Tonleitern, Tonarten und Tonsysteme.

Eine historisch-theoretische Untersuchung
von J. Würschmidt.

Inhaltsangabe.

Vorwort.

Den unmittelbaren Anlaß für die Abfassung des vorliegenden Werkchens bot das Erscheinen des Buches: „Ariel, Das Relativitätsprinzip der musikalischen Harmonie, Bd. 1, Die Gesetze der inneren Tonbewegungen, das evolutionäre Temperierungsverfahren und das 19-stufige Tonsystem“, Leipzig, Neunzehn-Stufen-Verlag, vor einigen Jahren, das den Verfasser veranlaßte, frühere Untersuchungen wiederaufzunehmen. Bereits im Jahre 1918 hatte er während eines längeren Aufenthaltes in der Türkei in der dortigen deutschen Tageszeitung „Osmanischer Lloyd“ auf die Unterschiede zwischen orientalischer und moderner abendländischer Musik hingewiesen und im Hinblick auf das tatsächliche Vorhandensein von Tonintervallen, die kleiner als unser „Halbton“ sind, vor allem betont, wie gerade da, wo die Harmonie, „ein in der westeuropäischen Musik wesentliches und unserem Geschmack unentbehrliches Verstärkungsmittel der melodischen Verwandtschaften“, fehlt, sich die Melodie und damit die weitere Differenzierung der Tonstufen umso weiter ausbilden konnte; auch das Abendland zeigte ja vor der Begründung der harmonischen Musik einen größeren Reichtum von Tonarten und Tonleitern, die heute zugunsten der beiden einzigen Systeme Dur und Moll verlassen sind. Studien zur Geschichte der arabischen Musik, die Herr Studienprofessor Dr. Wilhelm Müller auf Anregung von Herrn Geheimen Rat Prof. Dr. Eilhard Wiedemann und unter Mitwirkung des Verfassers unternahm, haben in der Folgezeit unsere bisherigen Kenntnisse von den bei den Arabern üblichen Tonsystemen wesentlich berichtigt und erweitert, indem sie nachwiesen, daß die Araber die Oktav in 19 und nicht, wie bisher angenommen, in 17 Stufen unterteilt haben. Das klassische Werk von H. von Helmholtz: „Die Lehre von den Tonempfindungen“, bot die geeignete Grundlage, auf der sich diese Spezialuntersuchung aufbauen mußte; die Notwendigkeit, sich von den Tonstufen der Araber und der Modernen eine anschauliche Vorstellung zu machen, führte zu der bekannten, aus dem Wesen der Tonintervalle fließenden, logarithmischen und graphischen Darstellung derselben, zu einer Untersuchung über die zweckmäßige Darstellung in anderen modernen Notenbezeichnungen und über das sogenannte, früher von A. von Oettingen angegebene „Tongewebe“. Da diese Ausführungen wesentlich physikalisches Interesse haben, wurden sie in der „Zeitschrift für Physik“ (1920) veröffentlicht.

Anschließend an diese Arbeiten wandte sich dann der Verfasser der Frage der Viertel- und Sechsteltonmusik zu und kam zu dem Ergebnis, daß eine temperierte Skala von Drittel-, Viertel- oder Sechsteltönen, also eine Teilung der Oktav in 18, 24 oder 36 Töne, keine wesentlichen Vorteile gegenüber unserer 12-stufigen Skala besitzt, indem gewisse Abweichungen unserer temperierten Zwölferskala gegenüber der reinen Stimmung durch die weitere Unterteilung nicht zum Verschwinden gebracht werden. Zugleich ergab sich, daß eine natürliche Erweiterung unseres Tonsystems in einer Einteilung der Oktav in 19 äquidistante Stufen bestehen müsse, und daß dieses System gegenüber dem 12-stufigen, verglichen mit der reinen Stimmung, gewisse Vorteile hat. Der Verfasser hat diese Untersuchungen in zwei sehr gedrängten, in der „Stuttgarter Neuen Musikzeitung“ erschienenen Aufsätzen (1921) zusammengefaßt.

Ariel, der Verfasser des anfänglich genannten Buches, kannte die letztgenannten Ausführungen nicht; er weist aber darauf hin, daß „die Idee einer gleichschwebenden 19-stufigen Temperatur bereits im Jahre 1852 in dem Werk: „Allgemeine Theorie der Musik auf den Rhythmus der Klangwellenpulse gegründet“ von F. W. Opelt (Leipzig, Joh. Ambr. Barth) ausgesprochen worden ist“. Das vorliegende Werkchen soll im ganzen keine Kritik des Arielschen Buches darstellen, da es prinzipiell andere Ziele verfolgt, nur in einem Punkte sei eine grundsätzlich abweichende Ansicht ausgesprochen. Es geht nach der Meinung des Verfassers nicht an, über die ganze bisherige Musiktheorie in Bausch und Bogen abzuurteilen, wie es Ariel tut. Sein vernichtendes Urteil könnte höchstens gegenüber einer Musiktheorie gelten, die nichts anderes kennt als das bereits temperierte 12-stufige System mit seinen enharmonischen Verwechslungen und alle feineren Unterschiede vernachlässigt. Die Arbeiten von Hauptmann, Helmholtz und Oettingen haben gezeigt, daß man auch mit unseren üblichen Notenbezeichnungen durch einfache Zusatzzeichen eine weitgehende Differenzierung der Tonsysteme durchführen und bequem darstellen kann; außerdem zeigte besonders die Darstellung von Helmholtz, wie notwendig und fruchtbar gerade die historische Betrachtungsweise ist.

Letztere ist auch nicht zu umgehen, wenn man fragt, in welchem Sinne eine mögliche Erweiterung unseres Tonsystemes sich vollziehen wird; denn die nämlichen inneren Gründe, die seinerzeit von der 5- und 7-stufigen Skala zu der heute üblichen Halbtonskala geführt haben, müssen auch für die Zukunft den Weg weisen.

Auf die Gefahr hin, manches in dem genannten Helmholtzschen Werke erwähnte, wenn auch in anderer Form und von anderem Gesichtspunkt aus, zu wiederholen, sei unter Benutzung der logarithmischen und graphischen Darstellung der Intervalle der Versuch gemacht, die inneren Gründe, oder sagen wir, die Gesetze aufzufinden, die zu dem sich allmählich vollziehenden Aufbau der Tonsysteme geführt haben, und die die Grundlage für eine durchaus mögliche Erweiterung unseres Tonsystems bieten müssen.

Manche Gedanken werden sich naturgemäß mit solchen des Arielschen Buches decken müssen; in der Art der Darstellung allerdings geht der Verfasser andere Wege und hofft, daß es nur zum Vorteil der Sache ist, sie von verschiedenen Seiten zu beleuchten. In manchen Punkten seien die von Ariel abweichenden Anschauungen rückhaltlos ausgesprochen.

Den Musikstudierenden hofft der Verfasser eine nicht unwichtige Ergänzung ihrer theoretischen und musikhistorischen Studien darzubieten.

Tucumán, Argentinien
Januar 1931. J. Würschmidt.

Erster Teil.

Die Eigenschaften der Klänge.

An den von den musikalischen Instrumenten hervorgebrachten Klängen stellen wir drei grundlegende Eigenschaften fest: 1. ihre Stärke (Intensität), 2. ihre Tonhöhe, 3. ihre Klangfarbe. Dabei verstehen wir unter „Klangfarbe“ „diejenige Eigentümlichkeit, wodurch sich der Klang einer Violine von dem einer Flöte oder einer Klarinette oder einer menschlichen Stimme unterscheidet, wenn alle dieselbe Note in derselben Tonhöhe hervorbringen.“

Am einfachsten ist das Wesen der ersten Eigenschaft, der Tonstärke, sowohl physikalisch als auch physiologisch und psychologisch zu erfassen. Physikalisch erkennen wir, daß die Tonstärke mit der Breite (Amplitude) der Schwingungen des tönenden Körpers, z. B. einer Saite oder einer Stimmgabel, wächst oder abnimmt, daß sie ferner mit der Entfernung von dem tönenden Körper sich verringert, indem mit wachsender Entfernung die Amplitude der schwingenden Luftmassen abnimmt. Ertönt derselbe Klang in verschiedenen Stärkegraden, so hat das Ohr eine entsprechende einfache Empfindung derselben; „die verschiedenen Stärkegrade sind in einer eindimensionalen Geraden adäquat darstellbar.“ Für Töne verschiedener Höhe allerdings hat das menschliche Ohr verschiedene Empfindlichkeit, sodaß ein für verschiedene Tonhöhen gültiges Maß der Intensität der Empfindung nicht gewonnen werden kann.“

Was die zweite Eigenschaft, die Tonhöhe, betrifft, so hat die Physik gezeigt, daß die durch einen tönenden Körper hervorgerufenen Luftbewegungen periodisch sein müssen, wenn sie die Empfindung eines musikalischen Klanges im Ohr erregen sollen, und daß zwei Klänge gleiche Tonhöhe haben, wenn die Dauer einer Periode die gleiche ist. Also hängt die Tonhöhe physikalisch von der Schwingungsdauer, oder, was dasselbe ausdrückt, von der Zahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, d. h. der Sekunde, ab. Mit der Zahl der Schwingungen wächst die Tonhöhe; die Physik liefert verschiedene Mittel, die Schwingungszahlen und damit die Tonhöhen genau zu bestimmen.

Auch der naive Beobachter, der nichts von den Schwingungszahlen weiß, wird doch, falls ihm eine Reihe von Tönen verschiedener Tonhöhe dargeboten wird, dieselben in einer Qualitätenreihe, einer „Leiter“, anordnen, die vollkommen der Ordnung nach den Schwingungszahlen entspricht, vorausgesetzt, daß nicht Töne in der Reihe sind, die durch das Ohr nicht mehr als verschieden erkannt werden können. Diese Regel kann aber folgende Ausnahme erleiden: der Beobachter wird etwa zwei Töne als identisch erklären, die in der Reihe der

Schwingungszahlen relativ weit auseinander stehen; es zeigt sich, daß dies Töne sind, deren Schwingungszahlen sich wie 2 zu 1 verhalten. Und selbst wenn er solche Töne nicht geradezu für identisch erklärt, so besteht doch zum mindesten die Neigung, solche Töne als „nahe verwandt“ zu bezeichnen, ungeachtet ihres größeren Abstandes in der „Skala“. Den „Abstand“ zweier Töne in der Tonskala, deren Schwingungszahlen sich wie 2 zu 1 verhalten, bezeichnen wir als „Oktav“, ohne zunächst mit diesem Wort die im Wortsinn liegende Bedeutung zu verknüpfen. Alle Töne, die musikalisch brauchbar sind, haben Schwingungszahlen etwa zwischen 40 und 4000; die musikalische Skala umfaßt daher etwa 7 Oktaven; denn die erste Oktav nach aufwärts führt von 40 nach $2 \cdot 40 = 80$, die zweite nach $2^2 \cdot 40 = 160$, usw., die sechste nach $2^6 \cdot 40 = 2560$, die siebte nach $2^7 \cdot 40 = 5120$, d. h. über 4000 hinaus.

Stellen wir uns nun den „Abstand“ einer Oktav durch eine bestimmte Länge dar, so entspricht die ganze musikalische Skala etwa dem siebenfachen dieser Länge. Hat ein Ton eine bestimmte Schwingungszahl, z. B. n, so entspricht ihm auf der Skala ein bestimmter Punkt, z. B. 0; die Oktav von n hat die Schwingungszahl 2n und wird durch den Punkt rechts von 0 im Abstand A dargestellt, für die Oktav der Oktav hat man 4n und 2A usf., für die Oktav nach unten $\frac{n}{2}$ und —A. Vgl. Fig. 1.

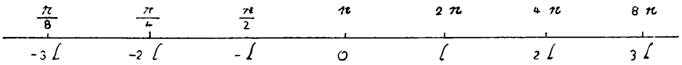


Fig. 1. Die musikalische Skala.

Man sieht, daß die Abstände auf der Skala nach der Reihe der ganzen Zahlen, also nach einer arithmetischen Reihe, fortschreiten, während die Schwingungszahlverhältnisse nach der Reihe 2, 4, 8, 16 oder 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, also nach einer geometrischen Reihe, ansteigen; die einander zugeordneten Zahlen sind

$$\begin{array}{cccccccc} 2^{-3} & 2^{-2} & 2^{-1} & 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

d. h. die untere Reihe der Abstände, die das Intervall von 1, 2, 3 Oktaven darstellen, ist identisch mit der Reihe der Exponenten der Zahl 2 in der oberen Reihe. Setzen wir also die Länge A, die den Abstand einer Oktav darstellt, gleich, oder, da der Maßstab beliebig ist, proportional dem Logarithmus von 2, so ist, da der Logarithmus des Verhältnisses zweier Zahlen gleich der Differenz der Logarithmen der beiden Zahlen ist, der Logarithmus des jeweiligen Verhältnisses der Schwingungszahlen gleich oder proportional dem „Abstand“ der beiden Grenzpunkte des Intervalls. Die Basis des gewählten Logarithmensystems ist beliebig, es ist jedoch wegen des Gebrauchs der üblichen Tafeln bequem, die Basis 10 zu wählen. Der Abstand einer Oktav soll also der Strecke von 0,30103 (= log 2) willkürlich zu wählenden Einheiten, z. B. der Strecke 30,103 cm entsprechen; einem Schwingungsverhältnis $n_1 : n_2$ entsprechen dann $(\log n_1 - \log n_2)$ Einheiten.

Für die graphische Darstellung wird man also der Oktav 30,1 cm (oder einen beliebigen Bruchteil dieses Wertes) entsprechen lassen; in der Rechnung läßt man das Komma fort und nennt den der Oktav entsprechenden Abstand 30103 log. Einh.; einem Schwingungsverhältnis 3 : 2 wird demnach der Abstand 17609 zugeordnet, da $\log 3 - \log 2 = 0{,}47712 - 0{,}30103 = 0{,}17609$.

Natürlich steht es auch frei, der Oktav statt des Abstandes 30103 einen anderen Zahlenwert, z. B. 1000 zuzuordnen; dann entspricht dem Schwingungsverhältnis $n_1 : n_2$ der Abstand $\frac{1000}{30103}(\log n_1 - \log n_2)$, also z. B. dem Schwingungsverhältnis 3 : 2 der Wert 585. Diese Einheiten werden wir als „Millioktaven“ bezeichnen.

Die logarithmische und graphische Darstellung der musikalischen Intervalle gibt uns ein bequemes Mittel an die Hand, dieselben unabhängig von den in der Musiklehre üblichen und z. T. nicht ganz feststehenden Bezeichnungen zu klassifizieren und zu vergleichen; solange es sich nicht um außerordentlich kleine Intervalle handelt, werden wir im folgenden von der Einteilung in Millioktaven Gebrauch machen, gelegentlich aber auch die logarithmischen Einheiten benutzen. Letztere hat den Vorzug, daß sich die Werte unmittelbar aus der Logarithmentafel ergeben, bei Benutzung der Millioktaventeilung vollzieht sich das Zu- und Abzählen einer oder mehrerer Oktaven in besonders einfacher Weise.

Betrachten wir zum Schluß das dritte Kennzeichen eines Klanges, die Klangfarbe, so hat Helmholtz nachgewiesen, daß mit den Tönen der musikalischen Instrumente, d. h. mit dem durch eine bestimmte Schwingungszahl n gekennzeichneten Ton, sogenannte Obertöne verbunden sind; nur wenige Instrumente, wie z. B. die vor eine Resonanzröhre gebrachte Stimmgabel liefern reine Töne ohne Obertöne. Die Klänge, die wir als die eigentlich musikalischen charakterisieren, enthalten als Obertöne zum Ton mit der Schwingungszahl n die Töne mit den Schwingungszahlen 2n, 3n, 4n usw.; wir bezeichnen sie als harmonische Obertöne des Grundtones n. Die Ordnungszahl eines jeden Obertones gibt an, wievielmal so groß seine Schwingungszahl ist als die des Grundtones. Die Intensität der Obertöne nimmt im allgemeinen mit steigender Ordnungszahl ab und ist bei den einzelnen Musikinstrumenten ganz verschieden, bei den Streichinstrumenten ist z. B. der Grundton verhältnismäßig kräftiger als bei der geschlagenen oder gerissenen Saite des Klaviers oder der Guitarre, die ersten Obertöne sind verhältnismäßig schwächer, dagegen sind die höheren Obertöne vom 6. bis zum 10. viel deutlicher und verursachen die Schärfe des Klanges der Streichinstrumente. Dagegen erzeugen der menschliche Mund beim Pfeifen und die Flöte der Orgel Töne, die dem einfachen Ton sehr nahe stehen.

Nicht eigentlich zu den musikalischen Klängen gehören die, deren Obertöne unharmonisch zum Grundton sind, die nur dann ausnahmsweise in der künstlerischen Musik Verwendung finden, wenn der Grundton weit intensiver ist als die Obertöne.

Die Obertöne der eigentlichen musikalischen Klänge, d. h. die mit den Schwingungsverhältnissen 2, 3, 4 usw., bezeichneten wir als harmonische; es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß im Sinne von Helmholtz dieser Reihe der harmonischen Obertöne alle mit den Schwingungsverhältnissen der ganzen Zahlen angehören, nicht nur diejenigen, die in einem später zu besprechenden Sinne harmonisch zum Grundton sind.

Bezeichnen wir einen gegebenen Grundton mit der Schwingungszahl n mit c, so ist der 2. Oberton seine Oktav mit der Schwingungszahl 2n; er sei mit c′ bezeichnet. Die Obertöne von c und c′ sind demnach:

c :	n	2n	3n	4n	5n	6n	7n	8n	9n
c′ :		2n		4n		6n		8n	

d. h. Grundton und Oktav haben die geraden Obertöne gemeinsam. Die innige Verschmelzung, die bei dem Zusammenklingen von Grundton und Oktav beobachtet wird, erklärt sich nach Helmholtz aus der Tatsache der vielen gemeinsamen Obertöne, indem zwei Klänge umso ähnlicher, umso näher verwandt sind, je mehr gemeinsame Obertöne sie haben. In diesem Sinne sind die nach der Oktav nächstverwandten diejenigen, die im Schwingungsverhältnis 3 : 2 stehen — man nennt das hierdurch definierte Intervall eine Quint —, indem der 3. Oberton des Grundtones gleich dem 2. Oberton seiner Quint, der 6. des Grundtones gleich dem 4. der Quint ist usf.

Wenn nun auch diese Erklärung der Klangverwandtschaft aus den Obertönen für eigentliche Klänge möglich wäre, so ist aber doch zu beachten, daß auch bei eigentlichen Tönen, d. h. wenn gar keine Obertöne vorhanden sind, eine Verschmelzung, mit Sicherheit bei Grundton und Oktav, sowie bei Grundton und Quint, zweifellos eintritt; die Tonverwandtschaft allein kann also zur Erklärung des Phänomens nicht genügen. Auch die Zurückführung des Wesens der Verschmelzung auf die Freiheit des Zusammenklanges von Schwebungen, die Helmholtz in seinem genannten Werke in geistvollster Weise durchführt, kann nicht vollständig genügen, seit C. Stumpf[1]) nachgewiesen hat, daß es schwebungsfreie Dissonanzen und von Schwebungen begleitete Konsonanzen gibt. Wir schließen uns daher der Ansicht von Stumpf an, der in der Verschmelzung eine letzte psychologische Tatsache erblickt, die höchstens eine weitere physiologische Erklärung zuläßt, indem vermutlich stärker verschmelzenden Tönen einheitlichere physiologische Vorgänge entsprechen, die darum auch einen einheitlicheren psychischen Vorgang bedingen.

Die Untersuchungen von Helmholtz über Konsonanz und Dissonanz behalten jedoch insofern ihre Bedeutung, als sie zeigen, daß von den vollkommensten Konsonanzen zu den entschiedenen Dissonanzen hin eine Reihe von Stufen existiert, von Zusammenklängen, die immer rauher und rauher werden.

---

1) C. Stumpf, Tonpsychologie, 2 Bde., 1883—1890.

Ohne zunächst auf den Grad der Konsonanz und Dissonanz näher einzugehen, untersuchen wir zunächst, welche natürlichen Intervalle sich aus der Natur der harmonischen Obertöne ergeben.

Zweiter Teil.

Die natürlichen Intervalle.

Indem wir uns auf die ersten 10 Obertöne beschränken, gehen wir folgendermaßen vor:

Oktav (2 : 1) und Quint (3 : 2) sind uns bereits bekannt; ihre Abstände sind 30103 bezw. 17609, oder in Millioktaven 1000 und 585.

Der 4. Oberton bildet mit den vorhergehenden die Schwingungsverhältnisse 4 : 3, 4 : 2 und 4 : 1; von ihnen ist nur das erste neu und wird als Quart bezeichnet (Abstand 12494 [415]), das zweite ist die Oktav und das dritte die Doppeloktav.

Der 5. Oberton ergibt 5 : 4, 5 : 3, 5 : 2 und 5 : 1. Das Intervall 5 : 4 wird als große Terz bezeichnet und hat den Abstand 9691 [322]; das zweite Intervall 5 : 3 heißt große Sext und hat den Abstand 22185 [737]. Das 3. Intervall ist, da $\frac{5}{2} = 2 \cdot \frac{5}{4}$, nichts anderes als die Oktav der großen Terz und das 4. ist die Doppeloktav der großen Terz. Im allgemeinen brauchen wir alle Schwingungsverhältnisse, deren Wert größer als 2 ist, nicht weiter zu untersuchen, da sie keine neuen Intervalle innerhalb der Oktav liefern können.

Der 6. Oberton ergibt die Schwingungsverhältnisse 6 : 5 und 6 : 4, von denen nur das erste neu ist und als kleine Terz bezeichnet wird. Abstand: 7918 [263]; das zweite ist ja die Quint.

Der 7. Oberton ergibt 7 : 6, 7 : 5 und 7 : 4 d. h. drei neue Intervalle. Das 7 : 6 entsprechende heißt verminderte Terz und hat den Abstand 6695 [222]; das 7 : 5 entsprechende verminderte Quint; Abstand 14613 [485]; endlich das 7 : 4 entsprechende verminderte Septim; Abstand 24304 [807].

Der 8. Oberton gibt 8 : 7, 8 : 6 und 8 : 5, von denen 8 : 6 gleich der Quart ist. Das 8 : 7 entsprechende Intervall heißt übermäßige Sekund und hat den Abstand 5799 [193], während das 8:5 entsprechende kleine Sext genannt wird und den Abstand 20412 hat [678].

Der 9. Oberton ergibt 9:8, 9:7, 9:6 und 9:5, von denen wir 9:6, die Quint, schon kennen. Das 9:8 entsprechende Intervall wird als großer Ganzton oder Sekund bezeichnet und hat den Abstand 5115 [170]; das 9:7 entsprechende Intervall ist die übermäßige Terz mit dem Abstand 10914 [363], und das 9:5 entsprechende Intervall heißt weitere kleine Septim, mit dem Abstand 25527 [848].

Der 10. Oberton endlich liefert 10:9, 10:8, 10:7 und 10:6, von denen wir 10:8, die große Terz, und 10:6, die große Sext, schon kennen; dem Wert 10:9 entspricht das kleiner Ganzton genannte Intervall mit dem Abstand 4576 [152]; 10:7 entspricht die übermäßige Quart mit dem Abstand 15490 [515].

Mit jedem so bestimmten, innerhalb der Oktav gelegenen Intervall bestimmt sich gleichzeitig ein zweites, nämlich seine Ergänzung zur Oktav; in der folgenden Uebersicht haben wir alle gefundenen Intervalle samt ihren Ergänzungen geordnet und die entsprechenden Bezeichnungen beigefügt; die Abstände sind in Millioktaven angegeben.

Tafel 1.

Natürliche Intervalle.

Schw.-Verh.	Abst.	Bezeichn.	Schw.-Verh.	Abst.	Bezeichn.
1:1	0	Einklang	2:1	1000	Oktav
10:9	152	Kl. Ganzton	9:5	848	W. kl. Septim
9:8	170	Gr. Ganzton	16:9	830	E. kl. Septim
8:7	193	Ü. Sekund	7:4	807	Verm. Septim
7:6	222	Verm. Terz	12:7	778	Ü. Sext
6:5	263	Kl. Terz	5:3	737	Gr. Sext
5:4	322	Gr. Terz	8:5	678	Kl. Sext
9:7	363	Ü. Terz	14:9	637	Verm. Sext
4:3	415	Quart	3:2	585	Quint
7:5	485	Verm. Quint	10:7	515	Ü. Quart

Fig. 2 gibt eine graphische Darstellung dieser Intervalle; hierbei haben wir den Intervallen entsprechende römische Zahlen beigefügt. Das System ist natürlich vollkommen symmetrisch: Sekund und Septim kommen in 3 Formen vor, Terz und Sext in 4 Formen, Quart und Quint in 2 Formen. Zugleich sieht man, daß die Oktav in mehr oder minder ungleiche Intervalle geteilt wird;

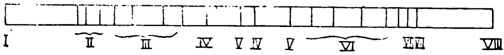


Fig. 2. Natürliche Intervalle.

besonders fällt auf, daß das Intervall zwischen Grundton (bezw. Oktav) und dem nächsten Ton nach oben (bezw. unten) relativ groß ist. Durch Hinzunehmen weiterer Obertöne würde sich dieses Intervall zwar allmählich, aber nur sehr wenig, entsprechend der Reihe 11:10, 12:11 usf., verkleinern, im übrigen aber würden sich die inneren Intervalle immer stärker unterteilen und das System bald sehr unübersichtlich werden.

Ferner sieht man, daß verschiedene dieser Intervalle auch ohne Zuhilfenahme der entsprechenden Obertöne auf einfachere zurückgeführt werden können, so ist z. B. $\frac{10}{9} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3} : \frac{3}{2}$, d. h. der kleine Ganzton ist gleich der Differenz von großer Sext und Quint; oder ferner ist $\frac{9}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3}$, d. h. der große Ganzton ist gleich der Differenz von Quint und Quart, oder, da die Quart gleich der Differenz von Oktav und Quint ist, so folgt:

$$\begin{aligned}\text{Großer Ganzton} &= \text{Quint} - (\text{Oktav} - \text{Quint}) \\ &= 2 \text{ Quinten} - \text{Oktav}\end{aligned}$$

oder in Zahlwerten:

$$170 = 2 \cdot 585 - 1000.$$

Man sieht leicht ein, daß alle in der Tafel 1 enthaltenen Intervalle aus den 4 einfachen Intervallen:

Oktav	2 : 1	o
Quint	3 : 2	q
Gr. Terz	5 : 4	t
V. Terz	7 : 6	τ

zusammengesetzt sind. Wir erhalten die Art der Zusammensetzung leicht dadurch, daß wir die Zahlenverhältnisse als

Brüche anschreiben, die Faktorenzerlegung in Zähler und Nenner vornehmen und die Brüche derart umstellen, daß nur Produkte und Quotienten von $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$ und $\frac{7}{6}$ auftreten. So ergibt sich für die zusammengesetzten Intervalle von Tafel 1:

Quart	: $\frac{4}{3} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}$	$= \frac{2}{1} : \frac{3}{2}$	$o - q$
Gr. Sext	: $\frac{5}{3} = \frac{5\cdot 2}{2\cdot 3}$	$= \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$	$o + t - q$
Kl. Terz	: $\frac{6}{5} = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 5}$	$= \frac{3}{2} : \frac{5}{4}$	$q - t$
V. Quint	: $\frac{7}{5} = \frac{7\cdot 6}{6\cdot 5}$	$= \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{2} : \frac{5}{4}$	$\tau + q - t$
V. Septim	: $\frac{7}{4} = \frac{7\cdot 3}{6\cdot 2}$	$= \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{2}$	$\tau + q$
Ü. Sekund	: $\frac{8}{7} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 7}$	$= \frac{2}{1} : \frac{7}{6} : \frac{3}{2}$	$o - \tau - q$
Kl. Sext	: $\frac{8}{5} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}$	$= \frac{2}{1} : \frac{5}{4}$	$o - t$
Gr. Ganzton	: $\frac{9}{8} = \frac{3\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2}$	$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \frac{2}{1}$	$2q - o$
Ü. Terz	: $\frac{9}{7} = \frac{3\cdot 6}{2\cdot 7}$	$= \frac{3}{2} : \frac{7}{6}$	$q - \tau$
W. kl. Sept.	: $\frac{9}{5} = \frac{3\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 5}$	$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \frac{5}{4}$	$2q - t$
Kl. Ganzton	: $\frac{10}{9} = \frac{2\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 2}$	$= \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} : \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$o + t - 2q$
Ü. Quart	: $\frac{10}{7} = \frac{2\cdot 5}{1\cdot 7}$	$= \frac{2}{1} : \frac{7}{6} : \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$	$o - \tau - q + t$
Ü. Sext	: $\frac{12}{7} = \frac{2\cdot 6}{1\cdot 7}$	$= \frac{2}{1} : \frac{7}{6}$	$o - \tau$
V. Sext	: $\frac{14}{9} = \frac{2\cdot 7}{1\cdot 9}$	$= \frac{2}{1} : \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6}$	$o - q + \tau$
E. kl. Sept.	: $\frac{16}{9} = \frac{2\cdot 8}{1\cdot 9}$	$= \frac{2}{1} : \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{1}$	$2o - 2q$

Das nächste einfache Intervall, das aus den höheren Obertönen zur Bildung neuer herangezogen werden müßte, wäre $\frac{11}{10}$, dann käme $\frac{13}{12}$; allgemein sind die einfachen Intervalle von der Form $\frac{p}{p-1}$, wobei p eine Primzahl ist.

Nun erhebt sich die Frage, wo die Beschränkung der nötigen, d. h. heranzuziehenden einfachen Intervalle eintreten soll, m. a. W., ob z. B. unser viertes einfaches Intervall noch zur Intervallbildung benutzt werden soll oder nicht. Nach der Ansicht Ariels ist 7 : 6 kein musikalisches Intervall, ja „überhaupt keine Musik"; er stellt das Axiom auf, daß die gesamte musikalische Harmonie auf den 3 ersten Grundintervallen beruht, und daß jegliches Zahlenverhältnis, das ein musikalisches Intervall ausdrückt, durch die drei Zahlen 2, 3, und 5 darstellbar sein muss.

Demgegenüber ist folgendes zu bemerken. Wenn man die verminderte Terz 7 : 6 nicht als musikalisches Intervall betrachtet, so sind natürlich auch die von ihr abgeleiteten Intervalle keine musikalischen mehr, insbesondere auch nicht die verminderte Septim 7 : 4. Von dieser aber gilt nach Helmholtz[1]): „Die verminderte Septim 7 : 4 ist an Wohlklang sehr häufig der kleinen Sext (die als Ergänzungsintervall des Grundintervalles große Terz unbestritten ein musikalisches Intervall ist) überlegen, nämlich immer dann, wenn der 3. Partialton des Klanges verglichen mit dem zweiten verhältnismäßig stark ist. Aber diese verminderte Septim bringt, mit anderen Konsonanzen zu Akkorden verbunden, lauter schlechtere Intervalle hervor als sie selbst ist, 6 : 7, 5 : 7, 7 : 8 usw. und wird deshalb in der heutigen Musik nicht als Konsonanz gebraucht." Es sind also reine Zweckmäßigkeitsgründe, wenn wir uns in der Wahl der Grundintervalle auf die drei ersten beschränken. Man könnte ebensogut nur die beiden ersten Grundintervalle benutzen und die große Terz nicht mehr als Konsonanz betrachten; und die Musikgeschichte zeigt, daß früher, wenigstens theoretisch, weder Sexten noch Terzen als Konsonanzen anerkannt worden waren.

---

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 371.

