

Galoissche Theorie der ganz abgeschlossenen Stellenringe¹⁾.

Von Wolfgang Krull in Erlangen.

Es sei \mathfrak{R} ein ganz abgeschlossener nullteilerfreier Stellenring, also ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, der der Maximalbedingung genügt, und in dem die Menge aller Nichteinheiten das einzige maximale Primideal \mathfrak{m} bildet. $\tilde{\mathfrak{R}}$ bedeute einen endlichen normalen separablen Oberkörper des Quotientenkörpers \mathfrak{K} von \mathfrak{R} , unter $\tilde{\mathfrak{R}}$ soll der Ring aller von \mathfrak{R} ganz abhängigen Elemente aus $\tilde{\mathfrak{R}}$ verstanden werden. Mit Γ bezeichnen wir die Automorphismengruppe von $\tilde{\mathfrak{R}}$ über \mathfrak{R} , zwei Mengen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} aus $\tilde{\mathfrak{R}}$ heißen konjugiert, wenn in Γ ein Automorphismus γ existiert, der \mathfrak{M} in \mathfrak{N} überführt, $\gamma \times \mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. Offenbar ist $\tilde{\mathfrak{R}}$ nur zu sich selbst konjugiert und alle zu einem Primideal in $\tilde{\mathfrak{R}}$ konjugierten Mengen sind wieder Primideale in $\tilde{\mathfrak{R}}$. Nach bekannten Schlüssen besitzt $\tilde{\mathfrak{R}}$ über \mathfrak{R} eine endliche Modulbasis und genügt infolgedessen gleichzeitig mit \mathfrak{R} der Maximalbedingung. Darüber hinaus gilt:

Satz 1. Es gibt in $\tilde{\mathfrak{R}}$ nur endlich viele Primideale $\tilde{\mathfrak{m}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{m}}_n$, die mit \mathfrak{R} den Durchschnitt \mathfrak{m} haben. Die $\tilde{\mathfrak{m}}_i$ sind alle untereinander konjugiert und maximal; außer ihnen gibt es in $\tilde{\mathfrak{R}}$ keine weiteren maximalen Primideale²⁾.

1) Zur vorliegenden Note vergleiche man die Darstellung der Galoisschen Theorie bewerteter Körper in den Arbeiten: M. Deuring: Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann. Bd. 105 (1931), S. 277—307. (Zitiert mit „Deuring“). W. Krull: Galoissche Theorie bewerteter Körper, S. B. Münch. Akad. Wiss. 1930, S. 225—238. (Zitiert mit „Krull“). Vgl. ferner meinen Bericht über die Entwicklung der neueren Idealtheorie (Ergebnisse d. Math. u. ihr. Grenzgeb., Bd. 4, Heft 3 (1935)), an den ich mich im folgenden hinsichtlich der Bezeichnungsweise anschließe.

2) Vgl. Idealbericht Nr. 48., sowie die entsprechenden Schlüsse bei Deuring § 1 (vor allem Hilfssatz 2 u. 3) und Krull, S. 228, Anm. 2!

Zunächst sieht man leicht, daß in $\tilde{\mathfrak{K}}$ mindestens ein Primideal \tilde{m}_1 existiert, das mit \mathfrak{K} den Durchschnitt m hat, und daß \tilde{m}_1 maximal sein muß. Die zu \tilde{m}_1 konjugierten Primideale $\tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_n$ haben dann alle dieselben Eigenschaften. Versteht man ferner unter $\tilde{\mathfrak{S}}_i$ ($i = 1, \dots, n$) jeweils den durch \tilde{m}_i bestimmten Primidealquotientenring von $\tilde{\mathfrak{K}}$ (also den Ring aller Quotienten $\frac{a}{b}$, a und b in $\tilde{\mathfrak{K}}$, b nicht in \tilde{m}_i), so ergibt sich aus Schlüssen, die im wesentlichen von der Galoisschen Theorie bewerteter Körper her bekannt sind, die Gleichung $\tilde{\mathfrak{K}} = \tilde{\mathfrak{S}}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\mathfrak{S}}_n$. Daraus aber wiederum folgt mühelos der volle Satz 1. Dabei wird nirgends von der Maximalbedingung Gebrauch gemacht.

