Sitzungsberichte

der

physikalisch-medicinischen Societät

zu

ERLANGEN.

6. Heft.

November 1873 bis August 1874.

Erlangen, 1874.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von E. Th. Jacob.

I. Geschäftliche Mittheilungen.

Die Societät besteht zur Zeit (August 1874) aus 32 ordentlichen Mitgliedern, nämlich den Herren:

Bäumler Christian Dr., Professor.
Böttiger August, Apotheker.
Dorsch Gustav Dr., Bezirks-Arzt.
Filehne Wilhelm Dr., Assistenzarzt.
v. Gerichten Eduard Dr., Assistent.
Gerlach Joseph Dr., Professor.
v. Gorup-Besanez, Eugen Dr., Professor.
Guttenberg Emil, Apotheker.
Hagen Fr. W. Dr, Professor.
Heineke Walther Dr., Professor.
Hetzel Wilhelm Dr., pract. Arzt.
Hent Gottlieb Dr., Assistent.
Hilger Albert Dr., Professor.
Karrer Ferdinand Dr., Assistenzarzt.
Klein Felix Dr., Professor.
Lommel Eugen Dr., Professor.
Maurer August Dr, pract. Arzt.
Michel Julius Dr., Professor.
Nebinger Lothar Dr., Assistenzarzt.
Pfaff Friedrich Dr., Professor.
Reess Maximilian Dr., Professor.
Reinsch Hugo Dr., Rector der Gewerbschule.
Rosenhauer Wilh. Gottl. Dr., Professor.
Rosenthal Jsidor Dr., Professor.
Rosshirt Heinrich Dr., Chemiker.
Schröder Carl Dr., Professor.
Selenka Emil Dr, Professor.
Stiller Leopold, Apotheker.
Trott Fr. W. Dr., Professor.

Ullrich, Heinrich Dr., Assistenzarzt.
Wintrich, Anton Dr., Professor.
Zenker, F. Alb. Dr., Professor.

Neu beigetreten sind der Societät während des abgelaufenen Geschäftsjahres die Herren:

Dr. Filehne, Dr. Heut, Dr. H. Ullrich, Dr S. Wolffberg, Professor Selenka.

Durch Wegzug verlor die Gesellschaft die Herren:

Dr. Acker, Professor Ehlers, Dr. Günther, Dr. Kramers, Dr. Mayer, Dr. Stich, Dr. Wolffberg, Professor v. Ziemssen,

durch Austritt:

Herrn Professor Dr. Leupoldt.

durch den Tod:

Herrn Apotheker Schmidtbüttner.

Der Vorstand der phys. med. Societät besteht gegenwärtig aus den Herren:

I. Director: Prof. Lommel.
II. » Prof. Rosenthal.
I. Secretär: Prof. Bäumler.
II. » Prof. Hilger.
Cassier: Dr. H. Rosshirt.

Verzeichniss der von August 1873 bis August 1874 für die Gesellschaft eingegangenen Druckschriften.

Berichte der chemischen Gesellschaft zu Berlin.
a. 1873. Jahrg. 6, Heft 13 bis 20.
„ 1874. „ 7, „ 1 „ 11.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Basel. Bd. 5, Heft 4, Bd. 6, Heft 1.

Akademie der Wissenschaften zu München. Skizzen auf dem Gebiete der Natur und Technik von Aug. Vogel.

Naturwissenschaftlicher Verein zu Bremen. 1873, Band 3, Heft 4; Band 4, Heft 1, mit Beilage 3.

Sitzungsberichte des Vereines von Aerzten zu Steiermark. Jahrg. X. 1872 und 1873.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Germanisches Museum. 1873 Jahrg. 20. 12 Hefte.

Bulletino dell' associazione dei naturalisti e medici. Napoli, 1872, Heft 9.

Bulletin de la Société impériale d. naturalistes à Moscou. 1873, No. 1. 2. 3.

Wochenschrift für Thierheilkunde und Viehzucht.
a. 1873. Jahrg. 17, No. 27 bis 52.
„ 1874. „ 18, „ 1 „ 26.

Statuten des Lesevereins der Studenten in Wien.

Oesterreichische Vierteljahrsschrift für Veterinärkunde. Band 39. Heft 2 — Band 40 Heft 1. 2 — Band 41 Heft 1.

Jahresbericht des physikalischen Vereines zu Frankfurt a/M. 1871—1872—1873.

Bericht der St. Gallen'schen Gesellschaft. 1871—1872.

The Sanitary Commission in the Valley of the Mississippi.

Archives of science and transactions of the Orleans County Society. Vol. 1—5.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien.
1872. Band 65. 66. 67 u. 68. Heft 1 u. 2, Abth. II.
„ „ 65. 66 u. 67 „ 1—5, „ III.

Aerztlicher Verein zu Frankfurt a/M.
1. Jahresbericht über die Verwaltung des medic. Wesens. 1872. Jahrg. 16.
2. Statistische Mittheilungen. 1872.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in Chemnitz. 4. Bericht. 1871 bis 1873.

Geschenk von Prof. Klein. Alfred Clebsch. Leipzig, 1873.
Geschenk von Dr. S. Günther.
1. Ueber ein Problem der höheren Geometrie.
2. Studien zur theoretischen Photometrie.
3. Mathematische Betrachtungen über eine Stelle bei Plinius.
4. Della Teoria dei Poligoni stellati; trad. d. Sign. Alf. Sparagna.
5. Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche.
6. Allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche.