Helmholtz[1]) selbst teilt die Konsonanzen mit Recht folgendermaßen ein:

1. Absolute Konsonanz : Oktav
2. Vollkommene Konsonanzen: Quint und Quart
3. Mittlere Konsonanzen : Gr. Sext und gr. Terz
4. Unvollk. Konsonanzen : Kl. Sext und kl. Terz

und fährt fort: „Von ihnen ist die Quart sowie die kleine Sext und kleine Terz nicht selbständig bestimmt, indem sie die Ergänzungsintervalle der Quint, großen Terz und großen Sext zur Oktav darstellen. Besonders die beiden unvollkommenen Konsonanzen verdanken ihren Vorzug als Konsonanzen vor manchen anderen Intervallen, die an der Grenze zwischen Konsonanzen und Dissonanzen stehen, wesentlich dem Umstand, daß sie notwendig sind in der Akkordbildung als Ergänzungen der großen Sext und Terz zur Oktav und Quint.“

Ferner ist noch folgendes zu beachten. Wenn, wie Ariel meint, das Intervall $\frac{7}{6}$ kein musikalisches Intervall mehr sein soll, so wäre auch ein aus den Grundeinheiten $\frac{2}{1}$ und $\frac{3}{2}$ gebildetes Intervall, das $\frac{7}{6}$ mit beliebiger Genauigkeit annähert, keines mehr. Nun können wir den Bruch $\frac{7}{6}$ recht genau durch $\frac{2^{2770}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{4735}}$ annähern, d. h. wir können das Intervall durch Aufwärtsgehen um 2770 Oktaven und Abwärtsgehen um 4735 Quinten so genau darstellen, daß in unseren 6-stelligen Logarithmen die Differenz der beiden Abstände verschwindet. (Es ist log $\frac{7}{6} = 0{,}06695$ und $2770 \cdot \log 2 - 4735 \cdot \log \frac{3}{2} = 0{,}06695$.) Ist also der nur aus Quinten- und Oktavenschritten gebildete Wert nach Ariel ein musikalisches Intervall — die Zahl der Schritte darf keine Rolle spielen —, so soll das mit ihm bis auf weniger als eine log. Einheit übereinstimmende Intervall $\frac{7}{6}$ keines mehr

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 320.

sein? Hierbei ist noch zu betonen, daß der kleinste in der eingeschriebenen Oktav noch unterscheidbare Abstand zweier Tonhöhen 49 log. Einheiten beträgt[1]), während wir die Annäherung bis auf weniger als eine Einheit getrieben haben. Ja schon ein Aufwärtsschreiten um 40 Oktaven und ein Abwärtsschreiten um 68 Quinten liefert ein Intervall, dessen Abstand nur um 13 log. Einheiten höher liegt als der von $\frac{7}{6}$; also wären die beiden Intervalle nicht mehr zu unterscheiden.

In welcher Weise man nun entweder die ersten zwei oder die ersten drei Grundintervalle benutzt, um durch ihre Kombination neue Intervalle zu bilden, die in ihrer Gesamtheit „Tonsysteme“ oder nach ihrer Größe geordnet „Tonleitern“ darstellen, soll, unter Berücksichtigung der historischen Entwicklung, im folgenden geschildert werden.

Dritter Teil.

Fünfstufige Skalen.

„Die Verwandtschaft der Quinte und der durch ihre Umkehrung gewonnenen Quarte mit dem Grundton ist so groß, daß sie sich in allen bekannten Musiksystemen der Völker geltend macht; bezüglich der Terz dagegen zeigt sich ein Schwanken, ob man sie zur Tonbildung mit heranziehen soll oder nicht[2])“. Dementsprechend sind die einfachsten, d. h. sich mit einer möglichst kleinen Zahl von Tönen begnügenden „Tonleitern“ entweder auf Grund der reinen Quintenstimmung oder auf Grund kombinierter Quinten- und Terzenstimmung durchgeführt. Bevor wir die von Helmholtz gegebenen Beispiele unter diesem Gesichtspunkt betrachten, erhebt sich die Frage, nach der Mindestzahl der Töne in einer Tonleiter.

Wenn, wie wohl nicht zu bezweifeln, die einstimmige (homophone) Musik die ursprüngliche gewesen ist, und diese in Verbindung mit der Poesie und unter Begleitung eines Musikinstrumentes, wie der Lyra der Griechen, sich zuerst ausgebildet

---

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 507; Grenze ist das Intervall $\frac{886}{885}$; $\log \frac{886}{885} = 0{,}00049$.

2) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 422.

hat, so erhebt sich die Vorfrage, welche Verbindung besteht zwischen den am nächsten verwandten Tönen, nach denen wir die Saiten, z. B. der Lyra, stimmen können, und den Intervallen des natürlichen Sprechgesanges? Für die Saiten ergibt sich als nächstverwandter Ton zu einem gegebenen Grundton neben dessen Oktav die Quint nach aufwärts, dann die Quint nach abwärts, die, in das Intervall Grundton-Oktav zurückverlegt, der Quart nach aufwärts entspricht. So haben wir, wenn wir den Grundton mit c, seine Oktav mit c′, die Quart mit f und die Quint mit g bezeichnen[1]), die Tonfolge:

c f g c′.

Die Intervalle Quart nach abwärts am Ende eines bejahenden Satzes, Quint nach aufwärts am Ende eines Fragesatzes sind aber die Intervalle des natürlichen Sprechgesanges; die obige Tonfolge soll nach Boethius die älteste Stimmung der griechischen Lyra zu den Zeiten des Orpheus gewesen sein.

Können wir nun auch das Schema c — f — g — c′ mit den Intervallen Quart — Gr. Ganzton — Quart (415 — 170 — 415) noch nicht als „Tonleiter“ bezeichnen, so können wir wohl von einer solchen sprechen, wenn wir die großen Intervalle c — f, g — c′ in irgend einer Weise durch je einen Zwischenton ausfüllen. Dann erhalten wir die 5-stufige Skala, wie sie in der Tat bei den verschiedensten Völkern auftritt; nur die Art ihrer Bildung und damit die Abstände der Stufen sind verschieden.

Helmholtz[2]) sucht die Art ihrer Bildung aus der Tonverwandtschaft abzuleiten, indem er zunächst die auf einem beliebigen Grundton, z. B. c, der Tonika, aufgebauten Intervalle nach ihrer Verwandtschaft ersten Grades zum Grundton in auf- und absteigender Reihe ordnet. Diese Tonverwandtschaft ersten Grades, die sich, wie oben ausgeführt, auf die gemeinsamen

---

1) Wir verwenden die Tonbezeichnung die allgemein übliche mit dem einzigen Unterschied, daß wir dem Vorbild v. Öttingens folgend, b an Stelle von h, also bes an Stelle von b schreiben. Der Leser möge die anfänglich ungewohnten Bezeichnungen b, bes, beses, bis, bisis ruhig annehmen; er wird sich schnell an sie gewöhnen, da sie den Vorzug der konsequenten Wortbildung zur Tonbezeichnung besitzt, was für die Bildung h, b, bb, his, hisis, verglichen mit den übrigen Bildungen, nicht zutrifft.

2) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 392.

Obertöne der musikalischen Klänge gründet, liefert die folgenden Reihen:

aufwärts:	c	c′	g	f	a	e	es
	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$
abwärts:	c	C	F	G	Es	As	A
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

Nach Helmholtz[1]) benutzt man nun zur Bildung der Leiter zunächst die Töne nach abnehmender Verwandtschaft, bis man zu einem Ton kommt, der einem vorhergehenden sehr nahe steht, indem in den ersten Entwicklungsstadien der Musik „man sich scheut, engere Intervalle als den Ganzton zu benutzen“. Da in der aufsteigenden Reihe e dem f, in der absteigenden As dem G sehr nahe steht, bricht man die aufsteigende Reihe mit a, die absteigende mit Es ab und ergänzt die in den Skalen bleibenden großen Lücken willkürlich durch Verwandte zweiten Grades. Seine fünf verschiedenen Arten der 5-stufigen Skala sind, mit c als Grundton, die der Tafel 2.

Tafel 2.

Fünfstufige Leitern.

1.	c		d		f		g		a		c′
	$\frac{1}{1}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{2}{1}$
		170		245		170		152		263	

2.	c		es		f		g		bes		c′
	$\frac{1}{1}$		$\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{16}{9}$		$\frac{2}{1}$
		263		152		170		245		170	

3.	c		d		f		g		bes		c′
	$\frac{1}{1}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{16}{9}$		$\frac{2}{1}$
		170		245		170		245		170	

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 426.

4.	c	d	e	g	a	c′
	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$
	170	152	263	152	263	

5.	c	es	f	as	bes	c′
	$\frac{1}{1}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{2}{1}$
	263	152	263	152	170	

Wie man sieht, ist obiges Bildungsschema streng durchgeführt bei 1.: aufsteigende Reihe c f g a c′ mit Ausfüllung des großen Intervalls c — f durch d; ferner bei 2.: absteigende Reihe c es f g c′ mit Ausfüllung des großen Intervalles g — c′ durch bes; bei der Leiter 3. erscheint das ursprüngliche Schema c — f — g — c′ und werden die zwei Verwandten zweiten Grades zum Ausfüllen benutzt; Leiter 4. und 5. entbehren jeweils der wichtigen Töne f bezw. g des Grundschemas.

Von diesen fünf Leitern finden sich die vier ersten unzweifelhaft in altchinesischen und schottischen Melodien angewandt, während Melodien, die der 5. Leiter (ohne Sekund und Quint) ganz rein angehörten, von Helmholtz nicht gefunden wurden, indem entweder die Quint oder die kleine Sekund wenigstens flüchtig berührt wurden. Selbst bei dem einen von ihm angeführten Beispiel wäre eine andere Ableitung der Skala unter Annahme einer anderen Tonika nicht ausgeschlossen.

Merkwürdigerweise fand Helmholtz eine Leiter nirgends gebraucht, bei der nur Verwandte ersten Grades benutzt wären, nämlich die folgende, die wir als sechste bezeichnen wollen:

6.	c	es	f	g	a	c′
	$\frac{1}{1}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$
	263	152	170	152	263	

Gerade das Nichtvorkommen dieser Leiter, die von allen am symmetrischten gebaut ist, scheint darauf hinzuweisen, daß zur Bildung der Leitern nicht das Prinzip der Tonverwandtschaft im Helmholtzschen Sinne, sondern das Prinzip der Verschmelzung verwandt worden ist: m. a. W. die Leitern entstehen durch Stimmung der Musikinstrumente nach denjenigen Konsonanzen, bei denen die Verschmelzung eine möglichst vollkommene wird, also nach den Konsonanzen, die wir früher als Grundintervalle bezeichnet haben. Das vierte Grundintervall scheidet nach dem oben bemerkten aus; es bleiben also zur Tonbildung neben der Oktav noch die *Quint* und die *große Terz* übrig; ob man nur Quinten zulassen oder auch große Terzen verwenden will, ist Geschmackssache, ebenso, ob man die große Terz *theoretisch* als Konsonanz bezeichnen will oder nicht.

Zugleich aber kommt bei der Bildung der fünfstufigen, wie auch aller höherstufigen Leitern als zweites Prinzip hinzu: die Scheu vor allzukleinen Intervallen, oder, positiv ausgedrückt, das *Bestreben einer möglichst gleichmäßigen Einteilung* der Oktav in 5 Teile; dieses Prinzip führt natürlich in seinen letzten Konsequenzen zu den gleichmäßig temperierten Skalen.

So können wir die fünfstufigen Skalen zunächst in zwei Gruppen einteilen: I. Reine Quintenskalen, II. Quinten-Terzen-Skalen.

Der ersten Gruppe gehört einzig die Leiter 3 der Tafel 2 an, indem nämlich von c aus die Quint und die Quintenquint sowohl nach oben als auch nach unten gebildet wird und der letztere Ton durch den entsprechenden Oktavenschritt in die Oktav zurückgeholt wird. Wenn wir das Fortschreiten um eine Quint nach oben durch einen Schritt nach rechts bezeichnen, so ist Leiter 3 durch das Schema gegeben:

$$\begin{array}{lccccccccc}
3. & \text{bes} & \longleftarrow & \text{f} & \longleftarrow & \text{c} & \longrightarrow & \text{g} & \longrightarrow & \text{d} \\
 & -1170 & & -585 & & 0 & & 585 & & 1170 \\
= & -170 & & 415 & & & & -415 & & 170 \\
 & & 585 & & 585 & & 585 & & 585 &
\end{array}$$

Natürlich könnte man auch durch Fortschreiten nur nach oben zu einer 5-stimmigen Skala kommen, und in der Tat findet sich bei der fünfsaitigen nordafrikanischen Lyra die Stimmung:

3a. g ⟶ d ⟶ a ⟶ e ⟶ b

d. h. die Töne der Leiter g — a — b — d — e.

Noch heute haben Bratsche und Cello die Quintenstimmung

3b. c ⟶ g ⟶ d ⟶ a ⟶ e

die nur in der Wahl des Grundtones abweicht.

Der zweiten Gruppe gehören zunächst die Leitern 1 und 2 der Tafel 2 an. Geht man im Schema 3, anstatt von f aus nochmals eine Quint nach abwärts zu gehen, von hier aus eine Terz nach aufwärts, so erhält man die Töne der Leiter 1; ebenso, f $\longrightarrow$ bes beibehaltend, aber an Stelle der Aufwärtsquint g $\longrightarrow$ d im Schema 3 die Terz von g abwärts einführend, die Leiter 2.

An dieser Stelle sei auf die Tatsache hingewiesen, daß uns im Bildungsschema 3 (3a, 3b) ein Intervall begegnet, das, aus lauter Quintenschritten gebildet, der natürlichen großen Terz recht nahe steht, es ist das Intervall bes $\div$ d oder g $\div$ b oder c $\div$ e, falls der erstere Ton der tiefere ist. Nach Tafel 2 hat bes das Schwingungsverhältnis $\frac{16}{9}$, das eine Oktav tiefere bes also $\frac{8}{9}$, während d den Wert $\frac{9}{8}$ hat; also entspricht dem Intervall bes $\div$ d das Schwingungsverhältnis $\frac{9}{8} : \frac{8}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{80} \cdot \frac{5}{4}$; der zugehörige Abstand ist 10230 (340), während der natürlichen Terz 9691 (322) entspricht. Mit Hauptmann, Helmholtz und Oettingen werden wir von jetzt ab die durch Quintenschritte gebildete Terz durch den entsprechenden Buchstaben, wie bisher, die natürliche Terz aber, die etwas tiefer ist, durch den gleichen Buchstaben mit darunter gesetztem Strich bezeichnen. Die aus Quintenschritten gebildete Terz nennen wir auch pythagoräische Terz; sie ist um das Schwingungsverhältnis $\frac{81}{80}$ oder um den Abstand 539 (18) größer als die natürliche große Terz. Dieser Unterschied der beiden Terzen wird syntonisches Komma genannt.

In dem Schema 3 kann man unmittelbar ablesen, daß der dem Intervall bes $\div$ d entsprechende Abstand $4 \cdot 585 = 2340$ oder innerhalb einer Oktav 340 ist.

In der schematischen Darstellung bezeichnen wir die natürliche Terz nach oben durch einen Schritt nach oben; so ergeben sich für die fünfstufigen Leitern 1 und 2 die Schemata:

1. $\begin{array}{ccccccc} \underline{a} & & & & & & \\ \uparrow & & & & & & \\ f & \leftarrow & c & \rightarrow & g & \rightarrow & d \end{array}$ 2. $\begin{array}{ccccccc} bes & \leftarrow & f & \leftarrow & c & \rightarrow & g \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \overline{es} \end{array}$

Fragen wir nunmehr, warum man bei 1 gerade die Oberterz von f und nicht die irgend eines anderen der 3 übrigen Töne, und bei 2 gerade die Unterterz von g zu wählen hat, so ergibt sich die Antwort aus dem Prinzip der möglichst gleichmäßigen Teilung der Oktav, d. h. aus dem Bestreben, allzu kleine Intervalle zu vermeiden; die Terz $\underline{e}$ von c liegt zu nahe an f, die Terz $\underline{b}$ von g zu nahe an c, die Terz $\overline{fis}$ von d zu nahe an f und g: somit bleibt nur die Terz $\underline{a}$ von f übrig, da die Unterterzen der 4 Töne f, c, g und d aus demselben Grunde nicht in Betracht kommen. Für das Schema 2 gilt analoges.

Wenn man aber überhaupt einmal eine reine Terz zuläßt, so liegt es nahe, die reine Terz $\underline{e}$ des Grundtones c an erster Stelle einzuführen; dann muß natürlich der zu sehr benachbarte Ton f in Fortfall kommen, während die Quint g und deren Quint d unbedenklich bleiben können. Das so sich ergebende Schema

$$\begin{array}{ccccc} \underline{e} & & & & \\ \uparrow & & & & \\ c & \rightarrow & g & \rightarrow & d \end{array}$$

läßt nun 2 Möglichkeiten für den 5. Ton zu: entweder die Quint a von d, dieses Schema wird jedoch, nur mit anderem Grundton, identisch mit Schema 1, oder die Unterquint $\underline{a}$ von $\underline{e}$; also:

4. $\begin{array}{ccccccc} \underline{a} & \leftarrow & \underline{e} & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & c & \rightarrow & g & \rightarrow & d \end{array}$

Dieses Schema ist aber die 4. Leiter der Tafel 2.

Ebenso kann man auch davon ausgehen, die Unterterz $\overline{as}$ von c zuzulassen, dann muß g eliminiert werden, dagegen können f und bes beibehalten werden; also haben wir zunächst das 4-tönige Schema

$$\begin{array}{ccccc} bes & \leftarrow & f & \leftarrow & c \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \overline{as} \end{array}$$

Als 5. Ton kommt nur die Quint $\overline{\text{es}}$ von $\overline{\text{as}}$ in Betracht also erhalten wir das Schema der 5-stufigen Leiter in Tafel 2:

5. $$\begin{array}{ccccccc} \text{bes} & \leftarrow & \text{f} & \leftarrow & \text{c} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \overline{\text{as}} & \rightarrow & \overline{\text{es}} \end{array}$$

Man könnte nun daran denken, nicht nur eine, sondern 2 natürliche Terzen einzuführen. Wählt man die Ober- und Unterterz des Grundtones, ($\underline{\text{e}}$ und $\overline{\text{as}}$) so werden die Ober- und Unterquint desselben (g und f) als zu nahe liegend unmöglich. Es bliebe also nur die Möglichkeit, gleichzeitig die Oberterz $\underline{\text{a}}$ der Unterquint f von c und die Unterterz $\overline{\text{es}}$ der Oberquint g von c einzuführen, d. h. die Leiter nach dem Schema

6. $$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{a}} & & & & \\ \uparrow & & & & \\ \text{f} & \leftarrow & \text{c} & \rightarrow & \text{g} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \overline{\text{es}} \end{array}$$

zu bauen, das der obigen Leiter 6 entspricht. Der Grund, weshalb diese Skala keine Anwendung findet, liegt wieder in dem Prinzip der möglichst gleichmäßigen Teilung; während nämlich in den Leitern 1 bis 5 höchstens zwei der nahezu gleichgroßen kleineren Intervalle aufeinanderfolgen, auch wenn man in die benachbarten Oktaven übergeht, würden bei 6 jeweils drei kleinere von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden größeren Intervallen abgelöst werden; die möglichste Gleichmäßigkeit der Stufen wäre also weniger gewahrt.

Wenn nun auch die Bildungsweise unserer 5-stufigen Skalen je nach der Verwendung der einzigen auf Grund des Prinzipes der möglichst gleichmäßigen Teilung eventuell zuzulassenden reinen Terz eine verschiedene ist, so können wir doch, falls wir den Unterschied eines syntonischen Kommas vernachlässigen, ein allen 5 Tonarten gemeinsames Element erkennen. Bei allen kommen größere und kleinere Intervalle vor, und zwar 2 größere und 3 kleinere Intervalle innerhalb der Oktav. Das Prinzip der möglichsten Gleichmäßigkeit verbietet nun die Reihenfolge von 2 größeren und 3 kleineren und umgekehrt, es verlangt vielmehr innerhalb der Oktav folgenden Wechsel;

1 g 2 k 1 g 1 k

oder umgekehrt, wobei natürlich der Anfang beliebig gewählt werden kann. Man sieht ohne weiteres, daß z. B. die umgekehrte Reihenfolge nichts anderes ist, als die Reihe, die der Wahl eines anderen Anfangsintervalles in der Oktav entspricht.

Betrachten wir z. B. die reine Quintenfolge der Leiter 3, so besagt diese, wenn wir von dem Unterschied eines Kommas absehen

1 k 1 g 1 k 1 g 1 k

d. h. diese Reihenfolge erfüllt die obige Bedingung, indem die Stelle der zwei aufeinanderfolgenden kleinen Intervalle am Ende der Oktav und am Anfang der höheren Oktav gelegen ist. Bezeichnen wir nun diese Leiter, nämlich

c d f g bes c'

als die Normalleiter der 5-stufigen Skalen, d. h. nehmen wir die Reihenfolge

1 k 1 g 1 k 1 g 1 k

als „normale“ Tonart der 5-stufigen Systeme an, so sehen wir, daß die Leiter 5 dieselbe Reihenfolge enthält, wenn wir als Ausgangston d, d. h. den zweiten Ton der Leiter 3 wählen: für die Leitern 1, 2 und 4 gilt das gleiche, wenn wir die Zählung mit f bezw. mit g und bes beginnen.

Die 5 möglichen Tonleitern des 5-stufigen Systems lassen sich daher auf eine derselben, z. B. die reine Quintenleiter, zurückführen: die Reihenfolge der größeren und der kleineren Intervalle ist stets die gleiche, nur der Ausgangston ist verschieden. Eine nochmalige Übersicht über die 5 Leitern mag ein noch deutlicheres Bild geben, indem wir zugleich die größeren Intervalle mit =, die kleineren mit — andeuten.

Tafel 3.

Tongeschlechter des 5-stufigen Systems.

3.	c — d = f — g = bes — c'	Normalgeschlecht
5.	c = es — f = as — bes — c'	
1.	c — d = f — g — a = c'	
2.	c = es — f — g = bes — c'	
4.	c — d — e = g — a = c'	

Doch sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese Zurückführung der fünf Leitern auf eine einzige nur insofern gilt, als man das Intervall eines Kommas vernachlässigt; streng genommen sind die fünf Leitern so zu schreiben, wie Tafel 4 angibt.

Tafel 4.

Fünfstufige Leitern, genau.

3. c — d = f — g = bes — c′
5. c = $\overline{\text{es}}$ — f = $\overline{\text{as}}$ — bes — c′
1. c — d = f — g — $\underline{\text{a}}$ = c′
2. c = $\overline{\text{es}}$ — f — g = bes — c′
4. c — d — $\underline{\text{e}}$ = g — $\underline{\text{a}}$ — c′

Vierter Teil.

Siebenstufige Skalen.

Hatte die Begrenzung in der Zahl der Stufen darin ihren Grund, daß man das kleinste im System vorkommende Intervall nicht zu klein werden lassen wollte, so mußte eine andere Anschauung von dem kleinsten zulässigen Intervall zu einer Erweiterung der Stufenzahl führen, wie wir sie am reinsten ausgebildet in dem System der griechischen Musik vorfinden.

1. Das Tetrachord.

Es wäre nun, so könnte es scheinen, am einfachsten, anzunehmen, man habe den bestehenden fünfstufigen Skalen durch Hinzufügung zweier weiterer Quinten- oder Terzenschritte zwei weitere Töne hinzugefügt, welche die bei jeder fünfstufigen Leiter auftretenden zwei größeren Intervalle weiter unterteilt hätten, nämlich in je einen Ganzton und einen Halbton nach unserer heutigen Bezeichnungsweise, wenn man von den feineren Unterschieden absieht. Die tatsächliche Entwicklung bei den Griechen aber ging nicht diesen Weg, der wohl zunächst nur zu fünf verschiedenen siebenstufigen Leitern geführt hätte, sondern die neuen Leitern entwickelten sich unter dem Einflusse der Unterteilungen eines kleineren Intervalles als der Oktav, des sogenannten Tetrachordes der Griechen.

Wir haben bereits oben die älteste Stimmung der griechischen Lyra

c f g c′

kennen gelernt; wir bezeichnen mit den Griechen die Quart c ÷ f und ebenso die Quart g ÷ c′ als ein Tetrachord, und zwar als ein unausgefülltes, und sehen somit, daß diese älteste „Leiter“ aus zwei unausgefüllten, unverbundenen Tetrachorden besteht; unverbunden, weil das Tetrachord $g \div c'$ durch das Intervall $f \div g$ von dem unteren Tetrachord $c \div f$ getrennt ist. Helmholtz[1]) stellt eine Reihe ausgefüllter Tetrachorde zusammen, die in der griechischen Literatur vorkommen; wir geben eine Übersicht derselben in der Tafel 5, indem wir von der oben eingeführten Bezeichnungsweise Gebrauch machen.

Tafel 5.

Griechische ausgefüllte Tetrachorde.

1.	Älteres enharmonisches Tetrachord d. Olympos	$b - \bar{c} - e$
2.	Älteres chromatisches Tetrachord	$b - \bar{c} - \underline{cis} - e$
3.	Diatonisches Tetrachord	$b - \bar{c} - \bar{d} - e$
4.	Tetrachord des Didimos	$b - \bar{c} - d - e$
5.	Dorisches Tetrachord (Pythagoras)	$b - c - d - e$
6.	Phrygisches Tetrachord	$d - \underline{e} - \bar{f} - g$
7.	Lydisches Tetrachord	$c - \underline{d} - \underline{e} - f$
8.	— —	$b - \bar{c} - \underline{dis} - e$

Untersuchen wir nun im einzelnen die Bildung dieser Tetrachorde, so zeigt sich, daß sie alle nach dem Verschmelzungsprinzip, d. h. durch Verwendung von Quinten- und Terzenschritten gebaut sind; führt der Schritt auch bei Änderung um 1 Oktav aus dem Tetrachord hinaus, so wird in unserer Darstellung der betreffende Ton in Klammern gesetzt. Ad 1. Das unausgefüllte Tetrachord entspricht dem Quintenschritt $b - e$; zur Aufstellung wird zunächst die Unterterz $\bar{c}$ von e genommen, also:

$$1. \qquad \begin{array}{ccc} e & - & b \\ | & & \\ \bar{c} & & \end{array}$$

Ad 2. Um einen weiteren Ton einzuführen, gehen wir von e die Quint nach abwärts; a liegt aber nicht in dem Tetrachord, d. h. innerhalb $b - e$; dagegen führt die Oberterz $\underline{cis}$ von a wieder in dasselbe hinein. Somit:

$$2. \qquad \begin{array}{ccccc} \underline{cis} & & & & \\ | & & & & \\ (a) & - & e & - & b \\ & & | & & \\ & & \bar{c} & & \end{array}$$

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 441.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man von e zuerst die Oberterz $\underline{\text{gis}}$ und von dieser die Unterquint $\underline{\text{cis}}$ bildet; also:

2a.
$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{cis}} & — & (\underline{\text{gis}}) & & \\ & & | & & \\ & & \text{e} & — & \text{b} \\ & & | & & \\ & & \text{c} & & \end{array}$$

Ad 3. Ebensogut kann man den 4. Ton auch von b aus gewinnen, entweder auf dem Wege b — $(\overline{\text{g}})$ — $\overline{\text{d}}$ oder auf dem Wege b — (fis) — $\overline{\text{d}}$; also:

3a.
$$\begin{array}{ccccc} \text{e} & — & \text{b} & & \\ | & & | & & \\ \text{c} & — & (\overline{\text{g}}) & — & \overline{\text{d}} \end{array}$$

3b.
$$\begin{array}{ccccc} \text{e} & — & \text{b} & — & (\text{fis}) \\ | & & & & | \\ \text{c} & & & & \overline{\text{d}} \end{array}$$

Ad 4. Betrachten wir nochmals die Bildung von 2; es zeigt sich, daß man von (a) aus auch auf anderem Wege wieder in das Tetrachord hineinkommen kann, nämlich durch Bildung der Unterquint d von (a); also:

4.
$$\begin{array}{ccccccc} \text{d} & — & (\text{a}) & — & \text{e} & — & \text{b} \\ & & & & | & & \\ & & & & \text{c} & & \end{array}$$

Ad 5. Dies legt den Gedanken nahe, ganz auf den Terzenschritt zu verzichten und das Tetrachord rein aus Quinten aufzubauen; zu diesem Zweck gehen wir von d über (g) nach c und erhalten so das pythagoräische Tetrachord:

5. c — (g) — d — (a) — e — b

Ad 6. Oder, falls man Terzenschritte erlauben will, kann man die Bildung symmetrisch nach oben und unten zulassen, entweder in der Form:

6.
$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\text{cis}} & — & (\underline{\text{gis}}) & & & & \\ & & | & & & & \\ & & \text{e} & — & \text{b} & & \\ & & & & | & & \\ & & & & (\overline{\text{g}}) & — & \overline{\text{d}} \end{array}$$

die, umgeschrieben für das Tetrachord d — g, lautet:

6.′
$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\text{e}} & — & (\underline{\text{b}}) & & & & \\ & & | & & & & \\ & & \text{g} & — & \text{d} & & \\ & & & & | & & \\ & & & & (\overline{\text{bes}}) & — & \overline{\text{f}} \end{array}$$

oder auch in der Form:

6a. $\underline{\text{cis}}$ bezw. 6a.′ $\underline{\text{e}}$

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\text{cis}} & & & & & & \\ | & & & & & & \\ (\text{a}) & — & \text{e} & — & \text{b} & — & (\text{fis}) \\ & & & & & & | \\ & & & & & & \overline{\text{d}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \underline{\text{e}} & & & & & & \\ | & & & & & & \\ (\text{c}) & — & \text{g} & — & \text{d} & — & (\text{a}) \\ & & & & & & | \\ & & & & & & \overline{\text{f}} \end{array}$$

Ad. 7. An Stelle wie bei 3 zwei Unterterzen zu verwenden, kann man auch zwei Oberterzen nehmen, in der Form:

7.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{cis}} & & & & \underline{\text{dis}} \\ | & & & & | \\ (\text{a}) & — & \text{e} & — & \text{b} \end{array}$$

oder für das Tetrachord c — f umgeschrieben:

7.′

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{d}} & & & & \underline{\text{e}} \\ | & & & & | \\ (\text{bes}) & — & \text{f} & — & \text{c} \end{array}$$

Ad. 8. Es bleibt zum Schluß noch eine Ausfüllung des Tetrachords, die die einfachste und symmetrischste von allen ist, aber von den Griechen nicht verwandt wurde. Es ist die Bildung:

8.

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{\text{dis}} \\ & & | \\ \text{e} & — & \text{b} \\ | & & \\ \overline{\text{c}} & & \end{array}$$

Nun berechnen wir für die Tetrachorde die Zahlenwerte der einzelnen Intervalle (1 kann als nicht ganz ausgefülltes Tetrachord fortbleiben, da in 2 enthalten), indem wir uns erinnern, daß die Quint 585, die Terz 322 Millioktaven beträgt. Der unterste Ton des Tetrachords wird als Ausgangspunkt genommen, der oberste Ton bekommt 415 (Quart).

In Fig. 3 sind die Einteilungen unserer Tetrachorde graphisch dargestellt, sowie die Intervallwerte beigefügt.

Man sieht sofort, daß das Tetrachord 2 aus zwei kleineren und einem größeren Intervall besteht, das größer ist als die Summe der beiden kleinen; ebenso hat die symmetrische Teilung 8 die gleiche Eigenschaft; beide entsprechen somit am wenigsten dem Prinzip der möglichst gleichmäßigen Teilung. Die Tetrachorde 3, 4 und 5 bestehen je aus einem kleineren und 2 darauffolgenden größeren Intervallen, deren jedes etwa doppelt so groß ist als das kleinere; bei 6 liegt das kleinere

Intervall zwischen den beiden größeren, bei 7 endlich kommen zuerst die beiden größeren und steht das kleinere am Ende.

