müßte, was ja gerade bei IIa^* bzw. IIb^* ausgeschlossen ist. Die Bewegungen des Typs (2) sind also sicher imaginär und werden deshalb im folgenden nicht weiter behandelt. Geometrisch zeigt sich das übrigens darin, daß in

beiden Fällen die punktweise festbleibende Polare, die in den bisherigen Fällen Achse der durch Typ (2). dargestellten Rotationen war, imaginär ist, also auch das zugehörige Büschel von Polarfixebenen, das wir früher immer zur Aufsuchung der reellen Fixkurven verwendet haben.

c) Übersicht der möglichen reellen Einzelbewegungen.

Es ist zweckmäßig zunächst zu untersuchen, welche Möglichkeiten die reelle Transformation Ir^* überhaupt enthält:

1. Sei a reell:

a) Für $a = \pm 1$ ist die Transformation

α) bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens in der Kollineationsgleichung Ir^* die Identität;

β) bei Gültigkeit des unteren Vorzeichens eine Bewegung vom Typ (4). Denn dann hat die Transformation die Form:

$$\begin{aligned} IV a^*. \quad \varrho y_1' &= y_1 \\ \varrho y_2' &= -y_2 \\ \varrho y_3' &= y_3 \\ \varrho y_4' &= -y_4 \end{aligned} \quad D = 1.$$

b) Für $a \neq \pm 1$ hat die Transformation

α) bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens die Form:

$$\begin{aligned} \varrho y_1' &= a y_1 \\ \varrho y_2' &= a y_2 \\ \varrho y_3' &= \frac{1}{a} y_3 \\ \varrho y_4' &= \frac{1}{a} y_4, \end{aligned} \quad D = 1.$$

welche, da eine Multiplikation aller Gleichungen mit einem beliebigen Faktor $\neq 0$ deren Sinn nicht ändert, sich auf die Form reduzieren läßt¹⁾:

$$\begin{aligned} IV b. \quad \varrho y_1' &= a^2 y_1 \\ \varrho y_2' &= a^2 y_2 \quad a^2 \neq 1 \\ \varrho y_3' &= y_3 \quad a \text{ reell.} \\ \varrho y_4' &= y_4 \end{aligned}$$

Diese Transformation ist ebenfalls vom Typ (4).

1) ϱ bedeutet wieder nur einen beliebigen Proportionalitätsfaktor $\neq 0$ und braucht in den verschiedenen Systemen nicht stets den gleichen Wert zu haben.

β) bei Gültigkeit des unteren Vorzeichens die Form:

$$\begin{aligned} \varrho y_1' &= ay_1 \\ \varrho y_2' &= -ay_2 \\ \varrho y_3' &= \frac{1}{a}y_3 \\ \varrho y_4' &= -\frac{1}{a}y_4, \end{aligned} \quad D = 1.$$

welche sich aus dem gleichen Grunde, wie oben, reduzieren läßt auf:

$$\begin{aligned} \text{Ia. } \varrho y_1' &= a^2 y_1 \\ \varrho y_2' &= -a^2 y_2 & a^2 \neq 1 \\ \varrho y_3' &= y_3 & a \text{ reell.} \\ \varrho y_4' &= -y_4 \end{aligned}$$

Diese Bewegung ist wegen $a^2 \neq \pm 1$ vom Typ (1).

2. Sei a nicht reell:

a) Für $|a| = 1$ ist die Transformation Ir^*

α) bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens vom Typ (4).

Denn dann lauten die Gleichungen wegen $a \bar{a} = |a|^2 = 1$,

$$\text{also } \frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{a\bar{a}} = \bar{a} \text{ und } \frac{1}{\bar{a}} = \frac{a}{a\bar{a}} = a:$$

$$\begin{aligned} \varrho y_1' &= ay_1 \\ \varrho y_2' &= \bar{a}y_2 \\ \varrho y_3' &= \bar{a}y_3 \\ \varrho y_4' &= ay_4, \end{aligned} \quad D = 1.$$

welche sich durch Multiplikation mit a auf die Form reduzieren lassen: ($a \bar{a} = 1$)

$$\begin{aligned} \text{IV c. } \varrho y_1' &= a^2 y_1 \\ \varrho y_2' &= y_2 & |a| = 1 \\ \varrho y_3' &= y_3 & a \text{ nicht reell.} \\ \varrho y_4' &= a^2 y_4 \end{aligned}$$

β) bei Gültigkeit des unteren Vorzeichens vom Typ (1), falls a nicht rein imaginär, also $\neq \pm i$ ist.

Denn dann lauten die Gleichungen (wegen $a \bar{a} = 1$):

$$\begin{aligned} \varrho y_1' &= ay_1 \\ \varrho y_2' &= -\bar{a}y_2 \\ \varrho y_3' &= \bar{a}y_3 \\ \varrho y_4' &= -ay_4, \end{aligned} \quad D = 1.$$

welche sich auf die Form reduzieren lassen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{I b. } \varrho y_1' = a^2 y_1 & |a| = 1. \\
 \varrho y_2' = & -y_2 \\
 \varrho y_3' = & y_3 \\
 \varrho y_4' = & -a^2 y_4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 a \text{ nicht reell und} \\
 \text{nicht rein imaginär.}
 \end{array}$$

Ist aber a rein imaginär, d. h. hier $= \pm i$, dann ist diese Transformation vom Typ (4). Denn dann hat sie die Form:

$$\begin{array}{ll}
 \text{IV d. } \varrho y_1' = -y_1 & \\
 \varrho y_2' = & -y_2 \\
 \varrho y_3' = & y_3 \\
 \varrho y_4' = & y_4
 \end{array}
 \quad D = 1.$$

b) Für $|a| \neq 1$ ist die Transformation Ir^* :

α) bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens vom Typ (1) und lautet:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Ic}^*. \varrho y_1' = a y_1 & \\
 \varrho y_2' = & \bar{a} y_2 \\
 \varrho y_3' = & \frac{1}{a} y_3 \\
 \varrho y_4' = & \frac{1}{\bar{a}} y_4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 D = 1. \\
 |a| \neq 1, \\
 a \text{ nicht reell.}
 \end{array}$$

β) bei Gültigkeit des unteren Vorzeichens ebenfalls vom Typ (1), falls a nicht rein imaginär ist, und lautet:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Id}^*. \varrho y_1' = a y_1 & \\
 \varrho y_2' = & -\bar{a} y_2 \\
 \varrho y_3' = & \frac{1}{a} y_3 \\
 \varrho y_4' = & -\frac{1}{\bar{a}} y_4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 D = 1. \\
 |a| \neq 1, \\
 a \text{ nicht reell und} \\
 \text{nicht rein imaginär.}
 \end{array}$$

Bei rein imaginärem a ist jedoch diese Transformation vom Typ (4) und hat die Form:

$$\begin{array}{ll}
 \varrho y_1' = a y_1 & \\
 \varrho y_2' = & a y_2 \\
 \varrho y_3' = & \frac{1}{a} y_3 \\
 \varrho y_4' = & \frac{1}{a} y_4
 \end{array}
 \quad D = 1.$$

welche sich reduzieren läßt auf die Form:

$$\begin{array}{lll} \text{IVe. } \varrho y_1' & = & a^2 y_1 \\ \varrho y_2' & = & a^2 y_2 \quad |a| \neq 1. \\ \varrho y_3' & = & y_3 \quad a \text{ rein imaginär.} \\ \varrho y_4' & = & y_4. \end{array}$$

d) Auffindung einer zweiten reellen Fixflächenschar bei geeigneter Beschaffenheit der Transformationskoeffizienten¹⁾).

Die ganz besondere Bedingung, welche die Forderung, daß die Bewegung reell sein soll, für die Koeffizienten der Transformation zur Folge hat, gestattet nun folgenden Satz zu beweisen:

Wenn in der reellen Transformation Ir^* der absolute Betrag von a gleich eins ist, gleichgültig, ob a reell ist oder nicht, so gibt es eine von den früheren verschiedene unendliche Schar von reellen ringartigen Fixflächen, nämlich die Flächen: $y_1 y_2 - h y_3 y_4 = 0$ (h reell und > 0).

Nachweis: Durch die Transformation Ir^* gehen alle Flächen $y_1' y_2' - h y_3' y_4' = 0$, gleichgültig, ob man in Ir^* das obere oder untere Vorzeichen nimmt; über in Flächen der Form:

$$a \bar{a} y_1 y_2 - h \frac{1}{a \bar{a}} y_3 y_4 = 0.$$

Wegen $|a| = 1$ ist aber $a \bar{a} = |a|^2 = 1$, sodaß also alle diese Flächen Fixflächen sind. Es bleibt nun nur noch zu zeigen, daß diese Fixflächen für reelle $h > 0$ reelle und zwar ringartige Flächen sind. Dazu gehen wir vermöge der zu Beginn des Abschnitts D) angegebenen Transformation zu den reellen x_i -Koordinaten über. In diesen lautet die Gleichung der Fixflächen: $x_1^2 + x_2^2 - h(x_3^2 + x_4^2) = 0$.

Sie sind also für reelle $h > 0$ reelle und zwar ringartige Flächen. Ferner geht durch jeden reellen Punkt des Raumes, der von den Punkten der beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche verschieden ist, genau eine dieser reellen Fixflächen. Denn h ist für reelle x_i stets eindeutig reell auflösbar und > 0 , falls nicht $x_3 = x_4 = 0$ oder $x_1 = x_2 = 0$ ist, d. h. falls in den y_i -Koordinaten nicht $y_3 = y_4 = 0$ oder

1) Diese zweite Fixflächenschar wird sich im folgenden zur Veranschaulichung der Einzelbewegungen als sehr brauchbar erweisen.

$y_1 = y_2 = 0$ ist, was gerade für die Ausnahmepunkte der beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche zutrifft.