Revista de Anthropologia. Madrid, 1874, Heft 4.
Fragmenta Phytographiae Australiae, 50 bis 59.
Magazin für gesammte Thierheilkunde von Gurlt und Hartwig. Jahrg. 39 Heft 3 bis 8.
Musée Botanique de Leiden, par Suringar.
Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag. 1875, No. 5 bis 8. 1864, No. 1 bis 3.
Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Brünn. 1872, Bd. XI.
Bulletin de la Société de sciences naturelles de Neuchâtel. 1873, Band 9, Heft 3.
Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau. 1872.
Gazetta Chimica Italiana. 1875, No. 5 bis 10. 1874, No. 1 bis 4.
Verhandlungen der naturhistorischen Vereine der preuss. Rheinlande. 1872, Jahrg. 29, Heft 1 u. 2.
Deutsche Vierteljahrsschrift für Zahnheilkunde. Jahrg. 14, Heft 1 bis 3.
Universität Christiania.
1. Jacob Huborg, 3 u. 4 Provevorlesung.
2. Om Dodeligheden idet forste Leveaar of N. Kiaer.
3. Generalberichte Gaustadt, 1870 u. 1871.
4. Norges offic. Statistik. 1869 u. 1870, No. 4.
5. Provevorlesung til Concurrence om den medicin. Professorpost. Marts 1873.

Geschenk von P. Niemeyer. — Von Düring.
Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich. Jahrg. 17, Heft 1 bis 3.
Naturforschender Verein zu Riga. Jahrg. 20.
Nature. Vol. 9, No. 210 bis 227.
Smithsonian Report. 1871.
Bulletin of the Essex Institute. Vol. 4.
Mineralogischer Jahresbericht von Besnard. 1873.
Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin. 1873.
Elemente des ersten Kometen vom Jahre 1830 von Dr. Schulze. Kgl. sächs. Akademie der Wissenschaften.
Jaques Quetelet, Funérailles de Lambert Adolphe Quetelet, 1874.
Annales del Museo publ. de Buenos Aires. 1872. 1873.
Correspondenzblatt des zoolog.-mineral. Vereins zu Regensburg. Jahrg. 27.
Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles, par Baumhauer. 1873 F. VIII. Lief. 3 u. 4.
Videnskab. Selsk. Kongelige Danske. 1872—1873, No. 1 u. 2.

Die Pflanzenwelt Norwegens, von Dr. Schubeler.
Indice degli autori e delle materie della Gazetta Chimica. Vol. II. 1872.
Schriften der Königl. physik.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 3. Abth. 2.
Deutscher Verein für öffentl. Gesundheitspflege. Bericht über die erste Versamml. 1873. 15. u. 16. September.
Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Dresden. Oktober 1872 — Juni 1873.
Verhandlungen des botan. Vereins zu Brandenburg. 1872, Jahrg. 14. 1873, Jahrg. 15.
Naturforschende Gesellschaft zu Danzig. 1873. Band 3, Heft 2.
Jahresbericht des naturwissenschaftl. Vereins zu Lüneburg. 1870—1871.
Geschenke von Howard.
1. Sur l'origine du Quinquina. Colombie.
2. Genus Cinchona.
Verhandlungen der physik.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. Bd. 4, H. 2. 3. 4; Bd. 5, H. 1 bis 4; Bd. 6, H. 1 bis 4.
Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins von Steiermark. 1873.
Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Band 67, Heft 1 bis 3. Abtheilung Mathematik und Naturwissenschaften.
Geschenk von Prof. Wislicenus. Streckers Lehrbuch der Chemie. 6. Aufl. 1. Lief.
Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. Bd. 3, H. 3 u. 4.
Archiv für Naturkunde von Liv-, Cur- und Estland. Bd. 5, Lief. 23. Bd. 7, Lief. 1.
Pathologie und Therapie der musculären Rückgratsverkrümmungen, von Ulrich. 1874.
Comptes rendues des sciences de la Société de Biologie. 1873, Tome 1 u. 2.
Verhandlungen der Berliner medic. Gesellschaft. 1871. 1872. 1873. Bd. IV.
Berichte über die Verhandlungen der Königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1873, No. 1 bis 4. Mathematisch-physikalische Klasse.
Zoologisch-botanische Gesellschaft zu Wien. 1873, Bd. 23.

II. Bericht über die Sitzungen der Societät.

Im Folgenden theilen wir den Hauptinhalt der in den Sitzungen des abgelaufenen Jahres gehaltenen Vorträge theils nach den vom Vortragenden selbst eingereichten Aufzeichnungen theils, soweit solche nicht vorliegen, nach den kurzen Notizen des Protokollbuches mit.

Sitzung vom 10. November 1873.

Herr Prof. **Ehlers**

berichtet über den Bau und Inhalt alter Grabhügel in der Nähe von Muggendorf in der fränkischen Schweiz.

In der Umgegend des Dorfes Engelhardtsberg bei Muggendorf in der fränkischen Schweiz liegt auf dem Plateau zerstreut, da wo der Boden nicht in Ackerland umgewandelt ist, eine grössere Anzahl von Hügelgräbern theils einzeln theils in Reihen beisammen. Es gehören diese Gräber in die Categorie jener, von denen Gümbel *) einen umfassenden Bericht in seinem Aufsatz über »die ältesten Kulturüberreste im nördlichen Bayern« gegeben hat, und die, im Volksmunde als »Heidengräber« bezeichnet, seit längerer Zeit bekannt eben so lange auch zu Nachgrabungen verlockt haben zum Theil durch die Hoffnung auf reiche Schätze, theils zur Befriedigung der Neugierde und zur Unterhaltung, in wenigen Fällen nur aus einem so regen wissenschaftlichem Interesse, dass über den gemachten Befund auch eine für weitere Kreise bestimmte Mittheilung gegeben wurde **).

*) Gümbel, Untersuchungen über die ältesten Kulturüberreste im nördlichen Bayern in Bezug auf ihre Uebereinstimmung unter sich und mit den Pfahlbauten-Gegenständen der Schweiz. Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1865. Bd. I pag. 66.