Somit bleiben, wenn wir von den feineren Unterschieden absehen, und dem heutigen Sprachgebrauch folgend das größere Intervall als Ganzton (G), das kleinere als Halbton (H) be-

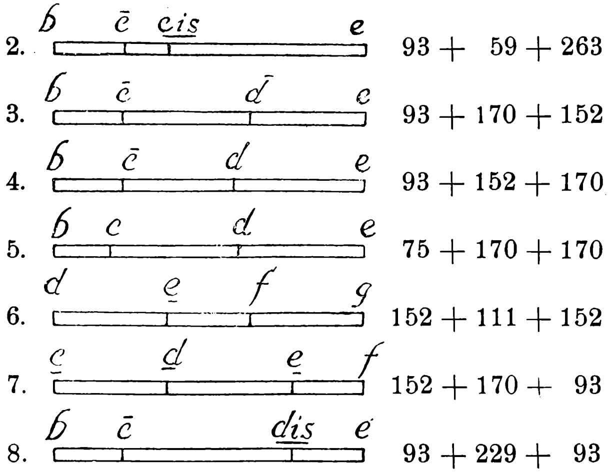


Fig. 3. Griechische Tetrachorde.

zeichnen, folgende unseren beiden Prinzipien entsprechenden Einteilungen übrig:

1.	H	G	G	(dorisch, 3, 4 und 5)
2.	G	H	G	(phrygisch, 6)
3.	G	G	H	(lydisch, 7)

2. Die griechischen Tonleitern.

Sehr einfach vollzieht sich nun der Übergang vom ausgefüllten Tetrachord zur siebenstufigen Leiter. Da die Oktav aus zwei unverbundenen Tetrachorden besteht, die durch den Ganzton f — g voneinander getrennt sind, so ergeben sich zunächst, den 3 Hauptteilungen des Tetrachordes entsprechend, 3 Tonarten, die, von den feineren Unterschieden abgesehen, durch folgende Leitern charakterisiert sind:

1.	/H G G/ /G/ H G G/	(dorisch)
2.	/G H G/ /G/ G H G/	(phrygisch)
3.	/G G H/ /G/ G G H/	(lydisch)

also in jedem Fall eine siebenstufige Leiter, die aus 5 Ganztönen und 2 Halbtönen besteht und stets die Reihenfolge 2 G 1 H 3 G 1 H aufweist, nur der Ausgangston ist verschieden. Wenden wir die Bezeichnungen unserer c-Dur-Tonleiter an und bezeichnen wir das Intervall eines Ganztones mit —, das eines Halbtones mit ‿, so sind diese 3 Tonarten:

1. e ‿ f – g – a – b ‿ c – d – e′ (dorisch)
2. d – e ‿ f – g – a – b ‿ c – d′ (phrygisch)
3. c – d – e ‿ f – g – a – b ‿ c′ (lydisch)

Wir können aber die Tetrachorde auch direkt miteinander verbinden, z. B. das Tetrachord d — g mit dem Tetrachord g — c, dann bleibt am Anfang der Oktav der Ganzton c ÷ d übrig. So kommen wir noch zu folgenden Tonarten:

4. /G/ H G G /H G G/ (hypodorisch)
5. /G/ G H G /G H G/ (hypophrygisch)
6. /G/ G G H /G G H/ (hypolydisch)

die die nämlichen Eigenschaften wie 1 bis 3 besitzen und sich in unserer Schreibweise folgendermaßen darstellen:

4. a – b ‿ c – d – e ‿ f – g – a′
5. g – a – b ‿ c – d – e ‿ f – g′
6. f – g – a – b ‿ c – d – e ‿ f′

Die erhaltenen Tonleitern entsprechen also den 6 Fällen, die man erhält, wenn man die Töne unserer heutigen c-Dur-Tonleiter mit c, d, e, f, g, a, beginnend hinschreibt, sie haben alle dieselbe Eigentümlichkeit wie diese, nämlich aus 5 Ganztönen und 2 Halbtönen zu bestehen, die einander in der Reihenfolge 2 G 1 H 3 G 1 H folgen. Die 7. mögliche Leiter dieser Art wäre somit die mit b beginnende, also:

7. b ‿ c – d – e ‿ f – g – a – b′ oder
7. /H/ G G H /G/ G G/,

eine Leiter, in der wir das lydische Tetrachord G G H, ein zweites geteiltes lydisches Tetrachord (G G am Schluß, H am Anfang) und das Verbindungsintervall G erkennen. Diese Tonart wird als mixolydisch bezeichnet.

In der Tafel 6 sind die 7 griechischen Tonleitern, mit dem nämlichen Ton c beginnend, zusammengestellt, und sind auch die von Helmholtz gegebenen Namen nach Tongeschlechtern beigefügt. „Nach der vorgeschlagenen Bezeichnung würde

„Quartengeschlecht von c“ bedeuten eine Tonart, deren Tonika c ist, welche aber dieselbe Vorzeichnung hat wie die auf der Quarte von c, nämlich f, errichtete Durtonleiter. Dabei ist zu bemerken, daß in diesen Namen unter den Septimen, Sexten, Terzen und Sekunden immer die kleinen Intervalle dieses Namens zu verstehen sind; wollten wir die großen wählen, so würden die Tonika in deren Leiter gar nicht vorkommen. Also: „Terzengeschlecht von c“ ist die Leiter mit der Tonika c, welche die Vorzeichnung von es-Dur hat, das ist also c-Moll, wie es wenigstens in der absteigenden Leiter ausgeführt wird[1].“

Tafel 6.

Die griechischen Tonarten.

1.	Dorisch	c⌣des–es–f–g⌣as–bes–c′	Sexteng.
2.	Phrygisch	c–d⌣es–f–g–a⌣bes–c′	Septimeng.
3.	Lydisch	c–d–e⌣f–g–a–b⌣c′	Durgeschl.
4.	Hypodorisch	c–d⌣es–f–g⌣as–bes–c′	Terzeng. (Moll.)
5.	Hypophryg.	c–d–e⌣f–g–a⌣bes–c′	Quarteng.
6.	Hypolydisch	c–d–e–fis⌣g–a–b⌣c′	Quinteng.
7.	Mixolydisch	c⌣des–es–f⌣ges–as–bes–c′	Sekundeng.

3. Die Kirchentonarten.

Ohne den Gang der Entwicklung der späteren griechischen, mehr als eine Oktav umfassenden Tonleitern weiter zu verfolgen, bei denen z. B. neben den den Ton b enthaltenden Tetrachord ein Tetrachord mit bes vorhanden war, also nach modernem Ausdruck Modulationen aus der Hauptleiter nach der Tonart der Subdominante möglich wurden, betrachten wir einen Augenblick die sogenannten Kirchentonarten (Ambrosius von Mailand). Tafel 7 zeigt zwei Gruppen von je 4 Leitern; in der zweiten Gruppe ist nur jeweils b durch bes ersetzt.

Tafel 7.

Die Kirchentonarten von Ambrosius.

									griechisch:
1.	d	e	f	g	a	b	c	d′	2. (phrygisch)
2.	e	f	g	a	b	c	d	e′	1. (dorisch)
3.	f	g	a	b	c	d	e	f′	6. (hypolydisch)

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 442.

4.	g	a	b	c	d	e	f	g′	5. (hypophrygisch)
5.	d	e	f	g	a	bes	c	d′	4. (hypodorisch)
6.	e	f	g	a	bes	c	d	e′	6. (mixolydisch)
7.	f	g	a	bes	c	d	e	f′	3. (lydisch)
8.	g	a	bes	c	d	e	f	g′	2. (phrygisch)

Man sieht, daß diese 8 Leitern mit den griechischen identisch sind. Das gleiche gilt auch von den später von Papst Gregor eingeführten sogenannten plagalischen Kirchentonarten. (Die obigen 8 wurden als die authentischen bezeichnet.) „Die Existenz der plagalischen Kirchentöne half die Verwirrung vermehren, welche gegen Ende des Mittelalters über die Kirchentöne ausbrach, als die Komponisten die alten Regeln über die Lage des Schlußtones zu vernachlässigen anfingen, und diese Verwirrung diente dazu, eine freiere Entwicklung des Tonsystemes zu begünstigen [1].“

4. Die melodischen Tongeschlechter.

Glareanus versuchte im Jahre 1547 die Lehre von den Tonarten wieder ins reine zu bringen. Er zeigte aus der Untersuchung der musikalischen Kompositionen seiner Zeit, daß 6 authentische Tonarten zu unterscheiden seien, jedoch ist unter seinen 6 Tonarten noch eine unmelodische, für die tatsächlich auch in den mittelalterlichen Kompositionen die Beispiele fehlen. Scheiden wir noch diese aus, so bleiben die 5 Tonarten der Tafel 8 übrig, denen Glareanus griechische Namen beilegte, doch weichen dieselben von den altgriechischen Bezeichnungen ab. Wir geben der Vollständigkeit halber auch diese Bezeichnungen an.

Tafel 8.

Melodische Tongeschlechter.

Nr. der griech. Leiter	Altgriech. Bezeichnung	Bez. nach Glareanus	Leiter							
1	dorisch	phrygisch	e	f	g	a	b	c	d	e′
2	phrygisch	dorisch	d	e	f	g	a	b	c	d′
3	lydisch	jonisch	c	d	e	f	g	a	b	c′
4	hypodor.	äolisch	a	b	c	d	e	f	g	a′
5	hypophryg.	mixolydisch	g	a	b	c	d	e	f	g′

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 446.

Es fehlen also die beiden altgriechischen Tonleitern 6 und 7, die hypolydische und die mixolydische der alten Bezeichnung. Dies sind diejenigen Tonarten, die entweder keine reine Quart, vom Grundton aus gerechnet, (6) oder keine reine Quint (7) besitzen. Daß diese beiden Tonarten in der polyphonen Musik wegen des Fehlens der Ober- bezw. Unterquint ausscheiden, ist bei der Bedeutung der Quint als des reinsten Zusammenklanges nächst der Oktav verständlich.

5. Rationelle Konstruktion der melodischen Tongeschlechter.

Haben wir bisher die Bildung der melodischen Tongeschlechter in großen Zügen historisch verfolgt, so versuchen wir nunmehr, die möglichen Tonarten aus Quinten- und Terzenschritten zu konstruieren. Dabei soll der Halbton das kleinste Intervall sein, das vorkommen darf.

Der „Halbton" ist das Intervall $\underline{e} \div f$, wenn $\underline{e}$ die Terz, f die Quart der Tonika c ist. Also ist das Schwingungsverhältnis für den Halbton definiert durch Quart : Terz $= \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$. Der entsprechende Abstand ist $10^6\,[(\log 4 - \log 3) - (\log 5 - \log 4)] = 12494 - 9691 = 2803$; in Millioktaven ergibt sich: $415 - 322 = 93$.

Nun existiert aber noch ein anderer „Halbton". Da wir mittelst 4 Quintenschritten von c aus nach der pythagoräischen Terz e gelangen, deren Abstand entsprechend dem Schwingungsverhältnis $\frac{81}{64}$ gleich 10220 (340) ist, die also um ein syntonisches Komma höher ist als die natürliche Terz, so ist der Halbton e ÷ f um das syntonische Komma kleiner als der oben definierte Halbton, ihm entspricht also der Abstand 2264 (75); wir werden diesen Halbton im Gegensatz zu dem ersteren, dem großen, als kleinen Halbton bezeichnen.

Bevor wir nun zur Konstruktion der möglichen siebenstufigen Leitern schreiten, erinnern wir uns an das Bildungsgesetz der fünfstufigen. Als Normalleiter hatten wir die dritte betrachtet, deren Schema bes ← f ← c → g → d war. In der ersten Leiter wurden an Stelle von bes $\underline{a}$ eingeführt, in der zweiten an Stelle von d $\overline{es}$, d. h. die Quintenbasis wurde durch

Einführung je einer natürlichen Terz auf 4 Stufen verkürzt. In den Leitern 4 und 5 wurde durch Einführung je einer weiteren Terz diese Basis auf 3 Stufen verkürzt.

Ausgehend von dem Normalschema bes ← f ← c → g → d sehen wir, daß sich durch Hinzufügen der Oberquint a von d und der Unterquint es von bes ohne weiteres eine Unterteilung der zwei übermäßigen Intervalle der fünfstufigen Normalleiter ergibt, indem dem Schema es ← bes ← f ← c → g → d → a die folgende Leiter entspricht:

c		d		es		f		g		a		bes		c′
0		170		245		415		— 415		— 245		— 170		0
	170		75		170		170		170		75		170	

Die Oktav ist also in 5 große Ganztöne (Abstand 5115 bezw. 170) und in 2 kleine Halbtöne (Abstand 2264 bezw. 75) eingeteilt. Diese Tonart entspricht, von den Unterschieden eines Kommas abgesehen, der phrygischen.

Mittels der reinen Quintenstimmung können wir übrigens noch 6 andere siebenstufige Systeme erzeugen, die im Charakter den 6 übrigen griechischen Tonarten entsprechen.

Gehen wir vom Grundton nur 2 Quinten nach aufwärts, aber 4 Quinten nach abwärts, so ist das Schema as ← es ← bes ← f ← c → g → d und die Leiter c — d — es — f — g — as — bes — c′, d. h. sie hat hypodorischen Charakter; 1 Quint nach aufwärts und 5 Quinten nach abwärts ergibt c — des — es — f — g — as — bes — c′, also den dorischen Charakter; alle 6 Quinten nach abwärts: c — des — es — f — ges — as — bes — c′ oder mixolydisch.

Gehen wir vom Grundton 4 Quinten nach aufwärts und 2 nach abwärts, so ergibt sich: c — d — e — f — g — a — bes — c′, d. h. der hypophrygische Charakter, 5 Quinten nach aufwärts und 1 nach abwärts liefert: c — d — e — f — g — a — b — c′ oder den lydischen Typ, endlich alle Quinten nach aufwärts: c — d — e — fis — g — a — b — c′ oder den hypolydischen Typ.

Wir können aber auch, ausgehend von der fünfstufigen pythagoräischen Leiter, 2 natürliche Terzen einführen, entsprechend dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \underline{a} & & & & & & \\ & & \uparrow & & & & & & \\ bes & \leftarrow & f & \leftarrow & c & \rightarrow & g & \rightarrow & d \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & \overline{es} & & \end{array}$$

und erhalten so die Leiter

$$\begin{array}{cccccccc} c & d & \overline{es} & f & g & \underline{a} & bes & c' \\ 0 & 170 & 263 & 415 & -415 & -263 & -170 & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{0 \quad 170}_{170}\;\underbrace{170 \quad 263}_{93}\;\underbrace{263 \quad 415}_{152}\;\underbrace{415 \quad -415}_{170}\;\underbrace{-415 \quad -263}_{152}\;\underbrace{-263 \quad -170}_{93}\;\underbrace{-170 \quad 0}_{170}$$

die dem Charakter der phrygischen Leiter gleichfalls entspricht und in der Oktav 3 große Ganztöne, 2 kleine Ganztöne und 2 große Halbtöne hat.

Nunmehr untersuchen wir die auf einer 4-stufigen Quintenbasis möglichen Systeme.

A. Systeme auf der Basis f — c — g — d.

Auf der 4-stufigen Basis f — c — g — d kann es sich um die Einführung von 3 natürlichen Terzen aus den nach dem folgenden Schema zur Verfügung stehenden Terzen handeln:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{a} & — & \underline{e} & — & \underline{b} & — & \underline{fis} \\ 737 & & 322 & & 907 & & 492 \\ f & — & c & — & g & — & d \\ 415 & & 0 & & 585 & & 170 \\ \overline{des} & — & \overline{as} & — & \overline{es} & — & \overline{bes} \\ 93 & & 678 & & 263 & & 848 \end{array}$$

Von diesen scheiden $\underline{fis}$ als zu nahe an f und $\overline{des}$ als zu nahe an d gelegen von vornherein aus. Das übrig bleibende Schema schreiben wir in der folgenden Form

$$\begin{array}{ccccccc} & \underline{a} & & \underline{e} & & \underline{b} & \\ f & & c & & g & & d \\ & \overline{as} & & \overline{es} & & \overline{bes} & \end{array}$$

indem wir die natürliche Terz durch Fortschreiten unter 60° nach rechts oben andeuten. Dann sieht man, daß man die in der gleichen Vertikalen stehenden Töne $\underline{a}$ uns $\overline{as}$, $\underline{e}$ uns $\overline{es}$, $\underline{b}$ und $\overline{bes}$ nicht gleichzeitig zulassen darf, da ihr Abstand nur 59 beträgt. Somit bleiben die folgenden Möglichkeiten, wobei die rechtsstehenden Schemata gewissermaßen die Spiegelbilder der linksstehenden sind.

I. Gruppe.

1\.
$\underline{a} — \underline{e} — \underline{b}$
/ / /
f — c — g — d

2\.
a — e
/ /
f — c — g — d
/
$\overline{bes}$

3\.
$\underline{a}$ $\underline{b}$
/ /
f — c — g — d
/
$\overline{es}$

4\.
e $\underline{b}$
/ /
f — c — g — d
/
$\overline{as}$

II. Gruppe.

1\.
f — c — g — d
/ / /
$\overline{as} — \overline{es} — \overline{bes}$

2\.
$\underline{b}$
/
f — c — g — d
/ /
$\overline{as}$ $\overline{es}$

3\.
$\underline{e}$
/
f — c — g — d
/ /
$\overline{as}$ $\overline{bes}$

4\.
$\underline{a}$
/
f — c — g — d
/ /
$\overline{es}$ $\overline{bes}$

In der folgenden Tafel 9 stellen wir die erhaltenen Leitern zusammen.

Tafel 9.

Siebenstufige Leitern auf der Basis f — c — g — d.

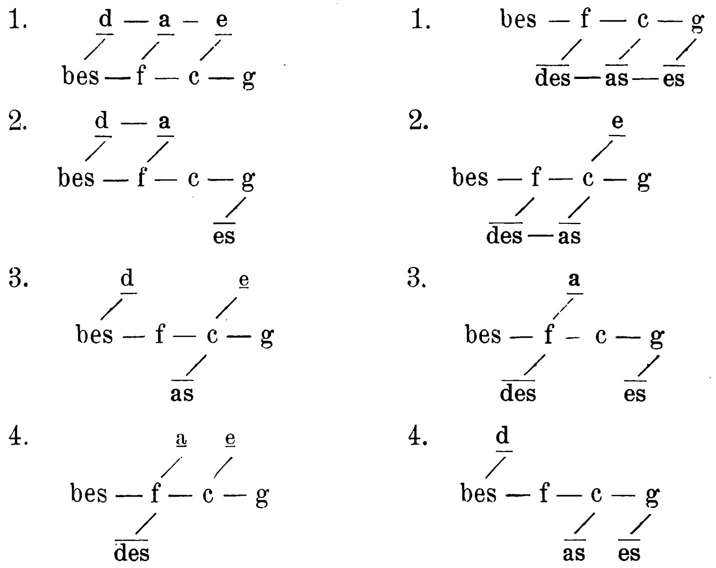
A I 1	c	–	d	–	$\underline{e}$	⌣	f	–	g	–	$\underline{a}$	–	$\underline{b}$	⌣	c′	lydisch
A II 1	c	–	d	⌣	$\overline{es}$	–	f	–	g	⌣	$\overline{as}$	–	$\overline{bes}$	–	c′	hypodorisch
A I 2	c	–	d	–	$\underline{e}$	⌣	f	–	g	–	$\underline{a}$	⌣	$\overline{bes}$	–	c′	hypophrygisch
A II 2	c	–	d	⌣	$\overline{es}$	–	f	–	g	⌣	$\overline{as}$	=	$\underline{b}$	⌣	c′	U_1
A I 3	c	–	d	⌣	$\overline{es}$	–	f	–	g	–	$\underline{a}$	–	$\underline{b}$	⌣	c′	V_1
A II 3	c	–	d	–	$\underline{e}$	⌣	f	–	g	⌣	$\overline{as}$	–	$\overline{bes}$	–	c′	V_2
A I 4	c	–	d	–	$\underline{e}$	⌣	f	–	g	⌣	$\overline{as}$	=	$\underline{b}$	⌣	c′	U_2
A II 4	c	–	d	⌣	$\overline{es}$	–	f	–	g	–	$\underline{a}$	⌣	$\overline{bes}$	–	c′	phrygisch

Wir finden somit unter den 8 Leitern 4 der griechischen wieder, ferner 2 Leitern U_1 und U_2, bei denen das große Intervall $\overline{as} = \underline{b}$ auftritt, das als übermäßiger Ganzton bezeichnet werden kann, sowie 2 Leitern V_1 und V_2, bei denen 4 Ganztöne unmittelbar aufeinander folgen. Das Prinzip der möglichst gleichmäßigen Teilung ist bei den griechischen Leitern am besten, bei den Leitern V weniger gut, bei den Leitern U am wenigsten erfüllt.

B. Systeme auf der Basis bes — f — c — g.

In analoger Weise finden wir auf der Basis bes — f — c — g folgende möglichen Systeme.

I. Gruppe. II. Gruppe.



Vgl. die folgende Tafel 10.

Tafel 10.

Siebenstufige Leitern auf der Basis bes — f — c — g.

B I 1	c – $\underline{d}$ – $\underline{e}$ $\smile$ f – g – $\underline{a}$ $\smile$ bes – c′	hypophrygisch
B II 1	c $\smile$ $\overline{des}$ – $\overline{es}$ – f – g $\smile$ $\overline{as}$ – bes – c′	dorisch
B I 2	c – $\underline{d}$ $\smile$ $\overline{es}$ – f – g – $\underline{a}$ $\smile$ bes – c′	phrygisch
B II 2	c $\smile$ $\overline{des}$ = $\underline{e}$ $\smile$ f – g $\smile$ $\overline{as}$ – bes – c′	U_3
B I 3	c – $\underline{d}$ – $\underline{e}$ $\smile$ f – g $\smile$ $\overline{as}$ – bes – c′	V_3
B II 3	c $\smile$ $\overline{des}$ – $\overline{es}$ – f – g – $\underline{a}$ $\smile$ bes – c′	V_4
B I 4	c $\smile$ $\overline{des}$ = $\underline{e}$ $\smile$ f – g – $\underline{a}$ $\smile$ bes – c′	U_4
B II 4	c – $\underline{d}$ $\smile$ $\overline{es}$ – f g $\smile$ $\overline{as}$ – bes – c′	hypodorisch.

Auch hier ergeben sich 4 griechische Leitern, 2 Leitern mit einem übermäßigen Intervall ($\overline{des} = \underline{e}$) und 2 Leitern mit 4 aufeinanderfolgenden Ganztönen.

C. Systeme auf dreistufiger Basis.

Die Untersuchung der möglichen Systeme auf dreistufiger Basis entweder f — c — g oder c — g — d oder bes — f — c, sei nicht im einzelnen wiedergegeben: es genüge zu sagen, daß in allen Fällen entweder Leitern mit der Folge von 5 Ganztönen oder mit 1 oder 2 übermäßigen Tönen ergeben; nur der folgende Fall, der zwischen der 3- und 4-basigen Systemen steht, verdient einige Beachtung. Wir nehmen z. B. in dem Schema

$$\begin{array}{ccccccc} & \underline{a} & — & \underline{e} & — & \underline{b} \\ / & & / & & / & \\ f & — & c & — & g & \end{array}$$

der noch fehlende 4. Terz von dem links vom f stehenden, unterdrückten bes und erhalten so:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \underline{d} & — & \underline{a} & — & \underline{e} & — & \underline{b} \\ / & & / & & / & & / & \\ x & — & f & — & c & — & g & \end{array}$$

oder, entsprechend nach abwärts:

$$\begin{array}{ccccccccc} & f & — & c & — & g & — & x \\ / & & / & & / & & / & \\ \overline{des} & — & \overline{es} & — & \overline{as} & — & \overline{bes} & \end{array}$$

Dieses Bildungsschema, für die 3 dreistufigen Basen durchgeführt, liefert die in Tafel 11 angeführten Leitern.

Tafel 11.

Siebenstufige Leitern auf ergänzter 3-stufiger Basis.

C	I	1	c – $\underline{d}$ – $\underline{e}$ ‿ f – g – $\underline{a}$ – $\underline{b}$ ‿ c′	lydisch
C	I	2	c ‿ $\overline{des}$ – $\overline{es}$ – f – g ‿ $\overline{as}$ – $\overline{bes}$ – c′	dorisch
C	II	1	c – d – $\underline{e}$ – $\underline{fis}$ ‿ g – $\underline{a}$ – $\underline{b}$ ‿ c′	hypolydisch
C	II	2	c – d ‿ $\overline{es}$ – $\overline{f}$ – g ‿ $\overline{as}$ – $\overline{bes}$ – c′	hypodorisch
C	III	1	c – $\underline{d}$ – $\underline{e}$ ‿ f – $\underline{g}$ – $\underline{a}$ ‿ bes – c′	hypophrygisch
C	III	2	c ‿ $\overline{des}$ – $\overline{es}$ – f ‿ $\overline{ges}$ – $\overline{as}$ – bes – c′	mixolydisch

Wir finden also hier wieder die bekannten griechischen Leitern, darunter auch die hypolydische und die mixolydische, die bisher noch fehlten.

In der Tafel 12 stellen wir die gefundenen 22 Tonleitern geordnet zusammen.

D. Zusammfassung.

Tafel 12.
Siebenstufige Leitern.

1. G r u p p e. Die griechischen Leitern.

Lyd. Typ.	A I	1	c	d	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	$\underline{\text{b}}$	c′	auth.
	C I	1	c	$\underline{\text{d}}$	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	$\underline{\text{b}}$	c′	
Dor. Typ.	B II	1	c	$\overline{\text{des}}$	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	bes	c′	auth.
	C I	2	c	$\overline{\text{des}}$	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	$\overline{\text{bes}}$	c′	
Phryg. Typ.	A II	4	c	d	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	$\overline{\text{bes}}$	c′	
	B I	2	c	$\underline{\text{d}}$	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	bes	c′	
Hypolyd.	C II	1	c	d	$\underline{\text{e}}$	$\underline{\text{fis}}$	g	$\underline{\text{a}}$	$\underline{\text{b}}$	c′	
Hypodor. Typ.	A I	4	c	d	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	$\overline{\text{bes}}$	c′	auth.
	B II	4	c	$\underline{\text{d}}$	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	bes	c′	
	C II	2	c	d	$\overline{\text{es}}$	$\overline{\text{f}}$	g	$\overline{\text{as}}$	$\overline{\text{bes}}$	c′	
Hypophryg. Typ	A I	2	c	d	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	$\overline{\text{bes}}$	c′	
	B I	1	c	$\underline{\text{d}}$	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	bes	c′	auth.
	C III	1	c	$\underline{\text{d}}$	$\underline{\text{e}}$	f	$\underline{\text{g}}$	$\underline{\text{a}}$	bes	c′	
Mixolyd.	C III	2	c	$\overline{\text{des}}$	$\overline{\text{es}}$	f	$\overline{\text{ges}}$	$\overline{\text{as}}$	bes	c′	auth.

2. G r u p p e. Leitern mit 1 übermäßigen Ganzton.

U_1	A I	2	c	d	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	$\underline{\text{b}}$	c′
U_2	A I	4	c	d	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	$\underline{\text{b}}$	c′
U_3	B II	2	c	$\overline{\text{des}}$	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	bes	c′
U_4	B I	4	c	$\overline{\text{des}}$	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	bes	c′

3. G r u p p e. Leitern mit 4 aufeinanderfolgenden Ganztönen.

V_1	A I	3	c	d	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	$\underline{\text{b}}$	c′
V_2	A II	3	c	d	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	$\overline{\text{bes}}$	c′
V_3	B I	2	c	$\underline{\text{d}}$	$\underline{\text{e}}$	f	g	$\overline{\text{as}}$	bes	c′
V_4	B II	3	c	$\overline{\text{des}}$	$\overline{\text{es}}$	f	g	$\underline{\text{a}}$	bes	c′

Um nun bei den verschiedenen Typen der griechischen Leitern, soweit sie in 2 oder 3 Formen auftreten, zu entscheiden, welcher der authentische ist, brauchen wir nur das jeweilige Schema anzusehen bezw. aufzuzeichnen, und von diesen das jeweils e i n f a c h s t e zu wählen; für den lydischen und dorischen Typ ist zweifellos die Bildung A bezw. B einfacher als C; beim phrygischen Typ erscheinen beide Formen als gleichberechtigt, beim hypodorischen ist A die einfachste, beim hypophrygischen dagegen B[1]).

Um die Intervalle in den 7 griechischen Leitern genau zu übersehen, um ferner die weit ungleichmäßigere Einteilung der zweiten und dritten Gruppe zu überblicken, geben wir in Tafel 13 eine Übersicht über die Intervalle (in Millioktaven).

Tafel 13.

Intervalle der siebenstufigen Leitern.

1. Gruppe.							
Lydisch:	170	152	93	170	152	170	93
Dorisch:	93	170	152	170	93	170	152
Phrygisch: {	152	111	152	170	152	93	170
	170	93	152	170	152	111	152
Hypolydisch:	170	152	170	93	152	170	152
Hypodorisch:	170	93	152	170	93	170	152
Hypophrygisch:	170	152	93	170	152	93	170
Mixolydisch:	93	170	152	93	170	152	170
2. Gruppe.							
U_1	170	93	152	170	93	229	93
U_2	170	152	93	170	93	229	93
U_3	93	229	93	170	93	152	170
U_4	93	229	93	170	152	93	170
3. Gruppe.							
V_1	170	93	152	170	152	170	93
V_2	170	152	93	170	152	170	152
V_3	152	170	93	170	93	152	170
V_4	93	170	152	170	152	93	170

6. Die für die harmonische Musik brauchbaren Leitern.

Bisher haben wir folgendes gefunden: Unter der Voraussetzung, daß der große Halbton (93) das kleinste vorkommende Intervall ist, ergibt sich als erste Gruppe siebenstufiger Leitern das System der 7 altgriechischen Leitern, bei dem das Prinzip möglichst gleichmäßiger Teilung der Oktav am besten durch-

1) Es sei bemerkt, daß Helmholtz durch anders geartete Betrachtungen zu demselben Ergebnis kommt.

geführt ist, als zweite Gruppe (U) solche Leitern, die einen übermäßigen Ganzton enthalten, endlich als dritte Gruppe (V) Leitern, bei denen 4 Ganztöne unmittelbar aufeinander folgen.

Fragen wir nun, welche von diesen Tonleitern in der neueren harmonischen Musik brauchbar sind, so können wir mit Helmholtz sagen: „Zu einem künstlerisch zusammenhängenden Tongewebe werden diejenigen Tongeschlechter am meisten geeignet sein, welche die größte Zahl unter sich und mit dem tonischen Akkord verwandter konsonanter Akkorde liefern. Da alle konsonanten Akkorde in engster Lage und in einfachster Form Dreiklänge sind, welche aus einer großen und aus einer kleinen Terz zusammengesetzt sind, so finden wir sämtliche Akkorde in einer Tonart einfach dadurch, daß wir alle ihre Tonstufen nach Terzen ordnen [1]."

Wir können uns diese Arbeit für die einzelnen Tonarten wesentlich erleichtern, wenn wir auf deren obige Schemata zurückgehen; alle gleichseitigen Dreiecke mit der Spitze nach oben stellen Durdreiklänge, alle mit der Spitze nach unten Molldreiklänge dar. Das Kriterium für die Brauchbarkeit ist somit die Zahl der mit dem Akkord der Tonika verwandten konsonanten Akkorde. Stellen wir also die Forderung, daß sowohl der Dominant- als auch der Subdominantdreiklang in dem Tonbild vorhanden sein muß, so sehen wir, daß die Leitern auf der Basis bes — f — c — g sofort ausscheiden, da sie den Dominantdreiklang nicht enthalten. Aus Tafel 12 ist ersichtlich, daß somit die Tonarten

Dorisch	(B II 1)	U_3	(B II 2)
Phrygisch	(B I 2)	U_4	(B I 4)
Hypophrygisch	(B I 1)	V_3	(B I 2)
		V_4	(B II 3)

in Fortfall kommen. Außerdem selbstverständlich die hypolydische und die mixolydische Leiter, die wir ja schon nicht mehr zu den melodischen Tongeschlechtern zählen konnten (C II 1 und C III 2). In der Figur 4 sind die noch verbleibenden Tonarten schematisch dargestellt. Den hypophrygischen Typ haben wir hierbei in der Form A I 2 zugelassen, den phrygischen in der Form A II 4.

---

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 483.

In der Tafel 14 haben wir die Tongeschlechter nach ihrer harmonischen Brauchbarkeit geordnet.