Aus der Fixflächengleichung $y_1 y_2 - h y_3 y_4 = 0$ folgt, daß die Geraden $y_1 = y_4 = 0$ und $y_2 = y_3 = 0$, welche ja die beiden konjugiert imaginären Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche sind, ferner die Geraden $y_1 = y_3 = 0$ und $y_2 = y_4 = 0$, welche die beiden konjugiert imaginären, konjugierten Fixpolaren der ausgezeichneten Fläche darstellen, ganz auf obigen Fixflächen liegen, also Erzeugende dieser Flächen sind. Alle Fixflächen der obigen Schar haben diese vier Fixgeraden gemein. Die vier Fixebenen des invarianten Tetraeders sind also auch Tangentialebenen an obige reelle Fixflächen — nur sind die Berührungspunkte andere wie bei der ausgezeichneten Fläche — und die beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche $y_3 = y_4 = 0$ und $y_1 = y_2 = 0$ sind, wie man sich leicht an Hand der Figur des invarianten Tetraeders überlegt, gerade konjugierte Polaren in bezug auf obige reelle Fixflächen. Dadurch kann man sich sofort ein anschauliches Bild machen von der Lage dieser reellen Fixflächen im Raum. Das invariante Tangentialtetraeder dieser Flächen hat nur die beiden Fixgeraden, welche konjugierte Polaren in bezug auf alle diese Fixflächen sind, als reelle Bestandteile. Da auch alle übrigen Überlegungen, die wir bei der Veranschaulichung der reellen Fixflächen bei nullteiligen bzw. bei ringartigen Fundamentalflächen in Abschnitt C) angestellt haben, hier ebenfalls gelten, haben obige reelle Fixflächen genau das gleiche Aussehen wie die in Kapitel II bzw. IV C) behandelten. Nur sind die beiden reellen konjugierten Fixpolaren in bezug auf alle diese Fixflächen im vorliegenden Fall Erzeugende der ausgezeichneten Fläche.

Wir wollen zum Unterschied die früheren Fixflächen, zu denen auch die ausgezeichnete Fläche gehört, als Fixflächenschar I, die neuen Fixflächen als Fixflächenschar II bezeichnen. Dabei gibt es bei allen den im vorstehenden klassifizierten reellen Bewegungen sicher als reelle Fixflächen die der Fixflächenschar I. Denn diese Bewegungen sind sämtlich Spezialisierungen der Transformation I bzw. Ir^* .

e) Darstellung der reellen Einzelbewegungen.

a) Wir wollen nun zunächst bei den reellen Bewegungen des Typs (4) die Fixkurven aufsuchen:

Bei der Bewegung IVa* bleiben die beiden Geraden $y_1 = y_3 = 0$ und $y_2 = y_4 = 0$ punktweise fest. Es sind das gerade die beiden konjugiert imaginären, konjugierten Fixpolaren der ausgezeichneten Fläche. Reelle Fixpunkte sind also nicht vorhanden. Denn die beiden konjugiert imaginären Fixpolaren müssen ja hochimaginär sein, weil sie keinen Schnittpunkt miteinander haben. Die Transformation IVa* besitzt außer der Fixflächenschar I auch die Fixflächenschar II, da ihre Koeffizienten die Voraussetzung für Existenz dieser Fixflächenschar erfüllen. Da nun die beiden punktweise festbleibenden Geraden der gleichen Schar angehörende Erzeugende dieser Fixflächenschar II sind, folgt, daß alle Erzeugenden der anderen Schar Fixgeraden sind, sodaß die Bewegung selbst eine reelle Schiebung auf der Fixflächenschar II darstellt.

Weil ferner die Transformation IVa* keinen Transformationsparameter enthält, also durch die Transformation jeder Originalpunkt in einen ganz bestimmten Bildpunkt übergeht, können wir noch genauer die Lage von zueinander gehörigen Original- und Bildpunkten präzisieren. Es gehen nämlich bei dieser Bewegung natürlich auch alle Fixflächen der Schar I in sich über. Also geht durch jeden reellen Punkt P, der nicht auf einer der beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche liegt, sowohl eine reelle Fixfläche der Schar I als auch eine reelle Fixerzeugende der Fixflächenschar II. Ich behaupte, daß diese reelle Fixgerade, welche von den beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche verschieden ist, die Fixfläche der Schar I in zwei verschiedenen reellen Punkten schneidet. Denn: Tangente an die Fixfläche kann die Fixgerade nicht sein, da sonst der reelle Punkt P Berührungspunkt und daher Fixpunkt sein müßte. Die Bewegung hat aber keine reellen Fixpunkte. Ferner kann die reelle Fixgerade nicht Erzeugende der Fixfläche der Schar I sein. Denn sonst gäbe es, da außerdem auf dieser Fixfläche schon in jeder Schar 2 Fixerzeugende existieren, auf der Fixfläche 3 verschiedene Fixerzeugende der gleichen Schar. Es müßten also alle Erzeugenden dieser Schar fest sein, was punktweise Invarianz der beiden in der anderen

Schar liegenden Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche zur Folge hätte. Ein imaginärer Schnitt von Fixgerade und Fixfläche ist ebenfalls unmöglich, weil dann die Schnittpunkte konjugiert imaginär sein müßten, während im vorliegenden Fall doch sicher der eine, nämlich P , reell ist. Wir sehen also, daß durch jeden, von den Punkten der beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche verschiedenen reellen Punkt sowohl eine Fixfläche der Schar I als auch eine reelle Fixerzeugende einer Fixfläche der Schar II geht, welche die Fixfläche der Schar I auch noch in einem zweiten reellen Punkt schneidet. Da keine reellen Fixpunkte vorhanden sind, müssen sich diese beiden Schnittpunkte bei der Bewegung also gerade miteinander vertauschen. Damit ist die ganze Bewegung durchaus anschaulich dargestellt: Ein reeller, nicht auf einer der beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche liegender Punkt P geht über in den zweiten Schnittpunkt, welchen die durch P gehende reelle Fixerzeugende der Fixflächenschar II mit der durch P gehenden Fixfläche der Schar I hat.

Für die reellen Punkte der beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche läßt sich die Lage von Original- und zugehörigem Bildpunkt anschaulich nicht so einfach übersehen. Ich begnüge mich daher hier mit der Angabe, daß diese Punkte auf der durch sie gehenden Fixerzeugenden in die zu ihnen bezüglich der beiden auf der Fixerzeugenden liegenden — hier imaginären — Fixpunkte harmonischen Punkte wandern.

Die Bewegung IVa* hatten wir in früheren Fällen als spezielle Rotation bezeichnet. Nun sind aber hier die allgemeinen Rotationen, welche den Bewegungen des Typs (2) entsprechen, stets imaginär, weshalb bei der Bewegung IVa* hier die Bezeichnung als spezielle Rotation unangebracht erscheint, zumal man dann auch eine imaginäre Rotationsachse annehmen müßte. Doch dürfte die Bezeichnung der Bewegung als Schiebung auf der Fixflächenschar II dem tatsächlichen Sachverhalt entsprechen.

Die durch IVb dargestellte Bewegung besitzt wegen $|a| \neq 1$ die reellen Fixflächen der Schar I, nicht aber die der Schar II. Fest bleiben hier alle Punkte der Geraden $y_1 = y_2 = 0$ und

$y_3 = y_4 = 0$. Es sind dies gerade die Punkte der beiden reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche. Da aber diese punktweise festbleibenden Geraden Erzeugende der sämtlichen Fixflächen der Schar I sind, andererseits alle Erzeugenden der die beiden punktweise festbleibenden Geraden nicht enthaltenden Schar diese schneiden müssen, folgt, daß auf jeder Fixfläche der Schar I, einschließlich der ausgezeichneten Fläche, alle Erzeugenden einer Schar Fixgeraden sind. Die Bewegung ist also eine reelle Schiebung auf der Fixflächenschar I. Jeder von den Fixpunkten verschiedene reelle Punkt wandert auf einer reellen Fixerzeugenden der durch ihn gehenden Fixfläche der Schar I.

Das hier für die Bewegung IVb Gesagte gilt wörtlich auch für die Bewegungen IVd und IVe. Nur besitzt die Bewegung IVd außer der Fixflächenschar I auch die Fixflächenschar II. Es geht eben bei dieser Bewegung jeder reelle Punkt P, sofern er nicht auf einer der beiden punktweise festbleibenden reellen Erzeugenden der ausgezeichneten Fläche liegt, über in den zweiten reellen Schnittpunkt P', welchen die durch P gehende reelle Fixerzeugende der Fixflächenschar I mit der durch P gehenden Fixfläche der Schar II hat. Da die beiden punktweise festbleibenden reellen Erzeugenden der ausgezeichneten Fläche konjugierte Polaren der Fixflächenschar II sind, liegen insbesondere P und P' harmonisch zu den reellen Fixpunkten ihrer Verbindungsgeraden. Die Bewegung IVd können wir als spezielle Schiebung auf der Fixflächenschar I bezeichnen. Bemerkt sei noch, daß einerseits die Zusammensetzung einer Bewegung IVb mit der Bewegung IVd eine Bewegung IVe und andererseits die Zusammensetzung einer Bewegung IVe mit IVd eine Bewegung IVb ergibt. Geometrisch besteht der Unterschied zwischen diesen 3 Bewegungen, wie man sich im einzelnen genauer überlegen kann, in folgendem: Jede nicht punktweise festbleibende reelle Fixerzeugende besitzt zwei verschiedene reelle Fixpunkte, welche diese Fixerzeugende in zwei Strecken teilen. Bei der Bewegung IVb werden nun diese beiden Strecken jeweils in sich selbst übergeführt, bei der Bewegung IVe miteinander vertauscht, während die parameterlose

Bewegung IVd speziell eine involutorische Vertauschung beider Strecken darstellt¹⁾).