**) Die Literatur über diesen Gegenstand ist eine sehr zerstreute, oft schwer zugängliche. Hierhin gehört das Folgende, dessen Kenntniss ich

Als ich die erste Kenntniss von diesen Gräbern erhielt, machte ich auch zugleich die Erfahrung, dass mehrere von ihnen in wenig sorgfältiger Weise geöffnet, die gefundenen menschlichen Reste zum grossen Theil unberücksichtigt geblieben und zerstreut umherlagen, während nur die wenigen gefundenen Metallsachen der Aufbewahrung werth gefunden waren. Da entstand bei mir der Wunsch, den ganzen Inhalt eines Grabes einer möglichst eingehenden Untersuchung zu unterwerfen, und es gelang mir das auch allerdings nur in einem Falle ganz durchzuführen, denn meine erste Ausgrabung war, da ich die Arbeit derselben unterschätzt hatte, mit dem Einbruch des Abends nicht vollendet, und als ich erst nach Ablauf einiger Zeit die damals unterbrochene Arbeit wieder aufnehmen konnte, war mittlerweile an dem Grabhügel von anderer Seite ein weiteres Stück aufgewühlt, so dass in diesem Falle meine eigne Anschauung eine nicht ganz vollständige war.

Das äussere Ansehen aller hier von mir gesehenen und als solcher constatirten Grabhügel war sehr ähnlich; es war stets ein von kreisförmiger Basis sich erhebender schwach gewölbter Hügel, auf dessen Scheitel in einigen Fällen eine schwache muldenförmige Vertiefung lag; auf der ganzen Erhebung waren in das Erdreich Steine von ungleicher Grösse eingesenkt, meistens so, dass man wohl eine concentrische Anordnung dieser Steine erkennen konnte. Die Grösse dieser Hügel war wenig verschieden; ich brauchte zum Ueberschreiten des einen in seiner grössten Ausdehnung 13 Schritte (etwa gleich 9 M.), zum Umschreiten der Basis 45 Schritte (etwa gleich 31 M.)

Den Bau dieser Gräber fasse ich nach meinen Beobachtungen folgendermassen auf: Der Grabhügel besteht aus der eigentlichen die beigesetzten Theile bergenden Grabhöhle, welche den

---

zum Theil Herrn Professor Vogel verdanke: Jahresber. d. histor. Vereins für Oberfranken u. Bayreuth für 1842/43 pag. 16—27. 1843/44 pag. 9—27. 1844/45 pag. 8—13. 1845/46 pag. 9—27. Archiv f. bayreuthische Geschichte und Alterthumskunde Bd. I Thl. 1. 1828 pag. 58. — Archiv f. Geschichte u. Alterthumskunde von Oberfranken Bd. I Heft 1. 1838 pag. 42. Heft 2. 1840. pag. 22. — Archiv f. Geschichte u. Alterthumskunde d. Obermainkreises. Bd. I. Heft 3. 1832. pag. 79. Bd. II Heft 3. 1836 pag. 89. — Dreissigster Jahresbericht des histor. Vereins in Mittelfranken. Ansbach 1862. 4. Beilage V. P. Reinsch, Beschreibung der Funde in altdeutschen Grabhügeln bei Heroldsberg u. Walkersbrunn. Mit 3 Taf.

centralen Theil des Hügels einnimmt, und aus einer um deren Umfang gelegten den äusseren abfallenden Theil des Hügels bildenden compacten Umfassung. Beide Theile sind aus grösseren und kleineren Steinen aufgebaut; Alles gleichmässig von Erde erfüllt, deren Hinwegräumen die Ausgrabung sehr erschwert, da aus ihr nur mit grosser Vorsicht die bestatteten Theile hervorgehoben werden müssen, während sie zugleich den Aufbau des Grabes verdeckt. Die Grabhöhle stellt einen Kessel vor, dessen Bodenfläche entweder auf dem ursprünglichen Niveau des Platzes steht oder durch eine geringe Ausgrabung etwas tiefer als das ursprüngliche Niveau gelegt ist; man trifft in ihr entweder eine Lage grösserer Felsblöcke oder die nur geebnete ursprüngliche Bodenfläche. Die Seitenwände des Grabkessels sind deutlich aufgemauert in der Weise, dass kleinere Steine, welche ganz roh oder nur wenig behauen zu sein schienen, über und in einander gefügt wurden, ohne Verwendung eines bindenden Mörtels; Lücken, welche zwischen diesen Steinen bestehen bleiben mussten, waren mit kleinen scherbenförmigen Steinchen ausgestopft. — Unverkennbar war an einigen Stellen die Anwesenheit kleinerer Aufmauerungen im Inneren des Grabkessels, theils von der Grundfläche ausgehend, theils an die Seitenwand angelehnt; wo sie sich nachweissen liessen, immer als Umfassung einer Leiche.

Am meisten Schwierigkeiten bereitet die Erkenntniss, in welcher Weise die Decke des Grabkessels bereitet sei; vorwiegend sind zu ihrer Herstellung platte Steine verwendet, die dann über dem mittleren Theile des Kessels, vermuthlich durch eine Einsinkung der Decke, auf ihren Kanten mit den Flächen einander parallel in der Erde stehen; bisweilen ist diese Decke offenbar nur von einer Lage von Steinen gebildet gewesen, in anderen Fällen lagen aber so viel Steine übereinander, dass, auch wenn durch eine Verschiebung diese zum Theil übereinander gehäuft sein mögen, doch stets mehr als eine einzige Schicht vorhanden gewesen sein muss.

Ich hatte ursprünglich die Ansicht, es stelle diese Decke des Grabkessels einen Gewölbbau dar, so dass unter der Wölbung desselben die Leichen beigesetzt seien, später aber die Höhlung des Gewölbes durch vom Regen hineingewaschene Erde ausgefüllt, das Gewölbe selbst eingestürzt sei; dabei konnte ich mir allerdings von der Art und Weise, in welcher die Steine zum Gewölbe zusammengefügt seien, keinerlei klare Vorstellung machen. Beim vollständigen Aufdecken des zuletzt geöffneten Grabhügels musste ich diese Anschauung denn auch fallen lassen, besonders mit Rücksicht auf die grosse Menge der das Innere des Hügels füllenden Erde; und es schien mir danach wahrscheinlicher, dass der Grabkessel nach der Bestattung der Leichen mit Erde gefüllt, und schliesslich über den gefüllten Kessel eine Lage von Steinen, die von der Erde getragen wurden, gelegt sei; vielleicht mögen auch die kleineren Abtheilungen im Inneren des Grabhügels besonders gedeckt gewesen sein. Dass die Hügel Einsenkungen auf ihrer Wölbung zeigen, spricht noch nicht unmittelbar dafür, dass es sich um eingesunkene Hohlgewölbe handele; solche Einsenkungen können eben so gut an den mit Erde gefüllten, mit einer Steinschicht gedeckten Hügeln stattgefunden haben.