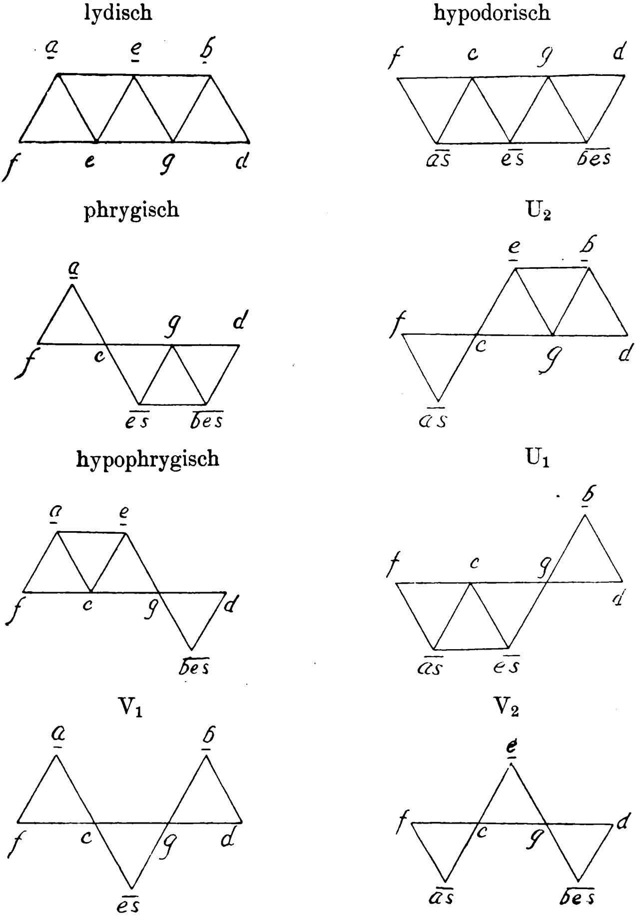


Fig. 4. Harmonisch brauchbare Tonarten.

Tafel 14.
Tongeschlechter, geordnet nach ihrer harmonischen Brauchbarkeit.

A. Systeme mit 5 Dreiklängen.

1. Durgeschlecht (lydisch)	c-Dur	g-Dur	f-Dur
	a-Moll	e-Moll	
2. Mollgeschlecht (hypodorisch)	c-Moll	g-Moll	f-Moll
	as-Dur	es-Dur	

B. Systeme mit 4 Dreiklängen.

1. Quartengeschlecht (hypophr.)	c-Dur	f-Dur
	$\underline{a}$-Moll	g-Moll
2. Septimengeschlecht (phryg.)	c-Moll	g-Moll
	f-Dur	$\overline{es}$-Dur
3. U_1	c-Moll	f-Moll
	$\overline{as}$-Dur	g-Dur
4. U_2	c-Dur	g-Dur
	f-Moll	$\underline{e}$-Moll

C. Systeme mit 3 Dreiklängen.

1. V_1	c-Moll	
	g-Dur	f-Dur
2. V_2	c-Dur	
	g-Moll	f-Moll

An der Spitze stehen Dur- und Mollgeschlecht, d. h. die beiden Tongeschlechter, die in der neueren Musik sozusagen zur Alleinherrschaft gelangt sind, da sie die meisten (5) Dreiklänge umfassen. Moll ist also im Sinne unserer bildlichen Darstellung die Umkehrung oder das Spiegelbild von Dur. Im Durgeschlecht treten die Durdreiklänge außer für den Grundton für seine Dominant und Subdominant auf, die Molldreiklänge für seine Ober- und Unterterz. Im Mollgeschlecht ist es umgekehrt, die Leiter ist unsere heutige „absteigende“ Molltonleiter.

Das Quartengeschlecht hat den Durdreiklang des Grundtones und der Unterdominant, den Molldreiklang der Oberterz und der Oberdominant. Es unterscheidet sich vom Durgeschlecht nur durch die kleine Septim. In der neueren Musik verschwindet es allmählich zugunsten des Durgeschlechtes, indem das Prinzip zur Geltung kam, den Leiteton, d. h. die große Septim, zu bevorzugen [1]).

Das Septimengeschlecht, das Molldreiklänge des Grundtones und der Oberdominant, dagegen die Durdreiklänge der Unterdominant und der kleinen Oberterz besitzt, hat somit mehr Mollcharakter. Die Erhöhung seiner kleinen Septim zur großen

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 464 (Bedeutung des Leitetones).

ergibt die Leiter, die man als „aufsteigende“ Molltonleiter bezeichnet.

U_1 hat die Molldreiklänge von Grundton und Unterdominant, dagegen die Durdreiklänge von Oberdominant und Unterterz. Es unterscheidet sich vom Terzen- oder Mollgeschlecht lediglich in der Septim, indem hier die große genommen wird, während Moll die kleine hat. U_1 ist die heutige instrumentelle Molltonleiter, die zwar harmonisch gut brauchbar ist, aber wegen des Sprunges $\overline{as} = \underline{b}$ für den melodischen Gesang weniger paßt.

U_2 hat die Durdreiklänge auf Tonika und Dominant, dagegen die Molldreiklänge auf Unterdominant und Oberterz, es besitzt ferner die große Septim. Es ist somit eine zwischen Dur und Moll liegende Tonart; sie findet sich bei neueren Komponisten „wenigstens für einzelne melodische Phrasen und Kadenzen“ und wird sinngemäß als Moll-Dur-Tonart bezeichnet. Für die Harmonisierung ist dieses Geschlecht jedenfalls viel geschickter als das alte Septimengeschlecht, aber für den Gesang paßt es wegen $\overline{as} = \underline{b}$ wenig.

V_1 hat den einzigen Molldreiklang auf der Tonika, sonst die Durdreiklänge auf Ober- und Unterdominant. Es ist von dem alten Septimengeschlecht nur durch die große Septim an Stelle der kleinen verschieden und wird heute als „aufsteigende Molltonleiter“ gebraucht.

V_2 endlich, mit dem Durdreiklang auf der Tonika und den zwei Molldreiklängen auf Dominant und Subdominant, aber mit kleiner Septim geht durch die Erhöhung der Septim in die Molldurtonart über. Tafel 15 gibt eine nochmalige Übersicht.

Tafel 15.

Umwandlung der harmonisch brauchbaren Tonarten in die heutigen.

1. Durgeschlecht: c — d — $\underline{e}$ ‿ f — g — $\underline{a}$ — $\underline{b}$ ‿ c′ Dur
2. Mollgeschl. 1.: c — d ‿ $\overline{es}$ — f — g ‿ $\overline{as}$ — $\overline{bes}$ — c′ Moll abst.
   erh. Sept.: c — d ‿ $\overline{es}$ — f — g ‿ $\overline{as}$ — $\underline{b}$ ‿ c′ Moll instr.
3. Quartengeschl.
   erh. Sept.: c — d — $\underline{e}$ ‿ f — g — $\underline{a}$ — $\underline{b}$ — c′ Dur

4. Septimengeschlecht
erh. Sept.: c — d $\smile$ $\overline{\text{es}}$ — f — g — $\underline{\text{a}}$ — $\underline{\text{b}}$ $\smile$ c′ Moll aufst.
5. U_1 : c — d $\smile$ $\overline{\text{es}}$ — f — g $\smile$ $\overline{\text{as}}$ = $\underline{\text{b}}$ $\smile$ c′ Moll instr.
6. U_2 : c — d — $\underline{\text{e}}$ $\smile$ f — g $\smile$ $\overline{\text{as}}$ = $\underline{\text{b}}$ $\smile$ c′ Molldur
7. V_1 : c — d $\smile$ $\overline{\text{es}}$ — f — g — $\underline{\text{a}}$ — $\underline{\text{b}}$ $\smile$ c′ Moll aufst.
8. V_2 erh. Sept.: c — d — $\underline{\text{e}}$ $\smile$ f — g $\smile$ $\overline{\text{as}}$ = $\underline{\text{b}}$ $\smile$ c′ Molldur.

Die 8 Tongeschlechter verwandeln sich also bei Berücksichtigung der Bevorzugung des Leitetones in unsere Dur- und Molltonart, sowie die zwischen beiden stehende Molldurtonart. Für die Molltonleiter ergeben sich 3 verschiedene Formen.

Fünfter Teil.

Die zwölfstufige Skala.

Betrachten wir nochmals in Tafel 15 die sich ergebenden Teilungen der Oktav, so finden wir, wenn wir wieder von den feineren Unterschieden absehen, folgendes (G = Ganzton, H = Halbton, U = übermäßiger Ganzton):

Dur :	G	G	H	G	G	G	H	d. h.	5 G + 2 H
Moll abst.:	G	H	G	G	H	G	G	d. h.	5 G + 2 H
Moll inst.:	G	H	G	G	H	U	H	d. h.	3 G + 3 H + 1 U
Moll aufst:	G	H	G	G	G	G	H	d. h.	5 G + 2 H
Molldur :	G	G	H	G	H	U	H	d. h.	3 G + 3 H + 1 U

d. h. eine Einteilung der Oktav in 5 G + 2 H bezw. 3 G + 2 H + 1 U; es ist also annähernd 2 G = 1 U + 1 H, ferner 1 G = 2 H oder die Oktav = 12 H.

Der Versuch, eine der Leitern auf einen anderen Ton als Tonika zu errichten, führt naturgemäß zu einer weiteren Halbierung der Ganztöne, d. h. zu einer Einteilung der Oktav in 12 Halbtöne, die wir, von den feineren Unterschieden absehend, gleichgroß machen können, indem wir jedem Halbton den Abstand 30103 : 12 = 2508,6 bezw. 1000 : 12 = 83,3 M.-O. zuteilen. Damit hätten wir die Stimmung unserer modernen Instrumente mit festen Tönen, z. B. des Klaviers, nach gleichschwebender Temperatur. Es wäre dann nur noch zu untersuchen, inwieweit die einzelnen Intervalle von der reinen Stimmung abweichen.

Die historische Entwicklung konnte jedoch nicht diesen einfachen, rein formalen Weg gehen, und nachträglich die Berechtigung desselben prüfen. Das Bedürfnis, auf einen beliebigen Ton der Leiter als Tonika zu transformieren, ist in den früheren Stadien nicht vorhanden, ferner standen ja unsere heutigen Leitern nicht als fertige Gebilde da, sondern entwickelten sich erst allmählich.

Schon bei den 5-stufigen Leitern konnten wir dieselben entweder aus reiner Quintenstimmung oder auf gemischter Quinten-Terzenstimmung aufbauen. Erinnern wir uns nun daran, daß die Verwendung der natürlichen Terz in älterer Zeit vielfach, wenigstens theoretisch, abgelehnt wurde, so ist es verständlich, daß die reine Quintenstimmung, d. h. die sogenannte pythagoräische Stimmung, in der Musiktheorie einen bevorzugten Platz einnehmen mußte, den sie tatsächlich auch bis Zarlino im 16. Jahrhundert einnahm. Wir untersuchen deshalb zunächst die reine Quintenstimmung.

1. Zwölfstufige Skala aus reiner Quintenstimmung.

Von c in Quinten nach oben schreitend, waren wir zunächst zu einer 7-stufigen Leiter c — d — e — fis — g — a — b — c′ gelangt (hypolyd. Typ), die also dem Schema c → g → d → a → e → b → fis entspricht, und 5 große Ganztöne und 2 kleine Halbtöne $(5 \cdot 170 + 2 \cdot 75)$ enthält. Gehen wir weitere 5 Quinten nach oben, so ist das Schema:

c → g → d → a → e → b → fis → cis → gis → dis → ais → eis

und die Leiter:

c	cis	d	dis	e	eis	fis	g	gis	a	ais	b	c′
0	95	170	265	340	435	510	585	680	755	850	925	1000
95	75	95	75	95	75	75	95	75	95	75	75	

eine weitere Quint von eis nach oben würde bis ergeben, dessen Abstand 20 Millioktaven (587 log-Einheiten) beträgt, d. h. einen Ton, der den Grundton c sehr nahe liegt. Man bezeichnet das dem Abstand 587 (20) entsprechende Intervall als „pythagoräisches Komma“, und sieht, daß es nur wenig größer als das syntonische Komma (539 bezw. 18) ist. Man sieht ferner, daß die Oktav ziemlich gleichmäßig in 12 Halbtöne unterteilt ist, die sich um 1 pyth. Komma voneinander unterscheiden ($5 \cdot 95 + 7 \cdot 75 = 1000$).

Führt man die Stimmung nach Abwärtsquinten aus, so ergibt sich analoges. Fig. 5 gibt eine Übersicht über alle in beiden Fällen erhaltenen Intervalle.

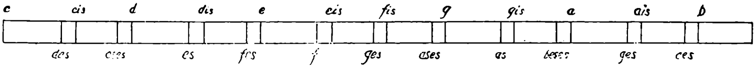


Fig. 5. 12-stufiges System in reiner Quintenstimmung von c aus nach oben und unten.

Wir gelangen zu einer größeren Symmetrie in der Bezeichnungsweise der Töne, wenn wir beachten, daß unsere c-Durtonleiter in der Form:

$$c - d - e \smile f - g - a - b \smile c',$$

die also gerade durch die Buchstaben a bis g in der Reihenfolge des Alphabetes dargestellt wird, die beiden Halbtöne symmetrisch zu d enthält; wählen wir also d als Grundton, so entspricht die c-Durtonleiter gerade der symmetrisch gebauten Leiter von d aus, d. h. dem phrygischen Typus, oder dem Schema:

$$f \leftarrow c \leftarrow g \leftarrow d \rightarrow a \rightarrow e \rightarrow b$$

Stimmt man nun nach oben und unten weiter, so erhält man die folgenden beiden Reihen, in welchen wir unter die Notenbezeichnungen die entsprechenden Werte in M.-O. geschrieben haben. Da einer Quint nach oben eine Zunahme um 585 entspricht, so haben wir bei jedem Schritt nach oben einfach 585 zu addieren; die Tausender bleiben fort, da dies dem Zurückholen in die Oktav entspricht; an Stelle der Werte über 500 können wir die Ergänzungswerte derselben zu 1000, aber mit negativem Vorzeichen, schreiben.

Stimmung nach oben:

d —	a —	e —	b —	fis —	cis —	gis —	dis —	ais —	eis —	bis
0	585	170	755	340	925	510	95	680	265	850
	= −415		= −245		= −75	= −490		= −320		= −15

— fisis —	(cisis)
435	20

Stimmung nach unten:

d	— g	— c	— f	— bes	— es	— as	— des	— ges	— ces	— fes	— beses	— (eses)
0	415	−170	245	−340	75	490	−95	320	−265	150	−435	−20

Ordnet man die Intervalle nach ihrer Größe, so erhält man die Anordnung der Tafel 16.

Tafel 16.

12-stufige Leiter in reiner Quintenstimmung.

d	= 0	} 20 {	0	= d
cisis	= 20		— 20	= eses
es	= 75	} 20 {	— 75	= cis
dis	= 95		— 95	= des
fes	= 150	} 20 {	— 150	= bis
e	= 170		— 170	= c
f	= 245	} 20 {	— 245	= b
eis	= 265		— 265	= ces
ges	= 320	} 20 {	— 320	= ais
fis	= 340		— 340	= bes
g	= 415	} 20 {	— 415	= a
fisis	= 435		— 435	= beses
as	= 490	20	— 490	= gis

Man sieht die vollkommen symmetrische Einteilung und Bezeichnung, indem sich als Ergänzungsintervalle zur Oktav jeweils die Bezeichnungen d und d, c und e, b und f, a und g entsprechen, ferner einfacher oder doppelter Erhöhung oder Erniedrigung des einen einfache oder doppelte Erniedrigung oder Erhöhung des anderen entsprechen und umgekehrt.

Eine gleichmäßige Temperierung dieses reinen Quintensystemes führt ohne weiteres zu unseren geläufigen „enharmonischen Verwechslungen“: (wir verwenden für temperierte Systeme große Buchstaben) D = Eses = Cisis, Dis = Es, Fes = E usw. und zum Abstand 83, 33 des temperierten Halbtones.

2. Zwölfstufige Skala aus Quinten- und Terzenstimmung nach Rameau.

Wie erwähnt, konnte sich im Laufe der historischen Entwicklung die gleichmäßig temperierte Skala trotz ihrer bestechenden Einfachheit nicht sofort durchsetzen. Noch im Jahre 1726 verteidigt Rameau, der später am meisten zur Einführung der gleichmäßig temperierten Skala beigetragen hat, zunächst eine andere Art der Stimmung, bei welcher die Terzen der gebräuchlichen Tonarten auf Kosten der Quinten und der ungebräuchlichen Tonarten rein gehalten werden[1]).

Stimmt man von c (das wir wieder, wie früher, als Grundton wählen), aus in Quinten aufwärts, so ist, wie wir sahen, die 4. Quint e (340) um ein syntonisches Komma (18) größer als die natürliche Terz $\underline{e}$ von c (322). Soll also die Terz $\underline{e}$ rein herauskommen, so müssen wir alle vier Quintenschritte um $18:4 = 4{,}5$ verkleinern, erhalten also die folgende Reihe (in der wir die so verkleinerten Quinten mit ″ bezeichnet haben)

c ——	g″ ——	d″ ——	a″ ——	$\underline{e}$
0	580,5	161	741,5	322

Nun stimmt man ebenso weiter bis zur 4. Quint von $\underline{e}$, die gleich der natürlichen Terz $\underline{\underline{gis}}$ von $\underline{e}$ werden soll; also:

$\underline{e}$ ——	b″ ——	fis″ —	cis″ —	$\underline{\underline{gis}}$
322	902,5	483	63,5	644

Nun ist das Intervall $\underline{\underline{gis}}$—c′ (356) größer als die natürliche Terz von $\underline{\underline{gis}}$, aber auch größer als die pythagoräische Terz; will man also durch 4 angenäherte Quinten nach c′ gelangen, so muß man diese Quinten etwas größer wählen, nämlich um $(356-340):4 = 4{,}0$; wir erhalten also, mit dem Zeichen ‴ für diese vergrößerten Quinten

$\underline{\underline{gis}}$ ——	dis‴ ——	ais‴ —	eis‴ —	c′
644	233	822	411	0

So entsteht die Leiter:

c	cis″	d″	dis‴	$\underline{e}$	eis‴	fis″	g″	$\underline{\underline{gis}}$
0	63,5	161	233	322	411	383	580,5	644

a″	ais‴	b″	c′,
741,5	822	902,5	1000

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 457.

in welcher zwar eine Reihe großer Terzen rein auftritt, jedoch auf Kosten der Quintenreinheit; die Oberquint g″ von c weicht um — 4,5 von der reinen Quint ab; um nahezu den gleichen Betrag (— 4) der die Unterquint darstellende Ton eis‴; auch die kleine Unterterz von c $\underline{\text{a}}$ = 737 wird durch a″ = 741,5 nicht besonders gut dargestellt, insbesondere wird die kleine Terz $\overline{\text{es}}$ von c durch dis‴ (233 statt 263) recht schlecht wiedergegeben.

Dieses System, das allerdings noch 1762 von d'Alembert als das gewöhnlich in Frankreich gebrauchte bezeichnet wird, ist, wir wir erwähnten, von seinem Erfinder selbst zugunsten der gleichschwebenden Temperatur aufgegeben worden; es hat insofern historisches Interesse, als es zeigt, wie es eben unmöglich ist, bei einer auf 12 begrenzten Stufenzahl beide Harmonien, natürliche Quint und natürliche Terz, gleichzeitig einigermaßen genau rein darzustellen.

3. Das Quinten-Terzengewebe der zwölfstufigen Skala.

Um die zwölfstufige Skala, gemischt aus Quinten und Terzen, zu bilden, schreiben wir zunächst nochmals alle Intervalle, vom Grundton c ausgehend, die wir in Tafel 15 als in den heutigen Tonarten vorkommend gefunden haben, an:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
\text{c} & & \text{d} & & \overline{\text{es}} & & \underline{\text{e}} & & \text{f} & & \text{g} & & \overline{\text{as}} & & \underline{\text{a}} & & \overline{\text{bes}} & & \underline{\text{b}} & & \text{c}' \\
0 & & 170 & & 263 & & 322 & & 415 & & 585 & & 678 & & 737 & & 848 & & 907 & & 1000 \\
& 170 & & 93 & & 59 & & 93 & & 170 & & 93 & & 59 & & 111 & & 59 & & 93 &
\end{array}$$

das entsprechende Schema ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{\text{a}} & — & \underline{\text{e}} & — & \underline{\text{b}} & — & (\underline{\text{fis}}) \\
| & & | & & | & & | \\
\text{f} & — & \text{c} & — & \text{g} & — & \text{d} \\
| & & | & & | & & | \\
(\overline{\text{des}}) & — & \overline{\text{as}} & — & \overline{\text{es}} & — & \overline{\text{bes}}
\end{array}$$

Wir sehen, daß nur die großen Ganztöne c ÷ d und f ÷ g noch nicht unterteilt sind, und daß wir durch Hinzufügung der (in Klammern gesetzten) Terzen $\overline{\text{fis}}$ von d nach aufwärts und $\overline{\text{des}}$ von f nach abwärts bereits zu einer 12-Teilung kommen (des = 93 und $\underline{\text{fis}}$ = 492); die Intervalle sind:

$$93+77+93+59+93+77+93+93+59+111+59+93=1000$$

Eine gewisse Unsymmetrie, die schon in dem Schema ersichtlich ist, (2 Oberquinten, aber nur 1 Unterquint von c) und die sich besonders in dem Auftreten des Intervalles $\underline{a} - \overline{bes}$ (111) bemerkbar macht, wäre zu vermeiden, wenn man $\overline{bes}$ (848) durch bes (830) ersetzte; dann wird ja allerdings die Intervallsumme $\underline{a} - \underline{b} = 170 = 111 + 59$ durch $93 + 77$ ersetzt, und in dem Schema stehen jetzt gleichviel Ober- und Unterquinten, jedoch sind jetzt 4 Oberterzen und nur 3 Unterterzen vorhanden. Ersetzte man nun $\overline{fis}$ (492) durch $\overline{ges}$ (508), so hätte man 3 Ober- und 4 Unterterzen. Eine vollständige Symmetrisierung ist in einem System mit gerader Stufenzahl nicht möglich. Das Schema heißt also jetzt:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \underline{a} & - & \underline{e} & - & \underline{b} & - & (\underline{fis}) \\ & & | & & | & & | & & \\ bes & - & f & - & c & - & g & - & d \\ & & | & & | & & | & & \\ (\overline{ges}) & - & \overline{des} & - & \overline{as} & - & \overline{es} & & \end{array}$$

wobei nur eines der beiden in Klammern gesetzten Intervalle zu nehmen ist. Oder, wenn wir aus dem oben angegebenen Grunde der symmetrischen Bezeichnungsweise an Stelle von c d als Grundton wählen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \underline{b} & - & \underline{fis} & - & \underline{cis} & - & (\underline{gis}) \\ & & | & & | & & | & & | \\ c & - & g & - & d & - & a & - & c \\ & & | & & | & & | & & \\ (\overline{as}) & - & \overline{es} & - & \overline{bes} & - & \overline{f} & & \end{array}$$

und die Leiter ist:

d	$\overline{es}$	e	$\overline{f}$	$\underline{fis}$	g	$\underline{gis}$	a	$\overline{bes}$	$\underline{b}$	c	$\underline{cis}$	d′
0	93	170	263	322	415	492	585	618	737	830	907	1000
						$\overline{as}$						
						508						

$$\underbrace{\quad}_{93}\ \underbrace{\quad}_{77}\ \underbrace{\quad}_{93}\ \underbrace{\quad}_{59}\ \underbrace{\quad}_{93}\ \underbrace{\quad}_{77}\ \underbrace{\quad}_{93}\ \underbrace{\quad}_{93}\ \underbrace{\quad}_{59}\ \underbrace{\quad}_{93}\ \underbrace{\quad}_{77}\ \underbrace{\quad}_{93}$$

93 77

Schreiben wir zum Vergleich die dem symmetrischen reinen Quintenschema

$$(as) \leftarrow es \leftarrow bes \leftarrow f \leftarrow c \leftarrow g \leftarrow d \rightarrow a \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow fis \rightarrow cis \rightarrow (gis)$$

entsprechende Leiter:

d	es	e	f	fis	g	gis	a	bes	b	c	cis	d′
0	55	170	245	340	415	510	585	660	775	830	925	1000
						as						
						490						

$\underbrace{\quad}_{75}\ \underbrace{\quad}_{95}\ \underbrace{\quad}_{75}\ \underbrace{\quad}_{95}\ \underbrace{\quad}_{75}\ \underbrace{\quad}_{95}\ \underbrace{\quad}_{75}\ \underbrace{\quad}_{75}\ \underbrace{\quad}_{95}\ \underbrace{\quad}_{75}\ \underbrace{\quad}_{95}\ \underbrace{\quad}_{75}$

75 95

an, so sieht man folgenden grundlegenden Unterschied:

In der 12-stufigen Quintenterzenleiter treten mindestens 3 kleinste Intervalle auf, die wir als konstituierende Intervalle des Systems bezeichnen wollen; das 12-stufige Quintensystem dagegen ist aus 2 konstituierenden Intervallen gebildet.

Wir stellen die Intervalle samt ihrer Bezeichnung, ihrem Bildungsschema, sowie samt den Abständen in beiden Maßeinheiten in Tafel 17 zusammen.

Tafel 17.

Konstituierende Intervalle der 12-stufigen Skalen.

Beispiel	Bezeichn.	Bildungsschema.	Schw.-Verh.	Abstand
I. Quinten-Terzen-Skala				
$\bar{\text{f}} \div \underline{\text{fis}}$	Terzendiff.	$-1\,q + 2\,t$	$\frac{25}{24}$	1773 (59)
$\underline{\text{es}} \div \text{e}$	Terzend. + s. K.	$+3\,q + 1\,t$	$\frac{135}{128}$	2312 (77)
$\text{d} \div \bar{\text{es}}$	Leiteton	$-1\,q - 1\,t$	$\frac{16}{15}$	2803 (93)
II. Quinten-Skala				
d ÷ es	Limma, kl. H.	$-5 \cdot q$	$\frac{256}{243}$	2264 (75)
es ÷ e	pyth. gr. Halbt.	$7 \cdot q$	$\frac{2187}{2048}$	2851 (95)

Zugleich sieht man, daß zwischen diesen 5 Intervallen folgende Beziehungen bestehen:

1773 + 539 = 1773 + synt. Komma = 2312 (59 + 18 = 77)
1773 + 491 = 1773 + 1030 — s. K. = 2264 (59 + 16 = 75)
2312 + 491 = 2312 + 1030 — s. K. = 2803 (77 + 16 = 93)
2312 + 539 = 2312 + synt. Komma = 2851 (77 + 18 = 95)
2264 + 539 = 2264 + synt. Komma = 2803 (75 + 18 = 93)
2264 + 587 = 2264 + pyth. Komma = 2851 (75 + 20 = 95)

Wir sehen, daß neben den beiden Kommas noch ein kleines Intervall auftritt, das bedeutungsvoll ist, nämlich 1030 (34); es ergibt sich sofort daß

$1030 = 2803 - 1773 = (-1q - 1t) - (-1q + 2t) = -3t$; es ist also das Intervall, das das Intervall von 3 Terzen zur Oktav ergänzt; es wird „Kleiner Viertelton" oder kleine Diesis genannt. Sein Schw.-Verh. ergibt sich aus $\frac{16}{15} : \frac{25}{24}$ zu $\frac{128}{125}$.

Sechster Teil.

Versuche zur Erweiterung des Tonsystems.

1. Das allgemeine Quinten-Terzen-Gewebe.

Da alle Intervalle aus Quintenschritten, Terzenschritten und kombinierten Quinten-Terzenschritten gebildet werden sollen, so stellen wir zunächst das allgemeine Quinten-Terzengewebe nach v. Oettingen auf, das sich in seiner Ebene nach allen Richtungen ins Unendliche erstreckt. In der Bezeichnungsweise der Töne wählen wir, um Intervalle bequem schreiben zu können, die aus mehreren Terzenschritten gebildet sind, fis_1 an Stelle von $\overline{\text{fis}}$, ais_2 an Stelle von $\underline{\underline{\text{ais}}}$ usw.; entsprechend bes^1 statt $\overline{\text{bes}}$, ges^2 statt $\overline{\overline{\text{ges}}}$ usf. Tafel 18 gibt den zentral gelegenen Ausschnitt aus dem Gewebe: wir haben die Abstände in M.-O. beigeschrieben.

Tafel 18.

Quinten-Terzengewebe.

dis_3	ais_3	eis_3	bis_3	$fisis_3$	$cisis_3$	$gisis_3$	$disis_3$	$aisis_3$	$eisis_3$	$bisis_3$
41	626	211	796	381	966	551	136	721	306	891
b_2	fis_2	cis_2	gis_2	dis_2	ais_2	eis_2	bis_2	$fisis_2$	$cisis_2$	$gisis_2$
719	304	889	474	59	644	229	814	399	984	569
g_1	d_1	a_1	e_1	b_1	fis_1	cis_1	gis_1	dis_1	ais_1	eis_1
397	982	567	152	737	322	907	492	77	662	247
es	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	cis
75	660	245	830	415	0	585	170	755	340	925
ces^1	ges^1	des^1	as^1	es^1	bes^1	f^1	c^1	g^1	d^1	a^1
753	338	923	508	93	678	263	848	433	18	603

ases^2	eses^2	beses^2	fes^2	ces^2	ges^2	des^2	as^2	es^2	bes^2	f^2
431	16	601	186	771	356	941	526	211	696	231
feses^3	ceses^3	geses^3	deses^3	ases^3	eses^3	beses^3	fes^3	ces^3	ges^3	des^3
109	694	279	864	449	34	619	204	789	374	959

Damit auch die nahe der Oktav von d gelegenen kleinen Intervalle besser sichtbar werden, schreiben wir, wie oben, für Intervalle $i > 500$ die Werte $i' = -(1000 - i)$ und erhalten so die Tafel 19. Es genügt jetzt, die obere Hälfte des Tonfeldes wiederzugeben, in der unteren Hälfte gilt bei Vertauschung von rechts und links das entgegengesetzte Vorzeichen. In den Bezeichnungen entspricht sich —is, —isis und —es, —eses, d und d, e und c, f und b, g und a und umgekehrt.

Tafel 19.

Quinten-Terzengewebe in kleinsten Intervallen.

fisis$_4$	cisis$_4$	gisis$_4$	disis$_4$	aisis$_4$	eisis$_4$	bisis$_4$	fisisis$_4$	cisisis$_4$	gisisis$_4$	disisis$_4$
363	−52	−467	118	−297	288	−127	458	43	−273	213
dis$_3$	ais$_3$	eis$_3$	bis$_3$	fisis$_3$	cisis$_3$	gisis$_3$	disis$_3$	aisis$_3$	eisis$_3$	bisis$_3$
41	−374	211	−204	381	−34	−449	−136	−279	306	−109
b$_2$	fis$_2$	cis$_2$	gis$_2$	dis$_2$	ais$_2$	eis$_2$	bis$_2$	fisis$_2$	cisis$_2$	gisis$_2$
−281	304	−111	474	59	−356	229	−186	399	−16	−431
g$_1$	d$_1$	a$_1$	e$_1$	b$_1$	fis$_1$	cis$_1$	gis$_1$	dis$_1$	ais$_1$	eis$_1$
397	−18	−433	152	−263	322	−93	492	77	−338	247
					d	a	e	b	fis	cis
					0	−415	170	−245	340	−75

Es zeigt sich, daß bereits in diesem kleinen Ausschnitt aus dem doppelt unendlichen Tonfeld eine Reihe sehr kleiner Intervalle auftritt, z. B. die schon bekannten: 18 (synton. Komma), 34 (Kl. Viertelton), 16 (die Differenz dieser beiden), ja noch kleinere als Differenzen, z. B. g_1 — fisis$_2$ oder $399 - 397 = 2$; aus der Tafel liest man unmittelbar ab, daß $2 = 8\,q + 1\,t$ sein muß, wenn wir die nötigen Oktaven abgezogen denken; in der Tat ist $8 \cdot 585 + 1 \cdot 322 = 5002$ oder nach Abzug von 5 Oktaven $= 2$.

Die Begrenzung eines Tonfeldes und damit die Stufenzahl eines jeweiligen Tonsystems wird nun davon abhängen, welche kleinsten Intervalle man in dem System aufrechterhalten und welche man vernachlässigen will.

