Verallgemeinerung eines Satzes der Herren Juel und Stenfors.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Zu den mannigfachen Fragestellungen der Geometrie reeller Gebilde gehört die nach der Kennzeichnung der Kurven einer gegebenen Ordnung vermittelst anderer Eigenschaften. Für die ebenen Kurven dritter Ordnung ohne Spitzen und Doppelpunkte ist eine solche Kennzeichnung bekannt. Sie lautet:

Eine ebene, mit stetiger Tangente versehene und spitzenfreie[1]), einfache Kurve C mit mindestens einem Wendepunkt ist dann (und nur dann) von dritter Ordnung, wenn sie keine zwei- oder mehrfache Tangente besitzt.

Zu den Voraussetzungen dieses Satzes bemerken wir in Rücksicht auf später noch folgendes: Da keine mehrfachen Tangenten auftreten sollen, muß die Kurve C stückweise konvex sein. Die Punkte von C sind also mit endlich vielen Ausnahmen Punkte zweiter Ordnung, nämlich mit Ausnahme derjenigen Punkte, in welchen je zwei Konvexbogen zusammenstoßen. Da unter diesen Ausnahmepunkten keine Spitzen vorkommen sollen, so können (wegen der Stetigkeit der Tangente) nur Wendepunkte auftreten. Die Forderung, daß auch mindestens ein Wendepunkt vorhanden sei, dient dazu, um den Fall der Kurven zweiter Ordnung auszuschließen. Nun ist ein Wendepunkt stets ein Punkt von dritter Ordnung. Wir können da-

---

1) Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend damit, daß in jedem Punkt P_0 der Kurve C die Paratingente eindeutig bestimmt ist, d. h. daß die Limiten der Geraden durch zwei zu P_0 (beliebig) benachbarte Punkte sämtlich zusammenfallen. Aus der Eindeutigkeit der Paratingente folgt ihre Stetigkeit. Vgl. Bouligand, G., Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932, S. 75, Nr. 77, sowie S. 127.

her — ohne Einschränkung der Allgemeinheit — den Satz auch so aussprechen:

Eine einfache Kurve C (in der projektiven Ebene), welche in jedem Punkte mit einer eindeutig bestimmten Paratingente versehen ist, welche ferner nur Punkte von maximal dritter Ordnung — und auch mindestens einen solchen — besitzt, ist genau von dritter Ordnung dann (und nur dann), wenn C von keiner Geraden in mehr als einem Punkte berührt wird.

Den Beweis dieses, zuerst von Herrn Juel vermutungsweise ausgesprochenen Satzes verdankt man Herrn Stenfors[2]).

Man kann nun, wie ich beim Studium des Stenfors'schen Beweises bemerkte, diesen Satz auffassen als einfachsten Fall eines allgemeineren Theorems. Diese Verallgemeinerung ergibt sich, wenn man die Ordnung der betrachteten Kurve C nicht mit Hilfe der Geraden definiert, sondern mit Hilfe eines Systems von sogenannten K_k-Kurven, d. h. von Kurven, deren jede durch k verschiedene, willkürlich vorgegebene Punkte eindeutig festgelegt ist. (Im Falle der Geraden ist $k = 2$)[3]). Es wird hier genügen, diese Verallgemeinerung beispielshalber für die Kreise als K_3-Kurven ($k = 3$) und für ein (beschränktes) Oval als Kurve C zu formulieren:

Ein Oval C, welches in jedem Punkte mit eindeutigem Krümmungskreise begabt ist und welches nur Punkte von maximal vierter zyklischer Ordnung enthält, besitzt genau die zyklische Ordnung vier dann (und nur dann), wenn C von keinem Kreise in mehr als zwei Punkten berührt wird.

Dabei sei der Krümmungskreis in P_0 erklärt als Grenzlage der Kreise durch drei Punkte von C, welches sich gegen den einen Punkt P_0 von C zusammenziehen; diese Grenzlage soll eindeutig bestimmt sein[4]). Zur Erläuterung der im Satze an-

---

2) Stenfors, E., Ein Satz über völlig stetige, geschlossene Kurven, Soc. Sci. Fennica Comment. phys.-math. 1922, I 27.

3) Vgl. genaueres hierüber in meiner Arbeit: Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven usw., Monatshefte f. Math. u. Phys. 40 (1933), S. 1 ff; § 1.

