Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich.

Von Friedrich Karl Schmidt in Erlangen.

Im folgenden sollen die Resultate einer früheren Arbeit[1]) benützt werden, um die Theorie der Abelschen Körper über einem algebraischen Funktionenkörper K in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich in Analogie mit der Takagischen Klassenkörpertheorie zu entwickeln.

Bei dieser Übertragung der Takagischen Theorie bewährt sich von neuem die in der angegebenen Arbeit betonte funktionentheoretische Betrachtungsweise. Insbesondere zeigt sich, daß die Divisorenklassengruppe für die Abelsche Körper über K dieselbe Rolle spielt wie die Idealklassengruppe in der Takagischen Theorie.

Andererseits zieht aber gerade der Umstand, daß die Divisorenklassengruppe an die Stelle der Idealklassengruppe eines endlichen algebraischen Zahlkörpers tritt, verschiedene Abweichungen in den Resultaten und in der Beweisführung gegenüber der Takagischen Theorie nach sich. Das liegt einmal daran, daß die Divisorenklassengruppe im Gegensatz zur Idealklassengruppe eines endlichen algebraischen Zahlkörpers eine unendliche Gruppe ist. Ferner daran, daß die Gruppe der Einheiten des Körpers K, d. h. derjenigen Elemente, deren Divisor der Einheitsdivisor ist, mit den von 0 verschiedenen Elementen des Koeffizientenkörpers übereinstimmt und daher leicht zu be-

1) F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Zeitschr. Bd. 33. — Im folgenden kurz mit A. zitiert.

herrschen ist. Diese letzte Tatsache macht vornehmlich Vereinfachungen gegenüber den Takagischen Überlegungen möglich.

Die Darstellung der Theorie schließt sich möglichst eng an den Hasseschen Bericht[2]) über die Klassenkörpertheorie im Fall der algebraischen Zahlen an und ist nur da ausführlich gehalten, wo die Schlußweisen von den bekannten abweichen. Das ist vor allem an zwei Stellen der Fall, nämlich bei der Untersuchung der L-Reihen für den Körper K und bei dem Beweis, daß jeder zyklische Körper von Primzahlgrad über K Klassenkörper zu einer Divisorengruppe von K ist.

Die vorliegende Darstellung beschränkt sich zunächst auf den Fall derjenigen Abelschen Erweiterungen von K, deren Grad zur Charakteristik von K prim ist. Diejenigen Abelschen Oberkörper von K, deren Grad durch die Charakteristik teilbar ist, erfordern noch einige weitere Betrachtungen und sollen an anderer Stelle behandelt werden.

§ 1. Definitionen. Hauptsätze.

1. Als Grundkörper liegt den folgenden Betrachtungen ein Körper K algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten z und mit endlichem Koeffizientenkörper k zugrunde, d. h. der größte in K enthaltene absolut algebraische Körper k umfaßt eine endliche Anzahl p von Elementen, und es ist $K/k(z)$ endlich algebraisch. K ist mithin von Primzahlcharakteristik p_0, und die Elementezahl p von k ist eine Potenz von p_0.

Unter einem Normalkörper $\overline{K}/K$ verstehen wir stets einen Normalkörper erster Art, unter einem Abelschen Körper $\overline{K}/K$ einen Normalkörper erster Art mit Abelscher Galoisgruppe über K. Dabei setzen wir im folgenden stillschweigend voraus, daß der Grad jedes betrachteten Abelschen Körpers $\overline{K}/K$ zur Charakteristik p_0 von K prim sei.

Der Begriff eines Divisors von K und die damit zusammenhängenden Definitionen werden im folgenden im gleichen Sinne wie in der algebraischen Funktionentheorie benutzt[2]). Da der

1) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresber. d. D. M.-V. 35 (1926) und 36 (1927), im folgenden zitiert mit H. I. und H. Ia.

2) A. § 3 und § 4.

Koeffizientenkörper k endlich ist, so ist das Restklassensystem nach einem Primdivisor aus K stets ein endlicher Körper, dessen Elementezahl eine Potenz von p_0, also zum Grad der betrachteten Abelschen Erweiterungen von K prim ist.

2. An neuen Begriffen tritt im folgenden zunächst der der Einheit von K auf. Dabei verstehen wir unter einer Einheit von K ein Element, dessen Divisor der Einheitsdivisor ist. Die Menge aller Einheiten von K bildet dann offenbar eine multiplikative Gruppe, und zwar stimmt diese Gruppe überein mit der zyklischen Gruppe der von 0 verschiedenen Elemente aus k.

Weitere neue Begriffe knüpfen an an die Definition der Divisorenklassengruppe. Die Divisorenklassengruppe wurde in der vorangehenden Arbeit erklärt als die Faktorgruppe der Gruppe aller Divisoren von K nach der Untergruppe der Hauptdivisoren, d. h. derjenigen Divisoren, die den Elementen von K entsprechen.

Die so gewonnene Divisorenklassengruppe nennen wir in Zukunft auch die absolute Divisorenklassengruppe zur Unterscheidung von einer Erweiterung dieses Begriffs, die wir nunmehr einführen, und die der Weberschen Verallgemeinerung des Begriffs der Idealklassengruppe entspricht. Diese Erweiterung erhält man so:

Es sei $\mathfrak{m}$ ein ganzer Divisor. An Stelle der Gruppe aller Hauptdivisoren werde jetzt nur noch die Gruppe $H_0^{(\mathfrak{m})}$ derjenigen Hauptdivisoren betrachtet, die Elementen a mit $a \equiv 1 \bmod. \mathfrak{m}$ entsprechen. $H_0^{(\mathfrak{m})}$ heiße der Strahl mod. $\mathfrak{m}$ und die Faktorgruppe $A^{(\mathfrak{m})}/H_0^{(\mathfrak{m})}$ der Gruppe aller zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren nach dem Strahl mod. $\mathfrak{m}$ die Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{m}$, jede Restklasse von $A^{(\mathfrak{m})}/H_0^{(\mathfrak{m})}$ eine Strahlklasse mod. $\mathfrak{m}$. Die Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{m}$ ist ebenso wie die absolute Divisorenklassengruppe unendlich[1]), dagegen ist die Zahl aller Strahlklassen der Ordnung[2]) 0 endlich. Es ist nämlich

1) Vgl. A. § 7.