Bei der durch IVc dargestellten Bewegung sind umgekehrt die beiden konjugiert imaginären Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche $y_1 = y_4 = 0$ und $y_2 = y_3 = 0$ punktweise fest. Ferner besitzt diese Bewegung wegen $|a| = 1$ außer den Fixflächen der Schar I auch die der Schar II. Die beiden konjugiert imaginären, punktweise festbleibenden Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche gehören aber sowohl allen Flächen der Fixflächenschar I als auch allen Flächen der Fixflächenschar II als Erzeugende an. Da auf allen diesen Fixflächen sämtliche Erzeugende der Schar, in welcher die beiden punktweise festbleibenden Erzeugenden nicht enthalten sind, die beiden Fixpunktserzeugenden schneiden, müssen alle diese Erzeugenden Fixgerade sein. Darunter befinden sich natürlich auch alle reellen Erzeugenden dieser Scharen. Es geht also durch jeden reellen, nicht auf den Kanten des invarianten Tangentialtetraeders liegenden Raumpunkt P mindestens eine reelle Fixgerade, weil durch P sowohl eine reelle Fixfläche der Schar I als auch der Schar II geht, und weil auf diesen Flächen alle Erzeugenden der einen Schar festbleiben. Da ferner P nicht Fixpunkt ist, kann P nicht zwei verschiedene Fixerzeugende tragen. Es geht also durch P genau eine reelle Fixgerade, welche sowohl einer Fixfläche der Schar I als auch einer Fixfläche der Schar II als Erzeugende angehört. Aus dieser Tatsache folgt nebenbei auch, daß die beiden Fixflächenscharen I und II sich stets in Erzeugenden schneiden, da sie außerdem die beiden konjugiert imaginären Fixpunktserzeugenden der ausgezeichneten Fläche gemeinsam haben und ihre Schnitte nur Raumkurven 4. Ordnung sein können.

Die reellen Fixkurven auf den Fixflächen der Schar II bzw. I sind jetzt gerade die reellen Erzeugenden der anderen Schar als bei der Bewegung IVa* bzw. IVb. Denn bei IVa* können die reellen Fixerzeugenden der Fixflächenschar II nicht auch Erzeugende der Fixflächenschar I sein, und bei IVb existiert

1) Die Trennung dieser 3 Arten von Schiebungen ergibt sich hier infolge der weitgehenden Unterteilung der analytischen Klassifikation. Bei den analogen, in Abschnitt B dieses § 1 betrachteten Schiebungen wurde eine derartige Trennung unterlassen.

überhaupt die Fixflächenschar II nicht. Die Bewegung IVc, die wir etwa als Schiebung auf den beiden Fixflächenscharen I und II bezeichnen wollen, dürfte damit genügend veranschaulicht sein.

β) Die nun noch übrigen reellen Bewegungen des Kollineationstyps (1) lassen sich rasch erledigen. Ich habe nämlich die Kollineationsgleichungen in Abschnitt D. c) dieses Kapitels deshalb so ausführlich angegeben, weil wir nun sofort diese Bewegungen durch bekannte reelle Bewegungen zusammensetzen können und damit am bequemsten etwas Einblick in den anschaulichen Vorgang bekommen. Alle diese Bewegungen besitzen auf jeden Fall die Fixflächenschar I.

Wie man an Hand der Transformationsgleichungen sofort erkennt, entsteht die Bewegung Ia durch Zusammensetzung einer Bewegung der Art IVa* und IVb, wobei die Reihenfolge der Zusammensetzung gleichgültig ist. Die reelle Bewegung Ia ist also die Zusammensetzung einer reellen Schiebung auf der Fixflächenschar II mit einer reellen Schiebung auf der Fixflächenschar I. Daraus folgt sofort, daß die zusammengesetzte Bewegung nicht die Fixflächenschar II besitzt, da diese Flächen nur bei der ersten Teilbewegung invariant bleiben. Es ist ja auch bei der Transformationsgleichung der Gesamtbewegung $|a| \neq 1$ angenommen.

Die Bewegung Ib entsteht durch Zusammensetzung einer geeigneten Bewegung der Art IVa* und IVc, wobei ebenfalls die Reihenfolge der Zusammensetzung gleichgültig ist¹⁾. Diese Bewegung besitzt außer der Fixflächenschar I auch die Fixflächenschar II. Denn in ihrer Transformationsgleichung ist $|a| = 1$, ferner lassen die beiden Teilbewegungen ebenfalls die Fixflächenschar II invariant. Man kann sich diese Bewegung sehr leicht anschaulich vorstellen: Ein reeller Raumpunkt wandert zuerst auf einer reellen Erzeugenden, die zwei Fixflächen F_1 und F_2 der Scharen I und II gemeinsam ist, und dann auf einer

1) Die Reihenfolge der Zusammensetzung zweier Bewegungen bei allen derartigen Transformationen ist gleichgültig. Denn die Matrix der resultierenden Transformation entsteht ja durch Multiplikation der Matrizen der Teiltransformationen. Bei den Matrizen der in den vorliegenden Fällen auftretenden Transformationen kommen aber stets von Null verschiedene Glieder nur in der Hauptdiagonale vor, weshalb die Multiplikation zweier derartiger Matrizen notwendig kommutativ ist.

nicht zu F_1 gehörigen Erzeugenden von F_2 bis zum zweiten Schnittpunkt dieser Erzeugenden mit der der Fixflächenschar I angehörenden Fixfläche F_1 oder umgekehrt.

Genau analog lassen sich die Bewegungen Ic^* und Id^* aus bekannten reellen Bewegungen zusammensetzen. Man muß dabei nur immer wesentlich darauf achten, daß diese Teilbewegungen reell sind, d. h. daß die Zusammensetzung vorgenommen werden kann unter Beachtung der bei jeder Einzelbewegung für a geltenden Bedingung bezüglich der Realität und des absoluten Betrages. Ich begnüge mich bei diesen beiden Bewegungen mit der Angabe der Zusammensetzungsmöglichkeit:

Die Bewegung Ic^* entsteht durch Zusammensetzung einer geeigneten Bewegung der Art IVb und IVc.

Die Bewegung Id^* entsteht durch Zusammensetzung einer geeigneten Bewegung Ic^* und IVa^* , d. h. durch Zusammensetzung von geeigneten Bewegungen der Art IVa^* , IVb und IVc.

Wir sehen also, daß die hier möglichen reellen Bewegungen des Typs (1) sämtlich aus den bekannten reellen Bewegungen IVa^* , IVb und IVc des Typs (4) zusammengesetzt werden können. Da auch die beiden Bewegungen IVd und IVe aus geeigneten Bewegungen IVa^* , IVb und IVc aufgebaut werden können (nämlich aus IVa^* und IVc bzw. IVa^* , IVb und IVc), und da andererseits, wie man leicht bestätigt, damit alle Zusammensetzungsmöglichkeiten der Bewegungen IVa^* , IVb und IVc erschöpft sind, so ergibt sich, daß die hier möglichen reellen Kollineationen aus allen und nur den Bewegungen bestehen, die sich aus den Bewegungen IVa^* , IVb und IVc des Typs (4) zusammensetzen lassen.

Eine kurze Zusammenfassung der möglichen reellen Bewegungen dieses Abschnitts möge die folgende Übersicht geben:

1. Bewegungen des Typs (4):

- a) Schiebungen auf der Fixflächenschar II (IVa^*).
- b) Schiebungen auf der Fixflächenschar I (IVb, IVd, IVe).
- c) Schiebungen auf der Fixflächenschar I und II (IVc).

2. Bewegungen des Typs (1):

- a) Bewegung Ia, zusammensetzbar aus IVa^* und IVb.
- b) Bewegung Ib, zusammensetzbar aus IVa^* und IVc.
- c) Bewegung Ic^* , zusammensetzbar aus IVb und IVc.
- d) Bewegung Id^* , zusammensetzbar aus IVa^* , IVb und IVc.

Es sei noch bemerkt, daß durch Zusammensetzung von IVc (mit $a = \pm i$) und IVd gerade die Bewegung IVa* entsteht, sodaß also alle reellen Bewegungen sich durch reelle Schiebungen auf der Fixflächenschar I zusammensetzen lassen in Übereinstimmung mit den Betrachtungen in Kapitel I.

Schließlich bleiben nun noch die Kollineationstypen (11), (12) und (13) bei ringartigen Fundamentalflächen zu behandeln.

§ 2. Die Bewegungen des Typs (11).

A. Koordinatentetraeder und Bewegungsgleichungen.

Bei Typ (11) folgt auf Grund der gleichen Überlegungen wie bei den ovalen Fundamentalflächen (Kap. III, §3), daß der Punkt A_4 der Doppelpunktsgerade A_1A_4 [siehe Fig. 1: Typ (11)] notwendig ein Punkt der ausgezeichneten Fläche und die Ebene durch A_1, A_3, A_4 Tangentialebene im Punkt A_4 an die ausgezeichnete Fläche sein muß. Ferner kann die Doppelpunktsgerade nicht Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sein, da sie sonst mit ihrer konjugierten Polaren zusammenfielen und daher ein Büschel von Fixebenen tragen müßte, was bei Typ (11) nicht der Fall ist. Die Doppelpunktsgerade ist also notwendig Tangente im Punkt A_4 an die ausgezeichnete Fläche. Außerdem muß diese Doppelpunktsgerade bei einer reellen Kollineation reell sein, da andernfalls die dazu konjugiert imaginäre Gerade, welche dann von A_1A_4 verschieden wäre, ebenfalls punktweise festbleiben müßte. Es gibt aber bei Typ (11) außer den Punkten der Geraden A_1A_4 keine Fixpunkte. Aus dem gleichen Grunde wie bei den ovalen Fundamentalflächen ist ferner die Gerade A_3A_4 die zu der Doppelpunktsgerade in bezug auf die ausgezeichnete Fläche konjugierte Polare, die wegen der Realität von A_1A_4 selbst reell ist und ein Büschel von reellen Fixebenen trägt, nämlich die Polarebenen zu den Fixpunkten der Geraden A_1A_4 in bezug auf die ausgezeichnete Fläche. Insbesondere folgt aus dem Gesagten, daß A_4 der einzige — als Schnittpunkt zweier verschiedener reeller Geraden notwendig reelle — Fixpunkt der ausgezeichneten Fläche ist. Die durch A_4 gehenden, wegen der Realität von A_4 reellen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche sind dann zwei von A_1A_4 und A_3A_4 verschiedene reelle Fixgeraden der Tangentialebene in A_4 .

