Dimensionstheorie in Stellenringen.

Von Wolfgang Krull in Erlangen.

Ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement 1 soll „Stellenring" heißen, wenn erstens für $\mathfrak{R}$ die Maximalbedingung (der Noethersche Teilerkettensatz) gilt und zweitens in $\mathfrak{R}$ die Menge aller Nichteinheiten ein Ideal $\mathfrak{m}$ bildet, das dann das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}$ darstellt. ($\mathfrak{R}$ selbst wird nicht unter die Ideale mitgerechnet)[1]. — Dem Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ schreiben wir die „Dimension" (den „Dimensionsdefekt") μ zu, wenn es in $\mathfrak{R}$ mindestens eine $(\mu+1)$-gliederige, aber keine $(\mu+2)$-gliederige mit $\mathfrak{p}$ beginnende Primoberidealkette $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \ldots.$ (Primunteridealkette $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \ldots$) gibt. Es gelten nun zunächst die folgenden, von mir bereits an anderer Stelle bewiesenen Sätze[2]:

Satz 1. *In $\mathfrak{R}$ ist der Durchschnitt aller Potenzen von $\mathfrak{m}$ stets gleich dem Nullideal.*

Satz 2. *In $\mathfrak{R}$ hat jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eine endliche Dimension (einen endlichen Dimensionsdefekt) μ, und zwar ist stets $\mu \leqq r$, falls sich r Elemente $q_1, \ldots. q_r$ so wählen lassen, daß $(q_1, \ldots. q_r)$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal wird.*

Auf Grund von Satz 2 können und wollen wir definieren: Einem beliebigen Ideale $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ soll die Dimension μ zugeschrieben werden, wenn unter den Primoberidealen von $\mathfrak{a}$ mindestens eines die Dimension μ, aber keines eine Dimension $\nu > \mu$ hat. Aus Satz 1 folgt durch Übergang vom Stellenring $\mathfrak{R}$ zum Stellenring $\mathfrak{R} / (a_1, \ldots. a_m)$ unmittelbar:

---

1) In der Bezeichnungsweise schließe ich mich an meinen Bericht über die neuere Entwicklung der Idealtheorie (Ergebnisse d. Math. u. ihr. Grenzgeb. Bd. 4, Heft 3 (1935)) an.

2) Vgl. Krull: Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen. S. B. Heidelberg Akad. Wiss. 1928. 7. Abhandl., sowie Nr. 15 des Idealberichts.

Satz 3. Bilden in $\mathfrak{R}$ die Elemente $a_1, \ldots a_m$ modulo jeder Potenz von $\mathfrak{m}$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$, ist also $(a_1, \ldots a_m) + \mathfrak{m}^i = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^i$ für jedes i, so wird $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots a_m)$.

Es sei jetzt $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ eine minimale, d. h. aus möglichst wenigen Elementen bestehende Basis von $\mathfrak{m}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ bedeute den Restklassenkörper $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$, Σ dagegen sei ein volles Restsystem von $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{m}$, also eine Untermenge von $\mathfrak{R}$, die aus jeder Restklasse von $\overline{\mathfrak{K}}$ genau ein Element enthält; schließlich wollen unter $\overline{\varphi}_r(x)$, $\overline{\psi}_s(x), \ldots$ homogene Formen r-ten, s-ten, ... Grades aus dem Polynomring $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{K}}\,[x_1, \ldots x_n]$ verstehen, unter $\varphi_r(\alpha)$, $\psi_s(\alpha), \ldots$ dagegen diejenigen Elemente von $\mathfrak{R}$, die aus $\overline{\varphi}_r(x)$, $\overline{\psi}_s(x), \ldots$ dadurch hervorgehen, daß man die Variabeln $x_1, \ldots x_n$ durch $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ und die Restklassen aus $\overline{\mathfrak{K}}$ durch die repräsentierenden Elemente aus Σ ersetzt. — Wir definieren nun: $\overline{\varphi}_r(x)$ soll „Anfangsform" des Elements a aus $\mathfrak{R}$ heißen, wenn $a \equiv \varphi_r(\alpha)\ (\mathfrak{m}^{r+1})$ ist. Bei einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ soll unter dem „Leitideal" $\overline{\mathfrak{a}}$ das aus den sämtlichen Anfangsformen der sämtlichen Elemente von $\mathfrak{a}$ bestehende Formenideal aus $\overline{\mathfrak{P}}$ verstanden werden.

Ersetzt man das volle Restsystem Σ durch irgend ein anderes volles Restsystem Σ', so ändern sich die Anfangsformen und Leitideale überhaupt nicht. Ist $(\beta_1, \ldots \beta_n)$ eine zweite Minimalbasis von $\mathfrak{m}$, so gilt ein Gleichungssystem $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\beta_k\ (i = 1, \ldots n)$, bei dem die Determinante $|a_{ik}|$ eine Einheit aus $\mathfrak{R}$ darstellt; bezeichnet $\bar{a}_{ik}$ jeweils die durch a_{ik} repräsentierte Restklasse aus $\overline{\mathfrak{K}}$, so entstehen die mit Hilfe der Basis $(\beta_1, \ldots \beta_n)$ definierten Anfangsformen aus den mit Hilfe der Basis $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ definierten einfach dadurch, daß man die Variabeln x_i der linearen homogenen umkehrbaren Transformation $x_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik}\,y_k\ (i = 1, \ldots n)$ unterwirft. — Im folgenden halten wir durchweg an der einmal gewählten Minimalbasis $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ fest. — Aus Satz 3 folgt sofort:

Satz 4. Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ und $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}}$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. — Ist $\bar{\mathfrak{a}}$ ein zu $(x_1, \ldots x_n)$, so ist $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal.