2) Unter der Ordnung eines Divisors verstehen wir die in A. § 4 Nr. 4 eingeführte Ordnung, die mit Hilfe der in dem betreffenden Divisor aufgehenden Primdivisoren erklärt ist. Da die Divisoren des Strahls mod. $\mathfrak{m}$ als Hauptdivisoren alle die Ordnung 0 haben, besitzen sämtliche Divisoren einer festen Strahlklasse mod. $\mathfrak{m}$ die gleiche Ordnung, die wir dann eben die Ordnung der betreffenden Strahlklasse nennen. — Vgl. A. § 4 Nr. 6.

$$h_0^{(\mathfrak{m})} = h_0 \frac{\Phi(\mathfrak{m})}{p-1},$$

wo $h_0^{(\mathfrak{m})}$ die Zahl der Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$ von der Ordnung 0, h_0 die Zahl der absoluten Divisorenklassen der Ordnung 0 und $\Phi(\mathfrak{m})$ die Eulersche Funktion für den ganzen Divisor $\mathfrak{m}$, also die Zahl der zu $\mathfrak{m}$ primen Restklassen mod. $\mathfrak{m}$ bedeutet. Der Beweis von (1) kann völlig nach dem Vorbild von Hasse Ia, S. 241 geführt werden, wenn man nur bemerkt, daß jede absolute Divisorenklasse einen zu $\mathfrak{m}$ primen Divisor erhält.

Unter einer Divisorengruppe H verstehen wir im folgenden stets eine solche Gruppe, die sich bei geeigneter Wahl des ganzen Divisors $\mathfrak{m}$ aus Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$ zusammensetzt. Dabei legen wir für die Gesamtheit der so verstandenen Divisorengruppen im Anschluß an Hasse eine über die Identität hinausgehende Gleichheit zugrunde[1]).

Sind nämlich $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ bezw. $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ zwei Divisorengruppen, die sich aus Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}_1$ bezw. $\mathfrak{m}_2$ zusammensetzen, so nennen wir $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ und $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ „gleich" und gebrauchen für sie ein gemeinsames Zeichen H, wenn ein ganzer Divisor $\mathfrak{a}$ existiert, derart daß die Mengen der zu $\mathfrak{a}$ primen Divisoren $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ und $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ übereinstimmen. Wir sagen dann, H sei mod. $\mathfrak{m}_1$ und mod. $\mathfrak{m}_2$ erklärbar, $\mathfrak{m}_1$ bezw. $\mathfrak{m}_2$ seien Erklärungsmoduln für H. Der größte gemeinschaftliche Teiler aller Erklärungsmoduln von H heißt der Führer von H.

Sind $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ und $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ „gleich" und ist H das für sie eingeführte gemeinsame Zeichen, so nennen wir auch die Faktorgruppen $A^{(\mathfrak{m}_1)}/H^{(\mathfrak{m}_1)}$ bezw. $A^{(\mathfrak{m}_2)}/H^{(\mathfrak{m}_2)}$ „gleich", wo $A^{(\mathfrak{m}_1)}$ bezw. $A^{(\mathfrak{m}_2)}$ die Gruppe aller zu $\mathfrak{m}_1$ bezw. $\mathfrak{m}_2$ primen Divisoren aus K ist, und sprechen demgemäß von der Faktorgruppe A/H nach H. Das ist berechtigt, weil die Gruppen $A^{(\mathfrak{m}_1)}/H^{(\mathfrak{m}_1)}$ und $A^{(\mathfrak{m}_2)}/H^{(\mathfrak{m}_2)}$ isomorph sind und man zwischen ihnen sogar einen solchen Isomorphismus herstellen kann, daß einander entsprechende Restklassen von $A^{(\mathfrak{m}_1)}/H^{(\mathfrak{m}_1)}$ und $A^{(\mathfrak{m}_2)}/H^{(\mathfrak{m}_2)}$ durch denselben Repräsentantendivisor erzeugt werden.

Die Indices von $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ und $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ unter $A^{(\mathfrak{m}_1)}$ bezw. $A^{(\mathfrak{m}_2)}$ sind endlich, wenn $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ und $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ nicht nur aus Divisoren der Ord-

1) Vgl. H. I. S. 7.

nung 0 bestehen. In diesem Fall bezeichnen wir den übereinstimmenden Index $(A^{(\mathfrak{m}_1)} : H^{(\mathfrak{m}_1)}) = (A^{(\mathfrak{m}_2)} : H^{(\mathfrak{m}_2)})$ auch als Index von H.

3. Auf Grund der soeben eingeführten Definitionen ordnen wir nun einem beliebigen Normalkörper $\bar{K}/K$ für einen ganzen Divisor $\mathfrak{m}$ von K eine eindeutig bestimmte Divisorengruppe $H_{\mathfrak{m}}$ mod. $\mathfrak{m}$ zu, nämlich die Divisorengruppe, die sich aus allen Strahlklassen nach $\mathfrak{m}$ zusammensetzt, in welche Relativnormen von zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren aus $\bar{K}$ hineinfallen. $H_{\mathfrak{m}}$ bezeichnen wir als die dem Körper $\bar{K}$ mod. $\mathfrak{m}$ zugeordnete Divisorengruppe. $H_{\mathfrak{m}}$ ist stets von endlichem Index, da die Relativnorm eines Divisors von $\bar{K}$ mit von 0 verschiedener Ordnung wieder eine von 0 verschiedene Ordnung besitzt. Wir setzen nun fest[1]):

Definition: *Ein Normalkörper $\bar{K}|K$ heißt Klassenkörper zu der Divisorengruppe H mit dem Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$, wenn*

1. *die dem Körper $\bar{K}$ mod. $\mathfrak{m}$ zugeordnete Divisorengruppe $H_{\mathfrak{m}}$ „gleich“ H ist,*
2. *der Index h von H gleich dem Grad von $\bar{K}|K$ ist.*

Wir werden dann die folgenden Sätze herleiten, die der Takagischen Theorie entsprechen[2]).