Als Koordinatentetraeder, auf das wir nun alle die folgenden Betrachtungen beziehen wollen, wählen wir ein Tetraeder, von dem zwei Kanten die reellen Fixgeraden $A_1 A_4$ und $A_3 A_4$ sind. Insbesondere können wir natürlich auch die anderen Kanten des Koordinatentetraeders sowie den Einheitspunkt reell wählen, sodaß wir es also im folgenden mit Koordinaten eines reellen Koordinatentetraeders zu tun haben.

Nach der früher erwähnten Baldus'schen Arbeit (siehe dort Seite 393) hat die allgemeine Kollineation des Typs (11), wenn man ein Koordinatentetraeder, wie wir es eben gewählt haben, zugrunde legt und den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 beziehungsweise die Koordinaten $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ zuordnet, die Gestalt:

$$\begin{aligned} \text{XI. } \varrho y_1' &= y_1 \\ \varrho y_2' &= y_2 \\ \varrho y_3' &= by_2 + y_3 \\ \varrho y_4' &= cy_2 + dy_3 + y_4 \end{aligned} \quad \text{bd} \neq 0.$$

Da wir ein reelles Koordinatentetraeder zugrunde gelegt haben, ist diese Kollineation dann und nur dann reell, wenn b, c und d reell sind.

B. Ausgezeichnete Fläche.

Zunächst wollen wir nun untersuchen, wie die Gleichung der ausgezeichneten Fläche aussehen muß, damit die Fixgeraden usw. die oben bestimmte Lage in bezug auf die ausgezeichnete Fläche haben. Wir setzen die Flächengleichung allgemein an:

$$\sum_{i, k=1}^4 a_{ik} y_i y_k = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Da der Punkt $A_4(0, 0, 0, 1)$ auf der ausgezeichneten Fläche liegt, muß $a_{44} = 0$ sein. Die Tangentialebene in einem Punkt x_i dieser Fläche hat die Gleichung:

$$\sum_{i, k=1}^4 a_{ik} y_i x_k = 0.$$

Die Tangentialebene in A_4 muß aber die Form $y_2 = 0$ haben, was $a_{14} = a_{34} = 0$ zur Voraussetzung hat. Wenn $a_{14} = a_{34} = a_{44} = 0$ ist, muß a_{24} notwendig $\neq 0$ sein, da sonst die ausgezeichnete Fläche ausgeartet wäre. Die Flächengleichung hat sich also durch diese Überlegungen auf die Form reduziert:

$$a_{11} y_1^2 + 2a_{12} y_1 y_2 + 2a_{13} y_1 y_3 + a_{22} y_2^2 + 2a_{23} y_2 y_3 + 2a_{24} y_2 y_4 + a_{33} y_3^2 = 0.$$

Da die Tetraederkanten $A_1 A_4$ ($y_2 = y_3 = 0$) und $A_3 A_4$ ($y_1 = y_2 = 0$) nicht ganz auf der ausgezeichneten Fläche liegen dürfen, folgt, daß $a_{11} \neq 0$ und $a_{33} \neq 0$ sein müssen. Durch Anwendung der allgemeinen Transformation XI auf die Gleichung der ausgezeichneten Fläche leitet man ferner durch leichte Rechnung unter Berücksichtigung der Forderung, daß die ausgezeichnete Fläche bei dieser Transformation invariant bleiben soll, die weiteren Bedingungen ab: $a_{13} = 0$,

$$\text{ferner: } 2ba_{23} + 2ca_{24} + a_{33}b^2 = 0$$

$$\text{und } a_{24}d + a_{33}b = 0,$$

$$\text{woraus folgt: } a_{24} = -\frac{b}{d}a_{33} \quad (d \neq 0)$$

$$\text{und } a_{23} = \frac{2c - bd}{2d} a_{33}.$$

Die beiden letzten Bedingungen drücken eine Beziehung zwischen den Koeffizienten der Transformation und den Koeffizienten der ausgezeichneten Fläche aus. Man kann daher diese beiden Bedingungen auffassen als Bedingungen für die Transformationskoeffizienten bei vorgegebener ausgezeichnete Fläche oder als Bedingungen für die ausgezeichnete Fläche bei vorgegebener Transformation. Wir wollen bei der folgenden Behandlung die letzte Auffassung annehmen, also die Transformation selbst nicht weiter beschränken. Die ausgezeichnete Fläche muß dann die folgende endgültige Form haben:

$$a_{11} y_1^2 + 2a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2 + \frac{2c - bd}{d} y_2 y_3 - \frac{2b}{d} y_2 y_4 + y_3^2 = 0.$$

Dabei haben wir willkürlich $a_{33} = 1$ gesetzt, was ja wegen der Homogenität der Gleichung und wegen $a_{33} \neq 0$ gestattet ist. Dann müssen die Koeffizienten a_{11} , a_{12} und a_{22} reell sein; b , c und d sind ja ohnedies bei einer reellen Kollineation reell. Ferner soll die ausgezeichnete Fläche eine ringartige Fläche sein, was bei Bezug der Gleichung auf ein reelles Koordinatentetraeder stets positive Diskriminante erfordert. Nun hat die Diskriminante D der obigen Flächengleichung den Wert:

$$D = -\left(\frac{b}{d}\right)^2 a_{11}.$$

Da b und d reell und ungleich Null sind, ist also D sicher positiv, wenn $a_{11} < 0$ ist.

Positive Diskriminante wäre wohl an und für sich noch keine hinreichende Bedingung dafür, daß die Fläche ringartig ist, da ja auch nullteilige Flächen positive Diskriminante haben. Trotzdem genügt hier die Voraussetzung $a_{11} < 0$, da ja z. B. der reelle Punkt A_4 auf der ausgezeichneten Fläche liegt. Wir sehen auch ferner, daß die ausgezeichnete Fläche mit der Ebene $y_2 = 0$ zwei sich in A_4 schneidende reelle Gerade gemein hat. Denn der Schnitt mit dieser Ebene hat die Gleichung:

$$a_{11}y_1^2 + y_3^2 = 0; y_2 = 0.$$

Für $a_{11} < 0$ zerfällt dieser Schnitt in die beiden reellen Geraden:

$$\begin{cases} y_3 - \sqrt{-a_{11}} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} y_3 + \sqrt{-a_{11}} y_1 = 0 \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

C. Fixflächen und Fixkurven.

Nun läßt sich aber sofort auch eine ganze Schar von reellen Fixflächen der Transformation XI angeben, nämlich alle Flächen der Form:

$$ka_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + \frac{2c-bd}{d}y_2y_3 - \frac{2b}{d}y_2y_4 + y_3^2 = 0.$$

($a_{11} < 0$, $bd \neq 0$, k konstant, reell).

Die Diskriminante dieser Fixflächen hat den Wert: $-\left(\frac{b}{d}\right)^2 a_{11}k$.

Sie sind also für $k > 0$, da sie den reellen Punkt A_4 enthalten, ringartige, für $k < 0$ ovale quadratische Flächen. Für $k = 0$ ist die Diskriminante gleich Null, also die dem Fall $k = 0$ entsprechende Fläche ausgeartet. Die Bedeutung dieser einen ausgearteten Fläche werden wir nachher einsehen. Zunächst sei $k \leq 0$ angenommen. Dann haben diese reellen Fixflächen mit der Ebene $y_2 = 0$ einen Schnitt, der ebenfalls in zwei sich in A_4 schneidende Gerade zerfällt, die für $k > 0$ reell, für $k < 0$ konjugiert imaginär sind:

$$\begin{cases} y_3 - \sqrt{-ka_{11}} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} y_3 + \sqrt{-ka_{11}} y_1 = 0 \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Das Wesentliche, was wir aus diesen Gleichungen entnehmen können, ist das, daß die reelle Tangentialebene $y_2 = 0$ im Punkte A_4 an die ausgezeichnete Fläche auch Tangentialebene ist an alle

diese reellen Fixflächen und zwar ebenfalls im Punkte A_4 , der allen diesen Fixflächen gemeinsam ist. Ferner ergibt sich, daß jede dieser reellen Fixflächen die Tangentialebene $y_2 = 0$ in zwei Geraden schneidet, die für verschiedene Fixflächen — einschließlich der ausgezeichneten Fläche — voneinander verschieden sind. Unsere Fixflächen sind also reelle ringartige bzw. ovale Flächen, welche die ausgezeichnete Fläche im Punkt A_4 berühren, ohne aber unter sich oder mit der ausgezeichneten Fläche in diesem Berührungspunkt gemeinsame Erzeugende zu besitzen.

Ferner erkennt man aus der Fixflächengleichung sofort, daß diese reellen Fixflächen einschließlich der ausgezeichneten Fläche die Ebene $y_1 = 0$, welche Fixebene ist, in einem allen Fixflächen gemeinsamen Kegelschnitt schneiden. Dieser Kegelschnitt enthält als Fixpunkt den reellen Punkt A_4 , ist also nicht nullteilig. Ferner läßt sich sofort zeigen, daß dieser Kegelschnitt nicht ausgeartet sein kann. Würde er nämlich in ein sich schneidendes Geradenpaar zerfallen (eine Ausartung in eine doppelt zählende Gerade ist unmöglich, da die Fixflächen selbst für $k \leq 0$ nicht ausgeartet sind), so müßten diese beiden Geraden verschiedenen Scharen angehörnde Erzeugende der ausgezeichneten Fläche und — da eine eigentliche Kollineation Erzeugende verschiedener Scharen der ausgezeichneten Fläche nicht miteinander vertauscht — Fixgeraden sein. Die Ebene $y_1 = 0$ enthält aber keine zwei Fixgeraden.

Durch diesen allen unseren Fixflächen, einschließlich der ausgezeichneten Fläche, gemeinsamen Kegelschnitt sowie durch die beiden Erzeugenden, die jede einzelne dieser Fixflächen mit der Ebene $y_2 = 0$ gemeinsam hat, sind die Fixflächen bestimmt.