2. Das 53-stufige System von Oettingens.

A. v. Oettingen hat die Oktav in 53 Stufen eingeteilt, indem er in dem doppelt unendlichen Tongewebe ein Gebiet von 53 Tönen abgrenzte. Dieses Gebiet hat eine bestimmte geometrische Figur, und es ist möglich, die ganze Ebene mit solchen Figuren lückenlos und ohne Überschneidungen zu bedecken. Vgl. Tafel 20.

Tafel 20.

Das 53-stufige Öttingensche Tongewebe.

ges^2	des^2	as^2	es^2	bes^2	geses^3	deses^3	ases^3	eses^3	beses^3	fes^3
eses^3	beses^3	fes^3	bis$_3$	fisis$_3$	cisis$_3$	gisis$_3$	disis$_3$	aisis$_3$	fis$_2$	cis$_2$
aisis$_3$	fis$_2$	cis$_2$	gis$_2$	dis$_2$	ais$_2$	eis$_2$	bis$_2$	fisis$_2$	d$_1$	a$_1$
fisis$_2$	d$_1$	a$_1$	e$_1$	b$_1$	fis$_1$	cis$_1$	gis$_1$	dis$_1$	bes	f
dis$_1$	bes	f	c	g	d	a	e	b	fis	des^1
b	fis	des^1	as^1	es^1	bes^1	f^1	c^1	g^1	d^1	beses^2
g^1	d^1	beses^2	fes^2	ces^2	ges^2	des^2	as^2	es^2	bes^2	geses^3
es^2	bes^2	geses^3	deses^3	ases^3	eses^3	beses^3	fes^3	bis$_3$	fisis$_3$	cisis$_3$
bis$_3$	fisis$_3$	cisis$_3$	gisis$_3$	disis$_3$	aisis$_3$	fis$_2$	cis$_2$	gis$_2$	dis$_2$	ais$_2$

Man sieht sofort, daß ein Fortschreiten um 8 Quinten nach rechts und um 1 Terz nach oben zu dem gleichen Ton eines benachbarten Feldes führt, ebenso aber auch das Fortschreiten um 3 Quinten und 7 Terzen, m. a. W. das Tonfeld ist dadurch bestimmt, daß die beiden kleinen Intervalle

$$8q + 1t = 2 \quad \text{(in den log. Einheiten: = 48)}$$
$$3q + 7t = 9 \quad \text{(„ „ „ „ : = 252)}$$

vernachlässigt werden. Selbstverständlich wird mit diesen beiden Intervallen auch das Intervall $-5q + 6t = 7$ (welches als Kleisma bezeichnet wird), das sich als Differenz der beiden ersten Intervalle ergibt, vernachlässigt. Um zu erfahren, welche Intervalle in dem 53-stufigen System erhalten bleiben, bezw. welches die kleinsten auftretenden Intervalle sind, ordnen wir die 53 Töne der Oktav und bilden die Differenzintervalle. Vgl. Tafel 21.

Tafel 21.

Tonleiter des 53-stufigen Systems v. Öttingens.

d	d′	eses^3	dis_2	dis_1	es^1	es^2	disis_3	e_1	e
0	18	34	59	77	93	111	136	152	170
	18	16	25	18	16	18	25	16	18

e	fes^2	fes^3	eis_2	f
170	186	204	229	245
	16	18	25	16

f	f′	geses^3	fis_2	fis_1	fis	ges^2	fisis_3	fisis_2	g
245	263	279	304	322	340	356	381	399	415
	18	16	25	18	18	16	25	18	16

g	g′	ases^3	gis_2	gis_1	as^1	as^2	gisis_3	a_1	a
415	433	449	474	492	—492	—474	—449	—433	—415
	18	16	25	18	16	18	25	16	18

a	beses^2	beses^3	ais_2	bes	bes^1	bes^2	aisis_3	b_1	b
—415	—399	—381	—356	—340	—322	—304	—279	—263	—245
	16	18	25	16	18	18	25	16	18

b	ces^2	bis_3	bis_2	c
—245	—229	—204	—186	—170
	16	25	18	16

c	c′	deses^3	cis_2	cis_1	des^1	des^2	cisis_3	d_1	d
—170	—152	—136	—111	—93	—77	—59	—34	—18	—0
	18	16	25	18	16	18	25	16	18

Die kleinsten auftretenden Intervalle sind somit 16, 18 und 25; und zwar tritt das Intervall 16 19mal, das Intervall 18 22mal und das Intervall 25 12mal auf Demnach schreiben wir die „Gleichung“ des 53stufigen Systems in der Form

$$19 \cdot \underline{16} + 22 \cdot \underline{18} + 12 \cdot \underline{25} = 1000$$

bei Verwendung der Oktaveneinheit 30103 ergibt sich die Gleichung in der Form

$$19 \cdot 491 + 22 \cdot 539 + 12 \cdot 743 = 30103.$$

Die Intervalle 491 und 539 (16 und 18) haben wir bereits oben kennen gelernt; das dritte Intervall 743 (25) entspricht, wie aus Tafel 20 ersichtlich, dem Schritt 5 t — 1 q und ist die Summe von syntonischem Komma und Kleisma.

Wir bezeichnen diese drei Intervalle als die „konstituierenden“ Intervalle des 53-stufigen Systems, während die beiden verschwindenden Intervalle $8q + 1t = 2$ (in log. Einheiten: 48) und $-5q + 6t = 7$ (in log. Einheiten 204) als die „definierenden“ Intervalle des Systems zu bezeichnen sind.

Die beiden definierenden Intervalle unseres Systems sind also das Kleisma 204 und das Intervall 48, das wir, da es gleich der Differenz zwischen pythagoräischem und syntomischem Komma ist, also „Kommadifferenz“ bezeichnen können.

Die Betrachtung der Tafel 21 zeigt uns noch, daß die Intervalle $d \div e$, $g \div a$ und $c \div d$ vollkommen symmetrisch unterteilt sind; wir können auch die Intervalle $f \div g$ und $a \div b$ ebenso symmetrisch unterteilen, wenn wir die nötigen „enharmonischen Verwechslungen“ vornehmen und in dem Schema der Tafel 20 die nötigen Umstellungen machen. Dann ergibt sich die Leiter der Tafel 22.

Tafel 22.

Symmetrisierte Leiter des 53-stufigen Systems.

d	f'	$eses^3$	dis_2	dis_1	es^1	es_2	$disis_3$	e_1	g
f	f'	$geses^3$	fis_2	fis_1	ges^1	ges^2	$fisis_3$	g_1	g
g	g'	$ases^3$	gis_2	gis_1	as^1	as^2	$gisis_3$	a_1	a
a	a'	$beses^3$	ais_2	ais_1	bes^1	bes^2	$aisis_3$	b_1	b
c	c'	$deses^3$	cis_2	cis_1	des^1	des^2	$cisis_3$	d_1	d

18 16 25 18 16 18 25 16 18

e	fes^2	fes^3	eis_2	f
c	bis_2	bis_3	ces^2	b

16 18 25 16

Wir finden somit eine Teilung des großen Ganztones und des kleinen Halbtones in folgende Intervalle:

$$\text{Gr. Ganzton} = 2 \cdot \underline{25} + 4 \cdot \underline{18} + 3 \cdot \underline{16} = \underline{170}$$
$$\text{Kl. Halbton} = 1 \cdot \underline{25} + 1 \cdot \underline{18} + 2 \cdot \underline{16} = \underline{\ 75}$$

d. h., da die Oktav 5 Ganztöne und 2 kl. Halbtöne umfaßt:

$$1000 = 5 \cdot (2 \cdot \underline{25} + 4 \cdot \underline{18} + 3 \cdot \underline{16}) + 2 \cdot (1 \cdot \underline{25} + 1 \cdot \underline{18} + 2 \cdot 16)$$
$$= 12 \cdot \underline{25} + 22 \cdot \underline{18} + 19 \cdot \underline{16}$$

wie oben. Das so symmetrisierte Tonfeld ist in Tafel 23 wiedergegeben.

Tafel 23.

Symmetrisiertes 53-stufiges Tonsystem.

bis$_3$ fisis$_3$ cisis$_3$ gisis$_3$ disis$_3$ aisis$_3$
fis$_2$ cis$_2$ gis$_2$ dis$_2$ ais$_2$ eis$_2$ bis$_2$
g$_1$ d$_1$ a$_1$ e$_1$ b$_1$ fis$_1$ cis$_1$ gis$_1$ dis$_1$ ais$_1$
f c g d a e b
ges$'$ des$'$ as$'$ es$'$ bes$'$ f$'$ c$'$ g$'$ d$'$ a$'$
fes^2 ces^2 ges^2 des^2 as^2 es^2 bes^2
geses^3 deses^3 ases^3 eses^3 beses^3 fes^3

Dieses Schema wird bedeutend übersichtlicher und zeigt die Symmetrie-Eigenschaften besser, wenn wir die Terz nach oben wieder durch das Fortschreiten unter 60^0 gegen die Horizontale nach rechts darstellen, in der Vertikalen stehen dann jeweils Töne, die gegeneinander den Abstand von 59 (in log. Einheiten 1773, Terzendifferenz oder Chroma) haben. Vgl. Tafel 24.

Tafel 24.

53-stufiges System, bezogen auf die chromatische Achse und symmetrisiert.

bis$_3$ fisis$_3$ cisis$_3$ gisis$_3$ disis$_3$ aisis$_3$
fis$_2$ cis$_2$ gis$_2$ dis$_2$ ais$_2$ eis$_2$ bis$_2$
g$_1$ d$_1$ a$_1$ e$_1$ b$_1$ fis$_1$ cis$_1$ gis$_1$ dis$_1$ ais$_1$
f c g d a e b
ges^1 des^1 as^1 es^1 bes^1 f^1 c^1 g^1 d^1 c^1
fes^2 ces^2 ges^2 des^2 as^2 es$_2$ bes^2
geses^3 deses^3 ases^3 eses^3 beses^3 fes^3

3. Die 59 „natürlichen" Intervalle Ariels.

Ariel hat im 2. Kapitel seines genannten Buches die Existenz von 59 „natürlichen" Intervallen behauptet, die sich organisch in 19 Gruppen gliedern sollen. Ohne auf die Art der Ableitung dieser Intervalle näher einzugehen, die durch Nichtanwendung der Hauptmann-Helmholtzschen Bezeichnungsweise recht unübersichtlich geworden ist, berechnen wir aus den in Tab. 16 des Buches angegebenen Schwingungsverhältnissen die Bildungsgesetze sowie die Abstände dieser Intervalle und bilden zugleich die Differenzen dieser Abstände. Vgl. Tafel 25, die den Überblick für die untere Hälfte der Oktav gibt.

Tafel 25.
Die natürlichen Intervalle Ariels.

	Schwing.-Verh.	Bildungsges.	Abstand	Diff.
I.	$\frac{128}{125} = \frac{2^7}{5^3} = \frac{2}{1} : \left(\frac{5}{4}\right)^3$	$- 3t$	34	34
	$\frac{648}{625} = \frac{2^3 \cdot 3^4}{5^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{5}{4}\right)^4 : \frac{2}{1}$	$4q - 4t$	52	18
	$\frac{25}{24} = \frac{5^2}{2^3 \cdot 3} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 : \frac{3}{2}$	$- 1q + 2t$	59	7
II.	$\frac{16}{15} = \frac{4^2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} : \frac{5}{4}$	$- 1q - 1t$	93	34
	$\frac{27}{25} = \frac{3^3}{5^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^2 : \frac{2}{1}$	$3q - 2t$	111	18
	$\frac{625}{576} = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^6} = \left(\frac{5}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$- 2q + 4t$	118	7
III.	$\frac{3456}{3125} = \frac{2^7 \cdot 3^2}{5^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^5$	$3q - 5t$	145	27
	$\frac{10}{9} = \frac{2 \cdot 5}{3^2} = \frac{2}{1} : \frac{5}{4} : \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$- 2q + 1t$	152	7
	$\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \frac{2}{1}$	$2q$	170	18
	$\frac{15625}{13824} = \frac{5^6}{3^3 \cdot 2^9} = \left(\frac{5}{4}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^3$	$- 3q + 6t$	177	7
IV.	$\frac{144}{125} = \frac{2^4 \cdot 3^2}{5^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3$	$2q - 3t$	204	27
	$\frac{125}{108} = \frac{5^3}{2^2 \cdot 3^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{1}$	$- 3q + 3t$	211	7
	$\frac{75}{64} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^6} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} : \frac{2}{1}$	$1q + 2t$	229	18
V.	$\frac{32}{27} = \frac{2^5}{3^3} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^3$	$3q$	245	16
	$\frac{6}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{3}{2} : \frac{5}{4}$	$1q - 1t$	263	18
	$\frac{3125}{2592} = \frac{5^5}{2^5 \cdot 3^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \frac{2}{1}$	$- 4q + 5t$	270	7

VI.	$\frac{768}{625} = \frac{2^8 \cdot 3}{5^4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} : \left(\frac{5}{4}\right)^4$	1q	— 4t	297	27
	$\frac{100}{81} = \frac{2^2 \cdot 5^2}{3^4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2$	— 4q	+ 2t	304	7
	$\frac{5}{4}$		1t	322	18
VII.	$\frac{32}{25} = \frac{2^5}{5^2} = \frac{2}{1} : \left(\frac{5}{4}\right)^2$		— 2t	356	34
	$\frac{162}{125} = \frac{2 \cdot 3^4}{5^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 : \frac{2}{1}$	4q	— 3t	374	18
	$\frac{125}{96} = \frac{5^3}{2^5 \cdot 3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 : \frac{3}{2}$	— 1q	— 3t	381	7
VIII.	$\frac{20736}{15625} = \frac{2^8 \cdot 3^4}{5^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{5}{4}\right)^6$	4q	6t	408	27
	$\frac{4}{3} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2}$	— 1q		415	7
	$\frac{27}{20} = \frac{3^3}{2^2 \cdot 5} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 : \frac{5}{4} : \frac{2}{1}$	3q	— 1t	433	18
	$\frac{3125}{2304} = \frac{5^5}{2^8 \cdot 3^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^2$	2q	+ 5t	440	7
XI.	$\frac{864}{625} = \frac{2^5 \cdot 3^3}{5^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^4$	3q	— 4t	467	27
	$\frac{25}{18} = \frac{5^2}{2 \cdot 3^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{1}$	— 2q	+ 2t	474	7
	$\frac{45}{32} = \frac{3^2 \cdot 5}{2^5} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \frac{2}{1}$	2q	+ 1t	492	18
	—		—	—	16

Zwischen den 59 Intervallen treten, wie man sieht, die Intervalle 34, 27, 18, 16 und 7 auf; es herrscht somit sicherlich eine gewisse Willkür, indem z. B. in Gruppe I das Intervall 34 nicht mehr unterteilt wird, während es in Gruppe IV in 27 und 7 zerfällt. Auch die Gliederung in 19 Gruppen ist insofern willkürlich, als 18 Gruppen 3 bezw. 4 Intervalle umfassen, während die Gruppe 19 durch die Oktav allein gebildet wird.

Zudem ist z. B. das Intervall zwischen Gruppe IV und V (16) kleiner als die Intervalle innerhalb der Gruppen. Im Quintenterzengewebe stellen sich die 59 Intervalle folgendermaßen dar:

Tafel 26.

Die 59 natürlichen Intervalle Ariels im Quintenterzengewebe.

gisisis$_6$	disisis$_6$							
eisis$_5$	bisis$_5$	fisisis$_5$						
cisis$_4$	gisis$_4$	disis$_4$	aisis$_4$					
ais$_3$	eis$_3$	bis$_3$	fisis$_3$	cisis$_3$				
fis$_2$	cis$_2$	gis$_2$	dis$_2$	ais$_2$	eis$_2$			
	a$_1$	e$_1$	b$_1$	fis$_1$	cis$_1$	gis$_1$		
	f	c	g	d	a	e	b	
		as$'$	es$'$	bes$'$	f$'$	c$'$	g$'$	
			ces^2	ges^2	des^2	as^2	es^2	bes^2
				eses^3	beses^3	fes^3	ces^3	ges^3
					geses^4	deses^4	ases^4	eses^4
						beseses^5	feses^5	ceses^5
							deseses^6	aseses^6

Offenbar ist es unmöglich, mit der Figur der Tafel 26 die unendliche Tonebene lückenlos und ohne Überschneidungen zu bedecken. Außerdem ist das Tonfeld zwar symmetrisch, aber im übrigen recht willkürlich begrenzt, indem Intervalle, die erst durch eine relativ große Anzahl von Quinten- und Terzenschritten erreicht werden können, als „natürliche“ betrachtet werden, während solche, die dem Ausgangston viel näher stehen, dem System nicht angehören. Die Teilung der Oktav in 59 Teile ist zudem ziemlich ungleichmäßig, indem 6 mal das Intervall $\underline{34}$ 10 mal $\underline{27}$, 18 mal $\underline{18}$, 3 mal $\underline{16}$ und 22 mal $\underline{7}$ vorkommt. Die Gleichung des Systems wäre:

$$6 \cdot \underline{34} + 10 \cdot \underline{27} + 18 \cdot \underline{18} + 3 \cdot \underline{16} + 22 \cdot \underline{7} = 1000.$$

4. Mögliche Tonsysteme nach Opelt und Ariel.

Bekanntlich ist der Gedanke eines mehr als 12-stufigen Tonsystems nicht neu; daß die Araber und Perser eine Teilung der Oktav in 17 Stufen hatten, war von R. G. Kiesewetter[1])

1) H. von Helmholtz, a. a. O., S. 457.

1842 behauptet worden, wie im Vorwort erwähnt, hat dann W. Müller gefunden, daß die Araber tatsächlich eine 19-stufige Skala besaßen. Anderseits berichtet Prätorius in seinem Syntagma mysticum, „von einem Universalklavizimbel, welches er bei Kaiser Rudolfs Hoforganisten in Prag sah, und das in 4 Oktaven 77 Klaves hatte, also 19 in der Oktav, indem nicht nur die Obertasten alle verdoppelt waren, sondern auch noch zwischen e und f sowie zwischen h und c (b und c nach unserer Bezeichnungsweise) Töne eingeschoben waren."

In neuerer Zeit hat F. W. Opelt (1852), sich mit mehr als 12-stufigen Skalen befaßt; er nennt 7 temperierte Systeme, die seiner Ansicht nach möglich sind, nämlich die mit

12, 19, 22, 31, 34 und 50 Stufen.

Die Überlegung Opelts ist die folgende:

„Die Bedingung, in einer gleichstufigen Tonleiter jene zur Harmonie unerläßlich erforderlichen Intervalle möglichst genau zu erlangen, reduziert sich also auf die einfache Forderung, daß in der gleichstufigen Leiter die große Terz und Quinte in möglichster Reinheit mit vorkomme." Nun ist die Quint gleich der Summe von großer und kleiner Terz ($585 = 322 + 263$) und die Oktav gleich der Summe von Quint und Quart ($585 + 415 = 1000$); es soll also das Verhältnis $\frac{322}{263} = 1{,}22$ und gleichzeitig das Verhältnis $\frac{585}{415} = 1{,}41$ durch ganze Zahlen angenähert werden, d. h. das Verhältnis der den Intervallen : kleine Terz : große Terz : Quart entsprechenden Abstände $263 : 322 : 415$ ist durch das Verhältnis ganzer (kleiner) Zahlen anzunähern.

Opelt findet, wie erwähnt, die obigen 7 Systeme; es gibt aber, wie aus Tafel 27 hervorgeht, viel mehr Systeme, die einigermaßen der Bedingung entsprechen. Wir geben dieselben bis zum 53-stufigen System an, indem wir aus später ersichtlichen Gründen noch das mit 118 Stufen beifügen. In der Tafel sind ferner die für jedes System sich ergebenden Werte, sowie die Unterschiede gegenüber den Sollwerten angegeben.

Tafel 27.

Temperierte Systeme nach Opelts Methode.

Abstandsverhältnis	Näherung	Stufenzahl	Abstände			Differenzen		
263 : 322 : 415	—	—	263	322	415	—	—	—
= 1 : 1,224 : 1,574	—	—	263	322	415	—	—	—
2 : 2,448 : 3,148	2 : 2 : 3	7	286	286	428	23	—36	13
3 : 3,672 : 4,722	3 : 4 : 5	12	250	333	417	—13	11	2
4 : 4,896 : 6,296	4 : 5 : 6	15	267	333	400	4	11	—15
5 : 6,120 : 7,870	5 : 6 : 8	19	263	316	421	0	—6	6
6 : 7,344 : 9,444	6 : 7 : 9	22	273	318	409	10	—4	—6
7 : 8,568 : 11,018	7 : 9 : 11	27	259	333	408	—4	11	—7
8 : 9,792 : 12,592	8 : 10 : 13	31	258	323	419	—5	1	4
9 : 11,016 : 14,166	9 : 11 : 14	34	265	323	412	2	1	—3
10 : 12,240 : 15,740	10 : 12 : 16	38	263	316	421	0	—6	6
11 : 13,464 : 17,314	11 : 13 : 17	41	268	317	415	5	—5	0
12 : 14,688 : 18,888	12 : 15 : 19	46	261	326	413	—2	4	—2
13 : 15,912 : 20,462	13 : 16 : 20	49	265	327	408	2	5	—7
	13 : 16 : 21	50	260	320	420	—3	—2	5
14 : 17,136 : 22,036	14 : 17 : 22	53	264	321	415	1	—1	0
31 : 37,944 : 48,794	31 : 38 : 49	118	263	322	415	0	0	0

Im einzelnen ist zu sagen:

1. Die Fehler nehmen naturgemäß mit zunehmender Stufenzahl ab, doch nicht regelmäßig; z. B. zeigt das 49-stufige System größere Fehler als das 19-stufige.

2. Das 7-stufige System kommt wegen seiner bis zu zwei Kommas betragenden Fehler als temperiertes System nicht in Betracht.

3. Im 12-stufigen System ist die Quart (und Quint) recht rein, die Terzen dagegen sind ziemlich unrein wiedergegeben.

4. Das 15- und das 27-stufige System zeigen große Differenzen und scheiden deshalb aus.

5. Das 19-stufige System gibt die kleine Terz sehr gut, die große Terz und die Quart haben den Fehler von $\frac{1}{3}$ Komma: dieses System ist gegenüber dem 22-stufigen vorzuziehen.

6. Das 38-stufige System ist eine nochmalige Unterteilung des 19-stufigen.

7. Von den höherstufigen Systemen sind das mit 53 und das mit 118 Stufen besonders gut.

Es ergibt sich somit, daß der Opeltsche Gedanke, die Intervalle der Quart, der großen und der kleinen Terz durch passende Wahl der Stufenzahl möglichst rein darzustellen, als nächste Erweiterung das 19-stufige System ergibt, dann aber zu einer größeren Anzahl von Systemen führt, als Opelt selbst angibt.

Ohne die Arbeiten von Opelt und Ariel zu kennen, hatte der Verfasser in seinen im Vorwort erwähnten Untersuchungen den gleichen Gedanken benutzt, um zu einer Erhöhung der Stufenzahl zu gelangen; betrachtet man nämlich als die wesentlichen Intervalle unserer Tonleiter den Ganzton 170 und den Halbton 93, und beachtet man, daß in den Leitern 5 Ganztöne und 2 Halbtöne auftreten, worunter allerdings auch kleine Ganztöne sind und nähert man das Verhältnis $170:93$ durch $2:1$ an, so ergibt sich ein System, das aus $5 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ Stufen besteht, also das 12-stufige. Eine zweite Annäherung des Bruches $170:93 = 1{,}828$, wäre $3:2 = 1{,}5$ d. h. das System muß $5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 19$ Stufen haben. Dann käme $5:3 = 1{,}67$ oder das System mit $5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 31$ Stufen; hernach $7:4 = 1{,}75$ oder $5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 43$ Stufen; dann $9:5$ oder $5 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 55$ Stufen usw. Es müßte dann aber erst untersucht werden, wie groß die Abweichungen sind, d. h. wie genau Quint, große und kleine Terz wiedergegeben werden.

Man könnte aber auch daran denken, das Intervall des Kommas, d. h. der Differenz zwischen großem und kleinem Ganzton, zu erhalten, also das Verhältnis $93:152:170$ durch ganze Zahlen anzunähern. So käme man auf die Reihe der Tafel 28. Die Stufenzahl ergibt sich, wenn man beachtet, daß in der Oktav 3 große Ganztöne und je zwei kleine Ganztöne und große Halbtöne vorhanden sind.

Tafel 28.

Temperierte Systeme, die das Komma erhalten.

Abstandsverhältnis	Näherung	Stufenzahl	Abstände			Differenzen		
93 : 152 : 170	—	—	93	152	170	—	—	—
= 1 : 1,634 : 1,828	—	—	93	152	170	—	—	—
2 : 3,268 : 3,656	2 : 3 : 4	22	91	136	182	—2	—16	12
3 : 4,902 : 5,484	3 : 5 : 6	34	88	147	176	—5	—5	6
4 : 6,536 : 7,312	4 : 6 : 7	41	98	146	171	5	—6	1
5 : 8,170 : 9,140	5 : 8 : 9	53	94	151	170	1	—1	0

Man gelangt so zunächst zu dem 22-stufigen System, das oben als nächstes brauchbares nach dem 19stufigen auftrat, sodann zu verschiedenen anderen, die sich gleichfalls schon oben zeigten, unter ihnen ist wieder das 53-stufige besonders gut.

Die Methode Ariels.

Ariel geht im Gegensatz zu dieser Methode durch immer weiter gehende Teilung der „natürlichen“, d. h. der auf Quinten- und Terzenschritten aufgebauten Intervalle zur Vermehrung der Stufenzahl über. In unsere Bezeichnungsweise übertragen, geht er folgenden Weg:

1.	Teilung:	Oktav = Quint	+ Quart	1000 = 585 + 415
2.	„ :	Quint = Gr. Terz	+ kl. Terz	585 = 322 + 263
3.	„ :	Quart = Gr. Terz	+ Leiteton	415 = 322 + 93
	oder:	Quart = Kl. Terz	+ kl. Ganzton	415 = 263 + 152
4.	Teilg.:	Gr. Terz = Gr. Ganzt.	+ kl. Ganzton	322 = 170 + 152
5.	„ :	Kl. Terz = Kl. Ganzt.	+ J	263 = 152 + 111
	oder:	Kl. Terz = Gr. Ganzt.	+ Leiteton	263 = 170 + 93
6.	Teilg.:	Gr. Terz = Kl. Terz	+ Terzendiff.	322 = 263 + 59

Damit haben wir die 3 kleinen Intervalle:

Leiteton	93
J	111
Terzendiff.	59

erhalten und können nun zeigen, daß

$$3 \cdot \underline{111} + 4 \cdot \underline{93} + 5 \cdot \underline{59} = 1000$$

d. h. gleich der Oktav ist. Die drei genannten Intervalle sind also die konstituierenden Intervalle des Systems mit $3 + 4 + 5 = 12$ Stufen.

Nun unterteilt man:

$$111 = 59 + 52$$
$$93 = 59 + 34$$

und erhält hiermit:

$$3 \cdot (\underline{59} + \underline{52}) + 4 \cdot (59 + 34) + 5 \cdot 59$$
$$= 12 \cdot \underline{59} + 3 \cdot \underline{52} + 4 \cdot \underline{34} = 1000,$$

d. h. ein System mit 19 Stufen.

Hierauf teilt man folgendermaßen:

entweder:

$$59 = 18 + 41$$
$$52 = 18 + 34$$

oder:

$$59 = 25 + 34$$
$$52 = 18 + 34$$

und erhält:

entweder:

$$12 \cdot (\underline{18} + \underline{41}) + 3 \cdot (\underline{18} + \underline{34}) + 4 \cdot \underline{34}$$
$$= 12 \cdot \underline{41} + 7 \cdot \underline{34} + 15 \cdot \underline{18} = 1000$$

oder:

$$12 \cdot (\underline{25} + \underline{34}) + 3 \cdot (18 + 34) + 4 \cdot 34$$
$$= 19 \cdot \underline{34} + 12 \cdot \underline{25} + 3 \cdot 18 = 1000$$

d. h. in beiden Fällen ein System von 34 Stufen.

Man kann jedoch die 19stufige Skala

$$12 \cdot \underline{59} + 3 \cdot \underline{52} + 4 \cdot \underline{34}$$

auch mittels $59 = 34 + 25$ unterteilen, indem man auf das Komma 18 verzichtet, und erhält:

$$12 \cdot (\underline{34} + \underline{25}) + 3 \cdot \underline{52} + 4 \cdot \underline{34}$$
$$= 16 \cdot \underline{34} + 3 \cdot \underline{52} + 12 \cdot \underline{25} = 1000$$

d. h. 31 Stufen.

Nun gehen wir zu dem 34-stufigen System zurück;

entweder: $12 \cdot \underline{41} + 7 \cdot \underline{34} + 15 \cdot \underline{18}$

oder: $19 \cdot \underline{34} + \underline{12} \cdot \underline{25} + 3 \cdot \underline{18}$

Durch die Teilungen

$$34 = 18 + 16$$
$$41 = 25 + 16$$

erhält man entweder:

$$12 \cdot (\underline{25} + \underline{16}) + 7 \cdot (\underline{18} + \underline{16}) + 15 \cdot \underline{18} = 12 \cdot \underline{25} + 22 \cdot \underline{18} + 19 \cdot \underline{16}$$

oder:

$$19 \cdot (\underline{18} + \underline{16}) + 12 \cdot \underline{25} + 3 \cdot \underline{18} = 12 \cdot \underline{25} + 22 \cdot \underline{18} + 19 \cdot \underline{16}$$

d. h. in beiden Fällen das gleiche System von $12 + 22 + 19 = 53$ Stufen.

Des weitern teilt Ariel: $25 = 18 + 7$ und erhält

$$12 \cdot (\underline{18} + \underline{7}) + 22 \cdot \underline{18} + 19 \cdot \underline{16} = 34 \cdot \underline{18} + 19 \cdot \underline{16} + 12 \cdot \underline{7}$$

oder 65 Stufen;

und endlich durch

$$18 = 11 + 7$$
$$16 = 9 + 7$$

$$34 \cdot (\underline{11} + \underline{7}) + 19 \cdot (\underline{9} + \underline{7}) + 12 \cdot \underline{7} = 34 \cdot \underline{11} + 19 \cdot \underline{9} + 65 \cdot \underline{7}$$

oder 118 Stufen.

Kritik des Arielschen Verfahrens.

1. Zunächst ist zu beachten, daß das 12-stufige System Ariels die konstituierenden Intervalle 111, 93 und 59 enthält, während wir oben 93, 77 und 59 gefunden hatten, entsprechend der Gleichung

$$3 \cdot \underline{111} + 4 \cdot \underline{93} + 5 \cdot \underline{59} \quad \text{(Ariel)}$$
$$7 \cdot \underline{93} + 3 \cdot \underline{77} + 2 \cdot \underline{59} \quad \text{(Würschmidt).}$$

Auch wenn wir von der Möglichkeit der Darstellung des Arielschen 12-stufigen Systems im Quintenterzengewebe absehen, entspricht unsere Teilung sicherlich mehr dem Prinzip der möglichst gleichmäßigen Teilung.

2. Ariel gelangt durch seine Teilungsmethode zwar zu dem 19-stufigen, aber nicht zu dem 22-stufigen System; indes braucht man nur in seinem Zwölfersystem

$$3 \cdot \underline{111} + 4 \cdot \underline{93} + 5 \cdot \underline{59}$$

die großen Intervalle 111 und 93 in $111 = 59 + 34 + 18$ und $93 = 59 + 34$ zu unterteilen, d. h. das Komma herauszulösen, um zu erhalten:

$$3 \cdot (\underline{59} + \underline{34} + \underline{18}) + 4 \cdot (\underline{59} + \underline{34}) + 5 \cdot \underline{59} = \underline{12} \cdot \underline{59} + 7 \cdot \underline{34} + 3 \cdot \underline{18}$$

d. h. ein System mit 22 Stufen, das, wie wir gesehen haben, eine Erweiterung des 19-stufigen ist, bei der der Unterschied zwischen großen und kleinen Ganzton erhalten bleibt.