I. *Zu jeder Divisorengruppe H aus K von endlichem, zu p_0 primem Index existiert (unabhängig von deren Erklärungsmodul) ein und nur ein Klassenkörper $\bar{K}$.*

II. *$\bar{K}|K$ ist Abelsch und die Galoisgruppe von $\bar{K}|K$ ist einstufig isomorph zu der Faktorgruppe $A|H$.*

III. *Die Relativdiskriminante von $\bar{K}|K$ enthält nur solche Primdivisoren, die im Führer $\mathfrak{f}$ von H aufgehen.*

IV. *Die zu $\mathfrak{f}$ primen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K werden in $\bar{K}$ nach dem Gesetz zerlegt:*

Ist f die früheste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in H enthalten ist, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $\bar{K}$ in lauter verschiedene Primdivisoren vom Relativgrad f.

V. *Jeder Abelsche Körper $\bar{K}|K$ ist Klassenkörper zu einer eindeutig bestimmten Divisorengruppe H von K von endlichem*

1) Vgl. H. I. S. 15.
2) Vgl. H. I. S. 9 und 10.

zu p_0 primem Index. Im Führer $\mathfrak{f}$ von H gehen nur solche Primdivisoren auf, die auch in der Diskriminante von $\bar{K}/K$ aufgehen.

Der Beweis dieser Sätze vollzieht sich in entsprechenden Schritten wie in der Takagischen Theorie. Wir untersuchen in § 2 zunächst die L-Funktionen des Körpers K und gewinnen mit ihrer Hilfe eine wichtige Ungleichung für den Index der einem Normalkörper $\bar{K}/K$ in K zugeordneten Divisorengruppe sowie die Eindeutigkeit des Klassenkörpers. Auf diesen Ergebnissen fußend, bestätigen wir in § 3 zunächst den Umkehrsatz V im Spezialfall eines über K zyklischen Körpers $\bar{K}$ von Primzahlgrad l. In § 4 endlich setzen wir kurz auseinander, wie sich auf Grund des Vorhergehenden der volle Beweis aller Sätze I—V nunmehr in engem Anschluß an Takagi ergibt.

§ 2. Die L-Reihen des Körpers K.

1. Es sei $H = H^{(\mathfrak{m})}$ eine mod. $\mathfrak{m}$ erklärte Divisorengruppe von endlichem Index h und χ einer der h Charaktere der Faktorgruppe $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$, wo $A^{(\mathfrak{m})}$ die Gruppe aller zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren aus K bedeutet. Ist $\mathfrak{c}$ irgend ein zu $\mathfrak{m}$ primer Divisor, so verstehen wir unter $\chi(\mathfrak{c})$ den Wert von χ für diejenige Klasse von $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$, zu der $\mathfrak{c}$ gehört.

Als L-Reihen von K für die Divisorengruppe H bezeichnen wir dann die h Reihen

$$L(s, \chi) = \sum \frac{\chi(\mathfrak{c})}{|\mathfrak{c}|^s},$$

wo die Summe über alle ganzen, zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren $\mathfrak{c}$ zu erstrecken ist und $|\mathfrak{c}|$ wie in der vorhergehenden Arbeit die Zahl $p^{\mathfrak{c}}$ der Restklassen mod. $\mathfrak{c}$ darstellt.

Um die L-Reihen nach der Methode der vorangehenden Arbeit mit Hilfe des Riemann-Rocheschen Satzes summieren zu können, müssen wir noch einige Folgerungen aus dem Riemann-Rocheschen Satz erörtern.

2. Der Riemann-Rochesche Satz enthält für Divisoren bezw. absolute Divisorenklassen aus K von hinreichend großer Ordnung die folgenden beiden gleichwertigen Aussagen, in denen g das Geschlecht des Körpers K bedeutet[1]).

1) Vgl. A. § 6, Nr. 5 und 6.

a) *Ist* $\mathfrak{c}$ *ein Divisor, dessen Ordnung* $c \geqq 2g - 2$ *ist, so ist die Zahl der Multipla von* $\frac{1}{\mathfrak{c}}$ *gleich* p^{c-g+1}.

b) *Ist* $\mathfrak{C}$ *eine absolute Divisorenklasse, deren Ordnung* $c \geqq 2g - 2$ *ist, so ist die Zahl aller ganzen Divisoren aus* $\mathfrak{C}$ *gleich* $\frac{p^{c-g+1}}{p-1}$.

Diese Sätze müssen wir nun verschärfen für den Fall, daß nur solche Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{c}}$ betrachtet werden, die $\equiv 1$ sind mod. einem festen zu $\mathfrak{c}$ primen ganzen Divisor $\mathfrak{m}$, und daß demgemäß an Stelle der absoluten Divisorenklassen die Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$ zugrunde gelegt werden.

a') *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein ganzer Divisor der Ordnung* m *und* $\mathfrak{c}$ *ein beliebiger zu* $\mathfrak{m}$ *primer Divisor, für dessen Ordnung* c *gilt* $c - m \geqq 2g - 2$, *so ist die Zahl aller Multipla von* $\frac{1}{\mathfrak{c}}$, *die* $\equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{m}$ *sind, gleich* $p^{c-m-g+1}$.

b') *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein ganzer Divisor der Ordnung* m *und* $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$ *eine Strahlklasse mod.* $\mathfrak{m}$, *für deren Ordnung* c *gilt* $c - m \geqq 2g - 2$, *so ist die Zahl aller ganzen Divisoren aus* $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$ *gleich* $p^{c-m-g+1}$.

Beweis von a'). Es sei $1 = \varrho^{(1)}, \varrho^{(2)}, \ldots, \varrho^{(n)} (n = p^m)$ ein vollständiges Repräsentantensystem mod. $\mathfrak{m}$ und $z^{(i)}$ die Zahl aller Multipla $\gamma^{(i)}$ von $\frac{1}{\mathfrak{c}}$, die $\equiv \varrho^{(i)}$ mod. $\mathfrak{m}$ sind. Ist dann $z^{(i)} > 0$, d. h. existiert ein Multiplum $\gamma_1^{(i)}$ von $\frac{1}{\mathfrak{c}}$, das $\equiv \varrho^{(i)}$ mod. $\mathfrak{m}$ ist, so ist jedes $\gamma^{(i)}$ von der Form $\gamma_1^{(i)} + \mu$, wo μ alle Multipla von $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{c}}$ durchläuft. Solche Multipla gibt es aber wegen $c - m \geqq 2g - 2$ nach a) genau $p^{c-m-g+1}$ verschiedene. Für jedes i ist daher entweder $z^{(i)} = 0$ oder $z^{(i)} = p^{c-m-g+1}$, und man hat

$$\Sigma z^{(i)} \leqq p^m \cdot p^{c-m-g+1} = p^{c-g+1},$$

wo das $=$-Zeichen nur dann gilt, wenn jedes $z^{(i)} = p^{c-g-m+1}$ ist.

