Zur Verbiegung von Torusflächen.

Von Eduard Rembs in Berlin.

Schon in einer früheren Arbeit[1]) habe ich die infinitesimale Verbiegbarkeit von Teilen solcher Flächen behandelt, die durch Rotation einer Eilinie um eine in ihrer Ebene gelegene Achse entstehen. Denkt man sich die Eilinie, die rotieren soll, der Achse ohne Drehung genähert oder von ihr entfernt und die zu diesen verschiedenen Lagen gehörigen Rotationsflächen in Betracht gezogen, so hat man eine Flächenschar mit derselben Meridiankurve; und es zeigt sich nun, daß es zweckmäßiger ist, die Flächen einer solchen Schar zu untersuchen als eine Einzelfläche. Das ist auch in der genannten Arbeit geschehen, nur wurden dort die Fälle vermieden, daß die Eilinie die Achse berührt oder schneidet. Inzwischen habe ich aber bemerkt, daß die Einbeziehung des Berührungsfalles die Betrachtungen erleichtert und auch über den Fall des Schneidens Aufschluß gibt.

Die Aufgabe führt, wie sich schon herausgestellt hatte, auf eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dabei treten, wie noch erörtert wird, singuläre Stellen verschiedener Art auf. In jedem Falle handelt es sich um eine Aufgabe oberhalb der Stieltjesschen Grenze[2]), die sich aber von den bisher behandelten Aufgaben dieser Art dadurch unterscheidet, daß der Parameter nicht ganz rational auftritt. Das in § 1 für beliebige Rotationsflächen gewonnene Ergebnis wird für den Fall des Kreisringes in § 2 noch ergänzt, und es wird für die Ringbiegungsgleichung ein Oszillationstheorem aufgestellt.

---

1) E. Rembs, Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 529—535.

2) Haupt-Hilb, Math. Annalen **89** (1923), S. 130ff.

§ 1.

Torusflächen mit einer beliebigen Eilinie als Meridian.

Die infinitesimalen Verbiegungen der Rotationsflächen

$$x = r\,(u) \cos v,\; y = r\,(u) \sin v,\; z = z\,(u)$$

(u sei etwa die Bogenlänge des Meridians) führten in der erwähnten Arbeit auf das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} r' R'_n + z' Z'_n = 0 \\ (n^2 - 1)\, r' R_n + r R'_n + n^2 z' Z_n = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeuteten $R_n(u)$ und $Z_n(u)$ die Koeffizienten der Änderungen $R(u, v)$ und $Z(u, v)$ von r bezw. z bei der Verbiegung, wenn R und Z in folgender Form angesetzt werden:

$$R(u,\, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (R_{n1}\,(u) \cos nv + R_{n2}\,(u) \sin nv)$$

$$Z(u,\, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (Z_{n1}\,(u) \cos nv + Z_{n2}\,(u) \sin nv).$$

Die Gleichungen (1) gelten sowohl für R_{n1} und Z_{n1} als auch für R_{n2} und Z_{n2}; daher wurden in (1) die Indizes 1 und 2 weggelassen.

Aus (1) erhält man nun für R_n die Gleichung zweiter Ordnung, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen:

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{R'_n}{z'}\right)' + \frac{(n^2 - 1)\, k}{r z'^2}\, R_n = 0,$$

und hier ist $k = z' r'' - r' z''$.

Die auftretenden singulären Stellen können verschiedener Art sein:

a) $z' = 0$, $r \neq 0$: sie entsprechen den parabolischen Kurven der Torusflächen. Dort müssen nach (1) R_n und R_n' verschwinden. Die Fuchs'sche Gleichung von (2) hat die Lösungen 2 und 0. Für uns kommen also nur die zum Exponenten 2 gehörigen regulären und von zweiter Ordnung verschwindenden Integrale in Betracht. Eine solche Stelle wird mit P bezeichnet.

b) $r = 0$, $r' \neq 0$, $z' \neq 0$; das sind die Schnittpunkte S des Meridians mit der Achse (konische Flächenpunkte). R und Z müssen Werte haben, die unabhängig von v sind, d. h. R_n und Z_n ($n \geqq 2$) müssen dort verschwinden. Die Fuchs'sche Gleichung von (2) hat die Lösungen 1 und 0. Nur die zum Exponenten 1 gehörigen regulären von erster Ordnung verschwindenden Integrale kommen in Betracht.

c) $r = 0$, $r' = 0$. (Berührungstelle B). Die Lösungen der Fuchs'schen Gleichung sind wegen $n \geqq 2$ konjugiert komplex. Dieser Fall wird besonders untersucht.

d) $r = 0$, $z' = 0$. Die Lösungen der Fuchs'schen Gleichung sind $n + 1$ und $-n + 1$. Der Fall wird nur in § 2 in Betracht gezogen. Die regulären Integrale verschwinden von der Ordnung $n + 1$.