Die den Grabkessel aussen ringsumgebende, den seitlichen Abfall des ganzen Hügels bildende Umwallung war aus grösseren über einander gewälzten Steinblöcken, deren Zwischenräume Erde füllte, gebildet.

Die von mir selbst geöffneten Grabhügel, sowie diejenigen, welche ich zum Theil geöffnet vorfand, enthielten alle die Scelettheile mehrerer Menschen, die in keinem Falle Spuren einer Verbrennung zeigten. Alle Scelette waren mehr oder weniger zertrümmert, am besten erhalten waren immer die Schaftstücke der langen Röhrenknochen, sowie die Hand- und Fusswurzelknochen; die Schädel sämmtlich zertrümmert; und fast immer liess sich hier zumal nachweisen, wie die einsinkenden Steine der Grabdecke diese Zertrümmerung herbeigeführt hatten. Meistens lagen die Knochen ungefähr in der Lage, in welcher sie im natürlichen Zusammenhang des Körpers stehen, so dass man dann die Art der Leichenbestattung erkennen konnte; doch kamen auch erhebliche Dislocationen vor, und solche mögen das eine Mal bedingt sein durch die stärkeren Wurzeln holziger Gewächse, die bis in die Tiefe der Grabeserde sich erstreckten, dabei zwischen die zertrümmerten Knochen eindrangen, und diese nicht nur von einander entfernten, sondern sie mit den Wurzelfasern umspinnend zugleich mehr oder minder stark corrodirten; Knochenstücke, welche ich aus derartigen Wurzelfasern herauslöste, sahen bisweilen aus, wie mit rohen Messern bearbeitet. Andere Verschiebungen der Scelettheile von einander mögen mit dem Einsinken des Grabhügels entstanden sein. Zu Verschleppungen im Inneren der Erde, zumal von kleineren Theilen, gibt endlich jedenfalls auch die Thätigkeit von Engerlingen Veranlassung, welche vielfach in dem Erdreich gefunden wurden.

Nach dem, was ich gesehen habe, sind die Leichen theils liegend ausgestreckt, theils in hockender Stellung beigesetzt. In den beiden Hügeln, in welchen ich dieses Verhältniss constatiren konnte, fanden sich die ausgestreckt niedergelegten Scelette in der Mitte des Grabkessels; eine besondere Lage nach den Himmelsrichtungen war nicht zu bemerken, in dem einen Grabe lag das eine Scelett im Allgemeinen in nord-südlicher, im anderen in ost-westlicher Richtung; das eine vollständig in Rückenlage grade ausgestreckt, während bei dem anderen der Schädel mit dem Gesichtstheil seitwärts und etwas abwärts gewendet, die Schenkelbeine gekreuzt waren, das ganze Scelett mehr in einer Seitenlage sich befand. Dass Leichen über einander geschichtet begraben seien, war nirgends zu erkennen, mit Ausnahme des einen Falles, dass in dem zuletzt aufgedeckten Grabe auf der Brustgegend der ausgestreckt liegenden Leiche eines Erwachsenen sich die Scelettheile eines etwa zweijährigen Kindes fanden. Wohl kamen beim Aufdecken eines Grabes schon in den oberflächlichsten Theilen zerstreute menschliche Knochen mit zum Vorschein; allein ihrer waren zu wenig, als dass man daraus hätte auf eine oberflächlichere Leichenschicht schliessen können, vermuthlich waren es durch irgend einen Umstand zerstreute Knochen. Es bleibt der Umstand sichergestellt, dass in der Mitte des Grabkessels die Leichen in ausgestreckter Lage beerdigt waren. Daneben finden sich nun am Umfange des Grabkessels beigesetzte Scelette in hockender Stellung; in mehreren Fällen liess sich dieses bei einer vorsichtigen Abräumung der Erde ganz sicher feststellen, in anderen Fällen war es nur daraus zu erschliessen, dass die offenbar einem Scelette angehörigen Knochen auf einem Haufen über, zum Theil auch durcheinander lagen. War das der häufigere Fall, dass um die in der Mitte des Grabes ausgestreckt liegenden Scelette herum Scelette in kauernder Stellung sich fanden, so habe ich doch auch in einem Falle beim Ausgraben ein Bild bekommen, als sei eine Leiche ausgestreckt, aber gleichsam der inneren Kesselwand angedrückt beerdigt. Ueberblickt man die ganze Anordnung der Scelette, so scheint es, als seien die Leichen, ohne übereinander geschichtet zu werden, mit möglichster Ausnutzung des Innenraumes eines Grabkessels beigesetzt.

Darüber, ob diese Leichen etwa gleichzeitig, oder nacheinander bestattet seien, ist eine Entscheidung nicht zu geben; wenn ich mir aber vorstelle, dass im Inneren eines Grabkessels die einzelnen Leichen in kleineren von Steinen umfassten Räumen niedergelegt, und dann etwa auch mit Erde bedeckt seien, so scheinen mir aufeinanderfolgende Beerdigungen der einzelnen Leichen nicht unwahrscheinlich, und es mag dann nach Anfüllung des ganzen Grabes eine gemeinsame Decke über den Grabkessel gewölbt sein. Eine früher wohl ausgesprochene Ansicht, dass ein Theil der hier beigesetzten Leichen Menschen angehörten, welche am Grabe geopfert und mit bestattet seien, ist an diesen Gräbern durch gar nichts zu erweisen; und schon die Häufigkeit dieser Gräber spricht gegen eine derartige Anschauung.