Die Zahl aller Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{c}}$ ist offenbar gleich $\Sigma z^{(i)}$.

Andererseits ist aber die Zahl dieser Multipla wegen $c > 2g - 2$ nach a) gleich p^{c-g+1}. Daraus folgt $\Sigma z^{(i)} = p^{c-g+1}$ und mithin wirklich $z^{(i)} = p^{c-m-g+1}$ für jedes i.

Beweis von b'). Es sei $\mathfrak{c}$ ein beliebiger Divisor aus $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$. Jedes Multiplum γ von $\frac{1}{\mathfrak{c}}$, das $\equiv 1$ mod. $\mathfrak{m}$ ist, besitzt dann einen Divisor der Gestalt $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{c}}$, wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor aus $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$ ist, und umgekehrt gibt es zu jedem ganzen Divisor $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$ ein Multiplum γ, dessen Divisor $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{c}}$ ist. Sind γ und γ' zwei Multipla, deren Divisoren $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{c}}$ und $\frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{c}}$ übereinstimmen, so ist notwendig $\gamma = \varepsilon\gamma'$ mit ε aus k. Daraus folgt aber wegen $\gamma \equiv \gamma' \equiv 1$ mod. $\mathfrak{m}$ sofort $\varepsilon \equiv 1$ mod. $\mathfrak{m}$ und daher $\varepsilon = 1$, d. h. $\gamma = \gamma'$.

Die Zuordnung zwischen den Multipla γ und den zugehörigen ganzen Divisoren $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$ ist also umkehrbar eindeutig und somit die Zahl der ganzen Divisoren aus $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$ gleich der Zahl aller Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{c}}$, die $\equiv 1$ mod. $\mathfrak{m}$ sind. Da die Ordnung von $\mathfrak{c}$ gleich der Ordnung c von $\mathfrak{C}^{(\mathfrak{m})}$ ist, folgt nun aus a') sofort die Behauptung.

3. Sind

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_h$$

die Restklassen nach der mod. $\mathfrak{m}$ erklärten Divisorengruppe H, so definieren wir als Z-Funktion für die Restklasse $\mathfrak{B}$ die Funktion

$$Z(s; \mathfrak{B}) = \sum \frac{1}{|\mathfrak{b}|^s},$$

wo die Summe über alle ganzen Divisoren $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{B}$ zu erstrecken ist. Auf Grund von b' findet man mit Hilfe der Methoden der vorangehenden Arbeit[1]) mühelos:

Satz 1. *Ist a die Ordnung eines Divisors kleinster positiver Ordnung in H, b die Ordnung eines Divisors kleinster positiver Ordnung in $\mathfrak{B}$, so ist*

1) Vgl. A. § 8.

$Z(s, \mathfrak{B})$ *periodisch mit der Periode* $\dfrac{2\pi i}{(a, b) \log p}$[1]) *und in der ganzen s-Ebene regulär bis auf die Stellen* $1 + \dfrac{2 q \pi i}{a \log p}$, *an denen sie jeweils einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum* $\dfrac{h_0^{(\mathfrak{m})} p^{1-g}}{h |\mathfrak{m}| \log p} e^{-\frac{2 q \pi i}{a} b}$ *besitzt. Dabei ist* $h_0^{(\mathfrak{m})}$ *die Zahl aller Strahlklassen mod.* $\mathfrak{m}$ *von der Ordnung* 0.

Bedenkt man nun, daß

$$L(s, \chi) = \chi(\mathfrak{B}_1) Z(s, \mathfrak{B}_1) + \ldots + \chi(\mathfrak{B}_h) Z(s, \mathfrak{B}_h)$$

ist, und daß für den Charakter χ gilt

$$\chi(\mathfrak{B}_1) + \ldots + \chi(\mathfrak{B}_h) = h \text{ oder } = 0,$$

je nachdem ob χ der Hauptcharakter oder vom Hauptcharakter verschieden ist, so ergibt sich aus Satz 1 weiter

Satz 2. *Die h L-Reihen für die Divisorengruppe H stellen für alle s, deren Realteil* $>$ 1 *ist, reguläre Funktionen von s dar.*

Bei Annäherung der Variablen s auf der reellen Achse von rechts her an 1 *ist für die mit dem Hauptcharakter* χ_0 *gebildete Haupt-L-Reihe*

$$\lim\,(s-1)\, L(s, \chi_0) = \frac{h_0^{(\mathfrak{m})} p^{1-g}}{|\mathfrak{m}| \log p},$$

für die h—1 übrigen L-Reihen

$$\lim L(s, \chi) = L(1, \chi)$$

vorhanden und endlich.

4. Satz 2 besagt, das sich die L-Reihen des Körpers K bei Annäherung an $s = 1$ genau ebenso verhalten wie die L-Reihen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers. Man kann daher die bekannten zahlentheoretischen Schlußweisen auf die L-Funktionen des Körpers K übertragen und gewinnt so nach dem Vorbild von Hasse[2]) die Sätze:

---

1) Unter (a, b) verstehen wir hier den positiven größten gemeinschaftlichen Teiler von a und b.

2) Vgl. H. Ia. S. 12—14 und S. 17/18.

Satz 3. *Für den Index h der einem Normalkörper $\overline{K}/K$ vom Grade n zugeordneten Divisorengruppe mod.* $\mathfrak{m}$ *gilt die Ungleichung*

$$h \leqq n.$$

Satz 4. *Sind $\overline{K}$ und $\overline{K}'$ Klassenkörper zu den Divisorengruppen H und H' von K, so bedingen sich die Relationen*

$$H' \leqq H \text{ und } \overline{K}' \geqq \overline{K}$$

gegenseitig.