Die Gleichung (2) enthält zunächst zwei Parameter. Der eine, n, muß eine ganze Zahl sein, und wir wollen ihm für die ganzen folgenden Betrachtungen einen festen Wert vorschreiben. Der andere Parameter ist, entsprechend dem Umstand, daß wir eine ganze Flächenschar betrachten, stetig veränderlich. Es steckt in $r\,(u) = r_0(u) + a$ und mißt die Entfernung a des Meridians von der Achse. Unsere Aufgabe ist, festzustellen, ob (2) bei veränderlichem a Integrale haben kann, die in *zwei* benachbarten singulären Stellen regulär sind. Diese Frage wird am einfachsten geklärt, indem man zunächst den Fall der Berührung von Meridiankurve und Achse untersucht. Für die Berührungsstelle B liegt der Fall c) vor.

In B sei $z = 0$. In der Umgebung von B kann in (2) auf z als unabhängige Veränderliche transformiert werden:

$$\frac{d^2R_n}{dz^2} + \frac{n^2-1}{r}\,\frac{d^2r}{dz^2}\,R_n = 0. \tag{3}$$

Wir behaupten, daß (3) in der Umgebung von B unendlich viele Nullstellen mit B als Häufungsstelle besitzt. Zum Beweis betrachten wir etwa den Abschnitt $z \geqq 0$. Werden nur die ersten Glieder in der Entwicklung von r nach z berücksichtigt, so kann man statt (3) schreiben:

$$\frac{d^2R_n}{dz^2} + \frac{2(n^2-1)}{z^2+\ldots}\,R_n = 0, \tag{3*}$$

wo die Punkte die höheren Glieder andeuten. Wir ziehen zum Vergleich die folgende Differentialgleichung heran:

$$\frac{d^2S}{dz^2} + \frac{\alpha^2+\frac{1}{4}}{z^2}\,S = 0. \tag{4}$$

α sei eine Konstante.

(4) hat z. B. das Integral

$$S = \sqrt{z}\,\sin(\alpha \lg z).$$

(Da (4) nichts anderes ist als die Gleichung (2) für den besonderen Fall der Meridiankurve $r = z^{\text{const.}}$, wenn nur a geeignet bestimmt ist, so findet man hier beiläufig, daß die Verbiegungen dieser Flächen angegeben werden können.)

Schon die Funktion S hat (man beachte den lg) unendlich viele Nullstellen mit B als Häufungsstelle. Nun werde die Umgebung von B so gewählt, daß darin der Nenner in (3*) überall $< 2z^2$ wird. Dann ist der Faktor von R_n in (3*) dort überall $> \frac{n^2-1}{z^2}$, und man braucht wegen $n \geqq 2$ nur $a = 1$ zu setzen, damit er überall größer als der Faktor von S in (4) wird. Dann muß R_n mindestens so stark wie S oszillieren, es muß also auch unendlich viele Nullstellen haben.

Wir betrachten nun ein ganzes Intervall BP. Wir sehen a als veränderlich an und gehen durch kleine Veränderung des a vom Berührungsfall zu den beiden Nachbarfällen schneidender und nicht schneidender Meridiankurve über. Dabei betrachten wir nur das in P reguläre (verschwindende) R_n. Wir denken uns, von P aus, die im Innern von BP liegenden Nullstellen des R_n (im Berührungsfall) numeriert. Ich behaupte, daß R_n sowohl bei Übergang zum Fall des Schneidens als des Nichtschneidens beliebig viele Nullstellen behalten wird.