Eine besondere Beachtung verlangt noch der Fall $k = 0$. Wie bereits gesagt, ist die dem Wert $k = 0$ entsprechende reelle Fixfläche ausgeartet. Mit der Ebene $y_2 = 0$ hat diese Fixfläche nur die reelle Gerade $y_2 = y_3 = 0$ gemein. Mit der Ebene $y_1 = 0$ hat sie aber genau den gleichen, nicht ausgearteten, nicht nullteiligen Kegelschnitt gemein, wie alle die anderen reellen Fixflächen einschließlich der ausgezeichneten Fläche. Daraus folgt, daß die $k = 0$ entsprechende Fixfläche ein reeller Kegel ist, der nicht nullteilig ist, da er ja die ganze

reelle Gerade $y_2 = y_3 = 0$ enthält, und dessen Spitze auf dieser reellen Geraden $y_2 = y_3 = 0$ liegt, da er nur diese Gerade mit der Ebene $y_2 = 0$ gemein hat, sodaß diese Gerade notwendig Mantellinie sein muß.

Welche Bedeutung hat nun dieser Fixkegel innerhalb der anderen reellen Fixflächen? Er entspricht gerade dem Übergangsfall, wenn man durch stetige Änderung des Parameters k von den ringartigen Fixflächen zu den ovalen übergeht. In der Tat entspricht auch in der kanonischen Gleichungsform der reellen quadratischen Flächen:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - sx_4^2 = 0$$

einer stetigen Änderung des Parameters s von positiven zu negativen Werten, was einem Übergang von ringartigen zu ovalen Flächen gleichkommt, im Übergangsfall $s = 0$ ein reeller, nicht nullteiliger Kegel.

Insbesondere können wir aus der Gleichung unserer reellen Fixflächen noch entnehmen, daß durch alle reellen Punkte des Raumes, die nicht in der Ebene $y_1 = 0$ liegen, genau eine reelle Fixfläche geht. Denn für $y_1 \neq 0$ ist wegen $a_{11} \neq 0$ stets k eindeutig bestimmbar. Nebenbei folgt aus dieser Tatsache auch, daß alle unsere Fixflächen außer dem gemeinsamen Kegelschnitt in $y_1 = 0$ keinen weiteren reellen Punkt gemein haben, da sonst durch diesen Punkt zwei verschiedene Fixflächen gingen.

Außerdem geht aber auch durch jeden reellen Punkt des Raumes, der nicht auf der Geraden $A_3 A_4$ liegt — für diese Punkte ist $A_3 A_4$ selbst Fixkurve — genau eine reelle Fixebene des von $A_3 A_4$ getragenen reellen Fixebenenbüschels. Die Fixkurven sind daher die Kegelschnitte, welche von diesem reellen Fixebenenbüschel auf den einzelnen reellen Fixflächen ausgeschnitten werden. Speziell werden die Fixkurven der Ebene $y_2 = 0$ dargestellt durch das A_4 enthaltende Geradenbüschel.

Eine besondere Behandlung erfordern noch die reellen Punkte der Ebene $y_1 = 0$. In dieser Ebene existiert als Fixkurve zunächst nur der reelle, nicht ausgeartete, nicht nullteilige Kegelschnitt, der allen unseren Fixflächen, einschließlich der ausgezeichneten Fläche, angehört. Dieser Kegelschnitt, der nur den Fixpunkt A_4 enthält, da es in der Ebene $y_1 = 0$ keine weiteren Fixpunkte gibt, kann daher aufgefaßt werden als ausgezeichnete Kurve einer ebenen nichteuklidischen und zwar

hyperbolischen Geometrie in der Ebene $y_1 = 0$. Wegen der Erhaltung nichteuklidischer Abstände sind die Fixkurven der reellen Punkte der Ebene $y_1 = 0$ gerade die „Grenzkreise“ der ebenen hyperbolischen Geometrie mit A_4 als „Mittelpunkt“¹⁾.

Die Bewegung selbst wollen wir als Rotation um eine reelle isotrope Gerade bezeichnen.

§ 3. Die Bewegungen des Typs (12).

A. Lage und Realitätsverhältnisse der Fixelemente.

Wir kommen nun zur Betrachtung der reellen Bewegungen des Kollineationstyps (12). Nach Hilfssatz I muß mindestens einer der beiden bei Typ (12) existierenden Fixpunkte auf der ausgezeichneten Fläche liegen. Bei einer eigentlichen Kollineation bleiben aber dann die beiden durch diesen Fixpunkt gehenden Erzeugenden der ausgezeichneten Fläche als Ganzes fest, es müssen ihnen also zwei sich schneidende Fixgerade des Typs (12) entsprechen. Nach der Tetraederfigur des Typs (12) (siehe Fig. 1) folgt daraus, daß A_2A_4 notwendig eine Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sein muß, daß also beide Fixpunkte auf der ausgezeichneten Fläche liegen. Das hat aber nun seinerseits wieder zur Folge, daß alle drei Fixgeraden des Typs (12) Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sein müssen, da dann durch beide Fixpunkte je zwei Fixerzeugende der ausgezeichneten Fläche gehen. Dabei sind die Fixgeraden A_1A_2 und A_3A_4 Fixerzeugende der gleichen Schar, da sie keinen Schnittpunkt miteinander besitzen.

Sind beide Fixpunkte reell, so ist sicher die Erzeugende A_2A_4 reell. Aber auch die beiden Erzeugenden A_1A_2 und A_3A_4 müssen dann reell sein. Denn andernfalls könnten sie nur hoch-imaginär sein und dürften dann also keinen reellen Punkt besitzen. — Ist aber einer der Fixpunkte imaginär, so muß bei einer reellen Kollineation auch der dazu konjugiert imaginäre Punkt Fixpunkt sein. Da aber die Kollineationen des Typs (12) nur zwei Fixpunkte besitzen, müssen dann also die beiden Fixpunkte konjugiert imaginär sein. Dann ist die Erzeugende A_2A_4 als Verbindungslinie zweier konjugiert imaginärer Punkte ebenfalls reell, die beiden Erzeugenden A_1A_2 und A_3A_4 sind aber kon-

1) Siehe Klein-Rosemann S. 225, Fig. 150, oder Heffter III, S. 19, Fig. 8.

jugiert imaginär (hoch-imaginär), da sie verschiedene Erzeugende der gleichen Schar sind und jede durch einen zu einem Punkt der anderen konjugiert imaginären Punkt geht. Wir wollen zunächst den letzten Fall behandeln.

B. Bewegungen des Typs (12), welche zwei imaginäre Erzeugende der ausgezeichneten Fläche invariant lassen.

Es sei also $A_2 A_4$ reell, $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ seien konjugiert imaginär. Als Koordinatentetraeder, auf das wir die folgenden Betrachtungen beziehen wollen, wählen wir das Tetraeder des Typs (12) in Figur 1, bei dem wir insbesondere festsetzen wollen, daß die Kante $A_1 A_3$ eine reelle Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sei, die dann natürlich mit $A_2 A_4$ der gleichen Schar angehört. Eine solche Wahl ist ja stets möglich, da es außer $A_2 A_4$ noch unendlich viele reelle Erzeugende der gleichen Schar gibt, die jede Erzeugende der anderen Schar schneiden. Speziell sind bei dieser Wahl auch die Punkte A_1 und A_3 konjugiert imaginär. Ferner ordnen wir wieder den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 beziehungsweise die Koordinaten $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ zu. Dann sind die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ und die Ebenen $y_2 = 0$ und $y_4 = 0$ konjugiert imaginär, da ihre Schnittgeraden reell sind und jeweils die eine Ebene einen zu einem Punkt der anderen Ebene konjugiert imaginären Punkt enthält, wobei diese beiden Punkte nicht der gemeinsamen Schnittgeraden angehören.

Zunächst soll nun die Gleichung der ausgezeichneten Fläche aufgestellt werden. Da das gewählte Tetraeder der y_i -Koordinaten Tangentialtetraeder an die ausgezeichnete Fläche ist, könnte man die Gleichung der ausgezeichneten Fläche sofort in der Form: $y_1 y_4 - k_1 y_2 y_3 = 0$, (k_1 konstant, $\neq 0$) angeben. Trotzdem will ich im folgenden diese Gleichung noch einmal kurz analytisch herleiten, da wir damit gleichzeitig auf eine Schar von brauchbaren Fixflächen geführt werden. Es ist nämlich sicher klar, daß wir hier nicht, wie in früheren Fällen, durch Variation der Konstanten k_1 zu Fixflächen gelangen können. Denn wenn dies möglich wäre, hätten alle diese Fixflächen außer den drei Fixgeraden des Typs (12) auch noch die Gerade $A_1 A_3$ gemein, die dann notwendig Fixgerade sein müßte, was bei Typ (12) nicht der Fall ist.