3. Von diesem aus gelangt man mittels $59 = 34 + 15$ zu

$$12 \cdot (\underline{34} + \underline{25}) + 7 \cdot \underline{34} + 3 \cdot \underline{18} = 19 \cdot \underline{34} + 12 \cdot \underline{25} + 3 \cdot \underline{18}$$

d. h. zu dem zweiten 34-stufigen System Ariels, anderseits aber würde man mit $59 = 41 + 18$ und $34 = 18 + 16$ zu

$$12 \cdot (\underline{41} + \underline{18}) + 7 \cdot (\underline{18} + \underline{16}) + 3 \cdot \underline{18} = 12 \cdot \underline{41} + 22 \cdot \underline{18} + 7 \cdot \underline{16}$$

also zu einem 41-stufigen System gelangen, das auch oben in Tafel 28 auftrat.

4. Von diesem gelangt man durch $41 = 25 + 16$ zu

$$12 \cdot (\underline{25} + \underline{16}) + 22 \cdot \underline{18} + 7 \cdot \underline{16} = 12 \cdot \underline{25} + 22 \cdot \underline{18} + 19 \cdot \underline{16}$$

d. h. wieder zu den 53-stufigen System, das in der Unterteilung übrigens genau dem symmetrisch geteilten System v. Oettingens entspricht.

5. Die Methode Ariels sagt jedoch, rein formal, wie sie ist, nichts darüber aus, welches die in dem jeweiligen Feld

wirklich vorkommenden natürlichen Intervalle sind. Für das 12-stufige Feld haben wir bereits gefunden, daß neben der Einteilung Ariels auch andere möglich sind und gebraucht werden. Außerdem können bei dieser Methode auch leicht brauchbare Systeme, wie das 22-stufige übersehen werden, da eben die Unterteilung der Intervalle in verschiedenster Weise vorgenommen werden kann.

Siebenter Teil.

Untersuchung der möglichen Tonsysteme.

1. Prinzipien für die Konstruktion der Systeme.

In einer in der Zeitschrift für Physik (**46**, 1928) veröffentlichten Arbeit hat der Verfasser eine Untersuchung über alle innerhalb eines Tonfeldes von gegebener Größe möglichen Systeme angestellt, indem er gewisse Eigenschaften derselben voraussetzte, die er als „Prinzipien" bezeichnete. Im folgenden seien zunächst diese Prinzipien an der Hand eines Beispiels auseinandergesetzt, sodann sei eine Ableitung der Systeme gegeben, die das Ergebnis der früheren Untersuchung auf einfacherem Wege zu finden gestattet.

Prinzip I. Alle in der Oktav vorkommenden Intervalle sollen durch Quintenschritte, durch Terzenschritte oder durch kombinierte Quinten-Terzenschritte gebildet werden; m. a. W. das Tonsystem soll ein begrenzter Ausschnitt aus dem Quinten-Terzengewebe sein.

Prinzip II. Schritte nach oben und nach unten sind gleichberechtigt; m. a. W. das Tonfeld soll in Bezug auf oben und rechts symmetrisch zu unten und links sein.

Vollständige Symmetrie ist, wie wir sahen, natürlich nur bei einem System mit ungerader Stufenzahl möglich.

Die Betrachtung des v. Oettingenschen Systemes liefert uns das

Prinzip III. Ein Tonsystem findet dadurch seine Begrenzung, daß zwei kleine Intervalle gleich Null gesetzt, d. h. mit dem Ausgangston identifiziert werden.

Es seien z. B. diese beiden Intervalle

$$-4q - 2t = 16 \sim 0$$
$$3q + 7t = 9 \sim 0$$

Zunächst wird durch die Bedingung $-4q - 2t \sim 0$ aus dem doppelt unendlichen Tonbereich ein einfach unendlicher Bereich herausgeschnitten, z. B. der in Fig. 6 dargestellte, aus 4 unendlichen positiven Terzenreihen und 2 unendlichen positiven Quintenreihen bestehende Bereich.

Natürlich könnte man mit demselben Recht die negativen Reihen nehmen (Fig. 6 auf den Kopf gestellt) oder auch nur 4 positive und negative Terzenreihen oder 2 positive und negative Quintenreihen. Setzt man nun auch noch $3q + 7t$ gleich Null, oder auch das mit unseren beiden Intervallen mitverschwindende Intervall $-1q + 5t$, so wird das Feld zu dem endlichen der Fig. 7, d. h. zu einem System von 22 Stufen.

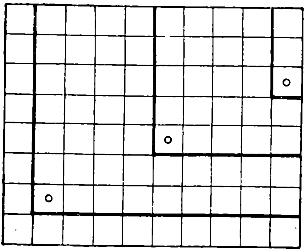


Fig. 6. Einfach unendlicher Tonbereich, der der Bedingung $4q + 2t \sim 0$ entspricht.

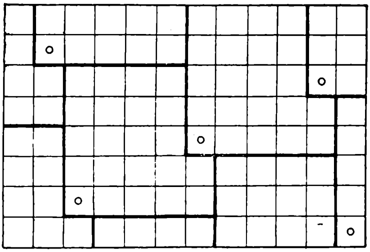


Fig. 7. Tonbereich, der den Bedingungen $4q + 2t \sim 0$ und $3q + 7t \sim 0$ entspricht.

Ein Blick auf die Fig. 7 zeigt ferner, daß die gleichzeitig mit dem Grundton verschwindenden Intervalle, die ihm in dem Tonfeld am nächsten gelegen sind, die folgenden sind:

$$-4q - 2t = 16 \qquad 4q + 2t = -16$$
$$3q + 7t = 9 \qquad -3q - 7t = -9$$
$$-1q + 5t = 25 \qquad 1q - 5t = -25$$

Wir werden von diesen drei Intervallen (drei, wenn wir von dem Vorzeichen absehen) diejenigen als die d e f i n i e r e n d e n des Systems bezeichnen, die durch die k l e i n s t e Anzahl von Quinten- und Terzenschritten zu erreichen sind, in unserem Falle also $-4q - 2t = 16$ und $-1q + 5t = 25$ (6 bezw. 6 Schritte, während für $3q + 7t = 9$ 10 Schritte nötig sind.

Im allgemeinen gilt ferner der Satz, daß gleichzeitig mit 2 willkürlich ausgewälten Intervallen i_1 und i_2, die wir gleich Null setzen wollen, alle Intervalle von der Form $\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2$ mitverschwinden werden, wobei λ_1 und λ_2 ganze Zahlen sind. In der Tafel 29 sind die innerhalb eines Tonfeldes von 11 Quinten und 27 Terzen gelegenen Intervalle zusammengestellt, die gleichzeitig mit $-4q - 2t = 16$ und $-1q + 5t = 25$ verschwinden.

Tafel 29.

Gleichzeitig mit $-4q - 2t = 16$ und $-1q + 5t = 25$ verschwindende Intervalle.

	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 1$	$\lambda_2 = 2$
$\lambda_1 = -3$	—	$11q + 11t = -23$	$10q + 16t = 2$
$\lambda_1 = -2$	$8q + 4t = -32$	$7q + 9t = -7$	$6q + 14t = 18$
$\lambda_1 = -1$	$4q + 2t = -16$	$3q + 7t = 9$	$2q + 12t = 34$
$\lambda_1 = 0$	—	$-1q + 5t = 25$	$-2q + 10t = 50$
$\lambda_1 = 1$	$-4q - 2t = 16$	$-5q + 3t = 41$	$-6q + 8t = 66$
$\lambda_1 = 2$	$-8q - 4t = 32$	$-9q + 1t = 57$	$-10q + 6t = 82$

	$\lambda_2 = 3$	$\lambda_2 = 4$	$\lambda_2 = 5$
$\lambda_1 = -3$	$9q + 21t = 27$	$8q + 26t = 52$	—
$\lambda_1 = -2$	$5q + 19t = 43$	$4q + 24t = 68$	—
$\lambda_1 = -1$	$1q + 17t = 59$	$22t = 84$	$-1q + 27t = 109$
$\lambda_1 = 0$	$-3q + 15t = 75$	$-4q + 20t = 100$	$-5q + 25t = 125$
$\lambda_1 = 1$	$-7q + 13t = 91$	$-8q + 18t = 116$	$-9q + 23t = 141$
$\lambda_1 = 2$	$-11q + 11t = 107$	—	—

Naturgemäß sind alle diese Intervalle durch eine größere Anzahl von Schritten zu erreichen als die beiden definierenden.

Nehmen wir nun an, die beiden definierenden Intervalle hätten die Form:

$$i_1 = m_1 q + n_1 t$$
$$i_2 = m_2 q + n_2 t$$

so ist diesem System entsprechende Stufenzahl z gegeben durch

$$z = / m_1 n_2 - m_2 n_1 /$$

So findet sich z. B. für die definierenden Intervalle

$$i_1 = -4q - 2t = 16 \sim 0$$
$$i_2 = -1q + 5t = 25 \sim 0$$
$$z = / (-4)(5) - (-2)(-1) / = 20 + 2 = 22$$

Für die bei dei dem System v. **Oettingens** definierenden Intervalle

$$i_1 = 3q + 7t = 9 \sim 0$$
$$i_2 = 8q + 1t = 2 \sim 0$$

ergibt sich:

$$z = / 3 \cdot 1 - 8 \cdot 7 / = 53.$$

Haben wir nun nach Prinzip III ein Tonsystem definiert, so können wir es nach Prinzip II symmetrisch machen; offenbar aber kann auch dann noch die Anordnung verschieden gewählt werden, wie wir z. B. bei den verschiedenen Anordnungen des 53-stufigen Systems gesehen haben. Um nun zwischen den verschiedenen möglichen symmetrischen Anordnungen zu unterscheiden, bezeichnen wir als die **normale** diejenigen, bei der alle Töne durch die kleinste Anzahl von Schritten erreicht werden.

Prinzip IV. Die Normalform eines Systemes ist diejenige, bei der alle Töne durch eine möglichst kleine Anzahl von Quinten- und Terzenschritten erreicht werden, wobei bei Gleichheit der Schrittzahl die Quintenschritte vor den Terzenschritten den Vorzug erhalten sollen.

Da ein jedes System dadurch charakterisiert ist, daß zwei kleine Intervalle gleich Null gesetzt werden, so ist klar, daß das System kein Intervall enthalten darf, das kleiner ist als das größere der beiden verschwindenden Intervalle; es wäre ja unlogisch, z. B. das Intervall eines Halbtones zu vernachlässigen und ein kleineres aufrechtzuerhalten.

Prinzip V. Ein Tonsystem ist rationell, wenn es kein Intervall enthält, das kleiner ist als das größere der beiden definierenden Intervalle.

Die Erfahrung zeigt, daß in den nach diesen Prinzipien gebildeten Systemen im allgemeinen 3 oder 4 **kleinste** Intervalle als Differenzen sämtlicher Intervalle des Systems unter sich auftreten. In den Fällen von 4 Intervallen kann eines derselben, das größte oder das kleinste, durch Umstellen einiger Töne, d. h. durch eine Abweichung von Prinzip IV eliminiert werden. Somit kann erreicht werden, daß nur 3 Differenzintervalle zwischen allen Tönen des Systems auftreten. Dieselben haben wir schon oben in dem speziellen Fall des 12-stufigen Systems als die konstituierenden Intervalle des Systems bezeichnet. So kommen wir zu:

Prinzip VI. Ein jedes System soll höchstens 3 konstituierende Intervalle besitzen und die Teilung des Systems in z Stufen soll eine möglichst gleichmäßige sein.

Dieses Prinzip VI ist dem Prinzip IV übergeordnet.

Als Beispiel betrachten wir das oben behandelte System mit 22 Stufen, dessen definierende Intervalle $-4q-2t=16$ und $-1q-5t=25$ sind. Seine Begrenzung hatten wir zunächst nach Fig. 7 vorgenommen. Nun ist es leicht, das System nach Prinzip IV zu normalisieren. Wir zeichnen diese Figur nochmals und legen den Anfangspunkt, d. h. den Grundton, möglichst in die Mitte. (Fig. 8, o).

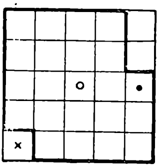


Fig. 8. Normalisiertes 22-stufiges System.

Von den mit zwei Schritten erreichbaren Tönen fehlt die zweite Oberquint $2q\,(\cdot)$; führen wir sie ein, so muß dafür $2q-(4q+2t)=-2q-2t\,(\times)$ ausfallen. Dann erfüllt das System bereits die Bedingungen von Prinzip II und IV; an Stelle von $-2q+1t$ kann auch der symmetrische Punkt $2q-1t$ genommen werden. Das normalisierte 22-stufige System hat somit zunächst das in Tafel 30 dargestellte Schema.

Tafel 30.

Schema des normalisierten 22-stufigen Systems.

gis_2	dis_2	ais_2	eis_2	
e_1	b_1	fis_1	cis_1	(gis_1)
c	g	d	a	e
(as^1)	es^1	bes^1	f^1	c^1
	ces^2	ges^2	des^2	as^2

Ordnen wir nunmehr die 22 Töne in eine Reihe, indem wir die entsprechenden Intervallwerte aus Tafel 18 entnehmen, so ergibt sich Tafel 31.

Tafel 31.

Leiter des normalisierten 22-stufigen Systems.

$d =$	0		$0 =$	d
		59		
$dis_2 =$	59		$-59 =$	des^2
		34		
$es^1 =$	93		$-93 =$	cis_1
		59		
$e_1 =$	152		$-152 =$	c^1
		18		
$e =$	170		$-170 =$	c
		59		
$eis_2 =$	229		$-229 =$	ces^2
		34		
$f^1 =$	263		$-263 =$	b_1
		59		
$fis_1 =$	322		$-322 =$	bes^1
		34		
$ges^2 =$	356		$-356 =$	ais_2
		59		
$g =$	415		$-415 =$	a
		59		
$gis_2 =$	474		$-474 =$	as^2
		18		
$gis_1 =$	492			
		34		

Es kommen also in dem System die 3 konstituierenden Intervalle $\underline{59}$ (12 mal), $\underline{34}$ (7 mal) und $\underline{18}$ · (3 mal) vor; die Gleichung des Systems ist

$$12 \cdot \underline{59} + 7 \cdot \underline{34} + 3 \cdot \underline{18} = 1000$$

Da der Unterschied der konstituierenden Intervalle 59 und 18 relativ groß ist, so entspricht das System wenig dem zweiten Teil des Prinzips VI. Versucht man, das Intervall 18 durch Wahl weniger verwandter Töne an den 3 kritischen Stellen zu vermeiden, so muß man zunächst an Stelle von $e_1 = 152$ und $c^1 = -152$ die Intervalle $disis_3 = 136$ und $deses^3 = -136$ einsetzen, ferner, da das Intervall $gis_2 - as^2$ nur gleich 52 ist und noch unterteilt sein soll, so muß man $gis_2 = 474$ und $as^2 = -474$ durch $ases^3 = 449$ und $gisis_3 = -449$ ersetzen, während gis_1 erhalten bleiben kann. Dann erhalten wir das Schema der Tafel 32 und die Leiter der Tafel 33.

Tafel 32.

Schema des gleichmäßigst geteilten 22-stufigen Systems.

			$gisis_3$	$disis_3$
	dis_2	ais_2	eis_2	
	b_1	fis_1	cis_1	gis_1
c	g	d	a	e
	es^1	bes^1	f^1	
	ces^2	ges^2	des^2	
$deses^3$	$ases^3$			

Tafel 33.

Leiter des gleichmäßigst geteilten 22-stufigen Systems.

d =	0		0 =	d
dis_2 =	59	59	— 59 =	des^2
es^1 =	93	34	— 93 =	cis_1
$disis_3$ =	136	43	— 136 =	$deses^3$
e =	170	34	— 170 =	c
eis_2 =	229	59	— 229 =	ces^2
f^1 =	263	34	— 263 =	b_1
fis_1 =	322	59	— 322 =	bes^1
ges^2 =	356	34	— 356 =	ais_2
g =	415	59	— 415 =	a
$ases^3$ =	449	34	— 449 =	$gisis_3$
gis_1 =	492	43		
		$\underbrace{\qquad}_{59}$		

Die entsprechende Gleichung ist:

$$9 \cdot \underline{59} + 3 \cdot \underline{43} + 10 \cdot \underline{34} = 1000.$$

2. Konstruktion der rationellen Tonsysteme.

Bekanntlich kommt man in der reinen Quintenstimmung, nach oben fortschreitend, nach 12 Quintenschritten nahe an den Ausgangston zurück, nämlich zu dem Werte des pythagoräischen Kommas, dessen Abstand in log. Einh. 587, in Millioktaven 20 ist. (In der Folge werden wir, da die Einteilung in Millioktaven uns zu kleine und wenn wir von Dezimalen derselben absehen, häufig zusammenfallende Zahlen liefern würde, die logarithmischen Einheiten benutzen).

Die Kettenbruchentwicklung des Verhältnisses 30103:17609 liefert unmittelbar:

30103 :	17609 :	12494 :	5115 :	2264 :	587 :	503 :	84 :	83 :	1
1	1	2	2	3	1	5	1	83	

d. h. es ergeben sich die Gleichungen:

1o — 1q	= 12494	(Quart.)	— 1q =	12494
1q — (1o — 1q) = 2q - 1o	= 5115	(Gr. Ganzt.)	+ 2q =	5115
(1o — 1o) — 2(2q — 1o) = 3o — 5q	= 2264	(Kl. Halbt.)	— 5q =	2264
(2q — 1q) — 2(3o — 5q) = 12q — 7o	= 587	(pyth.Komma)	+ 12q =	587
(3o — 5q) — 3(12q — 7o) = 24o — 41q	= 503		— 41q =	503
(12q — 7o) — (24o — 41q) = 53q — 31o	= 84		+ 53q =	84

(usw.)

Ebenso liefert die Kettenbruchentwicklung des Verhältnisses Oktav: Terz:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 30103 : & 9691 : & 1030 : & 421 : & 188 : & 45 : & 8 : & 5 : & 3 : & 2 : & 1 \\ & 3 & 9 & 2 & 2 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

oder die Gleichungen:

$$1\,o - 3\,t = 1030 \qquad\qquad - 3\,t = 1030$$

$$1\,t - 9(1\,o - 3\,t) = 28\,t - 9\,o = 421 \qquad\qquad + 28\,t = 421$$

$$(1\,o - 3\,t) - 2(28\,t - 9\,o) = 19\,o - 59\,t = 188 \qquad\qquad - 59\,t = 188$$

usw.

Wir beschränken unsere Untersuchung zunächst auf ein Tonfeld, das sich in der reinen Quintenreihe bis zur 12. Quint (587), in der Terzenreihe bis zur 28. Terz (421) erstreckt, also auf ein Feld von $11 \cdot 27 = 297$ Tönen. Zunächst geben wir in Tafel 34 die reinen Quinten- und Terzenreihen, nach ihrer Größe geordnet.

Tafel 34.

Reine Quintenreihe bis 11q und reine Terzenreihe bis 27t.

Quinten	Terzen	
$-5\,q = 2264$	$-3\,t = 1030$	$7\,t = 7631$
$7\,q = 2851$	$25\,t = 1451$	$-24\,t = 8240$
$-10\,q = 4528$	$-6\,t = 2060$	$4\,t = 8661$
$2\,q = 5115$	$22\,t = 2481$	$-27\,t = 9270$
$-3\,q = 7379$	$-9\,t = 3090$	$1\,t = 9691$
$9\,q = 7966$	$19\,t = 3511$	$-2\,t = 10721$
$-8\,q = 9643$	$-12\,t = 4120$	$26\,t = 11142$
$4\,q = 10230$	$16\,t = 4541$	$-5\,t = 11751$
$-1\,q = 12494$	$-15\,t = 5150$	$23\,t = 12172$
$11\,q = 13081$	$13\,t = 5571$	$-8\,t = 12781$
$-6\,q = 14758$	$-18\,t = 6180$	$20\,t = 13202$
	$10\,t = 6601$	$-11\,t = 13811$
	$-21\,t = 7210$	$17\,t = 14232$
		$-14\,t = 14841$

Man sieht, daß alle Quinten unseres Bereiches aus den beiden konstituierenden Intervallen 2264 und 2851, alle Terzen aus den konstituierenden Intervallen 1030 und 1451 gebildet sind. Alle übrigen Intervalle des Tonfeldes entstehen nun durch Kombination der Quinten mit den Terzen: wir brauchen jedoch nicht alle Intervalle anzuschreiben, sondern beschränken uns auf die Intervalle < 1030; alle übrigen lassen sich leicht durch ein- oder mehrfache Addition von ± 1030 finden. Tafel 35 enthält diese Intervalle unter 1030, nach der Größe geordnet.

Tafel 35.

Intervalle < 1030 in dem Felde $11q \cdot 27t$.

13 =	$10q + 16t$	287 =	$1q - 8t$	539 =	$4q - 1t$	813 =	$-5q - 25t$
35 =	$-2q - 15t$	300 =	$11q + 8t$	574 =	$2q - 16t$	826 =	$5q - 9t$
48 =	$8q + 1t$	322 =	$-1q - 23t$	622 =	$10q - 15t$	861 =	$3q - 24t$
83 =	$6q - 14t$	335 =	$9q - 7t$	660 =	$-7q + 19t$	909 =	$11q - 23t$
121 =	$-11q + 20t$	370 =	$7q - 22t$	695 =	$-9q + 4t$	912 =	$-4q + 26t$
169 =	$-3q + 21t$	373 =	$-8q + 27t$	708 =	$1q + 20t$	947 =	$-6q + 11t$
204 =	$-5q - 6t$	408 =	$-10q + 12t$	730 =	$-11q - 11t$	960 =	$4q + 27t$
217 =	$5q + 22t$	456 =	$-2q + 13t$	743 =	$-1q + 5t$	982 =	$-8q - 4t$
239 =	$-7q - 9t$	491 =	$-4q - 2t$	756 =	$9q + 21t$	995 =	$2q + 12t$
252 =	$-3q + 7t$	504 =	$6q + 14t$	778 =	$-3q - 10t$	1017 =	$-10q - 19t$
274 =	$-9q - 24t$	526 =	$-6q - 17t$	791 =	$7q + 6t$	1030 =	$-3t$

Man sieht, daß die beiden kleinsten Intervalle in dem gegebenen Tonfeld

$$I_1 = -2q - 15t = 35$$
$$I_2 = 10q + 16t = 13$$

sind; sie sind mit 17 bezw. 26 Schritten vom Grundton aus zu erreichen. Lassen wir nun, um ein Tonsystem nach den oben aufgestellten Prinzipien zu begrenzen, diese beiden Intervalle verschwinden, so verschwindet gleichzeitig mit ihnen auch das Intervall $I = I_1 + I_2 = 8q + 1t$, das mit nur 9 Schritten erreichbar ist. Wir werden somit die beiden Intervalle

$$I_1 = -2q - 15t = 35$$
$$I = 8q + 1t = 48$$

(Kommadifferenz oder Schisma)

als definierende Intervalle nehmen und finden damit ein Tonfeld von

$$/(-2) \cdot 1 - (-15) \cdot 8/ = 118 \text{ Stufen},$$

dessen Begrenzung zunächst der Fig. 9 entspricht.

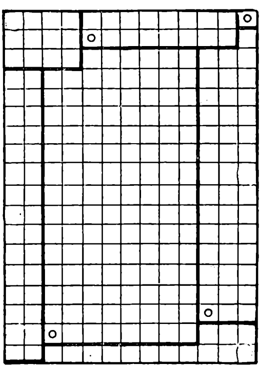


Fig. 9. 118-stufiges System.

Legt man nun des Grundton möglichst in die Mitte des Feldes und normalisiert man das System durch Wahl aller mit der möglichst kleinsten Zahl von Schritten erreichbaren Intervalle, so erhält man das in Tafel 36 dargestellte Schema und die Leiter der Tafel 37.

Tafel 36.
Schema des normalisierten Systems von 118 Stufen.

		eisisisis$_8$	bisisisis$_8$	fisisisisis$_8$				
	fisisisis$_7$	cisisisis$_7$	gisisisis$_7$	disisisis$_7$	aisisisis$_7$			
	disisis$_6$	aisisis$_6$	eisisis$_6$	bisisis$_6$	fisisisis$_6$	cisisisis$_6$	gisisisis$_6$	
cisis$_5$	bisis$_5$	fisisis$_5$	cisisis$_5$	gisisis$_5$	disisis$_5$	aisisis$_5$	eisisis$_5$	
cisis$_4$	gisis$_4$	disis$_4$	aisis$_4$	eisis$_4$	bisis$_4$	fisisis$_4$	cisisis$_4$	
ais$_3$	eis$_3$	bis$_3$	fisis$_3$	cisis$_3$	gisis$_3$	disis$_3$	aisis$_3$	
fis$_2$	cis$_2$	gis$_2$	dis$_2$	ais$_2$	eis$_2$	bis$_2$	fisis$_2$	
d$_1$	a$_1$	e$_1$	b$_1$	fis$_1$	cis$_1$	gis$_1$	dis$_1$	
bes	f	c	g	d	a	e	b	fis
	des^1	as^1	es^1	bes^1	f^1	c^1	g^1	d^1
	beses^2	fes^2	ces^2	ges^2	des^2	as^2	es^2	bes^2
	geses^3	deses^3	ases^3	eses^3	beses^3	fes^3	ces^3	ges^3
	eseses^4	beseses^4	feses^4	ceses^4	geses^4	deses^4	ases^4	eses^4
	ceseses^5	geseses^5	deseses^5	aseses^5	eseses^5	beseses^5	feses^5	ceses^5
	aseseses^6	eseseses^6	beseseses^6	feseses^6	ceseses^6	geseses^6	deseses^6	
			geseseses^7	deseseses^7	aseseses^7	eseseses^7	(beseseses^7)	
				beseseses^8	feseseses^8	ceseseses^8		

Tafel 37.
Leiter des Systems von 118 Stufen.

d =	0			— 0 =	d
		287	287		
feseseses^8 =	287			— 287 =	bisisisis$_8$
		252	252		
d^1 =	539			— 539 =	d$_1$
		204	204		
cisisis$_5$ =	743			— 743 =	eseses^5
		287	287		
eses^3 =	1030			— 1030 =	cisis$_3$
		252	252		
cisisis$_4$ =	1282			— 1282 =	eseses^4
		287	287		
eses^4 =	1569			— 1569 =	cisis$_4$
		204	204		
dis$_2$ =	1773			— 1773 =	des^2
		287	287		
feseses^6 =	2060			— 2060 =	bisisis$_6$
		252	252		
dis$_1$ =	2312			— 2312 =	des^1
		204	204		
cisisisis$_7$ =	2526			— 2516 =	eseseses^7
		287	287		
es^1 =	2803			— 2803 =	cis$_1$
		252	252		
cisisisis^6 =	3055			— 3055 =	eseseses^6
		287	287		
es^2 =	3342			— 3342 =	cis$_2$
		204	204		
disis$_4$ =	3546			— 3546 =	deses^4
		287	287		
feses^4 =	3833			— 3833 =	bisis$_4$
		252	252		
disis$_3$ =	4085			— 4085 =	deses^3
		287	287		
feses^5 =	4372			— 4372 =	bisis$_5$
		204	204		
e$_1$ =	4576			— 4576 =	c^1

e_1 =	4576	287	— 4576	= c^1
$geseseses^7$ =	4863	252	— 4863	= $aisisisis_7$
e =	5115	204	— 5115	= c
$disisis_6$ =	5319	287	— 5319	= $deseses^6$
fes^2 =	5606	252	— 5606	= bis_2
$disisis_5$ =	5858	287	— 5858	= $deseses^5$
fes^3 =	6145	204	— 6145	= bis_3
eis_3 =	6349	287	— 6349	= ces^3
$geseses^5$ =	6636	252	— 6636	= $aisisis_5$
eis_2 =	6888	287	— 6888	= ces^2
$geseses^6$ =	7175	204	— 7175	= $aisisis_6$
f =	7379	252	— 7379	= b
$disisisis_7$ =	7631	287	— 7631	= $deseseses^7$
f^1 =	7918	204	— 7918	= b_1
$eisis_5$ =	8122	287	— 8122	= $ceses^5$
$geses^3$ =	8409	252	— 8409	= $aisis_3$
$eisis_4$ =	8661	287	— 8661	= $ceses^4$
$geses^4$ =	8948	204	— 8948	= $aisis_4$
fis_2 =	9152	287	— 9152	= bes^2
$aseseses^6$ =	9439	252	— 9439	= $gisisisis_6$
fis_1 =	9691	287	— 9691	= bes^1
$aseseses^7$ =	9978	252	— 9978	= $gisisisis_7$
fis =	10230	204	— 10230	= bes
$eisisis_6$ =	10434	287	— 10434	= $ceseses^6$
ges^2 =	10721	252	— 10721	= ais_2
$eisisis_5$ =	10973	287	— 10973	= $ceseses^5$
ges^3 =	11260	204	— 11260	= ais_3
$fisis_3$ =	11464	287	— 11464	= $beses^3$
$aseses^5$ =	11751	252	— 11751	= $gisisis^5$
$fisis_2$ =	12003	204	— 12003	= $beses^2$
$cisisisis_8$ =	12207	287	— 12207	= $ceseseses^8$
g =	12494	287	— 12494	= a
$beseseseses^8$ =	12781	252	— 12781	= $fisisisisis_8$
g^1 =	13033	204	— 13033	= a_1
$fisisis_5$ =	13237	287	— 13237	= $beseses^5$
$ases^3$ =	13524	252	— 13524	= $gisis_3$
$fisisis_4$ =	13776	287	— 13776	= $beseses^4$
$ases^4$ =	14063	204	— 14063	= $gisis_4$
gis_2 =	14267	287	— 14267	= as^2
$beseseses^6$ =	14554	252	— 14554	= $fisisisis_6$
gis_1 =	14806	204	— 14806	= as^1
$fisisisis_7$ =	15010			

287

Die konstituierenden Intervalle dieses Systems, das den Anforderungen eines rationellen und möglichst gleichmäßig geteilten Systemes vollkommen entspricht, sind, wie aus Tafel 37 hervorgeht:

$$
\begin{aligned}
287 &= \quad 1q - 8t \text{ (Kleisma + Schisma — 35)} \\
252 &= \quad 3q + 7t \text{ (Kleisma + Schisma)} \\
204 &= -5q + 6t \text{ (Kleisma).}
\end{aligned}
$$

Die dem System entsprechende Gleichung ist:

$$53 \cdot \underline{287} + 34 \cdot \underline{252} + 31 \cdot \underline{204} = 30103$$

Versuchen wir nunmehr, an Stelle der zwei oder drei ersten Intervalle der Tafel 35 andere gleich Null zu setzen, d. h. als definierende zu nehmen, so besteht im allgemeinen die Gefahr, daß die entstehenden Systeme eines oder mehrere der kleineren nicht gleich Null gesetzten Intervalle in sich enthalten, also nicht rationell sind. So würden z. B. die definierenden Intervalle

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \quad 8q + \ 1t = \ 48 \sim 0 \\
I_2 &= -3q + 21t = 169 \sim 0
\end{aligned}
$$

ein System von $/ 8 \cdot 21 - (-3) \cdot 1 / = 171$ Stufen ergaben, das aber die Intervalle 13, 35 und 83 in sich enthielte, also nicht rationell ist.

Wir gelangen aber leicht zu möglicherweise rationellen Systemen geringerer Stufenzahl, wenn wir je 2 von den 3 konstituierenden Intervallen des Systems mit 118 Stufen verschwinden lassen, also:

entweder:	oder:	oder:
(A)	(B)	(C)
$204 = -5q + 6t$	$204 = -5q + 6t$	$252 = 3q + 7t$
$252 = \quad 3q + 7t$	$287 = -1q - 8t$	$287 = 1q - 8t$

Bedingung A liefert als definierende Intervalle:

$$
\begin{aligned}
252 &= 3q + 7t \\
48 &= 8q + 1t
\end{aligned}
$$

und somit ein System von $/ 8 \cdot 7 - 3 \cdot 1 / = 53$ Stufen, also das bekannte System v. Oettingens. (II).