Zum Beweis schreibe man die Zahl der Nullstellen, die mindestens bleiben soll, beliebig groß, etwa N vor. Dann wähle man A beliebig zwischen der Nten und $(N+1)$ten Nullstelle im Berührungsfall. Bei Übergang zu Nichtschneiden wird a größer, der Faktor des R_n in (2) kleiner, die Oszillation, kurz gesagt, schwächer, d. h. die Nullstellen des R_n wandern, da die in P festbleibt, auf A zu. Man beachte, daß hier keine neue singuläre Stelle auftritt. Ändere ich nun a wenig genug, so wird die Nte Nullstelle A nicht erreichen, und ich behalte also allein auf der einen Seite (von dem ursprünglichen Berührungspunkt) N Nullstellen.

Beim Übergang zum Fall des Schneidens wandern die Nullstellen von A weg auf P zu. Ich ändere nun hier a so wenig, daß der zwischen B und A entstehende Schnittpunkt S zwischen B und A bleibt, also nicht schon in das Intervall AP einrückt, Auch dann muß ich also in AP mindestens N Nullstellen behalten.

Verfolgen wir nun R_n von P bis zum benachbarten singulären Punkt!

Im Falle des Nichtschneidens ist das der andere P-Punkt: P_1. R_n verschwinde für einen belieben Wert des a in P_1 nicht. Es hat dann in PP_1 (hier ist der der Achse zugewandte Teil des Meridians, die Flächenpunkte negativer Krümmung, gemeint) eine bestimmte Zahl von Nullstellen. Nähern wir uns dem Berührungsfall genügend, so kommen, wie bemerkt, mehr Nullstellen ins Intervall. Das kann nur von P_1 aus geschehen.

Bei Übergang zum Fall des Schneidens schließt an P ein Intervall PS an. (Auch in den Flächenpunkten dieses Intervalls ist die Krümmung negativ.) Die Überlegung ist dieselbe wie vorhin. Wenn bei beliebigem a das R_n in S nicht verschwindet, so gehe man näher an den Berührungsfall heran. Es müssen so beliebig viele neue Nullstellen ins Intervall hereinkommen. Das kann nur von S aus geschehen.

Wir haben also gefunden: Gleichviel ob man sich dem Berührungsfall von der Seite des Schneidens oder des Nichtschneidens nähert, müssen unendlich viele ausgezeichnete Werte a existieren, so daß R_n in P *und* S, bezw. P *und* P_1 regulär ist.

Die zu diesen a-Werten gehörigen Flächenstücke negativer Krümmung sind infinitesimal verbiegbar; und zwar müssen zu jedem $n \geqq 2$ *solche Flächenstücke in unendlicher Zahl existieren. Sie häufen sich gegen die Fläche des Berührungsfalls. Die fraglichen Flächenstücke haben entweder zwei parabolische Kurven als Begrenzung oder eine parabolische Kurve und einen konischen Punkt.* Man mag sie im letztern Fall kelch- oder trichterförmig nennen.

Die Flächenstücke *positiver* Krümmung, die von zwei parabolischen Kurven oder zwei S-Stellen (konischen Punkten) begrenzt werden, sind, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, unverbiegbar. Aus (2) folgt nämlich leicht, daß R_n für solche Intervalle nicht zugleich an beiden Randpunkten regulär sein kann. Die oben erwähnten infinitesimal verbiegbaren Stücke negativer Krümmung braucht man aber nicht durch die genannten Randstellen begrenzt zu denken, wenn Verbiegbarkeit bestehen soll. Denn das an einer singulären Stelle reguläre R_n läßt sich über die Stelle ins Gebiet der Punkte positiver

Krümmung hinein fortsetzen; nur darf man, hierin fortschreitend, nicht bis in die dann folgende singuläre Stelle hineingelangen. Im Falle des Nichtschneidens bleibt also bei den ausgezeichneten a-Werten infinitesimale Verbiegbarkeit, wenn man die Torusfläche z. B. längs eines beliebigen im Gebiet positiver Krümmung gelegenen Breitenkreises aufschneidet. Im Fall der die Achse schneidenden Meridiankurve dagegen müßte man aus der Fläche ein Stück herausschneiden, das eine parabolische Kurve und den benachbarten konischen Punkt im Innern enthält.

§ 2.

Die Ringfläche.

