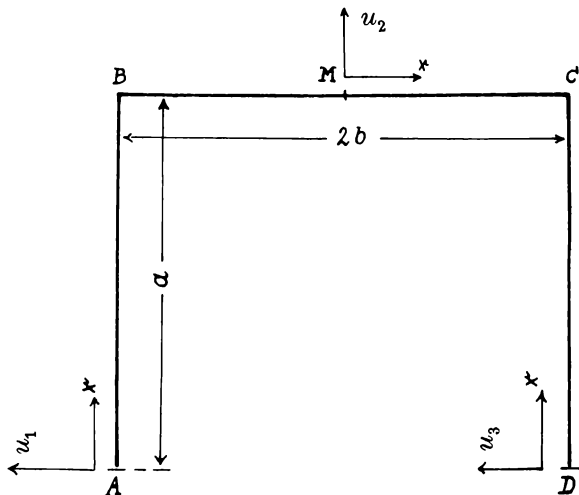


Über die Berechnung der Schwingungen eines Rahmenträgers.

Von Friedrich Bickel in Nürnberg.

(Mit 1 Abbildung.)

Erfahrungsgemäß kann ein Rahmenträger, dessen drei Stäbe Transversalschwingungen ausführen, in zwei grundverschiedenen Formen schwingen. nämlich in der symmetrischen und in der antisymmetrischen Form. Im symmetrischen Fall schwingen die beiden Stiele AB und DC (vgl. die Abbildung)



gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen, wobei B und C stillstehen müssen, und die Schwingungsform des Querriegels BC ist symmetrisch zur Mitte M ; also

$$u_1(x) \equiv -u_3(x), \quad u_1(a) = u_3(a) = 0$$

und $u_2(-x) \equiv u_2(+x)$.

Im antisymmetrischen Fall schwingen die Stiele gleichzeitig nach derselben Seite und nehmen den ganzen Riegel BC mit, dessen Schwingungsform antisymmetrisch wird. Es ist daher

$$u_1(x) \equiv u_3(x) \text{ und } u_2(-x) \equiv -u_2(+x).$$

Der Ansatz zur Berechnung der Schwingungszahlen und Schwingungsformen führt zu einer Randwertaufgabe, die zum erstenmal von Herrn W. Prager gesondert für die beiden Schwingungsarten aufgestellt wurde¹⁾. Herr Prager hat dabei nur die Hälfte des Rahmens betrachtet, für den Punkt M jeweils die Symmetrie- bzw. Antisymmetriebedingungen hinzugefügt und die sich ergebenden Formeln auf graphischem Wege zur Berechnung der Schwingungszahlen ausgewertet. Einer brieflichen Anregung von Herrn Th. Pöschl folgend wurde nun von uns die Randwertaufgabe unter Verzicht auf Symmetrie- und Antisymmetriebedingungen über den ganzen Rahmen erstreckt. Wie Herr Haupt vermutet hatte, konnte ein Oszillationstheorem bewiesen werden, durch welches also sowohl alle Eigenwerte erfaßt werden, als auch jeder Eigenwert durch die Anzahl der Knotenstellen der zu ihm gehörigen Eigenfunktion charakterisiert wird. Dabei wurde vorläufig vorausgesetzt, daß die drei Stäbe des Rahmens gleiche Biegesteifigkeit EJ und gleiche Masse μ pro Längeneinheit besitzen.

Für die einzelnen Stäbe gilt die Differentialgleichung.

$$(D) \quad \frac{d^4 u_i(x)}{dx^4} = \lambda \cdot u_i(x), \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei der Parameter $\lambda = 4\pi^2 n^2 \frac{\mu}{EJ}$ ist und n die Schwingungszahl pro Sekunde bedeutet. Zu diesen Differentialgleichungen treten die folgenden Rand- und Übergangsbedingungen:

1. $u_1(0) = 0$, 2. $u_1''(0) = 0$, 3. $u_3(0) = 0$, 4. $u_3''(0) = 0$,
5. $u_2(-b) = 0$, 6. $u_2(+b) = 0$, 7. $u_1(a) = u_3(a)$,
8. $u_1'(a) = u_2'(-b)$, 9. $u_1''(a) = u_2''(-b)$, 10. $u_3'(a) = u_2'(b)$,
11. $u_3''(a) = -u_2''(b)$, 12. $u_1'''(a) + u_3'''(a) = -2\lambda b u(a)$.

1) „Der Bauingenieur“, 1927, Heft 8 und Zeitschrift für technische Physik, 1928, Nr. 6. Eine Zusammenstellung und Ergänzung dieser Arbeiten findet sich in dem Buch „Dynamik der Stabwerke“ von Kurt Hohenemser und Willy Prager. Berlin 1933.

