Über den Begriff des Gebildes von endlicher linearer Ordnung im n-dimensionalen Raum.

Von Otto Haupt in Erlangen.

1.1. In einer Geometrie ist (selbstverständlich) unter anderem eine Abgrenzung und damit eine, dieser Abgrenzung dienende, Definition ihrer Gebilde, d. h. der in dieser Geometrie zu betrachtenden Punktmengen erforderlich. Bei einer solchen Definition trachtet man jeweils darnach, eine möglichst große Klasse von Punktmengen zu umfassen, für welche sich noch hinlänglich interessante Sätze ergeben; jede solche Abgrenzung trägt demgemäß unvermeidlich einen gewissen Grad von Willkür in sich. Diese Frage nach zweckmässiger Erklärung der Gebilde führt beispielsweise zu vielfach ungelösten Problemen in denjenigen Geometrien, bei welchen es sich um die Untersuchung von Punktmengen bezüglich einer vorgegebenen (Realitäts-) Ordnung[1]) handelt, wobei also die Ordnung als Wert einer monotonen (Mengen-) Funktion erscheint, die über einem gewissen Mengensystem erklärt ist und deren Werte Ordnungszahlen sind.

Wir betrachten hier speziell den Fall, daß im (euklidischen oder projektiven) n-dimensionalen Raume E_n eine Realitätsordnung erklärt ist als obere Grenze der Mächtigkeit des Durchschnittes der betrachteten Punktmenge mit den Geraden; dabei werden die Geraden als Ordnungscharakteristiken und die Ordnung selbst als $L_1^{(n)}$-*Ordnung* (im E_n) bezeichnet. Es handelt sich also für uns darum, eine *möglichst umfassende* und zugleich noch *hinreichendes Interesse bietende Klasse von Gebilden endlicher* $L_1^{(n)}$-*Ordnung zu beschreiben.* Die nach-

1) Vgl. Haupt, Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde, Monatshefte für Math. u. Phys. 46 (1937).

stehend gegebene Beschreibung, d. h. Definition, gründet sich auf den Begriff des sogenannten *Schnittpunktes* bezüglich eines Geradenbündels (vgl. Nr. **2. 2**). Nach Einsichtnahme in meinen Beweis des in Nr. **2. 2** angegebenen Darstellungssatzes stellte Herr Nöbeling die Frage, ob sich der Begriff des Schnittpunktes nicht durch den des lokalen Zerschneidungspunktes (vgl. Nr. 3) ersetzen lasse. Dies ist, wie ich zeigen konnte, in der Tat möglich und führt (im E_n) zu der im Satze der Nr. **3** formulierten Kennzeichnung der Gebilde endlicher $L_1^{(n)}$-Ordnung mit Hilfe des Begriffes Zerschneidungspunkt. Bemerkt sei noch, daß (für $n = 3$) alle „Flächen" im Sinne z. B. von Juel zugleich, wie es sein muß, Gebilde in unserem Sinne sind. — Beweise werden in vorliegender Note nicht mitgeteilt.

1.2. Die Definition des Gebildes von endlicher $L_1^{(n)}$-Ordnung (mit Hilfe des Begriffes „Schnittpunkt") und die daraus gezogenen Folgerungen dürften sich auf den Fall der $L_k^{(n)}$-Ordnung übertragen, d. h. auf den Fall der k-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten im E_n als Ordnungscharakteristiken, wobei hier $4 \leqq n$, $2 \leqq k \leqq n-2$. Dies soll in einer ausführlicheren, mit Beweisen versehenen Darstellung näher verfolgt werden. (Betr. $k = n-1$ vgl. Nr. **1. 3**). Auch dürfte diese Definition für allgemeinere Räume als den euklidischen brauchbar sein.

Hingegen benutzt, worauf Herr Nöbeling aufmerksam macht, die Kennzeichnung der Gebilde von endlicher $L_1^{(n)}$-Ordnung mit Hilfe des Begriffes „Zerschneidungspunkt" gewisse Zusammenhangseigenschaften des E_n, ist also für allgemeinere Räume nicht ohne weiteres brauchbar. Die Übertragung besagter Kennzeichnung auf den Fall der $L_k^{(n)}$-Ordnung mit $2 \leqq k \leqq n-2$ erfordert besondere Betrachtungen; Herr Nöbeling und ich beabsichtigen, die hierher gehörigen Fragen gemeinsam näher zu verfolgen.