Wir zeichnen jetzt in der Reihe der \tilde{m}_i ein bestimmtes Primideal, etwa $\tilde{m}_1 = \tilde{m}$, aus. Mit $\tilde{\mathfrak{S}}$ bezeichnen wir den zu \tilde{m} gehörigen Primidealquotientenring von $\tilde{\mathfrak{K}}$, mit \tilde{n} das maximale Primideal von $\tilde{\mathfrak{S}}$ (also das Ideal $\tilde{m} \cdot \tilde{\mathfrak{S}}$). Des weiteren definieren wir nach Dedekind-Hilbertschem Vorbild:

Die „Zerlegungsgruppe“ I_z (von \tilde{m} über \mathfrak{K}) ist die Gruppe aller der Automorphismen aus I , bei denen \tilde{m} in sich selbst übergeht. Der „Zerlegungskörper“ \mathfrak{K}_z ist der zu I_z gehörige Zwischenkörper zwischen \mathfrak{K} und $\tilde{\mathfrak{K}}$. Setzen wir dann noch $\mathfrak{K}_z = \tilde{\mathfrak{K}} \wedge \mathfrak{K}_z$, $\mathfrak{S}_z = \tilde{\mathfrak{S}} \wedge \mathfrak{K}_z$, $m_z = \tilde{m} \wedge \mathfrak{K}_z$, $n_z = \tilde{n} \wedge \mathfrak{K}_z$, so gilt:

Satz 2. Für $\tilde{m}_i \neq \tilde{m}$ ist stets auch $\tilde{m}_i \wedge \mathfrak{K}_z \neq m_z$; der zu \mathfrak{S}_z gehörige ganz abgeschlossene Ring in $\tilde{\mathfrak{K}}$ ist gerade gleich $\tilde{\mathfrak{S}}$. — Ist \mathfrak{K}' irgend ein Körper zwischen \mathfrak{K} und $\tilde{\mathfrak{K}}$ mit der Eigenschaft, daß aus $\tilde{m}_i \neq \tilde{m}$ stets $\tilde{m}_i \wedge \mathfrak{K}' \neq \tilde{m} \wedge \mathfrak{K}'$ folgt, so ist \mathfrak{K}' Oberkörper von \mathfrak{K}_z .

Jedes Element aus \mathfrak{K}_z ist modulo jeder Potenz von m_z einem Elemente aus \mathfrak{K} kongruent. In \mathfrak{S}_z gilt die Gleichung $m \cdot \mathfrak{S}_z = n_z$, n_z besitzt also eine zu \mathfrak{S} gehörige Basis.

Sieht man von der allerletzten Behauptung ab, so ergibt sich die Richtigkeit von Satz 2 aus im wesentlichen geläufigen gruppentheoretischen Überlegungen ohne Zuhilfenahme der Maximalbedingung³⁾. Daraus folgt insbesondere $n_z = n_z^2 + m \cdot \mathfrak{S}_z$. Beachtet man nun noch, daß \mathfrak{S}_z einen Ring mit Maximal-

3) Vgl. z. B. Krull, S. 229 f.

bedingung darstellt, so ergibt sich aus Satz 3 der unmittelbar vorangehenden Note⁴⁾ sofort $m \cdot \mathfrak{S}_z = n_z$.

Bei den weiteren Betrachtungen können und wollen wir mit $\tilde{\mathfrak{S}}$ und \tilde{n} an Stelle von $\tilde{\mathfrak{K}}$ und \tilde{m} arbeiten. Außerdem möge vorausgesetzt werden, daß $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{n}$ ein separabler Oberkörper von \mathfrak{S}_z/n_z ist⁵⁾. Die Gruppe Γ_t bzw. Γ_v aller der Automorphismen aus Γ_z , bei denen die sämtlichen Elemente von $\tilde{\mathfrak{S}}$ modulo \tilde{n} bzw. modulo \tilde{n}^2 in sich selbst übergeführt werden, heißt die „Trägheitsgruppe“ bzw. „Verzweigungsgruppe“ (von \tilde{n} oder auch von \tilde{m} über $\tilde{\mathfrak{K}}$). Die zugehörigen Körper \mathfrak{R}_t bzw. \mathfrak{R}_v werden „Trägheits-“ bzw. „Verzweigungskörper“ genannt. Setzt man noch $\tilde{\mathfrak{S}} \sim \mathfrak{R}_t = \mathfrak{S}_t$, $\tilde{\mathfrak{S}} \sim \mathfrak{R}_v = \mathfrak{S}_v$, $\tilde{n} \sim \mathfrak{R}_t = n_t$, $\tilde{n} \sim \mathfrak{R}_v = n_v$, so gelten die Sätze:

Satz 3. Γ_t ist invariante Untergruppe von Γ_z . Die Gruppe von \mathfrak{R}_t über \mathfrak{R}_z (also Γ_z/Γ_t) ist isomorph zur Gruppe von $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{n}$ über \mathfrak{S}_z/n_z . Jedes Element aus $\tilde{\mathfrak{S}}$ ist modulo \tilde{n} zu einem Elemente aus \mathfrak{S}_t kongruent. Es wird $n_t = n_z \cdot \mathfrak{S}_t$, d. h. es besitzt n_t eine in \mathfrak{S}_z gelegene Basis.

Satz 4. Γ_v ist eine invariante Untergruppe von Γ_t . Ist $\tilde{\mathfrak{K}} \neq \mathfrak{R}_t$, so ist $n_t \cdot \tilde{\mathfrak{S}} \neq \tilde{n}$, und es wird die Gruppe von \mathfrak{R}_v über \mathfrak{R}_t (also Γ_t/Γ_v) isomorph zu einer linearen homogenen Substitutionsgruppe in t Variablen über dem Körper $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{n}$, falls \tilde{n} modulo \tilde{n}^2 eine t -gliedrige Minimalbasis besitzt.

Satz 5. Ist $\mathfrak{R}_v \neq \tilde{\mathfrak{K}}$, so ist $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{n}$ von Primzahlcharakteristik p , und es besitzt $\tilde{\mathfrak{K}}$ über \mathfrak{R}_v eine auflösbare Gruppe von Primzahlpotenzgrad p^a .

Die drei ersten Behauptungen von Satz 3 erfordern zum Beweis nur bekannte gruppentheoretische Überlegungen⁶⁾. Es sei ferner g der Grad von \mathfrak{R}_v über \mathfrak{R}_t , und es sei das primitive

4) Dimensionstheorie der Stellenringe, S. 319—323.

5) Der Satz 3 über den Trägheitskörper ist für den Fall einer inseparablen Erweiterung des Restklassenkörpers \mathfrak{S}_z/n_z nur unwesentlich abzuändern, und zwar in dem bei Krull S. 231, Anm. 1 angegebenen Sinne. Für den Beweis der Verzweigungssätze 4 und 5 dagegen ist es (im Gegensatz zu der Entwicklung der Verzweigungstheorie bewerteter Körper bei Krull § 3) wesentlich, daß nur separable Erweiterungen von \mathfrak{S}_z/n_z zugelassen werden.

6) Vgl. z. B. die Darstellung bei Deuring § 3 und § 4!

Element a von \mathfrak{K}_v über \mathfrak{K}_t so gewählt, daß die zugehörige Restklasse primitives Element von $\tilde{\mathfrak{C}}/\tilde{n}$ über \mathfrak{C}_z/n_z ist. Dann muß die Diskriminante von a über \mathfrak{K}_z eine Einheit aus \mathfrak{C}_z sein, und es ist daher $\mathfrak{C}_t = \mathfrak{C}_z + a \cdot \mathfrak{C}_z + \dots + a^{g-1} \cdot \mathfrak{C}_z$. Gleichzeitig sieht man sofort, daß $m_t = m_z + a \cdot m_z + \dots + a^{g-1} \cdot m_z$ werden muß. Daraus folgt aber unmittelbar die letzte noch ausstehende Behauptung von Satz 3. Von der Maximalbedingung wird beim Beweise von Satz 3 nirgends Gebrauch gemacht.