Bedingung B liefert als definierende Intervalle:

$$
\begin{aligned}
287 &= \quad 1q - 8t \\
491 &= -4q - 2t
\end{aligned}
$$

und somit ein System von $4 \ 8 + 2 \cdot 1 = 34$ Stufen (III).

Endlich Bedingung C als definierende Intervalle:

$$287 = 1\,q - 8\,t$$
$$539 = 4\,q - 1\,t$$

und somit ein System von $/ 4 \cdot 8 - 1 \cdot 1 / = 31$ Stufen (IV).

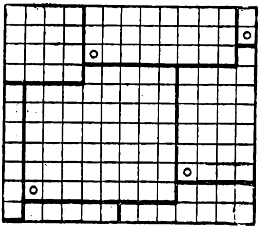


Fig. 10. 53-stufiges System.

Die Abkömmlinge des Systems mit 118 Stufen sind somit die drei Systeme mit 53, 34 und 31 Stufen, die wir nun näher betrachten.

Das System mit 53 Stufen stellt sich zunächst in der Form der Figur 10 dar; normalisiert hat es das in Tafel 38 dargestellte Schema und die Leiter ist die der Tafel 39.

Tafel 38.

Schema des normalisierten Systems von 53 Stufen.

			aisis_4	eisis_4				
		bis_3	fisis_3	cisis_3	gisis_3	disis_2		
	cis_2	gis_2	dis_2	ais_2	eis_2	bis_2	fisis_2	
d_1	a_1	e_1	b_1	fis_1	cis_1	gis_1	dis_1	
bes	f	c	g	d	a	e	b	fis
	des^1	as^1	es^1	bes^1	f^1	c^1	g^1	d^1
	beses^2	fes^2	ces^2	ges^2	des^2	as^2	es^2	
		deses^3	ases^3	eses^3	beses^3	fes^3		
				ceses^4	geses^4			

Aus Tafel 39 ist abzulesen, daß das Intervall 743 14 mal, das Intervall 539 20 mal, das Intervall 491 17 mal und das Intervall 287 2 mal auftritt, daß also die Gleichung des Systems ist:

$$14 \cdot \underline{743} + 20 \cdot \underline{539} + 17 \cdot \underline{491} + 2 \cdot \underline{287} = 30103$$

Nach Prinzip VI werden wir das nur zweimal auftretende Intervall 287 vermeiden; zu diesem Zwecke ersetzen wir $\mathrm{geses}^4 = 8948$ durch $\mathrm{geses}^4 + 204 = \mathrm{fis}_2 = 9152$ und analog $\mathrm{aisis}^4 = -8948$ durch $\mathrm{bes}^2 = -9152$. Statt der Teilung des Intervalles $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{eisis}_4 \div \mathrm{fis}_1 \\ \mathrm{ceses}^4 \div \mathrm{bes}^1 \end{array} \right\}$ in $287 + 743$ tritt also die in $491 + 539$ auf; also wird die Gleichung des gleichmäßigst geteilten 53-stufigen Systems:

Tafel 39.

Leiter des normalisierten Systems von 53 Stufen.

$d =$	0		0	$= d$
		539		
$d_1 =$	539		— 539	$= d_1$
		491		
$eses^3 =$	1030		— 1030	$= cisis_3$
		743		
$dis_2 =$	1773		— 1773	$= des^2$
		539		
$dis_1 =$	2312		— 2312	$= des^1$
		491		
$es^1 =$	2803		— 2803	$= cis_1$
		539		
$es^2 =$	3342		— 3343	$= cis_2$
		743		
$disis_3 =$	4085		— 4085	$= deses^3$
		491		
$e_1 =$	4576		— 4576	$= c^1$
		539		
$e =$	5115		— 5115	$= c$
		491		
$fes^2 =$	5606		— 5606	$= bis_2$
		539		
$fes^3 =$	6145		— 6145	$= bis_3$
		743		
$eis_2 =$	6888		— 6888	$= ces^2$
		491		
$f =$	7379		— 7379	$= b$
		539		
$f^1 =$	7818		— 7918	$= b_1$
		743		
$eisis_4 =$	8661		— 8661	$= ceses^4$
		287		
$geses^4 =$	8948		— 8948	$= aisis_4$
		743		
$fis_1 =$	9691		— 9691	$= bes^1$
		539		
$fis =$	10230		— 10230	$= bes$
		491		
$ges^2 =$	10721		— 10721	$= ais_2$
		743		
$fisis_3 =$	11464		— 11464	$= beses^3$
		539		
$fisis_2 =$	12003		— 12003	$= beses^2$
		491		
$g =$	12494		— 12494	$= a$
		539		
$g^1 =$	13033		— 13033	$= a_1$
		491		
$ases^3 =$	13534		— 13524	$= gisis_3$
		743		
$gis_2 =$	14267		— 14267	$= as^2$
		539		
$gis_1 =$	14806		— 14806	$= as^1$
		491		

$$12 \cdot \underline{743} + 22 \cdot \underline{539} + 19 \cdot \underline{491} = 30103$$

Seine konstituierenden Intervalle sind somit:

$$743 = -1q + 5t$$
$$539 = 4q - 1t$$
$$491 = -4q - 2t.$$

Dem System mit 34 Stufen entspricht zunächst das Schema der Figur 11; normalisiert hat es das Schema der Tafel 40 und die Leiter der Tafel 41.

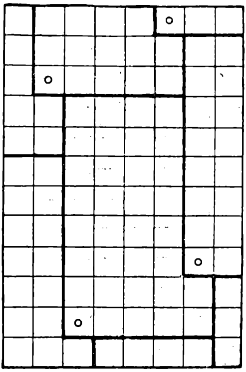


Fig. 11. 34-stufiges System

Tafel 40.

Schema des normalisierten Systems von 34 Stufen.

		$eisis_4$	$bisis_4$	
bis_3	$fisis_3$	$cisis_3$	$gisis_3$	
gis_2	dis_2	ais_2	eis_2	
e_1	b_1	fis_1	cis_1	gis_1
c	g	d	a	e
(as^1)	es^1	bes^1	f^1	c^1
	ces^2	ges^2	des^2	as^2
	$ases^3$	$eses^3$	$beses^3$	fes^3
	$feses^4$	$ceses^4$		

Tafel 41.

Leiter des normalisierten Systems von 34 Stufen.

d =	0		0 =	d
		1030		
$eses^3$ =	1030		— 1030 =	$cisis_3$
		743		
dis_2 =	1773		— 1773 =	des^2
		1030		
es^1 =	2803		— 2833 =	cis_1
		1030		
$feses^4$ =	3833		— 3833 =	$bisis_4$
		743		
e_1 =	4576		— 4576 =	c^1
		539		
e =	5115		— 5115 =	c
		1030		
fes^3 =	6145		— 6145 =	bis_3
		743		
eis_2 =	6888		— 6888 =	ces^2
		1030		
f^1 =	7918		— 7918 =	b_1
		743		
$eisis_4$ =	8661		— 8661 =	$ceses^4$
		1030		
fis_1 =	9691		— 9691 =	bes^1
		1030		
ges^2 =	10721		— 10721 =	ais_2
		743		
$fisis_3$ =	11464		— 11464 =	$beses^3$
		1030		
g =	12494		— 12494 =	a
		1030		
$ases^3$ =	13524		— 13524 =	$gisis_3$
		743		
gis_2 =	14267		— 14267 =	as^2
		539		
gis_1 =	14806			

1030

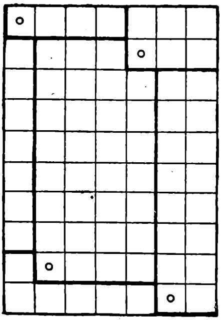


Fig. 12. 31-stufiges System.

Die Gleichung des 34-stufigen Systems ist somit:

$$19 \cdot \underline{1030} + 12 \cdot \underline{743} + 3 \cdot \underline{539} = 30103;$$

seine konstituierenden Intervalle sind:

$$1030 = \quad -3t$$
$$743 = -1q + 5t$$
$$539 = \quad 4q - 1t$$

Dem 31-stufigen System endlich entspricht zunächst die Figur 12. Nach der Normalisierung ergibt sich das Schema und die Leiter der Tafeln 42 und 43.

Tafel 42.

Schema des normalisierten Systems von 31 Stufen.

		$eisis_4$		
bis_3	$fisis_3$	$cisis_3$	$gisis_3$	$disis_3$
gis_2	dis_2	ais_2	eis_2	
	b_1	fis_1	cis_1	
c	g	d	a	e
	es^1	bes^1	f^1	
	ces^2	ges^2	des^2	as^2
$deses^3$	$ases^3$	$eses^3$	$beses^3$	fes^3
		$ceses^4$		

Tafel 43.

Leiter des normalisierten Systems von 31 Stufen.

$d =$	0		0	$= d$
		1030		
$eses^3 =$	1030		— 1030	$= cisis_1$
		743		
$dis_2 =$	1773		— 1773	$= des^2$
		1030		
$es^1 =$	2803		— 2803	$= cis_1$
		1282		
$disis_3 =$	4085		— 4085	$= deses^3$
		1030		
$e =$	5115		— 5115	$= c$
		1030		
$fes^3 =$	6145		— 6145	$= bis_3$
		743		
$eis_2 =$	6888		— 6888	$= ces^2$
		1030		
$f^1 =$	7918		— 7918	$= b_1$
		743		
$eisis_4 =$	8661		— 8661	$= ceses^4$
		1030		
$fis_1 =$	9691		— 9691	$= bes^1$
		1030		
$ges^2 =$	10721		— 10721	$= ais_2$
		743		
$fisis_3 =$	11464		— 11464	$= beses^3$
		1030		
$g =$	12494		— 12494	$= a$
		1030		
$ases^3 =$	13524		— 13524	$= gisis_3$
		743		
$gis_2 =$	14267		— 14267	$= as_2$
		1569		

Die Gleichung des Systems ist demnach:

$$1 \cdot 1569 + 2 \cdot 1282 + 18 \cdot 1030 + 10 \cdot 743 = 30103$$

Das große Intervall 1569, das nur einmal vorkommt, kann folgendermaßen vermieden werden:

a) $gis_2 + 539 = gis_1$ bezw. $as^2 - 539 = as^1$

b) $gis_2 + 287 = beseseses^6$ „ $as^2 - 287 = fisisisis_6$:

d. h. bei a) eine Teilung des Intervalles $ases^3 \div gisis_3$ in $1282 + 491 + 1282$, was aber vermieden werden muß, da 491 als zu kleines Intervall in dem System nicht vorkommen darf; im Falle b) in $1030 + 995 + 1030$. Wir erhielten so ein neues Intervall 995, das gleichfalls besser vermieden wird. Deshalb verzichten wir lieber an dieser Stelle auf die Symmetrie, indem wir etwa gis_2 beibehalten, jedoch an Stelle von as^2 as^1 einführen. Dann ergibt sich die Tafel 44 und die Gleichung

$$3 \cdot 1282 + 19 \cdot 1030 + 9 \cdot 743 = 30103.$$

Tafel 44.

Leiter des gleichmäßigst geteilten 31-stufigen Systems.

Wie Tafel 43, nur am Schluß:

$$\left.\begin{array}{r} ases^3 = 13524 \\ gis_2 = 14267 \end{array}\right\} \underbrace{743 \quad 1282}_{1030} \left\} \begin{array}{l} -\ 13524 = gisis_3 \\ -\ 14806 = as^1 \end{array}\right.$$

Die konstituierenden Intervalle des 31-stufigen Systems sind demnach:

$$\begin{aligned} 1282 &= 1030 + 252 = -3t + (3q + 7t) = 3q + 4t \\ 1030 &= \quad -3t \\ 743 &= -1q + 5t \end{aligned}$$

Weitere Systeme entstehen, wenn wir von den je 3 konstituierenden Intervallen der drei Systeme, II, III und IV je zwei verschwinden lassen; also

	a	b	c
A	$491 = -4q - 2t$	$491 = -4q - 2t$	$539 = 4q - 1t$
	$539 = 4q - 1t$	$743 = -1q + 5t$	$743 = -1q + 5t$
B	$539 = 4q - 1t$	$539 = 4q - 1t$	$743 = -1q + 5t$
	$743 = -1q + 5t$	$1030 = -3t$	$1030 = -3t$
C	$743 = -1q + 5t$	$743 = -1q + 5t$	$1030 = -3t$
	$1030 = -3t$	$1282 = 3q + 4t$	$1282 = 3q + 4t$

Diese Bedingungen führen auf die folgenden definierenden Intervalle:

	a	b	c
A	$I_1 = 539 = 4q - 1t$	$I_1 = 491 = -4q - 2t$	$I_1 = 539 = 4q - 1t$
	$I_2 = 1030 = -3t$	$I_2 = 743 = -1q + 5t$	$I_2 = 743 = -1q + 5t$
B	$I_1 = 539 = 4q - 1t$	$I_1 = 539 = 4q - 1t$	$I_1 = 2803 = -1q - 1t$
	$I_2 = 743 = -1q + 5t$	$I_2 = 1030 = -3t$	$I_2 = 7379 = -3q$
C	$I_1 = 2803 = -1q - 1t$	$I_1 = 539 = 4q - 1t$	$I_1 = 1030 = -3t$
	$I_2 = 7379 = -3q$	$I_2 = 743 = -1q + 5t$	$I_2 = 2312 = 3q + 1t$

Man sieht, daß die Fälle A, a und B, b identisch sind und ein System von 12 Stufen liefern; ferner sind identisch: A, c, B, a und C, b, indem sie ein System von 19 Stufen ergeben.

Fall A, b ergibt 22 Stufen. B, c und C, a sind gleichfalls identisch und lassen sowohl den großen Halbton als auch die Summe von großem Halbton und kleinem Ganzton verschwinden; sie bestehen zudem nur noch aus 3 Tönen, d. h. aus dem Grundton mit seiner Ober- und Unterterz. Endlich bleibt noch C, c oder ein System von 9 Stufen, das jedoch nicht rationell ist, da es sicher das kleine Intervall 1773 enthält, während 2312 verschwindet. Somit bleiben uns als neue Systeme diejenigen mit 22, 19 und 12 Stufen. (V, VI und VII.)

Das 22-stufige System haben wir bereits oben als Beispiel behandelt, wenn auch unter Benutzung der Millioktav als Einheit; wir geben deshalb hier lediglich seine Leiter in log. Einheiten in Tafel 45 wieder.

Tafel 45.

Leiter des gleichmäßigst geteilten 22-stufigen Systems.

d =	0		0	= d
		1773		
dis_2 =	1 773		— 1 773	= des^2
		1030		
es^1 =	2 803		— 2 803	= cis_1
		1282		
$disis_3$ =	4 085		— 4 085	= $deses^3$
		1030		
e =	5 115		— 5 115	= c
		1773		
eis_2 =	6 888		— 6 888	= ces^2
		1030		
f^1 =	7 918		— 7 918	= b_1
		1773		
fis_1 =	9 691		— 9 691	= bes^1
		1030		
ges^2 =	10 721		— 10 721	= ais_2
		1773		
g =	12 494		— 12 494	= a
		1030		
$ases^3$ =	13 524		— 13 524	= $gisis^3$
		1282		
gis_1 =	14 806			
		1773		

Die Gleichung des gleichmäßigst geteilten Systems mit 22 Stufen ist demnach:

$$9 \cdot 1773 + 3 \cdot 1282 + 10 \cdot 1030 = 30103$$

seine konstituierenden Intervalle sind:

$$1773 = 1282 + 491 = (3q + 4t)$$
$$+ (-4q - 2t) = -1q + 2t$$
$$1282 = 3q + 4t$$
$$1030 = \quad -3t$$

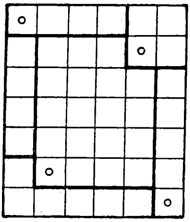


Fig. 13. 19stufiges System.

Das 19-stufige System (VI) entspricht zunächst der Figur 13 normalisiert sind Schema und Leiter die der Tafeln 46 und 47.

Tafel 46.

Schema des normalisierten Systems von 19 Stufen.

gis$_2$	dis$_2$	ais$_2$	eis$_2$	
	b$_1$	fis$_1$	cis$_1$	
c	g	d	a	e
	es^1	bes^1	f^1	
	ces^2	ges^2	des^2	as^2

Tafel 47.

Leiter des normalisierten Systems von 19 Stufen.

d =	0	1773	0 =	d
dis$_2$ =	1 773	1030	— 1 773 =	des^2
es^1 =	2 803	2312	— 2 803 =	cis$_1$
e =	5 115	1773	— 5 115 =	c
eis$_2$ =	6 888	1030	— 6 888 =	ces^2
f^1 =	7 918	1773	— 7 918 =	b$_1$
fis$_1$ =	9 691	1030	— 9 691 =	bes^1
ges$_2$ =	10 721	1773	— 10 721 =	ais^2
g =	12 494	1773	— 12 494 =	a
gis$_2$ =	14 267	1569	— 14 267 =	as^2

Hier treten 4 konstituierende Intervalle auf, entsprechend der Gleichung:

$$2 \cdot 2312 + 10 \cdot 1773 + 1 \cdot 1569 + 6 \cdot 1030 = 30103.$$

Nach Prinzip VI eliminieren wir das große Intervall 2312; da $e = 2q$ gegenüber dem gleichverwandten $es' = -1q - 1t$ vorzuziehen ist, so eliminieren wir $es' = 2803$, indem wir es durch $es^2 = 3342$ ersetzen, ebenso cis$_1$ durch cis$_2$. So ergibt sich das Schema und die Leiter der Tafeln 48 und 49.

Tafel 48.

Schema des gleichmäßigst geteilten Systems von 19 Stufen.

cis$_2$	gis$_2$	dis$_2$	ais$_2$	eis$_2$		
		b$_1$	fis$_1$			
	c	g	d	a	e	
			bes^1	f^1		
		ces^2	ges^2	des^2	as^2	es^2

Tafel 49.

Leiter des gleichmäßigst geteilten Systems von 19 Stufen.

d	=	0			0 =	d
			1773			
dis_2	=	1 773		—	1 773 =	des^2
			1569			
es^2	=	3 342		—	3 342 =	cis_2
			1773			
e	=	5 115		—	5 115 =	c
			1773			
eis_2	=	6 888		—	6 888 =	ces^2
			1030			
f^1	=	7 918		—	7 918 =	b_1
			1773			
fis_1	=	9 691		—	9 691 =	bes^1
			1030			
ges^2	=	10 721		—	10 721 =	ais_2
			1773			
g	=	12 494		—	12 494 =	a
			1773			
gis_2	=	14 267		—	14 267 =	as^2
			1569			

Die Gleichung des Systems ist:

$$12 \cdot 1773 + 3 \cdot 1569 + 4 \cdot 1030 = 30103.$$

Das 12-stufige System endlich (VII) hat zunächst das Schema der Figur 14. Sein normalisiertes Schema und seine Leiter sind die der Tafeln 50 und 51.

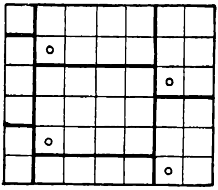


Fig. 14. 12-stufiges System.

Tafel 50.

Schema des normalisierten Systems von 12 Stufen.

	b_1	fis_1	cis_1	gis_1
c	g	d	a	e
(as′)	es′	bes′	f′	

Tafel 51.

Leiter des normalisierten Systems von 12 Stufen.

d	=	0			0 =	d
			2803			
es^1	=	2 803		—	2 803 =	cis_1
			2312			
e	=	5 115		—	5 115 =	c
			2803			
f^1	=	7 918		—	7 918 =	b_1
			1773			
fis_1	=	9 691		—	9 691 =	bes^1
			2803			
g	=	12 494		—	12 494 =	a
			2312			
gis_1	=	14 806				
					2803	

Seine Gleichung ist:

$$7 \cdot 2803 + 3 \cdot 2312 + 2 \cdot 1773 = 30103.$$

In der folgenden Übersicht stellen wir die konstituierenden Intervalle der drei neuen Systeme zusammen.

A′ 22 Stufen (V)	B′ 19 Stufen (VI)	C′ 12 Stufen (VII)
$1773 = -1q + 2t$	$1773 = -1q + 2t$	$2803 = -1q - 1t$
$1282 = 3q + 4t$	$1569 = 4q - 4t$	$2312 = 3q + 1t$
$1030 = -3t$	$1030 = -3t$	$1773 = -1q + 2t$

Hieraus ergeben sich, um zu neuen Systemen zu gelangen, folgende Kombinationen:

	a′	b′	c′
A′	$1030 = -3t$	$1030 = -3t$	$1282 = 3q + 4t$
	$1282 = 3q + 4t$	$1773 = -1q + 2t$	$1773 = -1q + 2t$
B′	$1030 = -3t$	$1030 = -3t$	$1569 = 4q - 4t$
	$1569 = 4q - 4t$	$1773 = -1q + 2t$	$1773 = -1q + 2t$
C′	$1773 = -1q + 2t$	$1773 = -1q + 2t$	$2312 = 3q + 1t$
	$2312 = 3q + 1t$	$2803 = -1q - 1t$	$2803 = -1q - 1t$

Von diesen Kombinationen ist A′ a′ identisch mit C c (vergl. oben), A′ b′, B′ b′ und C′ b′ mit B c (vergl. oben), B′ a′ mit A a (vergl. oben); es bleiben also nur übrig: A′ c′, B′ c′, C′ a′ und C′ c′. Die definierenden Intervalle sind:

für A′ c′

$$1773 = -1q + 2t$$
$$2264 = -5q$$

für B′ c′

$$1773 = -1q + 2t$$
$$5115 = 2q$$

für C′ a′

$$1773 = -1q + 2t$$
$$2312 = 3q + 1t$$

für C′ c′

$$2803 = -1q - 1t$$
$$5115 = 2q$$

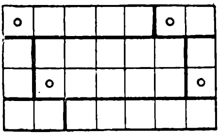


Fig. 15. 10-stufiges System.

Von diesen vier neuen Systemen scheidet das zweite (B′ c′) mit nur 4 Stufen und das vierte (C′ c′) mit zwei Stufen aus allen Gründen aus; es verbleiben die beiden Systeme (VIII) (A′ c′) und IX (C′ a′) mit 10 bezw. 7 Stufen.

Dem System mit 10 Stufen entspricht zunächst das Schema der Figur 15; normalisiert hat es Schema und Leiter der Tafeln 52 und 53.

Tafel 52.

Schema des normalisierten Systems von 10 Stufen.

$$\begin{array}{ccccc} & & fis_1 & cis_1 & gis_1 \\ c & g & d & a & e \\ (as^1) & es^1 & bes^1 & & \end{array}$$

Tafel 53.

Leiter des normalisierten Systems von 10 Stufen.

$$\begin{array}{rcr|c|rcl} d &=& 0 & & 0 &=& d \\ & & & 2803 & & & \\ es' &=& 2\,803 & & -\;2\,803 &=& cis_1 \\ & & & 2312 & & & \\ e &=& 5\,115 & & -\;5\,115 &=& c \\ & & & 4576 & & & \\ fis_1 &=& 9\,691 & & -\;9\,691 &=& bes^1 \\ & & & 2803 & & & \\ g &=& 12\,494 & & -\;12\,494 &=& a \\ & & & 2312 & & & \\ gis_1 &=& 14\,806 & & & & \\ & & & \underbrace{}_{2803} & & & \end{array}$$

Seine Gleichung ist:

$$2 \cdot 4576 + 5 \cdot 2803 + 3 \cdot 2312 = 30103.$$

Dieses System VIII entspricht wenig dem Prinzip VI, da 4576 fast doppelt so groß ist als 2312; auch ist zu beachten, daß man bei ihm das Intervall 2264 verschwinden läßt, während das nur ganz wenig größere Intervall 2312 erhalten bleibt.

Das Schema des 7-stufigen Systems (IX) ist zunächst das der Figur 16.

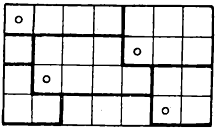


Fig. 16. 7-stufiges System.

Legt man den Ausgangston an die zweite Stelle links unten, so ist das nicht normalisierte Schema der Tafel 54 genau dasjenige unserer d-Dur-Tonleiter.

Tafel 54.

Schema des nicht normalisierten Systems von 7 Stufen.

$$\begin{array}{cccc} b_1 & fis_1 & cis_1 & \\ g & d & a & e \end{array}$$

Die entsprechende Gleichung ist die bekannte:

$$3 \cdot 5115 + 2 \cdot 4576 + 2 \cdot 2803 = 30103.$$

Somit haben wir als konstituierende Intervalle des 10-stufigen Systems und des 7-stufigen Systems erhalten:

A″	B″
10 Stufen (VIII)	7 Stufen (IX)
$4576 = -2q + 1t$	$5115 = 2q$
$2803 = -1q - 1t$	$4576 = -2q + 1t$
$2312 = -3q + 1t$	$2803 = -1q - 1t$

Hieraus ergeben sich noch folgende Kombinationen:

	a″	b″	c″
A″	$2312 = 3q + 1t$	$2312 = 3q + 1t$	$2803 = -1q - 1t$
	$2803 = -1q - 1t$	$4576 = -2q + 1t$	$4576 = -2q + 1t$
B″	$2803 = -1q - 1t$	$2803 = -1q - 1t$	$4576 = -2q + 1t$
	$4576 = -2q + 1t$	$5115 = 2q$	$5115 = 2q$

Von diesen Fällen sind identisch: A″ a″ mit B″ b″ und A″ c″ mit B″ a″; es bleiben also die 4 Fälle A″ a″, A″ b″, A″ c″ und B″ c″ zu untersuchen. Die definierenden Intervalle sind:

für A″ a″	für A″ b″
$5115 = 2q$	$4576 = -2q + 1t$
$2803 = -1q - 1t$	$6888 = 1q + 2t$

für A″ c″	für B″ c″
$2803 = -1q - 1t$	$5115 = 2q$
$7379 = -3q$	$9691 = 1t$

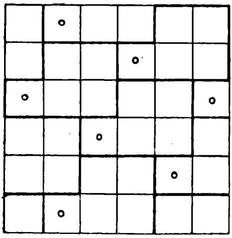


Fig. 17. 5-stufiges System.

A″ a″ ist identisch mit C′ c′, scheidet also aus; ebenso kommt das dreistufige System A″ c″ (Grundton, Ober- und Unterquint) und das 2-stufige System B″ c″ (Grundton und Oberquint) nicht in Betracht. Es bleibt somit nur das System A″ b″, das 5 Stufen hat (X) und sich zunächst in der Form der Figur 17 darstellt.

Den Grundton legen wir, um das System symmetrisch zu machen, in die Mitte der unteren Reihe; jedoch das System enthält noch das kleine Intervall 2803, ist also nicht rationell; indem wir aber in dem Schema der Tafel 55

Tafel 55.

Schema des Systems von 5 Stufen

	fis_1		cis_1	
g		d		a

$cis_1 = 1q + 1t$ durch $cis_1 - (6888 - 4576) = cis_1 - 2312 = (1q + 1t) - (3q + 1t) = -2q = c$ und $fis_1 = 9691 = 1t$ durch $fis_1 - 4576 = 1t - (-2q + 1t) = 2q = e$ ersetzen, erhalten wir das Schema der Tafel 56, das wir als das Normalschema der 5-stufigen Leitern kennen gelernt haben.

Tafel 56.

Schema des normalisierten Systems von 5 Stufen.

f c d a e

Es entspricht der Gleichung:

$$2 \cdot 7379 + 3 \cdot 5115 = 30103.$$

Betrachtet man 4576 und 6888 als definierende Intervalle, so ist das System, da es den Ganzton 5115 enthält, nicht rationell, es hat jedoch insofern eine Ausnahmestellung, als es in seiner Normalform nur aus Quinten besteht, in der reinen Quintenreihe ist sein definierendes Intervall

$$2 \cdot 4576 - 6888 = 2 \cdot (-2q + 1t) - (1q + 2t) = -5q = 2264.$$

Als reines Quintensystem besitzt das 5-stufige System nur 2 konstituierende Intervalle, nämlich 7379 und 5115.

Zusammenfassung.

Beschränkt man das zu untersuchende Feld im Quinten-Terzen-Gewebe auf $11q \cdot 27t$, so ist in diesem das höchststufige rationelle Tonsystem das mit 118 Stufen (I); von ihm leiten sich zunächst drei rationelle Systeme II, III und IV mit 53, 34 und 31 Stufen ab; von diesen die Systeme V, VI und VII mit 22, 19 und 12 Stufen, und von den letzteren die Systeme VIII und IX mit 10 und 7 Stufen. Endlich aus dem System IX noch das System X mit 5 Stufen. Figur 18, in welcher wir die brauchbaren Systeme durch Beifügung der römischen Zahl gekennzeichnet haben, macht die „Deszendenz“ noch deutlicher sichtbar.

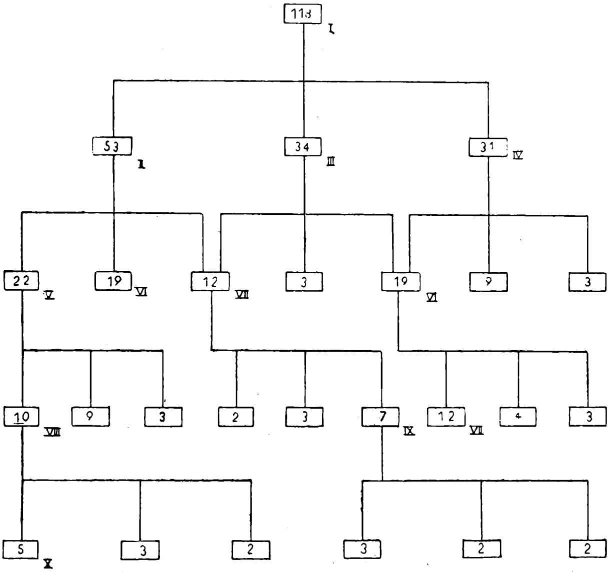


Fig. 18. Deszendenz der Tonsysteme.

In der Tafel 57 sind die gefundenen 10 Systeme samt ihren definierenden und konstituierenden Intervallen in log. Einheiten und in Millioktaven zusammengestellt.

Tafel 57.

Rationelle Tonsysteme im Felde 11q · 27t.

Nr.	Stufen-zahl	Definierende Intervalle		Konstituierende Intervalle		
I	118	35 (0)	48 (2)	204 (7)	252 (9)	287 (9)
II	53	48 (2)	252 (9)	491 (16)	539 (18)	743 (25)
III	34	287 (9)	491 (16)	539 (18)	743 (25)	1030 (34)
IV	31	287 (9)	539 (18)	743 (25)	1030 (34)	1282 (43)
V	22	743 (25)	491 (16)	1030 (34)	1282 (43)	1773 (59)
VI	19	539 (18)	743 (25)	1030 (34)	1569 (52)	1773 (59)
VII	12	539 (18)	1030 (34)	1773 (59)	2312 (77)	2803 (93)
VIII	10	1282 (43)	1773 (59)	2312 (77)	2803 (93)	4576 (152)
IX	7	1773 (59)	2312 (77)	2803 (93)	4576 (152)	5115 (170)
X	5	2264 (75)	—	5115 (170)	7379 (245)	—

Es würde keine Schwierigkeiten bieten, ein ausgedehnteres Feld als 11q·27t zu untersuchen; die anzuwendende Methode ist die gleiche. Jedoch führt die Untersuchung bald auf das

System von 118 Stufen und von da an in der ausgeführten Weise weiter abwärts. Als Systeme kleinster Stufenzahl ergeben sich diejenigen mit 5 bezw. 7 Stufen. Das folgende 10-stufige System zeigt schon in seiner Konstruktion einige Unvollkommenheiten, das nächstfolgende ist unser noch heute herrschendes System von 12 Stufen, als dessen nächste Erweiterung sich das System von 19 Stufen ergibt.

Achter Teil.

Temperierte Systeme.