Soweit ich an den Sceletten das erkennen konnte, sind in ein und demselben Grabe Leute ungleichen Alters bestattet; das zuletzt von mir aufgedeckte Grab wäre dagegen wohl als ein Kindergrab zu bezeichnen; denn in ihm waren nach den bei der vollständigen Ausgrabung erhaltenen Unterkiefern zehn Personen bestattet, von denen drei erwachsen, die sieben übrigen Kinder gewesen waren. Und zwar lag das Scelett eines Erwachsenen in der Mitte des Grabkessels ausgestreckt, über ihm in der Brustgegend die Reste eines zwei- bis dreijährigen Kindes, während die übrigen Scelette der etwa 7—13- oder 14-jährigen Kinder im Umfang des Kessels in hockender Stellung sich fanden.

Ob die Gräber für Männer oder Weiber ausschliesslich bestimmt gewesen sind, habe ich bis jetzt nicht erkennen können.

Die Scelette der erwachsenen Personen liessen im Allgemeinen den Schluss zu, dass sie von grossen muskelkräftigen Leuten herrühren; allein es ist denn doch die Zahl der Scelette, an welchen dieses hervortritt, eine zu geringe, um daraufhin einen allgemein gültigen Ausspruch über die Leute jener Zeit, aus welcher die Gräber stammen, thun zu können. Eine genauere auf Messungen gestützte Darstellung der Scelette bleibt einem anderen Orte vorbehalten; nur einiges möchte ich kurz erwähnen. Die Schädel der Erwachsenen nähern sich der dolichocephalen Form, besonders durch die starke Entwicklung des Hinterhauptes; einige sind auffallend dickwandig und schwer; die Näthe überall erhalten. Ganz allgemein finde ich gross entwickelte Stirnhöhlen. Der Unterkiefer ist in einigen Fällen auffallend breit. Als eine Eigenthümlichkeit will ich noch die starke Entwicklung einer

Spina mentalis interna hervorheben, die als zwei- oder dreizackiger Gabelvorsprung vorhanden war; vielleicht handelt es sich hier um eine besondere Familien- oder Stammeseigenthümlichkeit. Die Extremitätenknochen zeigten meistentheils starke Muskelrauhigkeiten und Ansatzpunkte; am Oberarmbein war der Kopf ziemlich stark nach rückwärts gewendet. Und es mag zuletzt erwähnt werden, dass in allen Schädeln der Erwachsenen die Kronen der Zähne ungewöhnlich stark abgeschliffen waren; dabei ist es nicht ohne Interesse, dass nach einer Beobachtung, deren Mittheilung ich Herrn Prof. Michel verdanke, bei den jetzigen Bewohnern der Gegend, in welcher die Gräber sich finden, starke Abschleifungen der Zahnkronen gleichfalls häufig gefunden werden.

Ich komme zu dem weiteren Inhalt der Gräber; und möchte da vorausschicken, dass mir in einem Grabe, bei dessen Eröffnung ich selbst nicht zugegen war, die angeblichen Spuren einer Brandstätte gezeigt wurden; von der Anwesenheit verkohlter Holzstücke war ich leicht überzeugt, nicht aber davon, dass es sich um eine wirkliche Brandstätte handle. Bei den in meiner Gegenwart geöffneten Grabhügeln habe ich nichts Aehnliches gefunden.

Thierreste fanden sich in einem Falle beim Abräumen der oberen Schichten, welche den Grabkessel deckten. Davon habe ich bis jetzt mit Sicherheit nur die Zähne aus dem Oberkiefer eines Schweines erkannt; da mir für die Feststellung der Schweinsrace das nöthige Vergleichungsmaterial fehlte, so hatte Herr Professor v. Siebold in München auf meine Bitte die Güte, die Bestimmung vornehmen zu lassen, und konnte mit Sicherheit feststellen, dass die Zähne vom Wildschwein herrühren, somit keiner domesticirten Race angehörten.

In dem Grabe, welches ich als Kindergrab bezeichnete, fand ich zwischen den Scelettresten eines Kindes zwei Fruchtkerne, beide oberflächlich kohlenartig geschwärzt. Ich bezeichne sie nach der Bestimmung, welche ich meinem Collegen, Herrn Prof. Rees verdanke, als Kerne einer Schlehe und Haferschlehe. Letzterer stimmt mit den in Pfahlbauten gefundenen gleichen Kernen überein, soweit die vorliegenden Abbildungen eine solche Vergleichung zulassen. So viel ich erfahren habe, ist zur Zeit noch von keinem Botaniker der gewiss lohnende Versuch gemacht, die unter ähnlichen Verhältnissen gefundenen Kerne einer genaueren vergleichenden Untersuchung zu unterwerfen.

Ziemlich häufig fanden sich in der Erde der Gräber gebrannte Thonscherben, wahrscheinlich Urnenscherben; dreierlei Arten waren darunter zu unterscheiden: solche die aus einer gleichförmigen braunen Masse bestanden; andere bei denen nur die eine Fläche oder die ganze Masse schwarz gefärbt war, und schliesslich solche, die auf der Bruchfläche eine schwarz gefärbte und eine gleichdicke, rothe Schicht zeigten, beide von kleinen weissen, eingesprengten Stückchen durchsetzt. Die Scherben lagen stets vereinzelt, und es waren ihrer so wenige, dass es unwahrscheinlich erscheinen musste, dass sie von ganzen mit den Leichen beigesetzten Gefässen herrührten; aus der geringen Wölbung der Scherben könnte man den Schluss auf grosse Gefässe ziehen. Es wäre möglich, dass diese Scherben eine ähnliche unbekannte Bedeutung gehabt haben, wie die häufig daneben vorkommenden kleinen flachen scherbenförmigen Steinstücke.