1.3. Für den Fall $k = n-1$, d. h. der $L_{n-1}^{(n)}$-Ordnung, also der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken, ist übrigens eine sehr umfassende Gebildedefinition bereits bekannt, nämlich des Gebildes endlicher $L_{n-1}^{(n)}$-Ordnung als Kontinuum[2]). Es ist

2) Vgl. A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930) und Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Crelles Journal 167 (1932).

nicht schwer, diese Definition der unsrigen als speziellen Fall unterzuordnen, worauf hier aber der Kürze wegen nur hingewiesen werden soll.

2. 1. Im Falle der $L^{(n)}_{n-1}$-Ordnung erweisen sich[3]) die Kontinua von endlicher[4]) Ordnung als abgeschlossene Hüllen[5]) von Summen abzählbar[6]) vieler, etwa relativ einfacher Bogen, womit für die Strukturtheorie alles auf die Untersuchung solcher Bogen[7]) zurückgeführt ist. Will man etwas Entsprechendes zunächst für die $L_1{}^{(n)}$-Ordnung, so stößt man sogleich auf Schwierigkeiten. (Der Einfachheit wegen setzen wir *im Folgenden stets* $n = 3$.) Wollte man nämlich *beliebige* Kontinua $\mathfrak{K}$ von endlicher $L_1{}^{(3)}$-Ordnung zulassen, so müßte man das Auftreten z. B. auch von *Bogen* endlicher $L_1{}^{(3)}$-Ordnung in Kauf nehmen. Die Aussage, ein Bogen sei von endlicher $L_1{}^{(3)}$-Ordnung, besagt indessen recht wenig; anders ausgedrückt: Es sind höchst verwickelte Bogen endlicher $L_1{}^{(3)}$-Ordnung möglich; denn beispielsweise besitzt *jeder* einfache Bogen auf der Kugel die $L_1{}^{(3)}$-Ordnung zwei (und ist folglich sogar $L_1{}^{(3)}$-ordnungshomogen). Daher kommt eine Klassifikation der *Bogen* im E_3 mit Hilfe der $L_1{}^{(3)}$-Ordnung nicht in Frage; besteht doch die Bedeutung eines Ordnungsbegriffes gerade darin, daß mit Hilfe der — an sich sehr einfachen — Voraussetzung etwa endlicher Ordnung die (zu Grunde gelegten) Gebilde auf möglichst einfach gebaute, in gewissem Sinne auch der naiven Anschauung vertraute Punktmengen zurückführbar sind. Somit wird — unter Beibehaltung der Forderung endlicher Ordnung — hier, d. h. für den Fall der $L_1{}^{(3)}$-Ordnung, die Klasse der Kontinua zu

3) Vgl. Haupt, a. a. O.[2]), Seite 23, Nr. 1, 1.

4) D. h. von beschränkter oder wachsender Ordnung (vgl. etwa a. a. O.[1]).

5) Daß in der Strukturtheorie die Darstellung der Gebilde als abgeschlossene Hüllen von Summen (abzählbar vieler) möglichst einfacher „Bausteine“ der Natur der Sache entspricht, zeigt schon der Verteilungssatz (Vgl. a. a O.[1]).

6) „Abzählbar viele“ bedeutet hier: (keine oder) endlich oder abzählbar unendlich viele.

7) Jeder Bogen von endlicher $L^{(n)}_{n-1}$-Ordnung ist abgeschlossene Hülle einer Summe abzählbar vieler $L^{(n)}_{n-1}$-ordnungshomogener Bogen; letztere sind vermutlich identisch mit den Bogen n-ter $L^{(n)}_{n-1}$-Ordnung.

ersetzen sein durch eine andere, deren Definition, sinngemäß, außer von allgemeinen topologischen Begriffen, nur noch von dem in Rede stehenden Ordnungsbegriffe Gebrauch macht.