Setzen wir also die Gleichung der ausgezeichneten Fläche wieder allgemein an:

$$\sum_{i,k=1}^4 a_{ik} y_i y_k = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

dann folgt aus der Tatsache, daß die Punkte $A_2 (0, 1, 0, 0)$ und $A_4 (0, 0, 0, 1)$ auf der Fläche liegen, daß $a_{22} = a_{44} = 0$ sein muß. Ferner hat die Forderung, daß die Geraden $y_1 = y_3 = 0$, $y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = y_4 = 0$ ganz auf der Fläche liegen, zur Folge, daß $a_{24} = a_{33} = a_{34} = a_{11} = a_{12} = 0$ sein muß. Damit die Fläche nicht ausartet, muß folglich $a_{14} \neq 0$ und $a_{23} \neq 0$ sein. Es bleibt von der Flächengleichung also übrig:

$$(A) \quad 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{14}y_1y_4 + 2a_{23}y_2y_3 = 0, \quad (a_{14} \neq 0, a_{23} \neq 0).$$

Diese Flächengleichung werden wir später zur Aufsuchung von Fixflächen heranziehen. Die Bedingung, daß auch die Gerade $y_2 = y_4 = 0$ der ausgezeichneten Fläche angehört, was wir ja nur durch spezielle Wahl des Koordinatensystems erreicht haben, führt speziell für die ausgezeichnete Fläche zu der Folgerung, daß auch $a_{13} = 0$ sein muß. Wir erhalten also als Gleichung der ausgezeichneten Fläche:

$$(B) \quad a_{14}y_1y_4 + a_{23}y_2y_3 = 0.$$

Was geschieht nun durch die Transformation des Typs (12) mit dieser Gleichung? Nach der Baldus'schen Arbeit (S. 393) hat die allgemeine Transformation des Typs (12) bei Bezug auf ein Koordinatentetraeder, wie wir es gewählt haben, die Gestalt:

$$\begin{array}{lll} \text{XII.} & ey_1' = y_1 & \\ & ey_2' = ay_1 + y_2 & abc \neq 0 \\ & ey_3' = by_3 & b \neq 1. \\ & ey_4' = cy_3 + by_4 & \end{array}$$

Die Forderung, daß die ausgezeichnete Fläche bei dieser Transformation invariant bleiben soll, führt, wie man durch Anwendung der Transformation XII auf die Gleichung der ausgezeichneten Fläche leicht nachrechnet, zu der Bedingung, daß

$$a_{14}c + a_{23}ab = 0 \text{ oder } a_{14} = -\frac{ab}{c} a_{23} \text{ sein muß.}$$

Diese Bedingung läßt sich nun wieder auffassen als Bedingung für die Koeffizienten der Transformation bei vorgegebener ausgezeichnete Fläche oder als Bedingung für die ausgezeichnete

Fläche bei vorgegebener Transformation. Wir wollen wieder die letzte Auffassung annehmen, sodaß wir dann für die Gleichung der ausgezeichneten Fläche — indem wir noch willkürlich $a_{23} = 1$ setzen — erhalten:

$$-\frac{ab}{c} y_1 y_4 + y_2 y_3 = 0.$$

Da die Koeffizienten dieser Gleichung durch die Transformation selbst bestimmt sind, hat man damit auch sofort eine weitere Bestätigung unserer früheren Behauptung, daß man durch Variation der Konstanten k_1 in $y_1 y_4 - k_1 y_2 y_3 = 0$ keine Möglichkeit zur Gewinnung von weiteren Fixflächen hat.

Da wir den Einheitspunkt des y_i -Koordinatentetraeders noch nicht gleich festlegen dürfen, um ihn nach Angabe der Koordinatentransformation, die von den y_i -Koordinaten zu x_i -Koordinaten mit reellem Bezugstetraeder führt, noch „passend“ wählen zu können, sind die Koeffizienten a, b, c der Kollineation XII zunächst noch unbestimmt. Sie können aber sofort festgelegt werden, wenn wir den Einheitspunkt des y_i -Tetraeders gemäß folgender, den Bedingungen des Hilfssatzes VI genügenden Koordinatentransformation „passend“ wählen:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 + i x_2 \\ \varrho y_2 &= x_3 + i x_4 \\ \varrho y_3 &= x_1 - i x_2 \\ \varrho y_4 &= x_3 - i x_4. \end{aligned}$$

Zunächst wollen wir mit Hilfe dieser Koordinatentransformation die Realitätsverhältnisse der Bewegung XII untersuchen, die in den x_i -Koordinaten die Form annimmt:

$$\begin{aligned} \text{XIIr. } \varrho x_1' &= (1+b)x_1 + i(1-b)x_2 \\ \varrho x_2' &= -i(1-b)x_1 + (1+b)x_2 \\ \varrho x_3' &= (a+c)x_1 + i(a-c)x_2 + (1+b)x_3 + i(1-b)x_4 \\ \varrho x_4' &= -i(a-c)x_1 + (a+c)x_2 - i(1-b)x_3 + (1+b)x_4. \end{aligned}$$

Dafür, daß diese Kollineation reell ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\begin{aligned} 1+b &= tA \\ 1-b &= itB \\ a+c &= tC \\ a-c &= itD \end{aligned}$$

ist. ($t \neq 0$, A, B, C, D reell, $A^2 + B^2 \neq 0$, $C^2 + D^2 \neq 0$.)

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt ähnlich, wie früher:

$$t = \frac{2}{A + iB} \text{ und } b = \frac{A - iB}{A + iB}.$$

Ferner erhalten wir dann aus den letzten beiden Gleichungen:

$$a = \frac{C + iD}{A + iB} \text{ und } c = \frac{C - iD}{A + iB}.$$

Diese Bedingungen, welche notwendig und hinreichend für Realität der Bewegung XII sind, können wir in der folgenden einfacheren Form schreiben:

$$b = \frac{\bar{u}}{u}$$

$$a = \frac{v}{u} \quad (u, v \text{ beliebig, } \neq 0).$$

$$c = \frac{\bar{v}}{u}$$

Es fragt sich nun, ob unter Beachtung dieser Realitätsbedingungen die abgeleitete Gleichung der ausgezeichneten Fläche, deren Koeffizienten ja selbst wieder von den Kollineationskoeffizienten abhängen, überhaupt noch eine reelle ringartige Fläche darstellen kann. Setzen wir zur Abkürzung $\frac{ab}{c} = k_0$, so lautet die Gleichung der ausgezeichneten Fläche in den x_i -Koordinaten:

$$(x_1 x_3 + x_2 x_4) (1 - k_0) - i(x_2 x_3 - x_1 x_4) (1 + k_0) = 0.$$

Diese Gleichung ist nach den gleichen Überlegungen, wie in Kapitel IV D., dann und nur dann reell, wenn $|k_0| = 1$ ist. Ferner ist die durch diese Gleichung dargestellte Fläche dann auch sicher ringartig, da sie ja nicht ausgeartet ist und die reelle Gerade $A_2 A_4$ ($y_1 = 0$, $y_3 = 0$) ganz enthält. Und nun ergibt sich in der Tat, daß auch die abgeleiteten Realitätsbedingungen für die Koeffizienten a, b, c der Bewegung nicht im Widerspruch stehen zu der Bedingung $|k_0| = 1$, indem $\frac{ab}{c} = \frac{v\bar{u}}{u\bar{v}}$ ist, was mit $\left| \frac{ab}{c} \right| = |k_0| = 1$ äquivalent ist.

Nun ist es auch nicht mehr allzu schwierig, eine ganze Schar reeller Fixflächen der Bewegung XII zu finden. Ich habe bereits angedeutet, daß uns dazu die Gleichung (A) verhelfen

wird. Hätten wir nämlich die Tetraederkante $A_1 A_3$ nicht als Erzeugende der ausgezeichneten Fläche gewählt, so hätte die Gleichung der ausgezeichneten Fläche selbst gerade die Gestalt (A) mit $a_{13} \neq 0$ erhalten, ohne daß dagegen die Kollineation XII im wesentlichen ihre Form geändert hätte. In der Tat bestätigt man leicht, daß alle Flächen:

$$ky_1 y_3 - k_0 y_1 y_4 + y_2 y_3 = 0$$

Fixflächen sind, wo k konstant und $k_0 = \frac{ab}{c}$ ist.

Dabei wissen wir bereits, daß $|k_0| = 1$ ist, also k_0 gleich $\frac{w}{\overline{w}}$ ($w \neq 0$) gesetzt werden kann. Durch Übergang zu den x_i -Koordinaten ergibt sich, daß die Gleichungen dieser Fixflächen:

$$k(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 x_3 + x_2 x_4)(1 - k_0) - i(x_2 x_3 - x_1 x_4)(1 + k_0) = 0$$

reell sind, wenn $k = \frac{i}{\overline{w}}$ E ist, wo E reell ist. Ferner sind dann

die Fixflächen ringartige Flächen, da sie nicht ausgeartet sind und die reelle Gerade $A_2 A_4$ enthalten. Außer dieser Geraden haben unsere Fixflächen mit der ausgezeichneten Fläche auch noch die beiden konjugiert imaginären Geraden $A_1 A_2$ ($y_3 = y_4 = 0$) und $A_3 A_4$ ($y_1 = y_2 = 0$) gemein. Es läßt sich aber auch sofort zeigen, daß unsere Fixflächen untereinander und mit der ausgezeichneten Fläche nur diese 3 Fixgeraden gemein haben. Hätten nämlich zwei Fixflächen, von denen eine auch die ausgezeichnete Fläche sein kann, noch eine weitere Gerade gemein, so müßte diese Fixgerade sein, was bei Typ (12) ausgeschlossen ist.

Die Fixflächen haben also unter sich und mit der ausgezeichneten Fläche nur die reelle und die beiden konjugiert imaginären Fixgeraden des Typs (12) gemeinsam. Daraus folgt insbesondere, daß alle unsere Fixflächen, einschließlich der ausgezeichneten Fläche, sich längs der reellen Fixgeraden berühren, eine Tatsache, die sich auch leicht analytisch bestätigen läßt: Für irgend einen Punkt $0, p, 0, q$ der reellen Fixgeraden $y_1 = y_3 = 0$ lautet nämlich die Gleichung der Tangentialebene an die Fixflächen und die ausgezeichnete Fläche in gleicher Weise: $-k_0 q y_1 + p y_3 = 0$. Daraus folgt insbesondere, daß die beiden Fixebenen des Typs (12) Tangentialebenen an alle diese

Fixflächen sind. Damit ist das Aussehen der Fixflächen hinreichend gekennzeichnet.

Bemerkt sei noch, daß auch durch jeden, nicht auf der reellen Fixgeraden liegenden reellen Punkt des Raumes genau eine unserer reellen Fixflächen geht. Denn k ist für reelle Punkte, für die $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ ist, $-(x_1^2 + x_2^2) = 0$ ergibt gerade die reellen Punkte der reellen Fixgeraden) — eindeutig bestimmbar und zwar so, daß $k = \frac{i}{w} E$ wird mit reellem E , wenn

$k_0 = \frac{w}{w}$ gesetzt ist. Daraus folgt übrigens auch wieder, daß

die reellen Fixflächen untereinander außer der reellen Fixgeraden keinen reellen Schnitt haben.

