Über die beliebigdimensionalen Sekanten eines Kontinuums und ihre Limiten.

Von Otto Haupt und Georg Nöbeling (Erlangen).

Die Untersuchungen von Herrn Denjoy und anderen über die Derivierten reeller Funktionen sind in neuerer Zeit zu solchen über die Struktur der Halbtangentenmenge (Kontingent) beliebiger Punktmengen M des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n ausgedehnt worden[1]). In gewissem Zusammenhang hiermit stehen die Untersuchungen, bei denen für mehr oder weniger allgemeine Punktmengen M des E_n die Struktur des Systems S aller oder spezieller Grenzsekanten (Tangenten, Tangentialschmiegräume, Paratingenten usw.) den Gegenstand der Fragestellung bildet. Umgekehrt werden bei den, vor allem von Herrn Bouligand[2]) in Angriff genommenen Untersuchungen Rückschlüsse gezogen von der Struktur des Systems S auf die Menge M selbst.

Bei allen diesen Untersuchungen wird man von selbst dazu geführt, nicht nur die Grenzsekanten, sondern auch das System der Sekanten selbst zu betrachten. Einen Beitrag in dieser

---

1) Vgl. Roger, F., Sur la relation entre les propriétés tangentielles et métriques des ensembles cartésiens. Comptes rendus acad. sci. Paris *201*, 871—873 (1935); ferner ebenda *202*, 377—380 (1936).

2) Bouligand, G., Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932. — Eine Übersicht über die verschiedenen oben im Texte angedeuteten Fragen und Ergebnisse findet sich in Chow, S.-L., Questions de géométrie des ensembles (raréfaction et localisation). Paris, Vuibert, 1936, S. 1—7.

Richtung liefert der folgende Satz, dessen Beweis einheitlich für alle n und k (mit $2 \leqq n$ und $1 \leqq k \leqq n$) verläuft und an anderer Stelle veröffentlicht werden soll.

Satz. *Die Menge aller k-dimensionalen Sekanten eines Kontinuums K des E_n ist zusammenhängend in folgendem Sinn: je zwei k-dimensionale Sekanten von K können bei beliebigem $\varepsilon > o$ verbunden werden durch eine Kette endlich vieler k-dimensionaler Sekanten von K derart, dafs je zwei aufeinanderfolgende Sekanten der Kette einen $(k-1)$-dimensionalen Durchschnitt haben und einen Winkel kleiner ε einschliefsen.*

Wir verstehen dabei unter einer k-dimensionalen Sekante einer Menge M des E_n einen k-dimensionalen euklidischen Teilraum des E_n, dessen Durchschnitt mit M ein $(k+1)$-tupel linear unabhängiger Punkte enthält. Weiter sind k-dimensionale Grenzsekanten k-dimensionale euklidische Teilräume des E_n, gegen welche sich k-dimensionale Sekanten häufen; unterwirft man bei diesem Grenzübergang das genannte $(k+1)$-tupel irgendwelchen Einschränkungen, so erhält man spezielle Grenzsekanten, wie z. B. Tangenten, Tangentialschmiegräume, Paratingenten usw.

Unser Satz ergibt sofort folgendes:

Korollar. *Die Menge aller k-dimensionalen Sekanten und Grenzsekanten eines Kontinuums K des E_n ist ein Kontinuum.*

Es erhebt sich die Frage, ob schon die Menge aller k-dimensionalen Grenzsekanten von K ein Kontinuum ist. (Kompakt ist sie; es handelt sich also nur noch um den Zusammenhang.)

Die Veranlassung zum Beweis des oben formulierten Satzes boten die Arbeiten von Herrn Mirguet über die Paratingenten[1])

1) Mirguet, J., Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre. Ann. sci. école normale sup. (3) *51,* 201 ff. (1934).

und die Biparatingenten [1]). Darin handelt es sich um folgendes. Ist Q ein beliebiger Punkt des Kontinuums K und existiert eine Folge linear unabhängiger $(k+1)$-tupel von Punkten aus K, die gegen Q konvergieren (Q darf, muß aber nicht unter den Punkten der $(k+1)$-tupel vorkommen), so liefern diese $(k+1)$-tupel eine Folge von k-dimensionalen Sekanten. Jeder k-dimensionale euklidische Teilraum des E_n, welcher Limes einer solchen Sekantenfolge (also eine ganz spezielle Grenzsekante) ist, heißt eine k-dimensionale Paratingente in Q, und die Menge aller k-dimensionalen Paratingenten in Q heißt das k-dimensionale Paratingent in Q [2]). Herr Mirguet hat nun bewiesen, daß für jeden Punkt eines Kontinuums im beliebigdimensionalen euklidischen Raum das eindimensionale Paratingent ein Kontinuum ist [3]) und ebenso in jedem Punkt eines Kontinuums des euklidischen E_3 das zweidimensionale Paratingent (Biparatingent) [4]).

Aus dem oben formulierten Satz folgt sofort:

Das k-dimensionale Paratingent ist ein Kontinuum, wenigstens in jedem Punkt von K, in welchem K lokal zusammenhängend ist.

Vermutlich gilt dies sogar für *jeden* Punkt von K. Diese Vermutung wird nicht nur nahegelegt durch die beiden von Herrn Mirguet bewiesenen Sätze, sondern auch dadurch, daß bei Herrn Mirguet der oben ausgesprochene Satz über die Sekanten in den von ihm betrachteten Dimensionen als entscheidender Hilfssatz auftritt und bewiesen wird. — Wir hoffen, auf diese Vermutung noch zurückzukommen.

---

1) Mirguet, J., Sur la continuité du biparatingent Comptes rendus acad. sci. Paris *200*, 1705—1707 (1935).

2) Siehe Fußnote 2 auf Seite 283.

3) Siehe Fußnote 1 auf voriger Seite.

4) Siehe Fußnote 1 auf dieser Seite.

Es erhebt sich hier, entsprechend wie oben, die Frage, ob auch das k-dimensionale Paratingent von K, d. h. die Menge aller k-dimensionalen Teilräume von E_n, deren jeder für mindestens einen Punkt von K eine Paratingente ist, ein Kontinuum bildet. (Kompakt ist es; fraglich ist nur der Zusammenhang.)

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß man statt der „linearen" Sekanten auch andere Gebilde, die durch eine feste Anzahl von Punkten eindeutig bestimmt sind (z. B. Kreise, Kugeln usw.), der Betrachtung zugrunde legen kann.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1935-1936

Band/Volume: 67-68

Autor(en)/Author(s): Haupt Otto, Nöbeling Georg

Artikel/Article: Über die beliebigdimensionalen Sekanten eines Kontinuums und ihre Limiten. 283-286