Satz 4 enthält insbesondere den Eindeutigkeitssatz für die Klassenkörper.

§ 3. Beweis des Umkehrsatzes für den Spezialfall eines zyklischen Körpers von Primzahlgrad.

1. Es handelt sich um den

Satz 5. *Jeder zyklische Körper $\overline{K}/K$ vom Primzahlgrad über K ist Klassenkörper zu einer Divisorengruppe H aus K, in deren Führer $\mathfrak{f}$ nur Primteiler der Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\overline{K}/K$ aufgehen.*

Der Beweis dieses Satzes wird, wie in der Zahlentheorie, gekoppelt mit dem Beweis des Hauptgeschlechtssatzes, der jetzt für den Körper K formuliert werden soll.

Ist $\overline{K}/K$ zyklisch vom Primzahlgrad l, so läßt sich, wie man leicht erkennt, der Diskriminantendivisor $\mathfrak{d}$ von $\overline{K}/K$ als $(l-t)$-*te* Potenz eines ganzen Divisors $\mathfrak{f}$ darstellen, $\mathfrak{d} = \mathfrak{f}^{l-1}$.

In K wird nun die Strahlklassengruppe mod. diesem ganzen Divisor $\mathfrak{f}$ zugrunde gelegt, $H_0^{(\mathfrak{f})}$ sei der Strahl mod. $\mathfrak{f}$. Die dem Körper $\overline{K}$ mod. $\mathfrak{f}$ zugeordnete Divisorengruppe $H_{\mathfrak{f}}$ aus K besteht nach Definition aus allen Strahlklassen mod. $\mathfrak{f}$ in K, in die Relativnormen von zu $\mathfrak{f}$ primen Divisoren aus $\overline{K}$ hineinfallen. Ordnet man also jedem Divisor $\overline{\mathfrak{a}}$ aus der Gruppe $\overline{A}$ aller zu $\mathfrak{f}$ primen Divisoren von $\overline{K}$ die Strahlklasse $N(\overline{\mathfrak{a}})H_0^{(\mathfrak{f})}$ zu, so erhält man eine homomorphe Abbildung von $\overline{A}$ auf $H_{\mathfrak{f}}/H_0^{(\mathfrak{f})}$.

Die Gruppe $\overline{A}$ werde zerlegt nach der Untergruppe $\overline{H}_0$ aller in ihr enthaltenen Hauptdivisoren, d. h. also nach der Untergruppe aller zu $\mathfrak{f}$ primen Hauptdivisoren aus $\overline{K}$. H_1 sei die Untergruppe von $H_{\mathfrak{f}}$, die der Untergruppe $\overline{H}_0$ von $\overline{A}$ bei dem soeben zwischen $\overline{A}$ und $H_{\mathfrak{f}}/H_0^{(\mathfrak{f})}$ hergestellten Homomorphismus entspricht. Dann besteht H_1 aus allen Strahlklassen mod. $\mathfrak{f}$ in K, die Normen von zu $\mathfrak{f}$ primen Hauptdivisoren aus $\bar{K}$ enthalten, und wir haben einen Homomorphismus zwischen

$$\bar{A}/\bar{H}_0 \text{ und } H_{\mathfrak{f}}/H_1.$$

Um von diesem Homomorphismus zu einem Isomorphismus zu gelangen, haben wir nur in $\bar{A}$ die Gruppe $\bar{H}_1$ aller Divisoren aufzusuchen, deren Relativnormen nach H_1 fallen. Diese Gruppe $\bar{H}_1$ heißt das Hauptgeschlecht von $\bar{K}/K$, und es ist also

$$\bar{A}/\bar{H}_1 \text{ isomorph } H_{\mathfrak{f}}/H_1.$$

Die Gruppe H_1 enthält nach ihrer Definition lauter Divisoren der Ordnung 0, und dasselbe gilt daher auch von dem Hauptgeschlecht $\bar{H}_1$, d. h. $\bar{H}_1$ ist Untergruppe der Gruppe $\bar{A}_0$ aller zu $\mathfrak{f}$ primen Divisoren aus $\bar{K}$ von der Ordnung 0, $\bar{A}_0 \geqq \bar{H}_1 \geqq \bar{H}_0$. Aus dem soeben festgestellten Isomorphismus folgt offenbar sofort weiter $\bar{A}_0/\bar{H}_1 \cong A_0 \frown H_{\mathfrak{f}}/H_1$, wo A_0 die Gruppe aller Divisoren der Ordnung 0 aus A ist.

Der Hauptgeschlechtssatz lautet nun:

Satz 6. *Das Hauptgeschlecht $\bar{H}_1$ besteht aus der Gruppe $\bar{H}'_1$ der $(1-\sigma)$-ten symbolischen Potenzen aller Klassen von $\bar{A}/\bar{H}_0$, d. h. jede Klasse aus $\bar{H}_1$ ist von der Form $\frac{\bar{\mathfrak{C}}}{\sigma\bar{\mathfrak{C}}}$, wo $\bar{\mathfrak{C}}$ eine Klasse von $\bar{A}/\bar{H}_0$ und σ eine erzeugende Substitution der Galoisgruppe von $\bar{K}/K$ ist.*

2. Beim Beweise der Sätze 5 und 6 unterscheiden wir für den Körper $\bar{K}$ zwei Fälle.

1. Fall. (Erweiterung des Koeffizientenkörpers). Der größte in $\bar{K}$ enthaltene absolut algebraische Körper $\bar{k}$ ist echter Oberkörper des größten in K enthaltenen absolut algebraischen Körpers k, $\bar{k} > k$. Beim Übergang von K zu $\bar{K}$ erfährt also der Koeffizientenkörper eine echte Erweiterung. Da $\bar{K}/K$ von Primzahlgrad und daher primitiv ist, ist in diesem Falle $\bar{K}$ gleich dem Vereinigungskörper $(\bar{k}, K)$ von $\bar{k}$ und K. Anders ausgedrückt: $\bar{K}$ entsteht aus K durch Adjunktion eines absolut algebraischen Elements. Der Diskriminantendivisor von $\bar{K}/K$ ist daher gleich dem Einheitsdivisor.