Schließlich will ich auch noch zeigen, daß durch eine reelle Bewegung der Art XII jeder reelle Punkt einer reellen Fixfläche — immer natürlich abgesehen von den Punkten der Fixgeraden — noch in jeden anderen reellen Punkt der gleichen Fixfläche übergeführt werden kann. Eine kleine Einschränkung dieser Behauptung wird sich noch im Laufe der Rechnung ergeben. Wir wollen dabei in y_i -Koordinaten rechnen, in denen bei reellen Punkten 1. und 3., sowie 2. und 4. Koordinate des Punktes konjugiert imaginär angesetzt werden können. Sei der reelle Originalpunkt gegeben durch $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, der reelle Bildpunkt durch $\alpha', \beta', \bar{\alpha}', \bar{\beta}'$. Wir wollen ferner α und $\alpha' \neq 0$ annehmen, da wir ja von den Punkten der reellen Fixgeraden absehen wollen. Dann erhalten wir, wenn wir diese Punkte in die Transformation XII einsetzen:

$$\begin{aligned} \varrho \alpha' &= \alpha \\ \varrho \beta' &= a \alpha + \beta \\ \varrho \bar{\alpha}' &= b \bar{\alpha} \\ \varrho \bar{\beta}' &= c \bar{\alpha} + b \bar{\beta} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen finden wir: $\varrho = \frac{\alpha}{\alpha'}$.

$$\text{Also: } b = \frac{\alpha \bar{\alpha}'}{\alpha' \bar{\alpha}}.$$

b erscheint also als Quotient konjugiert imaginärer Größen, wie es ja für reelle Kollineationen notwendig war. Hier

müssen wir nun die weitere Voraussetzung machen, daß $\frac{\alpha}{\alpha'}$ nicht reell ist, weil sonst $b = 1$ würde, was, wie wir später sehen werden, gerade einer Kollineation des Typs (13) entspräche.

Weiter finden wir:
$$a = \frac{\frac{\alpha\beta'}{\alpha'} - \beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha\alpha'}.$$

Ferner ergibt sich aus der letzten Gleichung:

$$c = \frac{\alpha\bar{\beta}'}{\alpha'\bar{\alpha}} - \frac{\alpha\bar{\alpha}'\bar{\beta}}{\alpha'\bar{\alpha}^2}.$$

Es ist also nur noch zu zeigen, daß auch die Realitätsbedingungen für a und c erfüllt sind. Nach diesen muß wegen

$$b = \frac{\alpha\bar{\alpha}'}{\alpha'\bar{\alpha}} \text{ der Ausdruck } \frac{\alpha'\bar{\alpha}(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{\alpha\alpha'}$$

$$\text{gerade konjugiert imaginär zu dem Ausdruck } \alpha\bar{\beta}' - \frac{1}{\alpha}(\alpha\bar{\alpha}'\bar{\beta}) = \frac{\bar{\alpha}'\alpha(\bar{\alpha}\bar{\beta}' - \bar{\beta}\bar{\alpha}')}{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} \text{ sein,}$$

was in der Tat der Fall ist. Dabei muß nur noch $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$ vorausgesetzt werden, da sonst $a = c = 0$ würde, was einer Bewegung des Typs (4) entspräche.

Es erscheint überraschend, daß in diesen Überlegungen die Voraussetzung, daß Original- und Bildpunkt auf der gleichen Fixfläche liegen, nirgends benutzt wird. Das erklärt sich aber daraus, daß die Koeffizienten der Fixflächengleichung selbst wieder von den Koeffizienten der Bewegungsgleichungen abhängen, die ihrerseits wieder durch die vorgegebene Lage von Original- und Bildpunkt bestimmt sind, sodaß dadurch automatisch Original und Bildpunkt auf die gleiche Fixfläche zu liegen kommen.

C. Bewegungen des Typs (12), welche nur reelle Erzeugende der ausgezeichneten Fläche invariant lassen.

Bedeutend einfacher kann der andere mögliche Fall der Kollineationen des Typs (12) behandelt werden, bei dem die drei vorkommenden Fixgeraden alle reell sind. Man kann dann nämlich alle Betrachtungen von vornherein auf ein reelles y_1 -

Koordinatentetraeder mit reellem Einheitspunkt beziehen, das wir wieder so wählen wollen, daß außer den drei Fixgeraden auch die Kante A_1A_3 eine reelle Erzeugende der ausgezeichneten Fläche ist. Dann sind alle Eckpunkte, also auch die Kanten und Seitenflächen des Koordinatentetraeders reell. Die Behandlung erfolgt in der Hauptsache genau analog dem im vorstehenden untersuchten Fall, sodaß ich mich jetzt kürzer fassen kann.

Damit die allgemeine Kollineation des Typs (12), dargestellt durch die Gleichungen XII, reell ist, muß hier a, b, c reell sein. Die Gleichung der ausgezeichneten Fläche hat wieder die Form: $-k_0y_1y_4 + y_2y_3 = 0$, während die Gleichung der Fixflächen lautet:

$ky_1y_3 - k_0y_1y_4 + y_2y_3 = 0$, wo $k_0 = \frac{ab}{c} \neq 0$ reell ist. Die Fixflächen, die für $k = 0$ die ausgezeichnete Fläche ergeben, sind hier für reelles k reelle ringartige Flächen, da sie nicht ausgeartet sind und sogar 3 reelle Fixgeraden enthalten.

Durch jeden reellen Punkt des Raumes, der nicht in einer der beiden — hier reellen — Fixebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ liegt, geht genau eine reelle Fixfläche, die speziell auch die ausgezeichnete Fläche sein kann. Denn für reelle Punkte, für die $y_1y_3 \neq 0$ ist, ist k stets eindeutig und zwar reell bestimmbar. Die Lage der Fixflächen zueinander und zu der ausgezeichneten Fläche ist, da die diesbezüglichen Überlegungen wörtlich übertragbar sind, genau die gleiche, wie im zuerst behandelten Fall des Kollineationstyps (12). Nur sind hier alle drei Fixgeraden, in denen sich alle Fixflächen, einschließlich der ausgezeichneten Fläche, schneiden, reell. Ferner berühren sich auch hier alle Fixflächen längs der Geraden $y_1 = y_3 = 0$ und die beiden reellen Fixebenen sind Tangentialebenen an alle diese Fixflächen. Damit sind auch in diesem Fall die Fixflächen bestimmt.

Durch genau analoge Rechnungen, wie im zuerst behandelten Fall, läßt sich auch hier zeigen, daß durch eine reelle Bewegung der Art XII noch jeder reelle Punkt in jeden anderen reellen Punkt übergeführt werden kann, wobei Original- und Bildpunkt nicht in einer der beiden reellen Fixebenen liegen sollen. Ausgenommen sind dabei die Punkte, deren Übergang durch eine

Transformation des Typs (13) bzw. (4) vermittelt wird, für die also in der Kollineationsgleichung des Typs (12) $b = 1$ bzw. $a = c = 0$ würde. Ferner müssen die Punkte der beiden reellen Fixebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ gesondert betrachtet werden, da für diese Punkte in der allgemeinen Rechnung einige Nenner verschwinden würden. Die Rechnung für die reellen Punkte dieser beiden Ebenen will ich daher noch kurz angeben. Absehen wollen wir dabei natürlich von den reellen Punkten der drei Fixgeraden. Denn diese Punkte müssen ja stets auf der durch sie gehenden Fixgeraden wandern. Ich behaupte also, daß sich stets eine reelle Transformation der Art XII finden läßt, die irgend einen reellen Punkt $\alpha, \beta, 0, \delta$ etwa der Ebene $y_3 = 0$ in einen beliebigen anderen reellen Punkt $\alpha', \beta', 0, \delta'$ der gleichen Ebene überführt, wobei Original- und Bildpunkt nicht auf einer der reellen Fixgeraden liegen sollen, also $\alpha, \alpha', \delta, \delta' \neq 0$ sein soll. Eine kleine Einschränkung wird sich noch im Laufe der Rechnung ergeben. Die Koeffizienten a, b, c der Transformation müssen gleichzeitig folgende 4 Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \varrho \alpha' &= \alpha \\ \varrho \beta' &= a\alpha + \beta & ab \neq 0 \\ \varrho 0 &= b0 & b \neq 1. \\ \varrho \delta' &= b\delta \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich: $\varrho = \frac{\alpha}{\alpha'}$, $b = \frac{\delta' \alpha}{\alpha' \delta}$, $a = \frac{\alpha \beta' - \beta \alpha'}{\alpha \alpha'}$, c beliebig $\neq 0$. a, b und c sind also so bestimmbar, daß sie (für reelle Punkte!) reell sind und alle 4 Gleichungen erfüllen, womit die Behauptung bewiesen ist. Die kleine Einschränkung, die noch zu machen ist, ist die, daß $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\delta}{\delta'}$ bzw. $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$ sein muß, weil sonst $b = 1$ bzw. $a = 0$ würde.

Durch ähnliche Rechnung läßt sich dieselbe Tatsache unter den entsprechenden Einschränkungen auch für die reellen Punkte der anderen Fixebene $y_1 = 0$ beweisen. Damit ist auch der zweite mögliche Fall der Kollineationen des Typs (12) untersucht.

§ 4. Die Bewegungen des Typs (13).

Es bleibt nun schließlich nur noch die Betrachtung der Kollineationen des Typs (13) mit invarianter ringartiger qua-

dratischer Fläche übrig. Wir werden diesen Fall sehr rasch mit Hilfe des bereits untersuchten Kollineationstyps (12) behandeln können. Zunächst kann die einzige bei Typ (13) vorkommende Gerade von Doppelpunkten nur Erzeugende der ausgezeichneten Fläche sein. Denn in jedem anderen Fall müßte eine von der Doppelpunktsgersten verschiedene Fixgerade existieren, die ein ganzes Büschel von Fixebenen trüge, nämlich die zu der Doppelpunktsgersten konjugierte Polare mit den zu den einzelnen Fixpunkten gehörigen Polarebenen in bezug auf die ausgezeichnete Fläche. Ferner muß die Doppelpunktsgerade bei einer reellen Kollineation sicher reell sein. Denn wäre sie imaginär, so müßte bei einer reellen Kollineation die dazu konjugiert imaginäre Gerade, die dann von der Doppelpunktsgersten verschieden wäre, ebenfalls punktweise festbleiben. Typ (13) besitzt aber nur eine einzige Gerade von Doppelpunkten. Die Doppelpunktsgerade ist also eine reelle Erzeugende der ausgezeichneten Fläche und trägt ein reelles Fixebenenbüschel, nämlich die Tangentialebenen in den einzelnen Fixpunkten an die ausgezeichnete Fläche. Daraus folgt insbesondere, daß alle Erzeugenden der ausgezeichneten Fläche, welche mit der Doppelpunktsgersten nicht in der gleichen Schar liegen, Fixgeraden sind. Wir werden die Bewegung des Typs (13) daher als Schiebung mit einer einzigen Doppelpunkterzeugenden bezeichnen.