Ich habe schliesslich zu berichten, dass in den Gräbern Bronze- und Eisensachen vorkommen. Aus dem Kindergrabe erhielt ich folgende Gegenstände. In der Halsgegend der ausgestreckt liegenden Leiche fanden sich zwei eiserne, vermuthlich zu einer Fibula zusammengehörige Stücke; die Spange und der Knopf der Fibula war ganz einfach. Etwa auf der Brustgegend derselben Leiche kam in der Erde der 2 Cm. dicke Knopf einer Nadel zu Tage, deren im unteren Theile abgebrochener Schaft eisern ist, während die obere Hälfte des Knopfes eine Decke von Bronze zeigt, auf welcher ein geometrisches Ornament gravirt ist. Später fand sich zur Seite des Kopfendes desselben Scelettes, doch in etwas grösserer Entfernung, als dass die Zugehörigkeit zu dieser Leiche ganz sicher gestellt wäre, ein aus Bronzeblech getriebener 29 Mm. weiter Ohrring (?), der an einem Theil seines Umfanges ein 9 Mm. breites dünnes hohl getriebenes Blech darstellt, welches, wie es sich ringförmig schliesst, sich verschmälert, wobei dann das eine Ende blechförmig bleibt, während das andere als nadelförmig zugespitztes Drahtende ausläuft. Bruchstücke eines zweiten, offenbar gleichen Ringes, wurden in der Erde vertheilt gefunden, ohne dass ihre ursprüngliche Lagerung sich feststellen liess. — Ein einfacher aus Bronze gebildeter 5 Mm. dicker und 5 Cm. weiter Ring wurde, wohl jedenfalls in seiner ursprünglichen Lage, die Armknochen des Vorderarmes eines etwa 7 jährigen Kindes umfassend gefunden. — Neben Kindersceletten fanden sich schliesslich mehrere kleine von Kupfer- oder Bronzedraht gebildete, etwa 2 Mm. dicke und 1 Cm. weite

Ringe, die insofern unterschieden waren, als die beiden gegeneinander stossenden Drahtenden bei den einen gerade abgeschnitten waren, während bei den anderen das eine Ende zugespitzt, das andere gerade abgestutzt war. Aus ihrer Lage zu den Sceletten liess sich aus ihrer etwaigen Verwendung kein Schluss ziehen. Es konnten Fingerringe und Ohrringe, aber auch Kleiderschmuck gewesen sein. — Bemerken will ich hier noch, dass mir ein einem ähnlichen Hügelgrabe derselben Gegend entnommener Bronzering von der Grösse eines Armringes gezeigt wurde, der mir dadurch auffallend war, dass seine beiden im Ring geschlossenen Enden übereinander gelegt, und durch ein Niet verbunden waren. Auch ein Bronzeschwert sollte in einem der Hügel gefunden sein.

Vergebens bin ich bemüht gewesen, Spuren irgend einer Bekleidung der Leichen noch aufzufinden; weder auf der Oberfläche der Knochen, noch in den Erdmassen, welche die Scelette zunächst umhüllten, liess sich, auch nicht mit Hülfe von Vergrösserungsgläsern, irgend ein Rest oder auch nur ein Abdruck eines Gewebes, welches zur Kleidung etwa gedient hätte, erkennen. Es würde jedoch meiner Ansicht nach immer auf diesen Punkt zu achten sein, da sich möglicherweise andere Gräber mehr conservirend erweisen könnten.

Ich will schliesslich erwähnen, dass ich nirgends den Einfluss eines christlichen Cultus auf die Art der Beisetzung der Leichen beobachten konnte.

Nach dem gleichzeitigen Vorkommen von Bronze und Eisen in den Gräbern wird man geneigt sein, ihre Entstehung in die sogenannte Bronzezeit, vielleicht auch in eine späte Periode derselben zu verlegen. Damit dürfte aber sehr wenig gewonnen sein. Schon aus der oben angeführten Arbeit Gümbel's ergiebt sich, dass der Inhalt der Gräber ein sehr mannigfaltiger ist; würde man diesen für eine Zeitbestimmung zu Grunde legen, so würde danach die Entstehung der in Nordbayern verbreiteten Hügelgräber sehr ungleichen Zeiten angehören. Allein ich glaube, dass wir noch keineswegs in der Lage sind, ein allgemein umfassendes Urtheil über die Bedeutung dieser Gräber für die Anthropologie und die Geschichte abzugeben; dass hier vielmehr erst möglichst genaue Einzeluntersuchungen und nachfolgende Vergleichungen darlegen müssen, in wie weit etwa locale Verhältnisse die eine oder andere Art des Gräberbaues begünstigt oder die Wahl der mit den Leichen beigesetzten Gegenstände beeinflusst haben mögen; oder ob die in allen diesen Gräbern erhaltenen menschlichen Reste Anhaltspunkte gewähren, über die Zusammengehörigkeit der in ihnen Bestatteten etwa auch über ihre Beziehung zu einem bestimmt erkennbaren Stamm oder einer Völkerschaft (Deutsche oder Wenden, Slaven?) ein Urtheil zu gewinnen. Dabei wäre jedenfalls eine Vergleichung dieser Scelette mit den heut an den gleichen Orten lebenden Menschen nicht zu vernachlässigen. — Zur Zeit dürften derartige Gräber noch so zahlreich vorhanden sein, dass eine umfassende Untersuchung derselben Aussicht auf grösseren Erfolg versprechen könnte. Allein eine solche Untersuchung kann nicht von einem Einzelnen, sondern muss von einer Vereinigung mannigfaltiger Kräfte in Angriff genommen werden. Möge das bald erfolgen, bevor bei dem jetzt weit verbreiteten Interesse an dem Gegenstande einseitig ausgeführte, meistens auch unbekannt bleibende Ausgrabungen das für die Sicherstellung unserer Kenntniss werthvolle Material zersplittern.

Hierauf sprach

Herr Prof. **Klein**

über eine Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf Raumgeometrie.

Man erhält ein eigenthümliches Princip zur Uebertragung von Sätzen der Ebene auf den Raum, wenn man die Riemann-sche Repräsentation einer complexen Variabeln auf der Kugelfläche mit der projectivischen Betrachtung der Gebilde zweiten Grades verbindet. Dasselbe soll im Folgenden kurz bezeichnet und insbesondere auf den Pascal'schen Satz angewendet werden.