Zunächst ergibt sich, daß die Randwertaufgabe nur reelle und speziell nur positive Werte des Parameters λ als „Eigenwerte“ besitzt, wie es ja auch der technischen Bedeutung des Parameters entspricht. Die Lösung des Systems (D) ist:

$$u_i(x) = a_i \mathfrak{S}in \sigma x + b_i \mathfrak{C}os \sigma x + c_i \sin \sigma x + d_i \cos \sigma x, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei $\sigma = \sqrt[4]{\lambda}$ ist. Für die zwölf darin enthaltenen Integrationskonstanten a_i, b_i, \dots ergeben die Bedingungen 1.—12. ein homogenes lineares Gleichungssystem; dieses läßt sich so umformen, daß seine Determinante als Produkt von zwei Faktoren $S(\sigma)$ und $A(\sigma)$ darstellbar ist. Die positiven Nullstellen σ_{2n} von $S(\sigma)$ entsprechen ein — eindeutig den Eigenwerten $\lambda_{2n} = (\sigma_{2n})^4$ für die symmetrischen Schwingungsformen und die positiven Nullstellen σ_{2n-1} von $A(\sigma)$ den Eigenwerten $\lambda_{2n-1} = (\sigma_{2n-1})^4$ für die antisymmetrischen Schwingungsformen. Damit wurde bewiesen, daß der Rahmenträger tatsächlich nur in diesen beiden Grundformen schwingen kann.

Sowohl die σ_{2n} als auch die σ_{2n-1} denken wir uns der Größe nach geordnet. Die den sämtlichen symmetrischen Schwingungsformen entsprechenden σ_{2n} sind also die positiven Nullstellen von

$$S(\sigma) = \mathfrak{S}in \sigma a \cdot \sin \sigma a \cdot (\mathfrak{S}in \sigma a \cdot \cos \sigma b + \mathfrak{C}os \sigma b \cdot \sin \sigma b) \\ + \mathfrak{C}os \sigma b \cdot \cos \sigma b \cdot (\mathfrak{C}os \sigma a \cdot \sin \sigma a - \mathfrak{S}in \sigma a \cdot \cos \sigma a) = 0.$$

Die Untersuchung von $S(\sigma)$ führt zu folgendem Ergebnis:

Ordnet man die Zahlen $\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \dots$ und $\frac{\pi}{2b}, \frac{3\pi}{2b}, \frac{5\pi}{2b}, \dots$

die für rationales $a : b$ nicht sämtlich verschieden zu sein brauchen, der Größe nach in eine Reihe

$$0 < \tau_1 \underset{(\equiv)}{<} \tau_2 \underset{(\equiv)}{<} \tau_3 \underset{(\equiv)}{<} \dots,$$

dann liegt σ_{2n} zwischen τ_n und τ_{n+1} . Im Falle des Gleichheitszeichens ist $\sigma_{2n} = \tau_n = \tau_{n+1}$. Alle diese „symmetrischen“ σ_{2n} , deren Anzahl unendlich groß ist, sind einfache Nullstellen der Gleichung $S(\sigma) = 0$.

Viel verwickelter ist die Gleichung für die „antisymmetrischen“ σ_{2n-1} ; sie lautet:

$$A(\sigma) = 2\sigma b [\sin \sigma a \cdot (\cos \sigma b - \text{Cotg } \sigma b \cdot \sin \sigma b) + \sin \sigma b \cdot (\cos \sigma a - \text{Cotg } \sigma a \cdot \sin \sigma a)] + 4 \text{Cotg } \sigma a \cdot \cos \sigma a \cdot \sin \sigma b - (\cos \sigma b - \text{Cotg } \sigma b \cdot \sin \sigma b) (\cos \sigma a - \text{Cotg } \sigma a \cdot \sin \sigma a) = 0.$$

Die ziemlich langwierige Untersuchung ergibt folgenden Satz:

Sämtliche Zahlen $\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \dots$ und $\frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}, \frac{3\pi}{b}, \dots$ seien der Größe nach geordnet:

$$0 < \varrho_1 \underset{(-)}{<} \varrho_2 \underset{(-)}{<} \varrho_3 \underset{(-)}{<} \dots$$

Zu jeder Zahl ϱ_n gehört dann in der folgenden Weise ein σ_{2n-1} :

Je nachdem für eine Zahl $\varrho_n = \frac{k\pi}{a}$, bzw. $= \frac{l\pi}{b}$ die Funktion

$$f_1(\varrho) = 2\varrho b + \text{Cotg } \varrho b + 4 \text{Cotg } \varrho a - \text{cotg } \varrho b,$$

$$\text{bzw. } f_2(\varrho) = 2\varrho b + \text{Cotg } \varrho a - \text{cotg } \varrho a$$

größer, gleich oder kleiner als Null wird, liegt σ_{2n-1} zwischen ϱ_{n-1} und ϱ_n , bzw. in ϱ_n , bzw. zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} , wobei dann σ_{2n-1} dicht hinter ϱ_n folgt. Die beiden letzten Fälle werden mit wachsendem σ immer seltener und treten bei ratio-

nalem Verhältnis $\frac{a}{b}$ nur in endlicher Anzahl auf. Sind zwei

Zahlen ϱ_n und ϱ_{n+1} einander gleich, dann liegt σ_{2n-1} zwischen ϱ_{n-1} und ϱ_n , und σ_{2n+1} zwischen $\varrho_n = \varrho_{n+1}$ und ϱ_{n+2} , wobei wieder σ_{2n+1} viel näher an ϱ_{n+1} als an ϱ_{n+2} liegt. Insbesondere ist $0 < \sigma_1 < \varrho_1$.