Die wirkliche Bedeutung des Leitidealbegriffs aber zeigt erst

Satz 5. Ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ hat stets genau dieselbe Dimension in $\mathfrak{R}$ wie sein Leitideal $\bar{\mathfrak{a}}$ in $\overline{\mathfrak{P}}$.[3]).

Es sei μ bzw. $\bar{\mu}$ die Dimension von $\mathfrak{a}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}$. Dann kann man jedenfalls $\bar{\mu}$ Formen $\bar{\varphi}^{(1)}(x), \ldots . \bar{\varphi}^{(\bar{\mu})}(x)$ so bestimmen, daß $\bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}^{(1)}(x), \ldots . \bar{\varphi}^{(\bar{\mu})}(x))$ ein zu $(x_1, \ldots . x_n)$ gehöriges Primärideal wird; wählt man ferner in $\mathfrak{R}$ die Elemente a_i $(i = 1, \ldots . \bar{\mu})$ so, daß $\bar{\varphi}^{(i)}(x)$ jeweils eine Anfangsform von a_i darstellt, so wird nach Satz 4 sicher $\mathfrak{a} + (a_1, \ldots . a_{\bar{\mu}})$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal, und daraus folgt auf Grund von Satz 2 sofort $\mu \leqq \bar{\mu}$. — Um nun noch $\mu \geqq \bar{\mu}$ zu beweisen, überlegt man sich zunächst leicht: Für mindestens ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ hat das Leitideal $\bar{\mathfrak{p}}$ dieselbe Dimension $\bar{\mu}$ wie $\bar{\mathfrak{a}}$. Es genügt infolgedessen, zu zeigen, daß zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\bar{\mu}$-dimensionalem Leitideal $\bar{\mathfrak{p}}$ immer ein Element a so bestimmt werden kann, daß die Dimension des Leitideals von $\mathfrak{p} + (a)$ genau gleich $\bar{\mu} - 1$ wird. — Daß schließlich in jedem Falle ein Element a der gewünschten Art vorhanden ist, ergibt sich aus einem Hilfssatz, der seiner Wichtigkeit wegen in voller Allgemeinheit angegeben werden soll.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, a ein beliebiges Element aus irgend einem Ringe $\mathfrak{R}$, so soll unter $\mathfrak{a}_{\{a\}}$ das durch die Potenzen von a erzeugte „i. K. J.“ von $\mathfrak{a}$ verstanden werden, das heißt das Ideal aller der Ringelemente γ für die $a^s \cdot \gamma \subset \mathfrak{a}$ bei hinreichend großem s. Dann gilt:

Satz 6. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus dem Stellenring $\mathfrak{R}$ mit dem Leitideal $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ seien Formen aus $\overline{\mathfrak{P}}$, und zwar sei $\bar{\varphi}$ zu $\bar{\mathfrak{a}}_{\{\bar{\psi}\}}$ prim, $\bar{\mathfrak{a}}_{\{\bar{\psi}\}} : (\bar{\varphi}) = \bar{\mathfrak{a}}_{\{\bar{\psi}\}}$; schließlich bedeute a ein Element aus $\mathfrak{R}$ mit der Anfangsform $\bar{\varphi}$. Dann ist das Leitideal von $\mathfrak{a} + (a)$ stets Unterideal von $(\bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi}))_{\{\bar{\psi}\}}$.

Spezialfall: Ist $\bar{\varphi}$ zu $\bar{\mathfrak{a}}$ prim, so ist das Leitideal von $\mathfrak{a} + (a)$ genau gleich $\bar{\mathfrak{a}} + (\bar{\varphi})$.

---

3) Die Dimensionen im Polynomring $\overline{\mathfrak{P}}$ sind (trotz der Homogenität der Leitideale) im inhomogenen und nicht im homogenen (projektiven) Sinn zu verstehen, so daß z. B. $(x_1, \ldots . x_n)$ die Dimension 0 und (nicht —1) zuzuschreiben ist.

Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{R}$ den Ring aller gewöhnlichen Potenzreihen in $a_1, \ldots, a_n$ über einem Körper darstellt, wurde ein Teil von Satz 6 bereits von E. Lasker bewiesen[4]). Auch im allgemeinen Fall wird der Beweis im wesentlichen mit den Laskerschen Methoden geführt. Denn es zeigt sich, daß man mit Hilfe der Anfangsformen mit den Elementen eines beliebigen Stellenrings in ganz ähnlicher Weise rechnen kann wie mit gewöhnlichen Potenzreihen.