Hesse hat bekanntlich eine Methode gegeben (Borchardt's Journal Bd. 66), um Sätze der Ebene auf die gerade Linie, algebraisch ausgedrückt, auf das Werthgebiet einer einzelnen, im Sinne der linearen Invariantentheorie betrachteten, Variabeln zu übertragen. Man lasse nämlich jeder geraden Linie der Ebene das Punktepaar entsprechen, in welchem sie einen festen Kegelschnitt schneidet, und beziehe den Kegelschnitt durch stereographische Projection auf eine feste Gerade. Die Punktepaare der Geraden werden so die Bilder der Linien der Ebene, und die ebene Geometrie ist mit der Geometrie der Geraden in Verbindung gesetzt, wenn man in ersterer die Linien, auf letzterer die Punktepaare als Elemente betrachtet.

Man repräsentire nun weiter das Werthgebiet der Variabeln, deren reelle Werthe allein auf der festen Geraden veranschaulicht waren, in Riemann'scher Weise auf einer Kugelfläche, oder, was eine leicht verständliche Verallgemeinerung ist, auf einer nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades*). Der geraden Linie der ursprünglichen Ebene, mochte sie reell oder complex sein, entspricht eindeutig ein reelles Punktepaar der Fläche, und dieses Punktepaar ersetze man wieder durch seine Verbindungsgerade. So hat man schliesslich eine Beziehung zwischen Ebene und Raum, vermöge deren jeder reellen oder complexen Geraden der Ebene eine und nur eine reelle Gerade des Raumes entspricht. Letztere ist in ihrer Lage dadurch beschränkt, dass sie gezwungen ist, eine nicht geradlinige reelle Fläche zweiten Grades zu treffen.

Diese Beziehung hat namentlich folgende Eigenthümlichkeit: Zwei Gerade der Ebene, die mit den Tangenten, welche man durch ihren Durchschnittspunkt an den bei Herstellung der Beziehung benutzten festen Kegelschnitt legen kann, ein reelles Doppelverhältniss bilden, erhalten als Bilder zwei räumliche Gerade, die sich erstens schneiden und überdiess innerhalb des somit durch sie bestimmten Büschels mit den an die feste Fläche gelegten durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Tangenten dasselbe reelle Doppelverhältniss bilden. Insbesondere also: Linien der Ebene, die in Bezug auf den festen Kegelschnitt conjugirt sind, werden wieder conjugirte, sich überdiess schneidende, Raumgeraden zu Bildern haben. Oder, wie man sich ausdrücken kann, indem man den Kegelschnitt in der Ebene, die Fläche im Raume nach Cayley's Vorgange als Fundamentalgebilde für eine projectivische Massbestimmung betrachtet: Senkrechten Linien der Ebene entsprechen senkrechte, sich schneidende Linien des Raumes.

*) Man erhält diese Repräsentation, von der gewöhnlichen Darstellung der complexen Variabeln in der Ebene ausgehend, indem man die Ebene parallel zu der Tangentialebene der Fläche in einem ihrer Nabelpunkte legt und durch stereographische Projection von diesem Nabelpunkte aus Fläche und Ebene auf einander bezieht.

Um das hiermit geschilderte Uebertragungsprincip auf den Pascal'schen Satz anzuwenden, mag man demselben folgende Form geben. Statt zu sagen, dass die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsseits in einer Geraden liegen, kann man sich dahin ausdrücken, dass die Polaren dieser drei Punkte, d. h. die drei Geraden, welche bez. zu den zusammengehörigen Gegenseiten gleichzeitig conjugirt sind, zu einer vierten Geraden conjugirt sind; oder endlich, indem man nun den Kegelschnitt als Fundamentalgebilde einer projectivischen Massbestimmung wählt: dass die gemeinsamen Perpendikel der Gegenseiten eines in das Fundamentalgebilde eingeschriebenen Sechsseits ein gemeinsames Perpendikel haben.

Auf den Raum übertragen behält der Satz vollständig seine Form; und das ist die Verallgemeinerung des Pascal'schen Satzes, die hier gegeben werden sollte. Unter »Fundamentalgebilde« ist nur eine geschlossene Fläche zweiten Grades verstanden; das in sie eingeschriebene Sechsseit braucht nicht eben zu sein, sondern kann irgendwie angenommen werden; endlich erscheinen alle Constructionen auf das Innere der Fläche beschränkt. Wollte man diese Beschränkung aufheben, wollte man ferner, was nahe liegt, zu weiterer Verallgemeinerung an Stelle der nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades setzen, so würde zunächst eine gewisse Unbestimmtheit zu beseitigen sein, die daraus entsteht, dass die Construction des gemeinsamen Perpendikels zweier Raumgeraden in Cayley's Geometrie eine zweideutige ist und nur durch Beschränkung auf das Innere der nicht geradlinig vorausgesetzten reellen Fläche zu einer eindeutigen gemacht wird.

Darnach spricht

Herr Dr. **Günther**

spricht über die Geschichte der Pendeluhr vor Huyghens.

1. Dass die Erfindung der Pendeluhr einer der vielen Ruhmestitel Huyghen's sei, galt und gilt noch stets als unbestrittene Thatsache, und es soll auch hier kein Versuch gemacht werden, ihm denselben zu entreissen. Ist es doch sicher, dass die Idee dieser grossen Erfindung ganz sein geistiges Eigenthum

und hat er sich darauf, hievon ganz abgesehen, doch schon dadurch ein volles Anrecht erworben, dass er seine Idee theoretisch wie praktisch so zu realisiren wusste, dass die Nachwelt bis auf den heutigen Tag nichts irgendwie Wesentliches hinzuzufügen vermochte. Natürlich ist jedoch hiedurch nicht ausgeschlossen, dass nicht auch Andre schon früher sich mit ähnlichen Entwürfen trugen, und wenn auch diese Entwürfe keine so vollendete Gestalt annahmen, wie der des niederländischen Mathematikers, so ist es doch Pflicht der Geschichte, auch jene Vorläufer namhaft zu machen, sei es auch nur, um wieder einen Beleg zu dem alten Erfahrungssatz zu liefern, dass keine bedeutende Neuerung auf wissenschaftlichem Gebiete ganz unvermittelt dasteht, sondern stets bis zu einem gewissen Grade vorbereitet erscheint.

