Ueber die $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde der ebenen Bogen von der $\mathfrak{K}_3$-Ordnung drei.

Von Hans Haller in Fürth (Bay.).

Die vorliegende Untersuchung, welche ich, einer Anregung von Herrn Haupt folgend, angestellt habe, beschäftigt sich mit gewissen Schmieggebilden, die eine Verallgemeinerung der bekannten Beispiele Schmiegkreis, Schmiegparabel von vorgegebener Achsenrichtung usw. darstellen. Im Gegensatz zur klassischen Behandlungsweise und im Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von Herrn Hjelmslev[1]) sind alle unsere Betrachtungen rein geometrischer Natur. Um was es sich des Näheren handelt, wird aus folgendem bekannten Beispiel klar:

Man betrachte einen Ellipsenbogen, der keinen Scheitel enthält. Man zeigt dann in herkömmlicher Weise: In jedem Punkt des Ellipsenbogens existiert eindeutig ein Krümmungskreis. Sämtliche Krümmungskreise sind ineinander geschachtelt und variieren stetig. Der zweite Teil dieses Satzes folgt rein geometrisch (ohne Rechnung und ohne Voraussetzung von Differenzierbarkeitseigenschaften des Bogens) lediglich aus der Tatsache, daß der obengenannte Bogen von der zyklischen Ordnung drei ist, d. h. daß er von jedem Kreis in höchstens drei Punkten geschnitten wird. In der Tat gilt der folgende von Herrn Hjelmslev[2]) angegebene Satz: 1. Jeder Bogen von der zyklischen Ordnung 3 besitzt in jedem Punkt einen einseitig bestimmten Schmiegkreis, dessen Größe monoton variiert. 2. Der Bogen ist notwendig differenzierbar[3]).

---

1) Vgl. z. B. Hjelmslev, J. a) Introduction à la théorie des suites monotones. Oversigt over det K. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlingar 1914, Nr. 1; b) Die graphische Geometrie. Förhandlingar Åttonde skandinav. Matematikerkongr. Stockholm 1934.

2) Vgl. Hjelmslev, a. a. O.: b) Seite 10.

3) Es ergeben sich also Differenzierbarkeitseigenschaften des Bogens hinterher als Folgerung aus der Tatsache, daß die zyklische Ordnung gleich drei ist.

Der erste Teil dieses Satzes ist nun seinerseits weiter verallgemeinerungsfähig und zwar in der Weise, daß man die zyklische Ordnung ersetzt durch (irgend) eine $\mathfrak{K}_3$-Ordnung, wie sie von Herrn Haupt[1]) eingeführt wurde, m. a. W. daß man das System der Kreise ersetzt durch ein System ebener Kurven, deren jede durch drei ihrer Punkte eindeutig festgelegt ist. In der Tat wird sich, grob gesprochen, ergeben, daß der 1. Teil des Hjelmslev'schen Satzes lediglich aus der Eigenschaft des Kreises, durch drei Punkte eindeutig bestimmt zu sein, abgeleitet werden kann, also sozusagen topologischen Charakter besitzt. Im einzelnen handelt es sich um folgendes:

Wir betrachten ein System von ($\mathfrak{K}_3$-) Grundgebilden (Kurven bzw. Bogen) K_3, welche durch Vorgabe von drei verschiedenen Punkten eines beschränkten Bereiches in der Ebene eindeutig bestimmt sind[2]) und welche als Ordnungscharakteristiken zur Definition einer Realitätsordnung dienen. Die Maximalzahl (soweit sie existiert) der Punkte, welche ein vorgelegter Bogen mit einem Grundgebilde K_3 gemeinsam hat, heißt dann die $\mathfrak{K}_3$-Ordnung des Bogens. Untersucht werden Bogen $\mathbf{B}_3$ von der $\mathfrak{K}_3$-Ordnung drei.

Um die Ergebnisse besser formulieren zu können, bedienen wir uns nachstehender Bezeichnungen: Die Endpunkte des zu untersuchenden Bogens $\mathbf{B}_3$ seien R und S. Jedes der von uns betrachteten $\mathfrak{K}_3$-Gebilde K_3 schneidet den Bogen $\mathbf{B}_3$ in drei Punkten. Handelt es sich dabei um eine $\mathfrak{K}_3$-Kurve, so begrenzt diese ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}_3$, welches stets den einen der Endpunkte R und S (im Innern) enthält, den andern aber nicht; liegt R im Innern von $\mathfrak{G}_3$, so heiße die $\mathfrak{K}_3$-Kurve R-haltig, im andern Fall S-haltig. Läßt man die drei gemeinsamen Punkte eines $\mathfrak{K}_3$-Gebildes K_3 mit dem Grundbogen $\mathbf{B}_3$ beliebig in einen Punkt P^* auf $\mathbf{B}_3$ zusammenrücken und konvergiert dabei K_3 gegen ein Grenz-$\mathfrak{K}_3$-Gebilde K_3^*, so wird dieses als beiderseitiges $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde im (Berührungs-)Punkt P^* bezeichnet ($\mathfrak{K}_3$-Paratingente im Sinne von

---

1) Haupt: Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 40 (1933) S. 1.

2) Die genaue Angabe der im übrigen über die $\mathfrak{K}_3$-Kurven bzw. $\mathfrak{K}_3$-Bogen gemachten Annahmen bei Haupt, a. a. O., Seite 7—9.