Wie die Figur des Typs (13) zeigt, liegt in jeder Fixebene des erwähnten Tangentialebenenbüschels ein ganzes Büschel von Fixgeraden, welches jeweils von einem Fixpunkt der Doppelpunktsgersten getragen wird. Wir können daher die Fixkurven der Bewegung des Typs (13) schon sofort angeben. Durch jeden reellen, von den Fixpunkten verschiedenen Punkt P des Raumes geht genau eine reelle Ebene dieses Fixebenenbüschels. Innerhalb dieser Fixebene wandert der Raumpunkt dann auf der durch ihn gehenden Fixgeraden des in dieser Ebene liegenden Fixgeradenbüschels. Dabei ist aber zu bemerken, daß dann diese Fixgerade bei einer reellen Bewegung auch wirklich reell ist. Daß dies in der Tat der Fall ist, ergibt sich aus folgender Überlegung: Wäre diese Fixgerade durch P imaginär, so müßte die dazu konjugiert imaginäre Gerade bei einer reellen Kollineation auch Fixgerade sein und

ebenfalls P enthalten, da P reell ist. P wäre also Schnittpunkt zweier verschiedener Fixgeraden, also notwendig Fixpunkt. Es gibt aber bei Typ (13) außerhalb der Doppelpunktsgersten — und P soll ja nicht auf der Doppelpunktsgersten liegen — keinen weiteren Fixpunkt.

Damit wären die Fixkurven der Bewegung des Typs (13) vollkommen beschrieben. Ich will aber noch die Zusammenhänge dieser Fixkurven mit der ausgezeichneten Fläche und eventl. existierenden anderen Fixflächen klarlegen. Dazu werden uns die Untersuchungen des Typs (12) sehr nützlich sein. Wählen wir nämlich das y_1 -Koordinatentetraeder, auf das wir die folgenden Untersuchungen beziehen wollen, so, daß die reelle Doppelpunktsgerade der Kante $A_2 A_4$ (siehe Tetraederfigur des Typs (13) in Fig. 1) entspricht, ferner die Kanten $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ zwei verschiedene reelle oder konjugiert imaginäre (hoch-imaginäre) Erzeugende der anderen Schar der ausgezeichneten Fläche sind, außerdem die Kante $A_1 A_3$ eine reelle Erzeugende der ausgezeichneten Fläche ist, die mit der Doppelpunktsgersten der gleichen Schar angehört, so hat unser so gewähltes Koordinatentetraeder, abgesehen davon, daß nun alle Punkte der Geraden $A_2 A_4$ Fixpunkte sind, sowohl hinsichtlich seiner Lage als auch seiner Realitätsverhältnisse die gleiche Beschaffenheit wie das y_1 -Koordinatentetraeder des Typs (12).

Die Kollineation des Typs (13) hat bei Bezug auf ein solches Tetraeder auf Grund der Baldus'schen Arbeit (S. 393) die Form:

$$\begin{array}{lll} \text{XIII.} & \varrho y_1' = & y_1 \\ & \varrho y_2' = & ay_1 + y_2 \\ & \varrho y_3' = & y_3 \\ & \varrho y_4' = & cy_3 + y_4 \end{array} \quad ac \neq 0.$$

Wir sehen daraus, daß wir diese Kollineation sofort aus der des Typs (12) erhalten, wenn wir dort $b = 1$ setzen. Nun ändert sich aber bei den Ueberlegungen, die wir bei Typ (12) zur Untersuchung von Lage und Realität der ausgezeichneten Fläche und der Fixflächen angestellt haben, dadurch, daß wir dort $b = 1$ setzen, gar nichts. Ferner erfüllt der Wert $b = 1$ — gleichgültig, welcher der beiden Fälle von Realität bei dem zugrunde gelegten y_1 -Koordinatentetraeder vorliegt, dessen Ein-

heitspunkt übrigens hier natürlich in der gleichen Weise wie bei Typ (12) gewählt sein soll —, auch gerade die Bedingung, die wir bei Typ (12) abgeleitet haben dafür, daß die Bewegung XII reell ist. Denn die diesbezügliche Bedingung für b lautete bei teilweise imaginärem Koordinatentetraeder, daß $|b| = 1$, bei reellem Koordinatentetraeder, daß b reell ist. Beide Bedingungen sind aber für $b = 1$ erfüllt.

Wir können also insbesondere alle Resultate über Realität und Lage der Fixflächen des Typs (12) wörtlich übertragen. Nur ist bei Typ (13) besonders zu beachten, daß hier in der Wahl des zugrunde gelegten Koordinatentetraeders, vor allem, was die beiden Kanten A_1A_2 und A_3A_4 betrifft, eine größere Willkür liegt als bei Typ (12). Denn dort waren ja diese beiden Kanten festgelegt als die beiden einzigen Fixerzeugenden der ausgezeichneten Fläche, die in der gleichen Schar liegen. Bei Typ (13) gibt es aber unendlich viele derartige Fixerzeugende. Wenn also bei Typ (13) das Koordinatensystem einmal festgelegt ist, so findet man nach der Methode des Typs (12) eine Schar von reellen ringartigen Fixflächen, die unter sich und mit der ausgezeichneten Fläche nur die reelle Doppelpunktsgerade A_2A_4 und die beiden reellen bzw. konjugiert imaginären Fixgeraden A_1A_2 und A_3A_4 gemein haben. Ferner berühren sich alle diese Fixflächen untereinander und mit der ausgezeichneten Fläche längs der Doppelpunktsgersten. Alle Fixflächen dieser Schar haben also in jedem Fixpunkt F der Doppelpunktsgersten eine gemeinsame festbleibende Tangentialebene. Jedoch ist wohl zu beachten, daß nur die Schnittgeraden der Tangential-Fixebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ mit den einzelnen Fixflächen dieser Schar — einschließlich der ausgezeichneten Fläche — für alle diese Fixflächen die gleichen sind. Jede andere Fixebene schneidet die Fixflächen dieser Schar in zwei sich schneidenden Erzeugenden, von denen nur die Doppelpunktsgerade allen diesen Fixflächen gemeinsam ist. Das ist ja auch aus folgendem Grund einzusehen: Wenn nämlich alle diese Fixflächen unter sich und mit der ausgezeichneten Fläche außer den beiden Erzeugenden A_1A_2 und A_3A_4 noch eine weitere Erzeugende der gleichen Schar gemein hätten, dann müßten

alle diese Fixflächen ganz zusammenfallen, da man ja aus drei verschiedenen Erzeugenden der gleichen Schar eine quadratische Fläche eindeutig konstruieren kann, indem eben die Erzeugenden der anderen Schar dann die Geraden sind, welche die drei vorgegebenen windschiefen Erzeugenden schneiden.

Nun hätten wir aber zu Anfang zwei andere reelle oder konjugiert imaginäre Fixerzeugende der ausgezeichneten Fläche, welche mit der Doppelpunktsgerade nicht in der gleichen Schar liegen, zu Kanten A_1A_2 und A_3A_4 des zugrunde gelegten Koordinatentetraeders machen können. Dann hätten wir mit der Methode des Typs (12) eben eine andere Schar von reellen ringartigen Fixflächen bekommen, die nun ihrerseits diese beiden anderen Tetraederkanten gemeinsam hätten und sich ebenfalls längs der Doppelpunktsgersten berührten.

Wir bekommen also schließlich das Resultat, daß bei Typ (13) unendlich viele Scharen von reellen ringartigen Fixflächen existieren, die sich und die ausgezeichnete Fläche alle längs der Doppelpunktsgersten berühren. Da die Doppelpunktsgerade allen Fixflächen sämtlicher Scharen gemeinsam ist, folgt insbesondere noch, daß auf jeder unserer Fixflächen alle Erzeugenden der anderen Schar, welcher die Doppelpunktsgerade nicht angehört, Fixgeraden sind, sodaß die Bewegung auf jeder unserer Fixflächen eine Schiebung ist. Es sei noch bemerkt, daß jetzt durch jeden reellen Punkt P des Raumes, der nicht Fixpunkt ist, unendlich viele reelle ringartige Fixflächen gehen, welche die durch P gehende Fixgerade als gemeinsame Erzeugende besitzen müssen, da sonst durch den nicht fixen Punkt P verschiedene Fixerzeugende gingen, weil ja die Bewegung auf jeder unserer Fixflächen eine Schiebung ist.

Damit ist auch dieser letzte Typ von möglichen reellen Kollineationen behandelt.

Verzeichnis häufig zitierter Literatur.

1. Baldus, R., Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften — Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung, 1928.
2. Heffter, L., Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. II (Leipzig und Berlin 1923), Bd. III (Karlsruhe 1929).

3. Klein, Felix, Gesammelte mathematische Abhandlungen, I. Bd. Berlin 1921.
 4. Klein, Felix, Autographierte Vorlesung über nichteuklidische Geometrie, ausgearbeitet von Fr. Schilling. 1892.
 5. Klein, Felix, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, bearbeitet von W. Rosemann. Berlin 1928.
 6. Liebmann, H., Nichteuklidische Geometrie. Berlin und Leipzig 1923.
 7. Sommerville, Classification of Geometries with Projektive Metric. Proceedings of the Edinburgh Mathem. Society, Vol. 28. 1910.
-