2. 2. Eine dahin zielende Definition habe ich bereits früher (für die $L_1^{(3)}$-Ordnung bzw. $L_1^{(n)}$-Ordnung angegeben[8]), ohne indes ihre Tragweite näher zu verfolgen; dies sei hier in Kürze nachgeholt.

Nur der einfacheren Fassung unserer Aussagen wegen machen wir im Folgenden die *Voraussetzung*, daß *die* von uns *betrachteten Punktmengen* in dem Sinne von endlicher $L_1^{(3)}$-Ordnung sein sollen, daß sie *mit allen in Frage kommenden Geraden* keine Strecken, also *nur isolierte Punkte, gemeinsam haben.*

Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein. Unter einem (relativ) *einfachen Flächenstück* verstehen wir a) jede Punktmenge $\mathfrak{F}(f)$, welche, bezogen auf geeignete (rechtwinklige) kartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3, darstellbar ist in der Gestalt $x_3 = f\,(x_1, x_2)$ mit $(x_1, x_2) \subset \mathfrak{D}$, wo $\mathfrak{D}$ topologisches Bild des abgeschlossenen Quadrates und f eindeutig sowie stetig ist über $\mathfrak{D}$; [b) jedes projektive, ganz im Endlichen gelegene Bild einer solchen Punktmenge $\mathfrak{F}(f)$.]

Ein einfaches Flächenstück heißt elementares Flächenstück, wenn für das Flächenstück eine Darstellung der in a) angegebenen Art: $x_3 = f\,(x_1, x_2)$ existiert, wobei f über $\mathfrak{D}$ sogar von *beschränkter Dehnung* ist, d, h. beschränkte partielle Differenzenquotienten besitzt (Lipschitzbedingung).

Ferner erklären wir den Begriff des Schnittpunktes[8]): Es sei $\mathfrak{H}$ eine Punktmenge des E_3, ferner P ein (nicht notwendig zu $\mathfrak{H}$ gehöriger) Punkt, weiter sei g eine, P enthaltende Gerade; schließlich sei Q ein von P verschiedener Punkt aus $g\mathfrak{H}$. Es werde nun Q als Schnittpunkt von g mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet, wenn zu *jeder* Umgebung $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\ (Q)$ von Q auf $\mathfrak{H}$ eine Nachbarschaft $N = N\ (P;\ Q,\ \mathfrak{V})$ von g gehört, sodaß für *jede* Gerade g' aus N die Menge $g'\mathfrak{V}$ nicht leer ist. (Bei Zugrundelegung kartesischer Koordinaten x_1, x_2, x_3 verstehe man dabei unter einer Nachbarschaft der Geraden g, welch letztere durch

---

8) a. a O.[2]), Seite 36, § 3.

die Gleichungen $x_\nu = p_\nu + b_\nu t$, $\nu = 1, 2, 3$, gegeben sei, etwa die Menge allei Geraden $x_\nu = p_\nu + r_\nu t$, $\nu = 1, 2, 3$, durch den Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$, für welche alle $| b_\nu - r_\nu |$, $\nu = 1, 2, 3$, hinreichend klein sind; dabei möge $b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 = 1$ festgesetzt sein).

Es sei jetzt $\mathfrak{S}$ die Menge aller zur abgeschlossenen Menge $\mathfrak{H}$ gehörigen Schnittpunkte, welche von der Gesamtheit der durch P gehenden Geraden geliefert werden. Ist dann in $\mathfrak{S}$ eine auf $\overline{\mathfrak{H}}$ offene und dichte Menge enthalten, so sagen wir: $\overline{\mathfrak{H}}$ sei (von P aus gesehen, oder) bezüglich P undurchlässig, oder auch kurz: $\overline{\mathfrak{H}}$ sei relativ undurchlässig. Ferner bezeichnen wir eine Menge $\mathfrak{M}$ als im Punkte $Q \subset \mathfrak{M}$ relativ undurchlässig, auch kurz als lokal undurchlässig, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von Q auf $\mathfrak{M}$ gibt, deren abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{U}}$ relativ undurchlässig ist bezüglich Q.