Herrn Bouligand[1]). Konvergieren die drei Punkte nur von einer Seite her gegen P^*, so sprechen wir von einem einseitigen (links- bzw. rechtsseitigen) $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde. Unter Benützung dieser Bezeichnungen lauten unsere Ergebnisse folgendermaßen:

1 a) In jedem inneren Punkt eines Bogens $\mathbf{B}_3$ von der $\mathfrak{K}_3$-Ordnung drei existieren eindeutig ein links- und ein rechtsseitiges $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde.

b) Fallen in einem Punkte P^* links- und rechtsseitiges $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde zusammen, so existiert in dem betreffenden Punkte eindeutig ein beiderseitiges $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde.

2. Sämtliche $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde des Bogens $\mathbf{B}_3$ sind gegenseitig fremd — ausgenommen höchstens gemeinsame Berührpunkte P^* — und sind ineinander geschachtelt.

3. Die Gesamtheit aller $\mathfrak{K}_3$-Schmieggebilde eines Bogens $\mathbf{B}_3$ läßt sich im allgemeinen in drei Klassen einteilen: Für P^* in der Umgebung des Punktes R handelt es sich um R-haltige $\mathfrak{K}_3$-Kurven, dann folgen $\mathfrak{K}_3$-Bogen, die schließlich in einer Umgebung des Punktes S in S-haltige $\mathfrak{K}_3$-Kurven übergehen.

Verwendet man als Operationsbereich nicht einen beschränkten Bereich in der Ebene, sondern die ganze euklidische Ebene und legt man nur konvexe $\mathfrak{K}_3$-Gebilde als Ordnungscharakteristiken zugrunde, so gilt:

4. Jeder Bogen $\mathbf{B}_3$ besitzt höchstens einen Punkt der linearen Ordnung drei.

Der Beweisgedanke ist folgender: Man wählt zunächst im Innern eines Teilbogens b_3 des zu untersuchenden Bogens $\mathbf{B}_3$ drei voneinander verschiedene Punkte. Jedes durch drei solche Punkte bestimmte $\mathfrak{K}_3$-Gebilde K_3 heiße zu b_3 gehörig. Sodann verschafft man sich Klarheit über die möglichen Lagen der zu b_3 gehörigen $\mathfrak{K}_3$-Gebilde bezüglich des Bogens $\mathbf{B}_3$. Hierauf nimmt man zwei in einem Punkt aneinander grenzende Teilbogen $b_3^{(1)}$ und $b_3^{(2)}$ und untersucht die Möglichkeiten für die gegenseitige Lage zweier zu diesen beiden Teilbogen gehöriger $\mathfrak{K}_3$-Gebilde $K_3^{(1)}$ und $K_3^{(2)}$. Schließlich bildet man eine unend-

1) Vgl. Bouligand, G., Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris, 1932.

liche Folge paarweise fremder Teilbogen $b_3^{(r)}$ ($r = 1, 2, \ldots$), die sich von einer Seite her gegen einen inneren Punkt von $\mathbf{B}_3$ häufen und betrachtet die unendlichen Folgen zugehöriger $\mathfrak{K}_3$-Gebilde $K_3^{(r)}$. Man gelangt dann zur Behauptung 1. Unter weiterer Ausnützung der bereits vorher gewonnenen Ergebnisse über die gegenseitige Lage zweier $\mathfrak{K}_3$-Gebilde ergeben sich die Behauptungen 2. und 3. Wie aus der kurzen Beweisskizze ersichtlich, stützen sich die einzelnen Betrachtungen wesentlich auf die Axiome der Anordnung und sind zum Teil rein topologisch-kombinatorischer Art.

Zum Schluß sei noch auf eine etwaige weitere Verallgemeinerung hingewiesen, auf die ich im Laufe meiner Untersuchungen geführt wurde. Sie besteht darin, daß man als Ordnungscharakteristiken $\mathfrak{K}_k$-Gebilde verwendet[1]), d. h. Kurven bzw. Bogen, die durch Vorgabe von k Punkten ($k \geqq 4$) eindeutig bestimmt sind, und Bogen $\mathbf{B}_k$ von der $\mathfrak{K}_k$-Ordnung k untersucht. Ich vermute, daß die oben formulierten Ergebnisse Spezialfälle folgender allgemeiner Sätze sind:

I. $k = 2n + 1$ ($n = 1, 2, \ldots$)

(Entsprechend wie bei den Kreisen!)

1. Es gibt sowohl $\mathfrak{K}_k$-Kurven als auch $\mathfrak{K}_k$-Bogen.

2. In jedem inneren Punkt des Bogens $\mathbf{B}_k$ von der $\mathfrak{K}_k$-Ordnung k existiert eindeutig ein links- und ein rechtsseitiges $\mathfrak{K}_k$-Schmieggebilde.

3. Sämtliche $\mathfrak{K}_k$-Schmieggebilde des Bogens $\mathbf{B}_k$ sind ineinander geschachtelt und überdecken daher den von ihnen überstrichenen Bereich der Ebene einfach.

II. $k = 2n$ ($n = 1, 2, \ldots$)

(Entsprechend wie bei den Geraden!)

1. Es gibt nur $\mathfrak{K}_k$-Bogen.

2. In jedem inneren Punkt des Bogens $\mathbf{B}_k$ existieren eindeutig ein links- und ein rechtsseitiger $\mathfrak{K}_k$-Schmiegbogen.

3. Sämtliche $\mathfrak{K}_k$-Schmiegbogen des Bogens $\mathbf{B}_k$ überdecken den von ihnen überstrichenen Bereich der Ebene zweifach.

Die Behauptungen I. 1 und II. 1 stellen die einfachsten Aussagen topologischer Natur dar, die sich über ein System von $\mathfrak{K}_k$-Kurven bzw. -Bogen machen lassen. Ich behalte mir vor, auf weitergehende derartige topologische Aussagen in späteren Mitteilungen zurückzukommen.

1) Vgl. Haupt, a. a. O.