2. Fall. (Erhaltung des Koeffizientenkörpers). Es ist $\bar{k} = k$, d. h. beim Übergang von K zu $\bar{K}$ bleibt der Koeffizi-

entenkörper erhalten. Die Gruppe der Einheiten von $\bar{K}$ ist also in diesem Falle im Gegensatz zum vorhergehenden mit der Gruppe der Einheiten in K identisch.

Der Beweis von Satz 5 ist im Falle I trivial. Denn da $\bar{K} = (\bar{k}, K)$ und mithin $(\bar{k} : k) = l$ ist, besitzt die Norm jedes Divisors aus $\bar{K}$ in K eine durch l teilbare Ordnung. Es ist also
$$(A : H_{\mathfrak{f}} A_0) \geqq l,$$
wo A_0 die Untergruppe aller Divisoren der Ordnung 0 von A bedeutet, und daher auch
$$\begin{aligned}(A : H_{\mathfrak{f}}) &= (A : H_{\mathfrak{f}} A_0)\,(H_{\mathfrak{f}} A_0 : H_{\mathfrak{f}}) \\ &= (A : H_{\mathfrak{f}} A_0)\,(A_0 : A_0 \frown H_{\mathfrak{f}}) \geqq l.\end{aligned}$$
Da nach Satz 3 andererseits
$$(A : H_{\mathfrak{f}}) \leqq l$$
ist, hat man in der Tat
$$(A : H_{\mathfrak{f}}) = l.$$

Dieser Überlegung entnehmen wir noch: Im Falle I ist stets $(A_0 : A_0 \frown H_{\mathfrak{f}}) = 1$. Ferner ist im Falle I trivialer Weise $H_1 = H_0$.

3. Um Satz 5 im Falle II und Satz 6 in den beiden Fällen I und II zu beweisen, bestimmen wir zunächst nach dem Vorbild der Zahlentheorie die Zahl der ambigen Divisorenklassen der Ordnung 0 in $\bar{K}$. Dabei heißt eine Divisorenklasse $\bar{\mathfrak{C}}$ aus $\bar{K}$ ambig, wenn $\sigma\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{C}}$, also $\bar{\mathfrak{C}}^{1-\sigma}$ die Hauptklasse ist.

Wir benutzen in Anlehnung an H a s s e die folgenden Bezeichnungen:

ε bezw. $\bar{\varepsilon}$	Einheiten aus K bezw. $\bar{K}$.
$\bar{\eta}$	Einheiten aus $\bar{K}$, deren Relativnormen bezügl. K gleich 1 sind.
η bezw. η^*	Einheiten aus K, die Relativnormen von Einheiten aus $\bar{K}$ bezw. Relativnormen von Elementen aus $\bar{K}$ sind.
$\bar{\mathfrak{c}}$	Divisoren aus $\bar{K}$, deren $(1-\sigma)$-te symbolische Potenz der Einheitsdivisor ist (stark ambige Divisoren).
$\bar{\mathfrak{c}}^*$	Divisoren aus $\bar{K}$, deren $(1-\sigma)$-te symbolische Potenz ein Hauptdivisor (d. h. Divisor eines Elements) ist (schwach ambige Divisoren).

$\mathfrak{a}$	Divisoren des Körpers K.
$(\bar{a})$	Divisoren von Elementen $\bar{a}$ aus $\bar{K}$ (Hauptdivisoren aus $\bar{K}$).
$\bar{c}$ bezw. $\bar{c}^*$	Größte gemeinschaftliche Teiler der Ordnungen aller Divisoren $\bar{\mathfrak{c}}$ bezw. aller Divisoren $\bar{\mathfrak{c}}^*$.
a	Größter gemeinschaftlicher Teiler der Ordnungen aller $\mathfrak{a}$ in $\bar{K}$.
d	Die Zahl der verschiedenen in der Relativdiskriminante von $\bar{K}/K$ aufgehenden Primdivisoren.

Unter $\bar{\mathfrak{c}}_0$, $\bar{\mathfrak{c}}_0^*$, $\mathfrak{a}_0$ verstehen wir Divisoren derselben Art wie $\bar{\mathfrak{c}}$, $\bar{\mathfrak{c}}^*$, $\mathfrak{a}$, die aber überdies noch die Ordnung 0 haben. Durch die Zeichen $\varepsilon, \ldots$ bezw. $\bar{\mathfrak{c}}, \ldots$ geben wir wie Hasse zugleich die ganze Gruppe der betreffenden Elemente bezw. Divisoren wieder, sodaß also etwa $(\eta^* : \eta)$ den Index der Gruppe aller Einheiten η unter der Gruppe aller Einheiten η^* bedeutet.

Satz 7. *Die Zahl der ambigen Divisorenklassen der Ordnung* 0 *in* $\bar{K}$ *ist stets*

$$(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a})) = h_0 \frac{\bar{c}^*}{a} \frac{l^d}{(\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma})} (\eta^* : \eta).$$

Daraus folgt insbesondere

im Falle I: $(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a})) = h_0 \dfrac{\bar{c}^*}{a}$,

im Falle II: $(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a})) = h_0 \, \bar{c}^* \, l^{d-(1+o)} \, (\eta^* : \varepsilon^l)$,

wo o *gleich* 1 *oder* 0 *ist, je nachdem die l-ten Einheitswurzeln in* K *enthalten sind oder nicht.*

Beweis von Satz 7. Durch einfache Übertragung zahlentheoretischer Schlüsse findet man mühelos[1]):

$$(\bar{\mathfrak{c}}_0(\bar{a}) : (\bar{a})) = h_0 \frac{(\bar{\mathfrak{c}}_0 : \mathfrak{a}_0)}{(\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma})},$$

ferner

$$(\bar{\mathfrak{c}} : \mathfrak{a}) = l^d,$$

$$(\bar{\mathfrak{c}}^* : \bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{a})) = (\eta^* : \eta).$$

Für den gesuchten Index $(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a}))$ hat man demnach zunächst

$$(1) \qquad (\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a})) = (\bar{\mathfrak{c}}_0^* : \bar{\mathfrak{c}}_0\,(\bar{a}))\,(\bar{\mathfrak{c}}_0\,(\bar{a}) : (\bar{a}))$$
$$= (\bar{\mathfrak{c}}_0^* : \bar{\mathfrak{c}}_0\,(\bar{a}))\, h_0 \frac{(\bar{\mathfrak{c}}_0 : \mathfrak{a}_0)}{(\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma})}.$$

1) Vgl. H. Ia. S. 274—277.