Alle antisymmetrischen σ_{2n-1} sind einfache Nullstellen von $A(\sigma)$.

Von den beiden unendlichen Folgen σ_{2n} und σ_{2n-1} läßt sich zeigen, daß sie sich im allgemeinen in folgender Weise zusammenstellen lassen:

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \dots$$

Dabei gehören also zu den σ_ν mit ungeradem Index die antisymmetrischen und zu den σ_ν mit geradem Index die symmetrischen Schwingungsformen. Nur wenn $a < \frac{b}{2}$ ist, können

diejenigen σ_{2n} , die kleiner als $\frac{\pi}{2b}$ sind, also nur die Anfangs-

glieder der Reihe $\sigma_2, \sigma_4, \dots$ vor den entsprechenden σ_{2n-1} liegen oder mit ihnen zusammenfallen.

Bezüglich der Eigenfunktionen ist vor allem zu bemerken, daß die in ihrer Darstellung auftretenden hyperbolischen Glieder nur gegen die Stabenden hin hervortreten und dort den im übrigen sinusartigen Verlauf in stärkerem Maße beeinflussen können. Unter der Oszillationszahl verstehen wir die Gesamtzahl aller Nullstellen der über die drei Stäbe erstreckten Eigenfunktion, wobei auch die Nullstellen an den Stabenden mitgezählt werden, und zwar bei B und C gesondert für Stiel und Querriegel. Nur an diesen Ecken können doppelte Nullstellen auftreten, die dann auch doppelt gezählt werden.

Die so festgelegte Oszillationszahl für die zum Eigenwert $\lambda_k = \sigma_k^4$ gehörige Schwingungsform sei \varkappa_k . Dann gilt der Satz:

Abgesehen von den nachstehend aufgeführten Ausnahmefällen ist

$$\varkappa_k = k + 4.$$

1. Ausnahmefall. Bei den symmetrischen Schwingungsformen (k gerade) treten an den drei Stäben bei B und C doppelte Nullstellen, im ganzen also 4 doppelte Nullstellen auf, wenn $\cotg \sigma_k a = \mathfrak{C} \cotg \sigma_k a$ ist. Dann und nur dann ist $\varkappa_k = k + 6$. Für $k = 2$ kann dieser Ausnahmefall nicht eintreten.

2. Ausnahmefall. Bei einer antisymmetrischen Schwingungsform (k ungerade) ist dann und nur dann $\varkappa_k = k + 2$, wenn $\mathfrak{C} \cotg \sigma_k b < \cotg \sigma_k b < \mathfrak{C} \cotg \sigma_k b + 2 \mathfrak{C} \cotg \sigma_k a$ und damit

$$\frac{\sigma_k b \mathfrak{C} \cotg \sigma_k a}{\sigma_k b + 2 \mathfrak{C} \cotg \sigma_k a} > \cotg \sigma_k a > - \mathfrak{C} \cotg \sigma_k a.$$

Werden in diesen beiden Ungleichungen die rechts stehenden Zeichen durch Gleichheitszeichen ersetzt, dann erhält man antisymmetrische Schwingungsformen, bei denen $u_1(a) = u_3(a) = 0$ ist und demnach der Querriegel keine seitlichen Verschiebungen erfährt.

Aus dem Obigen ergibt sich auch, daß zwei zu σ_{2n-1} und σ_{2n+1} gehörige Eigenfunktionen in der Oszillationszahl übereinstimmen können. So kann z. B. sowohl die antisymmetrische Grundschwingung als auch die erste antisymmetrische Oberschwingung 5 Knotenstellen haben, die sich an den unteren

Enden der Stiele, an den Enden und in der Mitte des Querriegels befinden. Daran erkennt man, mit welcher Vorsicht die vielfach benützte Energiemethode anzuwenden ist, bei der die Schwingungszahl mit Hilfe einer angenäherten Schwingungsform berechnet wird.

Das weitere Ziel der Untersuchung wird sein, die mitgeteilten Ergebnisse mit Hilfe von Kontinuitätsbetrachtungen auf allgemeinere Differentialgleichungen auszudehnen, wie sie sich z. B. bei veränderlicher Biegesteifigkeit und veränderlicher Masse pro Längeneinheit oder bei Berücksichtigung der Rotationsträgheit und der Längsschwingungen ergeben. Dazu kommt die Behandlung anderer Randbedingungen in den Stabenden A und D .

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1935-1936

Band/Volume: [67-68](#)

Autor(en)/Author(s): Bickel Friedrich

Artikel/Article: [Über die Berechnung der Schwingungen eines Rahmenträgers. 267-272](#)