In § 1 ist nicht der Fall untersucht worden, daß ein Punkt P und ein Punkt S zusammenrücken. Was dann geschieht, soll nur für den Kreis als Meridiankurve besprochen werden. Diese Flächen, die alle, ob sie nun die Achse schneiden oder nicht, Ringflächen heißen mögen, gehen in diesem Grenzfall in die Kugel über. In einem Pol (vgl. d) des § 1) verschwindet das reguläre R_n von der Ordnung $n+1$, in einem Punkt P von zweiter, in einem S von erster Ordnung. Man mag daher vielleicht vermuten, daß, wie nahe S auch an P rückt, doch in SP $(n+1)-2-1=n-2$ Nullstellen des R_n bleiben. Diese zunächst sehr vage Vermutung erweist sich nun bei genauer Prüfung als durchaus berechtigt.

Wir setzen also

$$r = \varrho + \sin u; \quad z = \cos u; \quad \varrho = \text{const.} \geqq 0.$$

Aus (2) wird

$$\sin u \frac{d^2 R_n}{du^2} - \cos u \frac{dR_n}{du} - \frac{n^2-1}{\varrho + \sin u} R_n = 0.$$

Wir gehen mittels

$$w = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

zu einer Gleichung über, deren Koeffizienten rationale Funktionen sind:

$$\frac{d^2 R_n}{dw^2} + \frac{3w^2-1}{w(1+w^2)} \frac{dR_n}{dw} - \frac{2(n_2-1)}{w(\varrho + 2w + \varrho w^2)} R_n = 0.$$

Noch besser ist es, auch eine neue abhängige Veränderliche

$$y = (1+w^2) R_n$$

einzuführen, da dann der Nenner $1 + w^2$ in der Differentialgleichung verschwindet:

$$(5) \qquad (\varrho + 2w + \varrho w_2)\left(w \frac{d^2y}{dw^2} - \frac{dy}{dw}\right) - 2(n^2 - 1)\, y = 0.$$

Diese Gleichung könnte der Behandlung der Ringbiegung zugrunde gelegt werden. Für $\varrho = 0$ handelt es sich um die Kugel mit der einfachen Gleichung

$$w^2 \frac{d^2y}{dw^2} - w \frac{dy}{dw} - (n^2 - 1)\, y = 0$$

und den Integralen $y = w^{n+1}$ und $y = w^{-n+1}$. Der Wert $\varrho = 1$ entspricht dem Berührungsfall.

(5) hat, auch als Differentialgleichung im Komplexen betrachtet, 4 singuläre Stellen, wenn nicht $\varrho = 1$ ist. Uns interessiert hier besonders der Fall, daß alle 4 singulären Stellen reell sind, d. i. $\varrho < 1$. Die dann also reellen Wurzeln von $\varrho + 2w + \varrho w^2 = 0$ seien $-\sqrt{\lambda}$ und $-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $(\lambda > 1)$, also

$$\varrho = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda + 1}.$$

Wir bringen nun noch die singuläre Stelle $w = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ mittels

$$w = -\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$$

in den festen Punkt $x = 1$. Dann erhält man aus (5), wenn weiterhin Striche Differentiation nach x bedeuten:

$$(6) \qquad xy'' - y' + \frac{(n^2 - 1)(\lambda + 1)}{(1 - x)(\lambda - x)}\, y = 0.$$

Für $\lambda = 1$ hat man, da es sich um den Berührungsfall handelt, in dem zu untersuchenden Intervall $(0, 1)$ unendlich viele Nullstellen mit $x = 1$ als Häufungstelle. Wächst λ von 1 bis ∞, so nimmt der Koeffizient von y in (6) monoton ab für alle x des Intervalls $(0, 1)$. Demgemäß nimmt auch die Zahl der Nullstellen jedes Integrals in $(0, 1)$ ab, und nun fragt es sich, wieviel Nullstellen des etwa in $x = 0$ regulären Integrals in $(0, 1)$ bleiben, wenn λ unbegrenzt wächst.

Die Nullstellen ändern sich stetig mit dem Koeffizienten von y und liegen also für genügend großes λ beliebig wenig von denen der Gleichung

$$xy'' - y' + \frac{n^2 - 1}{1 - x} y = 0$$

entfernt, und unsere Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, zu bestimmen, wieviele Nullstellen ein etwa in $x = 0$ reguläres Integral dieser Gleichung in $(0, 1)$ hat. Dazu setzen wir

$$y = x^2 (1 - x) z$$

und erhalten:

$$z'' + \frac{3 - 5x}{x(1 - x)} z' + \frac{n^2 - 4}{x(1 - x)} z = 0. \tag{7}$$

(Dieses z hat natürlich nichts mit dem des § 1 zu tun.)