Anders steht es (von der ziemlich selbstverständlichen Invarianz von I_v in I_t abgesehen) bei Satz 4. Wäre $n_t \cdot \tilde{\mathfrak{C}} = \tilde{n}$, so würde jedes Element aus $\tilde{\mathfrak{C}}$ bei jedem Automorphismus von I_t modulo jeder Potenz von \tilde{n} in sich selbst übergehen. Wegen der für $\tilde{\mathfrak{C}}$ gültigen Maximalbedingung müßten dann nach Satz 3 der unmittelbar vorangehenden Note⁴⁾ alle Elemente von $\tilde{\mathfrak{C}}$ bei allen Automorphismen von I_t ungeändert bleiben und das hieße $\tilde{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}_t$, $\tilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_t$. — Es sei nun (a_1, \dots, a_t) eine Minimalbasis von \tilde{n} modulo \tilde{n}^2 , \mathfrak{N} sei ein in \mathfrak{C}_t liegendes volles Restsystem von $\tilde{\mathfrak{C}}$ modulo \tilde{n} . Dann läßt sich jedes Element aus $\tilde{\mathfrak{C}}$ modulo \tilde{n}^2 eindeutig in der Form $a = n_0 + \sum_1^t n_i a_i$ mit Koeffizienten aus \mathfrak{N} darstellen, und die Anwendung eines Automorphismus \mathfrak{D} aus I_t liefert $\mathfrak{D} \times a = n_0 + \sum_1^t n_i \cdot (\mathfrak{D} \times a_i)$. Weiter erhält man für die $\mathfrak{D} \times a_i$ ($i = 1, \dots, t$) modulo \tilde{n}^2 ein eindeutig bestimmtes Kongruenzensystem $\mathfrak{D} \times a_i \equiv \sum_1^t n_{ik} a_k \pmod{\tilde{n}^2}$ mit Koeffizienten aus \mathfrak{N} . Daraus folgt aber mühelos: Ordnet man jeweils dem Automorphismus \mathfrak{D} die Matrix $\| \bar{n}_{ik} \|$ ($i, k = 1, \dots, t$) zu, die entsteht, wenn man jedes n_{ik} durch die zugehörige Restklasse aus $\tilde{\mathfrak{C}}/\tilde{n}$ ersetzt, so wird die Gruppe I_t homomorph auf eine Gruppe von Matrizen t -ten Grades über $\tilde{\mathfrak{C}}/\tilde{n}$ abgebildet, und zwar so, daß zwei Automorphismen dann und nur dann dieselbe zugeordnete Matrix besitzen, wenn sie hinsichtlich I_v in der gleichen Nebenschar liegen. — Damit ist Satz 4 bewiesen.

Der Beweis von Satz 5 erfolgt ganz ähnlich wie bei bewerteten Körpern⁷⁾. Es sei die Zahl $i \geq 2$ so bestimmt, daß die Elemente von $\tilde{\mathfrak{C}}$ bei allen Automorphismen von I_v sämt-

7) Vgl. den Beweis von Satz 4 bei Krull § 3!

lich modulo \tilde{n}^i ungeändert bleiben, während mindestens ein a existiert mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{A} \times a \equiv a(\tilde{n}^{i+1})$ für geeignetes \mathfrak{A} aus Γ_v . Bezeichnet dann Γ_a die Gruppe derjenigen Automorphismen aus Γ_v , bei denen a modulo \tilde{n}^{i+1} in sich selbst übergeht, so ergibt sich mühelos: Γ_a ist invariante Untergruppe von Γ_v ; hat \tilde{n}^i modulo \tilde{n}^{i+1} eine Minimalbasis von v Elementen, so ist Γ_v/Γ_a isomorph zu einer Additionsgruppe von Linearformen in v Variablen mit Koeffizienten aus $\tilde{\mathfrak{C}}/\tilde{n}$. Der Abschluß des Beweises ist nunmehr trivial.

Für die Weiterarbeit über Satz 1–5 hinaus kommen vor allem vier Punkte in Betracht: Erstens die Einführung von invariant definierten höheren Verzweigungsgruppen. Zweitens eine genauere idealtheoretische Untersuchung der Gruppe Γ_t/Γ_v , die, wie man sieht, bei allgemeinen Stellenringen weder Abelsch noch auflösbar zu sein braucht. Drittens die idealtheoretische Definition von „Verzweigungszahlen“, deren Produkt gleich dem Grad von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über \mathfrak{K}_t werden müßte. Viertens die Entwicklung der Verzweigungstheorie für den Fall von inseparablen Erweiterungen des Restklassenkörpers $\mathfrak{C}_z/\mathfrak{n}_z$. — Die Sätze über Zerlegungs- und Trägheitskörper können als abschließend angesehen werden.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1935-1936

Band/Volume: [67-68](#)

Autor(en)/Author(s): Krull Wolfgang

Artikel/Article: [Galoissche Theorie der ganz abgeschlossenen Stellenringe. 324-328](#)