Wenn wir uns nunmehr von den natürlichen Systemen zu den temperierten wenden, so können wir selbstverständlich von einer Temperierung der Systeme von weniger als 12 Stufen absehen, da sie zu einer recht schlechten Wiedergabe der natürlichen Intervalle führen würde. Anderseits brauchen wir auch die Temperierung des 118-stufigen Systems nicht zu untersuchen, sowohl weil die Unterschiede seiner 3 konstituierenden Intervalle 287, 252 und 204 gegenüber dem gleichmäßig temperierten Intervall 255,1 (= 30103 : 118) schon an der Grenze der durch das Ohr möglichen Unterscheidbarkeit liegen, als auch ganz besonders, weil eine Unterteilung der Oktav in 118 Teile praktisch wohl nie in Frage kommen wird. Klar ist von vornherein, daß die Abweichungen zwischen den natürlichen und den gleichmäßig temperierten Intervallen um so geringer sind, je größer die Stufenzahl ist; es wäre aber falsch, die natürlichen und die gleichmäßig temperierten Intervalle eines jeden Systems unter sich vergleichen und hieraus eine Kriterium für die Brauchbarkeit eines jeden zu gewinnen. Die durch Anwendung unserer Prinzipien gewonnene Form eines Systems (Normalform oder auch gleichmäßigst geteilte Form) diente ja lediglich dazu, die Größe und die Zahl der konstituierenden Intervalle zu bestimmen. Die 7-stufige Skala bot bereits ein Beispiel dafür, wie die Form eines Systems nach musikalischen Gesichtspunkten (Zahl der möglichen Dreiklänge und Bedeutung des Leitetones) zu modifizieren ist.

Die Frage ist also, welches sind die musikalisch wichtigen Intervalle, deren Wiedergabe in den einzelnen temperierten Systemen zu untersuchen ist.

Bei der Bedeutung, die die beiden heute herrschenden Systeme Dur und Moll erlangt haben, gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst suchen wir alle in der Dur- und Molltonleiter vorkommenden Intervalle, von der Tonika aus gerechnet, auf, dann sehen wir ihr Bildungsgesetz im Quinten-Terzengewebe nach. Dann berechnen wir für jedes temperierte System den Zahlenwert einer Stufe, die Stufenzahl, die zur Bildung von Quint und Terz nötig ist, und hieraus den Intervallwert von Quint und Terz in jedem temperierten System. Dann können wir hiermit die temperierten Intervallwerte der 10 Töne der Dur- und Molltonleiter berechnen. Hierbei sehen wir von dem 118-stufigen System, als zu weitgehend unterteilt, ab; ebenso natürlich von den Systemen mit weniger als 10 Stufen, deren Temperierung keinen Sinn hätte. Tafel 58 enthält zunächst Intervallwerte und Bildungsgesetz der 10 Töne der Dur- und Molltonleiter. Für das folgende genügt es, wenn wir in Millioktaven rechnen.

Tafel 58.

Intervalle und Bildungsgesetz der Töne der Dur- und Molltonleiter.

0 =	d		— 415 =	a =	1q
170 =	e =	2q	— 322 =	bes[1] =	— 1t
263 =	f′ =	1q — 1t	— 263 =	b_1 =	— 1q + 1t
322 =	fis_1 =	— 1t	— 152 =	c′ =	2q — 1t
415 =	g =	— 1q	— 93 =	cis_1 =	1q + 1t

Den Wert einer Stufe erhält man durch Division von 1000 mit den jeweiligen z-Werten; die Stufenzahlen der Quint und Terz durch Abzählen in den entsprechenden Tonleitern (s. o.); so ergibt sich Tafel 59.

Tafel 59.

Stufenwerte, Stufenzahl von Quint und Terz, Quinten- und Terzenwerte der temperierten Systeme.

z	Stufenwert	Stufenzahl Quint	Terz	Quintenwert	Terzenwert
53	18,868	31	17	584,90	320,76
34	29,412	20	11	588,24	322,53
31	32,258	18	10	580,64	322,58
22	45,455	13	7	590,91	318,18
19	52,632	11	6	578,95	315,79
12	83,333	7	4	583,33	333,33

Tafel 60 enthält die sich aus 58 und 59 ergebenden temperierten Intervalle.

Tafel 60.

Temperierte Intervalle der D-Dur- und Molltonleiter.

Rein		53 St.	34 St.	31 St.	22 St.	19 St.	12 St.
d =	0	0	0	0	0	0	0
e =	170	169,8	176,5	161,3	181,8	157,9	166,7
f′ =	263	264,1	265,7	258,1	272,7	263,2	250,0
fis_1 =	322	320,8	322,5	322,6	318,2	315,8	333,3
g =	415	415,1	411,8	419,4	409,1	421,1	416,7
a =	—415	—415,1	—411,8	—419,4	—409,1	—421,1	—416,7
bes^1 =	—322	—320,8	—322,5	—322,6	—318,2	—315,8	—333,3
b_1 =	—263	—264,1	—265,7	—258,1	—272,7	—263,2	—250,0
c′ =	—152	—151,0	—146,1	—161,3	—136,4	—157,9	—166,7
cis_1 =	—93	—94,3	—89,2	—96,8	—90,9	—105,3	—83,3

Von den 10 reinen Intervallen ist, wie ein Blick auf Tafel 59 oder 60 zeigt, ein Teil als Ergänzungsintervall zur Oktav mitbestimmt; als unabhängige Intervalle $<$ 500 bleiben nur: die Quart 415, die große Terz 322, die kleine Terz 263, der große Ganzton 170, der kleine Ganzton 152 und der große Halbton 93. Tafel 61 enthält die gegenüber den reinen Intervallen auftretenden (abgerundeten) Fehler.

Tafel 61.

Fehler der temperierten Systeme.

Rein	53 St.	34 St.	31 St.	22 St.	19 St.	12 St.
Quart 415	0	—3	4	—6	6	2
Gr. Terz 322	—1	0	1	—4	6	11
Kl. Terz 263	1	3	—5	10	0	—13
Gr. Ganzt. 170	0	7	—9	12	—12	—3
Kl. Ganzt. 152	—1	—6	9	—16	6	15
Gr. Halbt. 93	1	—4	4	—2	12	—10

Man sieht, welch große Vorzüge das von Oettingsche System von 53 Stufen hat, bei welchem die 6 wichtigen Intervalle fast rein wiedergegeben werden; um die Güte der einzelnen Systeme zu beurteilen, muß man natürlich vor dem Vorzeichen der Fehler absehen; sei es nun, daß man die Summe der absoluten Fehler bildet, oder die Summe der Fehlerquadrate, so ergibt sich jedesmal folgende Anordnung nach absteigender Güte:

53 34 31 19 22 12

Man wird also, wenn man mehr als 12 Stufen verwenden will, anderseits aber die Stufenzahl noch möglicht klein halten will, dem 19-stufigen vor dem 22-stufigen System den Vorzug geben.

Daß tatsächlich das auf Grund unserer Überlegungen gefundene System von 19 Stufen die nächste Erweiterung unseres 12-stufigen Systems darstellt, zeigt sich augenscheinlich, wenn man versucht, unsere 6 reinen Intervalle durch temperierte Intervalle anderer Stufenzahl darstellen: selbstverständlich muß dann, da kein natürliches Bildungsgesetz vorliegt, jeweils das dem natürlichen am nächsten liegende Intervall genommen werden.

Tafel 62 enthält die Werte, die sich für temperierte Systeme von 12 bis 24 Stufen ergeben, Tafel 63 die auftretenden Abweichungen (absolut) gegenüber den reinen Intervallen.

Tafel 62.

Temperierte Systeme von 12 bis 24 Stufen.

Stufenzahl	Stufenwert	Quart	Gr. Terz	Kl. Terz	Gr. Ganzt.	Kl. Ganzt.	Halbt.
		(415)	(322)	(263)	(170)	(152)	(93)
12	83,333	417	333	250	167	167	83
13	76,923	385	308	231	154	154	77
14	71,429	430	357	286	143	143	71
15	66,667	400	333	267	200	133	67
16	62,500	438	313	250	188	125	63
17	58,888	412	294	236	177	177	118
18	55,555	444	333	277	167	167	111
19	52,632	421	315	263	157	157	105
20	50,000	400	300	250	150	150	100
21	47,619	429	333	286	190	143	95
22	45,455	409	318	273	182	136	91
23	43,478	435	304	261	174	130 od. 174	87
24	41,667	417	333	250	167	167	83

Tafel 63.

Absolute Fehler der temperierten Systeme von 19 bis 24 Stufen.

Stufenzahl	Quart	Gr. Terz	Kl. Terz	Gr. Ganzt.	Kl. Ganzt.	Halbt.	Summe
12	2	11	13	3	15	10	54
13	30	14	32	16	2	16	110
14	15	35	23	27	9	22	131
15	15	11	4	30	19	26	105
16	23	9	13	18	27	30	120
17	3	28	27	7	25	25	115
18	29	11	14	3	15	18	90
19	6	7	0	13	5	12	43
20	15	22	13	20	2	7	79
21	14	11	23	20	9	2	79
22	6	4	10	12	16	2	50
23	20	18	2	4	22	6	72
24	2	11	13	3	15	10	54

Betrachten wir die Fehlersummen, so sieht man, daß tatsächlich das 12-, das 19- und das 22-stufige System eine bevorzugte Stellung einnehmen, indem ihnen die Minimalwerte in der Reihe entsprechen; man sieht ferner, daß z. B. eine mechanische Teilung der Oktav in Dritteltöne (18 Stufen) eine Verschlechterung in der Wiedergabe der wichtigen Intervalle bedeuten würde, daß eine Teilung in Vierteltöne (24 Stufen) gegenüber dem 12-stufigen System keine Verbesserung darstellte.

Wir können, um ein Kriterium für die Güte der einzelnen temperierten Systeme zu gewinnen, aber auch so vorgehen, daß wir sie mit dem 53-stufigen, rein gestimmten System vergleichen. Zu diesem Zweck berechnen wir für jedes der Systeme mit weniger als 53 Stufen zunächst, durch wieviele Stufen ein jedes Intervall des v. Oettingenschen Systems jeweils dargestellt wird, indem wir nach dem Bildungsgesetz jedes Intervalles mittels der in Tafel 59 angegebenen Stufenzahlen von Quint und Terz die Stufenzahl jedes Tones berechnen. Die Multiplikation mit dem Stufenwert ergibt dann das gesuchte temperierte Intervall.

Tafel 64.

Vergleich der temperierten Systeme mit dem v. Oettingenschen System.

			53 St.		34 St.		31 St.		22 St.		19 St.		12 St.	
d	= 0 =		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d′	= 18 =	4q — 1t	1	18,9	1	29,4	0	0	1	45,5	0	0	0	0
$eses^3$	= 34 =	— 3t	2	37,7	1	29,4	1	32,3	1	45,5	1	52,6	0	0
dis_2	= 59 =	— 1q + 2t	3	56,6	2	58,8	2	64,5	1	45,5	1	52,6	1	83,3
dis_1	= 77 =	3q + 1t	4	79,5	3	88,2	2	64,5	2	90,9	1	52,6	1	83,3
es^1	= 93 =	— 1q — 1t	5	94,3	3	88,2	3	96,8	2	90,9	2	105,3	1	83,3
es^2	= 111 =	3q — 2t	6	113,2	4	117,6	3	96,8	3	136,4	2	105,3	1	83,3
$disis_3$	= 136 =	2q + 3t	7	132,1	5	147,1	4	129,0	3	136,4	2	105,3	2	166,7
e_1	= 152 =	— 2q + 1t	8	150,9	5	147,1	5	161,3	3	136,4	3	157,9	2	166,7
e	= 170 =	2q	9	169,8	6	176,5	5	161,3	4	181,8	3	157,9	2	166,7
fes^2	= 186 =	— 2q — 2t	10	188,7	6	176,5	6	193,5	4	181,8	4	210,5	2	166,7
fes^3	= 204 =	2q — 3t	11	207,5	7	205,9	6	193,5	5	227,3	4	210,5	2	166,7
eis_2	= 229 =	1q + 2t	12	226,4	8	235,3	7	225,8	5	227,3	5	210,5	3	250,0
f	= 245 =	— 3q	13	245,3	8	235,3	8	258,1	5	227,3	5	263,2	3	250,0
f′	= 263 =	1q — 1t	14	264,2	9	264,7	8	258,1	6	272,7	5	263,2	3	250,0
$geses^3$	= 279 =	— 3q — 3t	15	273,0	9	264,7	9	290,3	6	272,7	6	315,8	2	250,0
fis_2	= 304 =	— 4q + 2t	16	301,9	10	294,1	10	322,6	6	272,7	6	315,8	4	333,3
fis_1	= 322 =	1t	17	320,8	11	323,5	10	322,6	7	318,2	6	315,8	4	333,3
ges^1	= 338 =	— 4q — 1t	18	339,6	11	323,5	11	354,8	7	318,2	7	368,4	4	333,3
ges^2	= 356 =	— 2t	19	358,5	12	352,9	11	354,8	8	363,6	7	368,4	3	333,3
$fisis_3$	= 381 =	— 1q + 3t	20	377,4	13	382,4	12	387,1	8	363,6	7	368,4	5	416,7
g_1	= 397 =	— 5q + 1t	21	396,2	13	382,4	13	419,4	8	363,6	8	421,1	5	416,7
g	= 415 =	— 1q	22	415,1	14	411,8	13	419,4	9	409,1	8	421,1	5	416,7
g^1	= 433 =	3q — 1t	23	434,0	15	441,2	13	419,4	10	454,6	8	421,1	5	416,7
$ases^3$	= 449 =	— 1q — 3t	24	452,8	15	441,2	14	451,6	10	454,6	9	473,7	5	416,7
gis_2	= 474 =	— 2q + 2t	25	471,7	16	470,6	15	483,9	10	454,6	9	473,7	6	500,0
gis_1	= 492 =	2q + 1t	26	490,6	17	500,0	15	483,9	11	500,0	9	473,7	6	500,0

Berechnen wir nunmehr die Abweichungen der 6 temperierten Systeme gegenüber dem reingestimmten 53-stufigen System, auf ganze Millioktaven abgerundet, und bilden die Summe aller Fehler (absolut, d. h. mit positivem Vorzeichen, zum Schluß noch mit dem Faktor 2 zu multiplizieren, da wir nur die Töne < 500 in Tafel 64 aufgeführt haben), so ergeben sich folgende Fehlersummen:

für das 53-stufige temp. System	: 104,	d. h. e. mittl. Fehler	2,0
„ „ 34- „ „ „	: 360,	„ „ „ „ „	6,8
„ „ 31- „ „ „	: 472,	„ „ „ „ „	8,9
„ „ 22- „ „ „	: 722,	„ „ „ „ „	13,6
„ „ 19- „ „ „	: 794,	„ „ „ „ „	15,0
„ „ 12- „ „ „	: 1002,	„ „ „ „ „	18,9

Tafel 64 zeigt außerdem deutlich, welches die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Systeme sind. Das 53-stufige System von Oettingen hat, wie wir oben gefunden, die konstituierenden Intervalle 16, 18 und 25, die im temperierten System durch das Intervall 18,9 dargestellt werden. Aus den drei konstituierenden Intervallen des Oettingenschen Systems ergeben sich sofort die 3 ersten Töne der Leiter, nämlich:

$d' = 18 =$ syntonisches Komma
$eses^3 = 34 =$ kleine Diesis
$dis_2 = 59 =$ Terzendifferenz.

1. Im 53-stufigen temperierten System wird somit dargestellt:

das syntonische Komma	durch 1 Stufe	= 18,9
die kleine Diesis	durch 2 Stufen	= 37,7
die Terzendifferenz	durch 3 Stufen	= 56,6.

2. Im 34-stufigen temperierten System wird dargestellt:

das syntonische Komma	durch 1 Stufe	= 29,4
die kleine Diesis	durch 1 Stufe	= 29,4
die Terzendifferenz	durch 2 Stufen	= 58,8.

Es wird somit hier der Unterschied zwischen der kleinen Diesis und dem syntonischen Komma, also das Intervall $34 - 18 = 16$ vernachlässigt. Dieses Intervall kommt im 53-stufigen natürlichen System 19 mal vor, in der Tat ist $53 - 19 = 34$.

3. Im 31-stufigen temperierten System wird

das syntonische Komma	vernachlässigt	
die kleine Diesis	durch 1 Stufe	= 32,8
die Terzendifferenz	durch 2 Stufen	= 64,5

dargestellt; es wird somit hier einfach das Intervall 18 unterdrückt; dieses kommt im natürlichen 53-stufigen System 22 mal vor; also: $53 - 22 = 31$.

4. Im 22-stufigen temperierten System wird dargestellt:

das syntonische Komma	durch 1 Stufe	= 45,5
die kleine Diesis	durch 1 Stufe	= 45,5
die Terzendifferenz	durch 1 Stufe	= 45,5

Es wird somit hier unterdrückt:

1. das Intervall 16 = 34 — 18	19 mal
2. das Intervall 25 = 59 — 34	12 mal,

also: 53 — (19 + 12) = 22.

5. Im 19-stufigen temperierten System wird:

das syntonische Komma	vernachlässigt	
die kleine Diesis	durch 1 Stufe	= 52,6
die Terzendifferenz	durch 1 Stufe	= 52,6

dargestellt. Also ist hier unterdrückt:

1. das Intervall 18	22 mal
2. das Intervall 34 — 18 = 16	12 mal;

in der Tat ist 53 — (22 + 12) = 19.

6. Im 12-stufigen temperierten System wird

das syntonische Komma	vernachlässigt	
die kleine Diesis	vernachlässigt	
die Terzendifferenz	durch 1 Stufe	= 83,3

dargestellt. Also ist hier unterdrückt:

1. das Intervall 18	22 mal
2. das Intervall 34 — 18 = 16	19 mal,

in der Tat ist: 53 — (22 + 19) = 12. Man sieht, daß in dem 12-stufigen System die Terzendifferenz 59, ebenso wie der um die kleine Diesis größere Leiteton 93 durch die nämliche Stufe 83,3 dargestellt werden.

Wie man sieht, teilen sich unsere temperierten Systeme in 2 Gruppen: solche, in denen das syntonische Komma aufrechterhalten wird, nämlich diejenigen mit 53,34 und 22 Stufen, und solche, die das Komma unterdrücken, nämlich diejenigen mit 31,19 und 12 Stufen.

In der ersten Gruppe wird bei 53 Stufen sowohl das syntonische Komma (18), als auch die kleine Diesis (34), als auch die Terzendifferenz (59) recht gut durch 1 Stufe (18,9) bezw. durch 2 Stufen (37,7) und 3 Stufen (56,6) dargestellt. Das 34-stufige System vergrößert das Komma zu 29,4, also um über

50 %, während die kleine Diesis ebenfalls durch 29,4 wiedergegeben wird, also gegenüber ihrem natürlichen Wert ein wenig verkleinert erscheint, endlich die Terzendifferenz 59 durch 58,8 recht rein wiedergegeben wird. Im 22-stufigen System endlich ist das Komma ganz bedeutend und die kleine Diesis immerhin beträchtlich vergrößert (45,5), während die Terzendifferenz etwas verkleinert ist.

In der zweiten Gruppe haben wir zunächst das 31-stufige System, das die kleine Diesis durch 32,3 recht gut wiedergibt, während die Terzendifferenz, durch 64,5 gegeben, etwas vergrößert erscheint. Das 19-stufige System hat die kleine Diesis

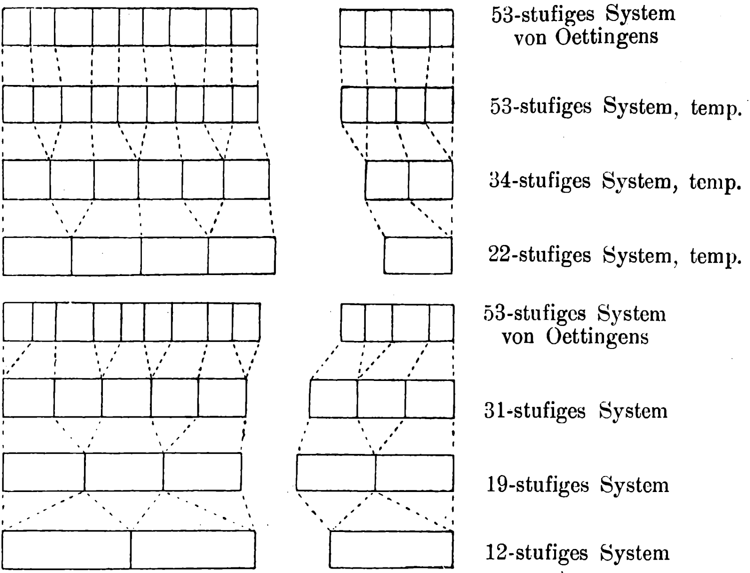


Fig. 19. Darstellung der Intervalle des v. Oettingschen Systemes in den temperierten Systemen.

um 50 % vergrößert (52,6), seine Terzendifferenz, die gleich der kleinen Diesis ist, wird recht gut wiedergegeben. Endlich finden wir im 12-stufigen System die Vernachlässigung der kleinen Diesis und die starke Übertreibung der Terzendifferenz, die hier durch 83,3 wiedergegeben wird, also das gleiche Intervall, das auch den großen Halbton darstellen muß.

In Figur 19 ist dargestellt, in welcher Weise die Intervalle des v. Oettingenschen Systems in den einzelnen temperierten Systemen wiedergegeben werden; wir betrachten den großen Ganzton ($d \div e$) und den kleinen Halbton ($e \div f$). Beachten wir, daß der kleine Ganzton $d \div e_1$ und der große Halbton $e_1 \div f$ ist, so sehen wir, wie in der ersten Gruppe das syntonische Komma, also der Unterschied zwischen großem und kleinen Ganz- bezw. Halbton sukzessive vergrößert wird, bis er im 22-stufigen System sogar gleich dem kleinen Halbton wird. In der zweiten Gruppe fällt er überhaupt fort; es fällt hier auf, daß der Halbton des 19-stufigen Systems, verglichen mit dem reinen kleinen Halbton, relativ schlecht, nämlich sehr vergrößert erscheint, während der des 12-stufigen Systems nur wenig größer als der reine kleine Halbton ist; wir dürfen aber hierbei nicht vergessen, daß der Halbton bei der zweiten Gruppe auch den großen reinen Halbton repräsentiert, und daß gegenüber diesem der Fehler des 19-stufigen Halbtones, wie Tafel 62 zeigt, nur 12 M-O. beträgt.

Neunter Teil.

Das 19-stufige System.

Aus Tafel 64 entnehmen wir, das im 19-stufigen System folgende Töne enharmonisch verwechselt werden können: (Wir wählen jetzt, da es sich um temperierte Töne handelt, große Anfangsbuchstaben)

D	und	D′		
$Eses^3$	,	Dis_2	und	Dis_1
Es^1	,	Es^2	und	$Disis_3$
E_1	und	E		
Fes^3	,	Fes^2	und	Eis_2
F	und	F′		
$Geses^3$	,	Fis_2	und	Fis_1
Ges^1	,	Ges^2	und	$Fisis_3$
G_1	,	G	und	G′
$Ases^3$	,	Gis_2	und	Gis_1

sowie die Komplementärtöne. Wir können nunmehr die Indizes ganz fortlassen, und kommen so zu dem folgenden System, wobei die enharmonisch verwechselbaren Töne in horizontaler Reihe stehen:

1	D							
2	Dis	Eses						
3	Disis	Es						
4		E	Feses					
5		Eis	Fes					
6		Eisis	F					
7			Fis	Geses				
8			Fisis	Ges				
9				G				
10				Gis	Ases			
11				Gisis	As			
12					A			
13					Ais	Beses		
14					Aisis	Bes		
15						B	Ceses	
16						Bis	Ces	
17						Bisis	C	
18							Cis	Deses
19							Cisis	Des
1′								D′

Das System der Tonarten umfaßt natürlich in jeder Gruppe (Dur und die verschiedenen Leitern von Moll) 19; indem man durch 19 Quinten nach oben und unten zum Ausgangston zurückkehrt. In Tafel 65 geben wir als Beispiel das System der Durtonarten, wobei wir jeweils die einfachere Darstellung unterstrichen haben.

In der üblichen Bezeichnungsweise gruppieren sich die Tonarten wieder um C-Dur; während in der 12-stufigen Skala die folgenden Durtonarten auftreten: (außer C-Dur)

G (1 ♯) D (2 ♯) A (3 ♯) E (4 ♯) B (5 ♯) Fis (6 ♯)
F (1 ♭) Bes (2 ♭) As (3 ♭) As (4 ♭) Des (5 ♭) Ges (6 ♭)

und Fis-Dur mit Ges-Dur identisch wird, ist letzteres in der 19-stufigen Skala nicht mehr der Fall, und es kommen noch die folgenden 6 Tonarten hinzu:

Cis (7 ♯) Gis (6 ♯ 1 ×) Dis (5 ♯ 2 ×)
Ces (7 ♭) Fes (6 ♭ 1 ♭♭) Beses (5 ♭ 1 ♭♭)

Was die Überführung des 19-stufigen Systems in die Praxis betrifft, so muß hierzu der Musiker und der Musikinstrumenten-

Tafel 65.

System der Durtonarten bei der 19-stufigen Skala.

D	E	Fis	G	A	B	Cis	=	Eseses	Feses	Geses	Aseses	Beseses	Ceses	Deses
A	B	Cis	D	E	Fis	Gis	=	Beseses	Ceses	Deses	Eseses	Feses	Geses	Ases
E	Fis	Gis	A	B	Cis	Dis	=	Feses	Geses	Ases	Beseses	Ceses	Deses	Eses
B	Cis	Dis	E	Fis	Gis	Ais	=	Ceses	Deses	Eses	Feses	Geses	Ases	Beses
Fis	Gis	Ais	B	Cis	Dis	Eis	=	Geses	Ases	Beses	Ceses	Deses	Eses	Fes
Cis	Dis	Eis	Fis	Gis	Ais	Bis	=	Deses	Eses	Fes	Geses	Ases	Beses	Ces
Gis	Ais	Bis	Cis	Dis	Eis	Fisis	=	Ases	Beses	Ces	Deses	Eses	Fes	Ges
Dis	Eis	Fisis	Gis	Ais	Bis	Cisis	=	Eses	Fes	Ges	Ases	Beses	Ces	Des
Ais	Bis	Cisis	Dis	Eis	Fisis	Gisis	=	Beses	Ces	Des	Eses	Fes	Ges	As
Eis	Fisis	Gisis	Ais	Bis	Cisis	Disis	=	Tes	Ges	As	Beses	Ces	Des	Es
Bis	Cisis	Disis	Eis	Tisis	Gisis	Aisis	=	Ces	Des	Es	Fes	Ges	As	Bes
Tisis	Gisis	Aisis	Bis	Cisis	Disis	Eisis	=	Ges	As	Bes	Ces	Des	Es	F
Cisis	Disis	Eisis	Fisis	Gisis	Aisis	Bisis	=	Des	Es	F	Ges	As	Bes	C
Gisis	Aisis	Bisis	Cisis	Disis	Eisis	Fisisis	=	As	Bes	C	Des	Es	F	G
Disis	Eisis	Fisisis	Gisis	Aisis	Bisis	Cisisis	=	Es	F	G	As	Bes	C	D
Aisis	Bisis	Cisisis	Disis	Eisis	Fisisis	Gisisis	=	Bes	C	D	Es	F	G	A
Eisis	Fisisis	Gisisis	Aisis	Bisis	Cisisis	Disisis	=	F	G	A	Bes	C	D	E
Bisis	Cisisis	Disisis	Eisis	Fisisis	Gisisis	Aisisis	=	C	D	E	F	G	A	B
Fisisis	Gisisis	Aisisis	Bisis	Cisisis	Disisis	Eisisis	=	G	A	B	C	D	E	Fis

bauer Stellung nehmen. Lediglich sei zum Schlusse Tafel 66 gegeben, in der die absoluten Schwingungszahlen der 19 Töne in der eingestrichenen Oktav angegeben sind, die sich ergeben, wenn, wie üblich, dem „Kammerton“ d. i. dem eingestrichenen a′ die Schwingungszahl 435 zugeteilt wird.

Tafel 66.

Absolute Schwingungszahlen in der Eingestrichenen Oktav der 19-stufigen Skala.

C			261,2	Fisis	=	Ges	375,94
Cis	=	Deses	270,72	G			389,91
Cisis	=	Des	280,78	Gis	=	Ases	404,39
D			291,21	Gisis	=	As	419,42
Dis	=	Eses	302,03	A			435,00
Disis	=	Es	313,26	Ais	=	Beses	451,16
E	=	Feses	324,89	Aisis	=	Bes	467,93
Eis	=	Fes	336,96	B	=	Ceses	485,31
F			349,48	Bis	=	Ces	503,34
Fis	=	Geses	362,46	C			562,05

Nachwort.

Während der Niederschrift der vorliegenden Ausführungen erhielt der Verfasser durch die Bibliothek der Universität Tucumán die Schrift des dänischen Musikschriftstellers Thorwald Kornerup: „Das Tonsystem des Italieners Zarlino vom Jahre 1558, 1930 in ein modernes Wertbezugssystem zur Würdigung der 31-, 19- und 12-tönigen Temperaturen umgebildet. Ein sehr konzentrierter Extrakt.“ Kopenhagen 1930. Deutsch nach dem dänischen Manuskript von P. Friedrich Paulsen.

Nachdem der Verfasser Herrn Kornerup seine früher veröffentlichte Arbeit über die rationellen Tonsysteme übersandt, erhielt er eine neue Veröffentlichung derselben: „Die Vorläufer der gleichschwebenden Temperaturen mit 19 oder 31 Tönen in der Oktave.“ Kopenhagen 1931, sowie einen vom 15. September 1930 datierten Brief, in welchem Herr Kornerup unter Würdigung der gemeinsamen Gesichtspunkte dem Verfasser vorschlägt, erstens an Stelle der in seinen früheren Arbeiten verwandten logarithmischen Einheiten die von ihm benutzte Einheit

„Ellis-Cent" (Oktav = 1200 Ellis-Cents) zu verwenden, zweitens an Stelle von d als „Zentrum der Skala" c zu benutzen.

Der Verfasser möchte auf die Veröffentlichungen von Herrn Kornerup an dieser Stelle nicht näher eingehen, sondern sich nur zu den beiden Vorschlägen äußern.

Betreffs des ersten Vorschlages verweist er auf seine Ausführungen in der Zeitschr. f. Physik **5**, 198, 1921, die sich gegen Einwände von Herrn J. Wallot (Zeitschr. f. Physik, **4**, 157, 1921), sowie von Herrn A. Schmidt (ebenda, **3**, 250, 1920) richten. Während Herr Wallot die Millioktaventeilung befürwortet, erinnert Herr Schmidt an die auch von v. Oettingen erwähnte Teilung der Oktav in 1200 Teile, also in Ellis-Cents. Verfasser hatte Herrn Wallot gegenüber zugegeben, daß es gewiß für viele Zwecke genügt, mit Millioktaven zu arbeiten, betonte jedoch, daß bei einer Weiterführung der Untersuchung in der Art v. Oettingens das Auftreten des in Millioktaven nicht mehr ganzzahligen Schismas (48 log. Einheiten = 1,59 M.-O.) bei ganzzahligen Millioktaven eine Unsicherheit in der Einerstelle bedingt. Gegenüber Herrn Schmidt war betont worden, daß die Einteilung in 1200 Teile wohl nur für die Untersuchung der 12-stufigen oder auch einer 24- und 36-stufigen Skala von größerem Vorteil sei als die Millioktaventeilung. Entsprechend seiner damals geäußerten Auffassung, daß sich bei den beiden Teilungen in log. Einheiten und in Millioktaven Vorteile und Nachteile die Waagschale halten dürften, hat er in der vorliegenden Schrift beide Einteilungen nebeneinander benutzt, und je nach dem jeweiligen Gegenstand der einen oder der anderen den Vorzug gegeben.

Was den zweiten Vorschlag betrifft, so hat der Verfasser in der vorliegenden Arbeit im allgemeinen c als Ausgangston gewählt, damit der Tradition folgend; nur da, wo die Betrachtung das Tongewebe benutzt, wurde aus Symmetriegründen dem d der Vorzug gegeben.

Dem Wunsche Herrn Kornerups, die Ausführungen für einen größeren Leserkreis verständlicher zu machen, als dies bei der in der Zeitschrift für Physik erfolgten Veröffentlichung des Jahres 1928 der Fall sein konnte, glaubt der Verfasser in hinreichendem Maße nachgekommen zu sein.