(7) ist ein Spezialfall der hypergeometrischen Differentialgleichung[1])

$$z'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1 - x)} z' - \frac{\alpha\beta}{x(1 - x)} z = 0 \tag{8}$$

mit

$$\alpha = n + 2, \ \beta = -n + 2, \ \gamma = 3.$$

Da β eine negative ganze Zahl ist, werden die in $x = 0$ regulären Integrale dieser Gleichung

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \dots$$

hier Polynome vom Grade $(n - 2)$:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{2}{(i + 1)(i + 2)} \binom{n + i + 1}{i} \binom{n-2}{i} (-x)^i, \tag{9}$$

und alle $n - 2$ Nullstellen dieser Polynome sind reell und liegen in $(0, 1)$. Dieses Ergebnis erhält man sofort mit Hilfe der Formel, die Klein aus den Ergänzungsrelationen der sphärischen Geometrie gewonnen hat, es kann aber auch aus den bekannten Eigenschaften der Legendreschen Polynome hergeleitet werden.

Die Legendreschen Polynome $\Lambda_n(\xi)$ genügen der Gleichung

$$\frac{d}{d\xi}\left\{(1 - \xi^2)\frac{d\Lambda_n(\xi)}{d\xi}\right\} + n(n + 1)\Lambda_n(\xi) = 0 \tag{10}$$

Vermöge

$$\xi = 1 - 2x$$

nimmt auch (10) die Gestalt der Gleichung (8) an mit

$$\alpha = n + 1, \ \beta = -n, \ \gamma = 1.$$

1) Man vergleiche wegen des Folgenden die Encyklopädieartikel II A 10 (Wangerin) und II B 5 (Hilb) oder Klein-Haupt, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion.

Die entsprechend transformierten Legendreschen Polynome lauten also:

$$(11)\qquad L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{i} \binom{n}{i} (-x)^i.$$

Sie sind mit den $P_n(x)$ im erweiterten Gaußschen Sinne verwandt, und die $P_n(x)$ können also, wenn man die Relationes inter functiones contiguas zu Hilfe nimmt, aus den $L_n(x)$ berechnet werden. Wir beschränken uns auf die Angabe der folgenden, auch direkt mit Hilfe von (9) und (11) zu verifizierenden Formel:

$$(12)\qquad P_n(x) = \frac{2}{(n^2-n)x} \left\{ \frac{(n+1)x-1}{n^2+n} L_n'(x) - L_n(x) \right\}$$

Der Grad der Klammer in (12) ist $n-1$, da sich die Glieder mit dem Exponenten n wegheben. Dasselbe gilt von den von x freien Gliedern; die Division durch x ist also wirklich ausführbar und liefert ein Polynom vom Grade $n-2$. Es hat $n-2$ Nullstellen in $(0, 1)$. Denn an zwei aufeinander folgenden Nullstellen von $L_n'(x)$ hat es verschiedene Vorzeichen, da dort L_n verschiedene Vorzeichen hat. Und daher muß P_n in jedem der $n-2$ Intervalle verschwinden, die von je 2 aufeinander folgenden Nullstellen von L_n' begrenzt werden.

Wir können nunmehr für die Gleichung (6) folgendes Oszillationstheorem aussprechen: *Zu jedem ganzzahligen $n \geqq 2$ gibt es unendlich viele Werte $\lambda > 1$ von der Art, dass (6) ein in 0 und 1 reguläres (verschwindendes) Integral besitzt. Die Werte λ haben 1 als Häufungsstelle. Jedes solche Integral ist eindeutig bestimmt, wenn die Anzahl der Nullstellen, die es in (0, 1) haben soll, $> n-2$ vorgeschrieben ist. Zu einer Nullstellenzahl $< n-2$ gibt es keine Integrale.*

Über den Zusammenhang der in 0 *und* 1 regulären Integrale mit der Biegungsaufgabe ist in § 1 das Nötige gesagt worden.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1935-1936

Band/Volume: 67-68

Autor(en)/Author(s): Rembs Eduard

Artikel/Article: Zur Verbiegung von Torusflächen. 4-12