Die hier rechter Hand auftretenden Indices $(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : \bar{\mathfrak{c}}_0(\bar{a}))$ und $(\bar{\mathfrak{c}}_0 : \mathfrak{a}_0)$ lassen sich auf die bereits bekannten Indices $(\bar{\mathfrak{c}}^* : \bar{\mathfrak{c}}(\bar{a}))$ und $(\bar{\mathfrak{c}} : \mathfrak{a})$ zurückführen nach dem Schema:

$$(\bar{\mathfrak{c}}^* : \bar{\mathfrak{c}}(\bar{a})) = (\bar{\mathfrak{c}}^* : \bar{\mathfrak{c}}\,\bar{\mathfrak{c}}_0^*)\,(\bar{\mathfrak{c}}\,\bar{\mathfrak{c}}_0^* : \bar{\mathfrak{c}}(\bar{a}))$$
$$= \frac{\bar{c}}{\bar{c}^*}(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : \bar{\mathfrak{c}}_0(\bar{a}))$$

und ebenso

$$(\bar{\mathfrak{c}} : \mathfrak{a}) = \frac{a}{\bar{c}}(\bar{\mathfrak{c}} : \mathfrak{a}_0).$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man also

$$(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a})) = h_0 \frac{\bar{c}^*}{a} \frac{l^d}{(\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma})} (\eta^* : \eta).$$

Im Falle I ist nun $d = 0$, da ja $\bar{K} = (\bar{k}, K)$ ist. Die Gruppe $\bar{\varepsilon}$ bezw. ε besteht in diesem Falle aus der zyklischen Gruppe der von 0 verschiedenen Elemente des Körpers $\bar{k}$ bezw. k. Wie man leicht nachrechnet, ist jedes Element von k stets Norm eines Elements von $\bar{k}$ und daher $(\eta^* : \eta) = 1$, ferner ist jedes Element $\bar{\eta}$ aus $\bar{k}$, dessen Norm bezüglich k gleich 1 ist, von der Form $\bar{\varepsilon}^{1-\sigma}$ und folglich auch $(\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma}) = 1$. Das ergibt schließlich

$$(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a})) = h_0 \frac{\bar{c}^*}{a}.$$

Im Falle II ist $\bar{k} = k$, und es besitzt jeder Divisor $\mathfrak{a}$ in $\bar{K}$ eine Ordnung, die gleich dem l-fachen seiner Ordnung in K ist, d. h. es ist $a = l$[1]. Weiter ist wegen $\bar{k} = k$ stets $\sigma\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$, d. h. $N(\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}^l$ und $\bar{\varepsilon}^{1-\sigma} = 1$. Die Gruppe $\bar{\eta}$ stimmt daher überein mit der Gruppe der l-ten Einheitswurzeln, $(\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma}) = l^0$ und die Gruppe η mit $\bar{\varepsilon}^l = \varepsilon^l$. Zusammenfassend hat man somit wirklich

$$(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a})) = h_0\, \bar{c}^*\, l^{d-(1+0)}\, (\eta^* : \varepsilon^l).$$

4. **Beweis von Satz 5 im Falle II und von Satz 6 im Falle I, II.** Wie in der Zahlentheorie geht man aus von dem zu Anfang dieses Paragraphen bei Einführung des Hauptgeschlechts festgestellten Isomorphismus zwischen

---

1) Man beachte, daß der größte gemeinschaftliche Teiler der Ordnungen aller Divisoren in K gleich 1 ist. — A. § 8.

$$\bar{A}_0/\bar{H}_1 \text{ und } A_0 \frown H_{\mathfrak{f}}/H_1,$$

aus dem

$$(\bar{A}_0 : \bar{H}_1) = (A_0 \frown H_{\mathfrak{f}} : H_1)$$

folgt. Nun ist sicher $\bar{H}_1 \geqq \bar{H}_1'$, wo $\bar{H}_1'$ wie in Satz 6 die Gruppe der $(1-\sigma)$-ten Potenzen aller Klassen von $\bar{A}/\bar{H}$ bedeutet, also

$$(\bar{A}_0 : \bar{H}_1') \geqq (\bar{A}_0 : \bar{H}_1).$$

Für den Index $(\bar{A}_0 : \bar{H}_1')$ findet man durch einfache gruppentheoretische Überlegungen ebenso wie in der Zahlentheorie[1])

$$(\bar{A}_0 : \bar{H}_1') = \frac{(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a}))}{\bar{c}^*}.$$

Ingesamt hat man also

$$(2) \frac{(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a}))}{\bar{c}^*} = (\bar{A}_0 : \bar{H}_1') \geqq (\bar{A}_0 : \bar{H}_1) = (A_0 \frown H_{\mathfrak{f}} : H_1)$$
$$= \frac{(A_0 : H_1)}{(A_0 : A_0 \frown H_{\mathfrak{f}})}$$

Liegt nun zunächst der Fall I vor, so wird linker Hand nach Satz 7

$$\frac{(\bar{\mathfrak{c}}_0^* : (\bar{a}))}{\bar{c}^*} = \frac{h_0}{a},$$

während rechter Hand $H_1 = H_0$ und $A_0 \frown H_{\mathfrak{f}} = A_0$ ist. Das gibt

$$\frac{h_0}{a} = (\bar{A}_0 : \bar{H}_1') \geqq (\bar{A}_0 : \bar{H}_1) = h_0.$$

Da a eine ganze Zahl ist, muß also notwendig das $=$-Zeichen gelten, d. h. es ist $\bar{H}_1 = \bar{H}'_1$ und Satz 6 in diesem Falle bewiesen.