Ein Stellenring $\mathfrak{S}$ soll „p-adischer Ring" heißen, wenn das Nullideal in $\mathfrak{S}$ das Nullideal in $\overline{\mathfrak{P}}$ zum Leitideal hat, d. h. wenn jedes Element aus $\mathfrak{S}$ nur eine einzige Anfangsform besitzt. Ein p-adischer Ring $\mathfrak{S}$ ist stets ein Integritätsbereich; die Dimension des Nullideals ist gleich der Anzahl n der Elemente einer Minimalbasis des maximalen Primideals $\mathfrak{m}$. Zu den p-adischen Ringen gehören außer den gewöhnlichen Potenzreihenringen mit Körperkoeffizienten die Henselschen Ringe aus ganzen p-adischen oder π-adischen Zahlen.

Satz 7. Jeder p-adische Ring $\mathfrak{S}$ ist ganz abgeschlossen.

Ist nämlich $\xi = \frac{z}{n}$ (z, n in $\mathfrak{S}$) ein von $\mathfrak{S}$ ganz abhängiges Element, so existiert, wie bekannt, in $\mathfrak{S}$ ein $a \neq o$ mit der Eigenschaft, daß die Produkte $a \cdot \xi^i$ $(i = 1, 2, \ldots .)$ alle zu $\mathfrak{S}$ gehören, und auf Grund dieser Bemerkung schließt man angesichts der eindeutigen Bestimmtheit aller Anfangsformen leicht, daß in $\mathfrak{S}$ modulo jeder Potenz von $\mathfrak{m}$ eine Kongruenz $z \equiv n \cdot m_i$ $(\mathfrak{m}^i)$ gilt. Nach Satz 3 folgt daraus aber sofort die Teilbarkeit von z durch n, also die Zugehörigkeit von ξ zu $\mathfrak{S}$.

Satz 8. In einem p-adischen Ring $\mathfrak{S}$ ist die Summe der Dimension μ und des Dimensionsdefektes ν eines beliebigen Primideals $\mathfrak{p}$ stets gleich der Dimension n des Nullideals.

$\nu + \mu \leqq n$ folgt unmittelbar aus Satz 5. Zum Beweis von $\nu + \mu \geqq n$ hat man zu zeigen, daß jedes μ-dimensionale Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}$ mindestens ein $(\mu + 1)$-dimensionales Primunterideal $\mathfrak{q}$ besitzt. — Da das Leitideal $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ nach Satz 5 ebenso wie

4) E. Lasker: Zur Theorie der Moduln und Ideale. Math. Ann. Bd. 60 (1905) S. 20—116, Kap. III.

$\mathfrak{p}$ selbst μ-dimensional sein muß, kann man für $\lambda = n - \mu - 1$ in $\bar{\mathfrak{p}}$ die Formen $\bar{\varphi}^{(1)}, \ldots \bar{\varphi}^{(\lambda)}$ sicher so wählen, daß $\bar{\varphi}^{(i)}$ $(i = 2, \ldots \lambda)$ jeweils zu $(\bar{\varphi}^{(1)}, \ldots \bar{\varphi}^{(i-1)})$ prim ist. Nach einem bekannten Satz haben dann alle zu $\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{\varphi}^{(1)}, \ldots \bar{\varphi}^{(\lambda)})$ gehörigen Primideale die Dimension $n - \lambda = \mu + 1$ [5]. Sind ferner $a_1, \ldots a_\lambda$ Elemente aus $\mathfrak{p}$ mit den Anfangsformen $\bar{\varphi}^{(1)}, \ldots \bar{\varphi}^{(\lambda)}$, so muß $\bar{\mathfrak{a}}$ nach Satz 6 das Leitideal von $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots a_\lambda)$ sein. Wegen $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ist mindestens ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{q}$ Unterideal von $\mathfrak{p}$, und aus der Tatsache, daß $\mathfrak{q}$ zu $\mathfrak{a}$ nichtprim ist, folgt leicht, daß auch das Leitideal $\bar{\mathfrak{q}}$ zum Leitideal $\bar{\mathfrak{a}}$ nichtprim, also in einem zu $\bar{\mathfrak{a}}$ gehörigen Primideal enthalten ist. Das heißt aber, $\bar{\mathfrak{q}}$ und damit nach Satz 5 auch $\mathfrak{q}$ muß die Dimension $\mu + 1$ besitzen. Fertig!

Das Gesamtergebnis kann kurz so zusammengefaßt werden: Die Sätze 1—3 gestatten es, alle die Dimensionsergebnisse, die mit der auf Lasker zurückgehenden Leitidealmethode für gewöhnliche Potenzreihenringe bewiesen werden können, auf allgemeine Stellenringe zu übertragen. An Stelle der Potenzreihenringe selbst treten dabei die p-adischen Stellenringe, während die nicht-p-adischen Stellenringe sich wie Restklassenringe von gewöhnlichen Potenzreihenringen verhalten.

5) Es handelt sich um einen auf Lasker zurückgehenden „Ungemischtheitssatz". Vgl. z. B. Idealbericht Nr. 17.