Als $L_1^{(3)}$-Gebilde erklären wir nun jede perfekte Menge $\mathfrak{M}$ des E_3, welche in jedem Punkte einer auf $\mathfrak{M}$ offenen dichten Menge sowohl von endlicher $L_1^{(3)}$-Ordnung als relativ undurchlässig ist. Dann gilt der

Darstellungssatz: *Jedes $L_1^{(3)}$-Gebilde $\mathfrak{M}$ ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Summe abzählbar vieler elementarer Flächenstücke.*

Der hier zu übergehende Beweis stützt sich, außer auf frühere Überlegungen [8], auf die Tatsache, daß in jedem Punkte P von $\mathfrak{M}$ das Kontingent [9] von $\mathfrak{M}$ nirgends dicht liegt [8] im Bündel aller Geraden durch P, und die hierdurch ermöglichte Anwendung neuerer Sätze von Herrn Roger [10].

2. 3. Die Frage nach den $L_1^{(3)}$-ordnungshomogenen Gebilden [11] wird durch obigen Satz zurückgeführt auf die Be-

9) Unter dem ($L_1^{(3)}$-) Kontingent von $\mathfrak{M}$ in P wird nach Herrn G. Bouligand die Menge aller Halbtangenten in P an $\mathfrak{M}$ verstanden

10) F. Roger, Sur la relation entre les propriétés tangentielles et métriques des ensembles cartésiens, C. R. Acad. Sci., Paris, 201 (1935), 871—873; Sur l'extension à la structure locale des ensembles cartésiens les plus généraux, des théorèmes de M. Denjoy sur les nombres dérivés des fonctions continues, ebenda 202 (1936), 377—380. Vgl. auch S. Saks, Sur quelques propriétés métriques d'ensembles, Fund. math. 26 (1936), 240.

11) Vgl. a. a. O. [1]).

stimmung der *$L_1^{(3)}$-ordnungshomogenen elementaren Flächenstücke.* Damit erscheint die Möglichkeit gegeben, die Erledigung jener Frage allgemeiner als bisher[12]), nämlich *ohne Zuhilfenahme von einschränkenden Differenzierbarkeitsannahmen* in Angriff zu nehmen. Auch dies bleibe künftiger Untersuchung vorbehalten.

3. Es sei $\mathfrak{A}$ wieder eine perfekte Menge des E_3 und P ein Punkt von $\mathfrak{A}$. Dann heiße $\mathfrak{A}$ in P lokal-zerschneidend, und es heiße P lokaler Zerschneidungspunkt von $\mathfrak{A}$, wenn für jede (hinreichend kleine) Umgebung $\mathfrak{U}$ von P im E_3 die Menge ($\mathfrak{U}$-$\mathfrak{A}$) mindestens zwei (mehrpunktige) Komponenten besitzt. Ersichtlich besitzt jedes (gemäß Nr. **2. 2** definierte) Gebilde $\mathfrak{G}$ eine auf $\mathfrak{G}$ dichte offene Menge von lok. Zerschneidungspunkten. Es gilt aber auch, wie hier ohne Beweis angegeben sei, das Umgekehrte, d. h.: Ist $\mathfrak{A}$ in jedem Punkte einer auf $\mathfrak{A}$ dichten, offenen Menge sowohl von endlicher $L_1^{(3)}$-Ordnung als lokal-zerschneidend, so ist $\mathfrak{A}$ ein Gebilde. Also:

Satz: *Es sei $\mathfrak{M}$ eine perfekte Menge (im E_3). Dann und nur dann ist $\mathfrak{M}$ ein $L_1^{(3)}$-Gebilde, wenn $\mathfrak{M}$ eine auf $\mathfrak{M}$ offene dichte Menge von lokalen Zerschneidungspunkten enthält, die zugleich sämtlich Punkte endlicher $L_1^{(3)}$-Ordnung von $\mathfrak{M}$ sind.*

---

12) Haupt, Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n, Crelles Journal 176 (1937), 95 ff.