4) Man fordert also nichts anderes als die Eindeutigkeit der „Kreisparatingente". Diese ist dann auch stetig.

gegebenen Voraussetzungen sei folgendes angeführt. In der Forderung, daß kein Kreis in mehr als zwei Punkten berührt, soll insbesondere folgende Forderung enthalten sein: Es soll der Krümmungskreis in P_0 keinen von P_0 verschiedenen (Berührungs-) Punkt mit C von höherem Gewichte als Eins besitzen; ein Punkt Q von C auf dem Kreise K heißt dabei (Berührungs-) Punkt des Kreises K mit C vom Gewichte g, wenn Q Limes von g verschiedenen Punkten von C ist, welche je auf Kreisen liegen, die zu K beliebig benachbart sind, und wenn $g \geq 1$ die größte Anzahl solcher Punkte ist; für $g = 1$ erhält man speziell einen Schnittpunkt des Kreises mit dem Oval. Unter der zyklischen Ordnung von C verstehen wir die maximale Anzahl von Punkten, welche C mit allen möglichen Kreisen K gemeinsam hat; dabei wird jeder gemeinsame Punkt von K mit C für soviele Punkte gezählt, als seinem Gewichte bezüglich K entspricht. Ferner ist die zyklische Ordnung eines Punktes P von C erklärt als das Minimum der zyklischen Ordnungen aller Umgebungen von P auf C. — Ein Oval, welches kein Kreis ist, besitzt immer Punkte der zyklischen Ordnung vier (vgl. die auf die Existenz mindestens eines Wendepunktes bezügliche Voraussetzung im Juel-Stenfors'schen Satze).

Beispiel: Die Ellipse.

Wir besprechen in Kürze nur noch die Voraussetzungen im allgemeinen Falle $k > 3$ — wobei wir uns hier aber auf $k \equiv 1$ (2) beschränken, um die hier benützte Definition[3]) der K_k-Kurven ohne Zusatz beibehalten zu können. Ziel ist eine Kennzeichnung gewisser beschränkter, einfacher, geschlossener Kurven C von der K_k-Ordnung $(k+1)$; der hierbei benutzte Begriff der K_k-Ordnung ist die genaue Verallgemeinerung des Begriffes der zyklischen Ordnung. Die fraglichen Annahmen bezüglich C lauten, im wesentlichen und kurz gefaßt, so:

In jedem Punkte P_0 von C existiert eine eindeutig bestimmte K_k-Paratingente, d. h. der Limes der K_k-Kurven durch je k zu P_0 benachbarte Punkte von C ist eindeutig bestimmt.

Die auf die mehrfache Berührung sich beziehende Bedingung — welche dem für $k = 3$ aufgestellten Verbote mehr als doppelt berührender Kreise entspricht — lautet so: Die

K_k-Kurve K habe mit C nur die (Berührungs-) Punkte $B_1, \ldots, B_r$ je vom Gewichte $g_1, \ldots, g_r$ gemeinsam[5]). Dann soll sein

$$\sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho \leq k + r - 1$$

falls alle $g_\varrho \leq k$ sind; andernfalls soll $r = 1$ und $g_1 = k + 1$ sein. Es soll also C insbesondere nur Punkte von höchstens der K_k-Ordnung $(k + 1)$ enthalten und es soll C mit einer K_k-Kurve nicht mehr als $(k - 1)$ verschiedene Punkte von höherem Gewichte als Eins gemeinsam haben.

Daneben muß schließlich noch der spezielle Monotoniesatz[6]) gelten, und zwar auch für den Fall, daß die festzuhaltenden $(k - 1)$ Punkte teilweise oder sämtlich zusammenfallen.

Die genauere Formulierung sowie der Beweis des allgemeinen Satzes, ferner die Verfolgung von Verschärfungen in der einen oder anderen Richtung soll einer ausführlichen späteren Darstellung vorbehalten bleiben. Bezüglich des Beweises sei nur noch bemerkt, daß man Wesentliches aus dem Gedankengange von Herrn Stenfors herübernehmen kann.

5) Das „Gewicht" eines Berührungspunktes wird hier ebenso definiert wie für den Fall der Kreise (vgl. oben im Text): man läßt einfach die K_k-Kurven an Stelle der Kreise treten.

6) Vgl. Fußnote 3, a. a. O., § 3.