Liegt dagegen der Fall II vor, so ist nach Satz 7 auf der linken Seite von (2)

$$\frac{(\bar{\mathfrak{c}}^* : (\bar{a}))}{\bar{c}} = h_0 l^{d-(1+o)} (\eta^* : \varepsilon^l).$$

Auf der rechten Seite berechnet man zunächt $(A_0 : H_1)$ auf demselben Wege wie in der Zahlentheorie zu

$$(A_0 : H_1) = h_0 l^{d-o} (\eta' : \varepsilon^l),$$

---

1) Vgl. H. I. S. 23.

wo η' alle Einheiten von K bezeichnet, die Normenreste mod. $\mathfrak{f}$ sind. Weiter führt man den Index $(A_0 : A_0 \frown H_{\mathfrak{f}})$ nach bekanntem Schema zurück auf

$$(A_0 : A_0 \frown H_{\mathfrak{f}}) = \frac{(A : H_{\mathfrak{f}})}{c},$$

wo c der größte gemeinschaftliche Teiler der Ordnungen aller Divisoren aus $H_{\mathfrak{f}}$ ist. Hier ist aber $c = 1$, denn $\bar{A}$ enthält sicher einen Divisor der Ordnung 1 und die Relativnorm dieses Divisors besitzt wegen $\bar{k} = k$ in K ebenfalls die Ordnung 1. Da außerdem nach Satz 3 $(A : H_{\mathfrak{f}}) \leqq l$ ist, so hat man in diesem Fall

$$(3)\ h_0\, l^{d-(1+\varrho)} (\eta^* : \varepsilon^l) = (\bar{A}_0 : \bar{H}_1{}')$$
$$\geqq (\bar{A}_0 : \bar{H}_1) = h_0\, l^{d-(1+\varrho)} (\eta' : \varepsilon^l).$$

Nach Definition ist andererseits

$$(\eta^* : \varepsilon^l) \leqq (\eta' : \varepsilon^l).$$

Es muß daher in (3) überall das Gleichheitszeichen gelten, d. h. es ist

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_1{}' \text{ und } (A : H_{\mathfrak{f}}) = l.$$

Damit sind Satz 5 und 6 auch im Falle II bewiesen. Zugleich hat sich auch wie in der Zahlentheorie ergeben, daß $(\eta^* : \varepsilon^l) = (\eta' : \varepsilon^l)$ ist.

§ 4. Beendigung der Beweise.

Durch die Ergebnisse der vorangehenden Paragraphen ist der Beweis der Sätze I—V so weit vorbereitet, daß er nunmehr in engerem Anschluß an Takagi zu Ende geführt werden kann. Dabei hat man nur überall den Begriff der Idealgruppe, der bei Hasse auftritt, durch den Begriff der Divisorengruppe, wie wir ihn in § 1 einführten, zu ersetzen. Wir gehen im folgenden nur noch kurz auf die Hauptpunkte der Übertragung ein.

Zunächst leitet man Satz I, II, III für den Spezialfall einer Divisorengruppe H vom Primzahlindex l und eines Grundkörpers K her, der die l-ten Einheitswurzeln enthält.

Zu diesem Zwecke bestimmt man einerseits den Rang bezüglich l der Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{f}$ der Führer der gegebenen Divisorengruppe H ist, und erhält für ihn nach dem Vorbild von Hasse[1])

$$R(\mathfrak{f}) = P + m.$$

Dabei ist P die Zahl der verschiedenen in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primdivisoren und

$$l^m = (\omega : a'^l)$$

(ω zu $\mathfrak{f}$ prime l-te Potenzreste mod. $\mathfrak{f}$ aus K, deren Divisor gleichzeitig gleich der l-ten Potenz eines Divisors aus K ist, a' zu $\mathfrak{f}$ prime Elemente aus K).

Andererseits berechnet man den Index

$$(\mu : a^l)$$

(μ Elemente, deren Divisor höchstens die in $\mathfrak{f}$ auftretenden Primdivisoren mit zu l primem Exponenten enthält, a beliebige Elemente aus K). Man findet für ihn wieder nach Hasseschem Vorbild[2])

$$(\mu : a^l) = l^{P + m_1}.$$

Dabei hat P dieselbe Bedeutung wie früher, und es ist

$$l^{m_1} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{m}_1(a))$$

($\mathfrak{a}$ Divisoren in K, $\mathfrak{m}_1$ Divisoren aus K, die höchstens die in $\mathfrak{f}$ auftretenden Primdivisoren mit zu l primem Eponenten enthalten, (a) Hauptdivisoren aus K).

Aus diesen beiden Resultaten entnimmt man nach dem Vorbild von Hasse[3]), daß die Zahl aller Divisorengruppen vom Index l, deren Führer ein Teiler von $\mathfrak{f}$ ist, übereinstimmt mit der Zahl aller zyklischen Oberkörper vom Grade l über K, deren Diskriminante gleich der $(l-1)$-ten Potenz eines Teilers von $\mathfrak{f}$ ist, und damit auf Grund von § 3 den Beweis von I—III in dem angegebenen Spezialfall.

In völliger Übereinstimmung mit der Zahlentheorie ergibt sich nun weiter der Beweis von Satz I—III

im Falle einer Divisorengruppe H von Primzahlindex und beliebigem Grundkörper K,

1) Vgl. H. Ia. S. 284.
2) Vgl. H. Ia. S. 287.
3) Vgl. H. Ia. S. 288.

im Falle einer Divisorengruppe H mit zyklischer Faktorgruppe von Primzahlpotenzordnung,

im Falle einer beliebigen Divisorengruppe mit zu p_0 primem Index.

Ferner kann auch Satz V ausgehend von dem in § 3 behandelten Spezialfall durch vollständige Induktion auf den Fall eines zyklischen Körpers $\bar{K}/K$ von Primzahlpotenzgrad und weiter auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden. Dabei wird man ganz von selbst auf einige leichte Abweichungen von den zahlentheoretischen Schlußweisen geführt, die aber durch das in § 3 Gesagte bereits so nahe gelegt sind, daß es sich erübrigt, näher auf sie einzugehen.

Dasselbe gilt endlich von dem Beweis des Satzes IV, der genau nach zahlentheoretischem Muster erbracht wird.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1930

Band/Volume: 62

Autor(en)/Author(s): Schmidt Friedrich Karl

Artikel/Article: Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich. 267-284