Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n.

Von Franz Denk in Erlangen.

Eine der nächstliegenden Fragen in der Strukturtheorie reeller Gebilde ist die nach der Existenz von Punkten einer vorgegebenen Ordnung[1]). Im folgenden handelt es sich um diese Fragen für Bogen im R_n bei „linearer" Ordnung[2]). Und zwar handelt es sich speziell um sogen. „elementare" Punkte höherer Ordnung; dies sind solche Punkte P, deren Umgebung $\mathfrak{B}$ Summe zweier in P zusammenstoßender Bogen n-ter Ordnung[3]) ist ($n \geqq 2$).

Zur bequemeren Formulierung des Ergebnisses führen wir den Begriff der Differenzierbarkeit des Punktes P auf $\mathfrak{B}$ ein. Es heiße P differenzierbar (auf $\mathfrak{B}$), wenn die (ν-dimensional-linearen) Träger $\mathfrak{T}_\nu^-$ bezw. $\mathfrak{T}_\nu^+$ der beiden in P an $\mathfrak{B}^-$ und $\mathfrak{B}^+$ existierenden ν-dimensonalen Tangentialschmieghalbräume[4]) Th_ν^- bezw. Th_ν^+ für alle ν mit $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ zusammenfallen.

Für unsere Zwecke führen wir überdies einen vorderen bezw. hinteren n-dimensionalen Tangentialschmieghalbraum

1) Vgl. Haupt, Strukturprobleme bei reellen Gebilden, Sitz.-Ber. d. bayr. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Abt., Jahrgang 1935, insbes. Nr. 5.

2) Bezügl. des Begriffes der „linearen Ordnung" siehe Fußnote 11, a. a O., Nr. 3.

3) Diese beiden Bogen seien im folgenden mit $\mathfrak{B}-$ und $\mathfrak{B}+$ bezeichnet. Gleichzeitig denken wir uns $\mathfrak{B}- + \mathfrak{B}+$ orientiert, sodaß $\mathfrak{B}-$ auf $\mathfrak{B}$ „unterhalb" $\mathfrak{B}+$ liegt. $\mathfrak{B}-$ bezw. $\mathfrak{B}+$ heißt hintere bezw. vordere Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$.

4) Daß in jedem Punkte eines Bogens n-ter Ordnung die $Th_\nu^{\pm}$ existieren, ist zuerst von Herrn Hjelmslev bewiesen worden. Vgl Hjelmslev, J., Introduction à la théorie des suites monotones, Oversigt over det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1914, Nr. 1.

ein. Wir verstehen dabei unter dem vorderen n-dimensionalen Tangentialschmieghalbraum Th_n^+ den vom Träger $\mathfrak{T}_{n-1}^+$ begrenzten n-dimensionalen Halbraum, in welchem die vordere, zu $\mathfrak{B}^+$ gehörige Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ gelegen ist; hingegen ist als hinterer n-dimensionaler Tangentialschmieghalbraum Th_n^- derjenige von $\mathfrak{T}_{n-1}^-$ begrenzte n-dimensionale Halbraum zu wählen, in welchem die hintere, auf $\mathfrak{B}^-$ gelegene, Umgebung von P liegt oder nicht liegt, je nachdem $n \equiv 0$ oder $n \equiv 1\ (2)$. — Als nulldimensionale Tangentialschmieghalbräume $Th_0^{\pm}$ wählen wir P; es ist also $Th_0^+ = Th_0^-$.

Unter den auf $\mathfrak{B}$ differenzierbaren Punkten P bezeichnen wir speziell als gewöhnlich-differenzierbar diejenigen, in welchen für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ die beiden Tangentialschmieghalbräume Th_ν^- und Th_ν^+ zusammenfallen.

Wir besprechen hier nur die differenzierbaren Fälle; deren gibt es 2^n (darunter 2 gewöhnlich-differentierbare). Zur Bestimmung der Ordnung von P auf $\mathfrak{B}$ betrachten wir das Paar

$$p_\nu = \left(Th_\nu^-,\ Th_\nu^+\right)$$

und legen ihm den Wert $+1$ oder -1 bei, je nachdem die beiden in p_ν auftretenden Tagentialschmieghalbräume zusammenfallen oder nicht ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$); insbesondere ist also immer $p_0 = +1$, und für gewöhnlich-differenzierbare Punkte $p_\nu = +1$, für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$. — Nunmehr lautet der fragliche

Satz: Die Summe $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^- + \mathfrak{B}^+$ zweier Bogen n-ter Ordnung hat im differenzierbaren Punkte P die Ordnung $m = 2n - s$, wenn die Reihe

$$p_0,\ p_1,\ p_2 \ldots p_n$$

genau s Vorzeichenfolgen aufweist $(0 \leqq s \leqq n)$. Es gibt zu jeder gegebenen Ordnung m, mit $n \leqq m \leqq 2n$, genau $\binom{n}{s} = \binom{n}{m-n}$ differenzierbare Fälle.

Der Beweis wurde von uns zunächst für (mindestens) n-mal „stetig differenzierbare" Bogen $\mathfrak{B}^-$, $\mathfrak{B}^+$ durchgeführt. Es gelingt mittelst gewisser Verallgemeinerungen der Descartes'schen Regel[1]). Wir zeigen: In unserem Falle können die a. a. O.[1]), Aufgabe 87, mit $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ bezeichneten

1) Vgl. auch Pólya, G., und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2. Bd., Berlin 1925, Seite 52—53, Aufgaben 87—90.

Koeffizienten ihrem absoluten Betrage nach immer so gewählt werden, daß die nach der Descartes'schen Regel mögliche Höchstzahl reeller Nullstellen wirklich erreicht wird.

Die Ausdehnung auf allgemeine Bogen $\mathfrak{B}^+$, $\mathfrak{B}^-$ von n-ter Ordnung dürfte etwa mit Hilfe eines (noch sicherzustellenden) Approximationssatzes (ordnungsfeste Annäherung solcher allgemeiner Bogen n-ter Ordnung durch n-mal stetig differenzierbare) gelingen.

Die Behandlung der Fälle mit nicht-differenzierbarem Punkte P ist grundsätzlich mit den gleichen Methoden durchführbar, liefert aber kombinatorisch kompliziertere Ergebnisse.

Die nähere Ausführung der Sätze und ihrer Beweise ist einer späteren Darstellung vorbehalten.