Wir wissen, dass bereits in sehr früher Zeit Versuche gemacht worden sind, das Pendel als Instrument zur Zeitmessung zu benützen, und diesen Versuchen musste natürlich die grosse Entdeckung Galilei's bezüglich des Isochronismus der Pendelschwingungen neuen Impuls verleihen. So ist bekannt, dass schon im 10. Jahrhundert der ägyptische Astronom Jbn-Junis[1]) das Pendel in seiner einfachsten Gestalt zu dem genannten Zwecke verwandte, und wenn auch das Mittelalter uns keinen direkten Fortschritt in dieser Beziehung erkennen lässt, so ist doch auf der andren Seite nicht zu verkennen, dass jener Periode gar manche mechanische Erfindungen ihr Dasein verdanken, welche für die endliche praktische Lösung unsres Problems als vorbereitend betrachtet werden können; es sei hier nur an die eigenthümliche Gewichtuhr erinnert, welche Heinrich von Wyk[2]) im 14. Jahrhundert construirte. Es konnte so nicht fehlen, dass allmälig der Gedanke sich ausbilden musste, jene ursprünglichen Ideen in Zusammenhang mit den Fortschritten zu bringen, welche die mechanische Kunst im Laufe der Jahre gemacht hatte, und in der That finden wir schon bei Galilei und seit Galilei's Zeit mehrfach derartige Versuche. Auch Huyghen's grosse Erfindung ist zunächst auf Galilei's Vorarbeiten zurückzuführen, wenn auch nicht in der Art und Weise, wie Littrow[3]) diesen Zusammenhang schildert. Wenn derselbe nämlich vom Isochronismus sagt: »Diese Entdeckung führte bald einen gelehrten Kampf zwischen Galilei und Huyghens herbei, und die Frucht dieses Streites war des letztren berühmtes Werk: De Horologio oscillatorio.« so hat er offenbar übersehen, dass der in Galilei's Todesjahr (1642) erst dreizehnjährige Huyghens wohl kaum in der Lage war, sich in irgendwelche gelehrte Polemik einzulassen. Es sei hier gleich beiläufig bemerkt, dass Littrow an dieser Stelle[4]) noch eines andren zur Vorgeschichte der Pendeluhr gehörigen Faktums Erwähnung thut, welches jedoch leider der Quellenangabe entbehrt und sich also weder verificiren noch widerlegen lässt: »Bemerken wir übrigens,« — heisst es daselbst — »dass, während auf dem Festlande Huyghens allgemein als der Erfinder der Pendeluhren betrachtet wird, die Engländer diese Ehre ihrem Landsmann Richard Harris vindiciren, der schon im Jahre 1641 eine Uhr mit einem langen Pendel verfertigt haben soll.« Die englische Gelehrtengeschichte scheint nun aber blos Einen Mann dieses Namens zu kennen, von dem — wenigstens dem Titel[5]) seines Hauptwerkes nach — eine derartige Erfindung vielleicht erwartet werden könnte; allein die Lebenszeit (1667—1719) dieses Mannes stimmt wiederum nicht mit der von Littrow angegebenen Erfindungszeit. Es dürfte desshalb Genaueres hierüber sich nicht eruiren lassen; auch Fischer's so präcise »Geschichte der Physik« gibt nicht die geringste Auskunft.

1) Humboldt, Kosmos, 2. Band, Stuttgart und Tübingen 1847. S. 258.

2) Littrow in Gehler's phys. Wörterbuch, 2. Aufl., 9. Band, Leipzig 1839. S. 1110.

3) Ibid. S. 1112.

4) Ibid. S. 1113.

5) Harris, Lexicon technicum, or an universal english dictionary of arts and sciences, London 1708 u. 1736.

2. Man scheint bis auf die neueste Zeit der Meinung gewesen zu sein, dass Galilei selbst sich damit begnügt habe, einige Gesetze der Pendelschwingungen entdeckt und die Verwendbarkeit des Pendels zur Zeitmessung angedeutet zu haben, ohne selbst Experimente in dieser Richtung anzustellen. Auch Libri in seiner genauen Analyse der Galilei'schen Schriften scheint diesen Glauben zu theilen. denn er beschränkt sich auf Angabe, dass Galilei die auf den Synchronismus bezügliche Beobachtung gemacht habe. Er sagt vom Pendel[6]): »Cet instrument fut publié pour la première fois, en 1603, par Santorius, qui l'appela pulsilogium: mais tous les tómaignages se réunissent pour prouver que Galilée avait fait cette observation pendant qu'il étudiait à l'université de Pise.« Später kommt er noch ein-

mal auf den Gegenstand zurück, jedoch nur, um abermals darzuthun, dass die Construktion eines eigentlichen auf den Pendelschwingungen basirenden Mechanismus Galilei abzusprechen sei. »On a beaucoup disputé« — heisst es daselbst [7] — »pour savoir si Galilée avait appliqué le pendule à l'horloge avant Huyghens. Galilée a certainement fait cette application, mais sans combiner d'abord le ressort avec le pendule, combinaison nécessaire afin que le mouvement de ce pendule pût se prolonger longtemps. Quelques savans ont cru cependant qu'il imagina cette combinaison lorsqu'il était dejà aveugle, et que son fils construisit avant Huyghens une véritable pendule: mais c'est là un point bien difficile à eclaircir.« Als Belege citirt Libri eine Stelle aus Galilei's Dialog, welche jedoch allerdings zur Aufklärung der hier schwebenden Fragen nur wenig beitragen kann, ferner die italienischen Autoren Nelli und Venturi, und schliesslich die Abhandlungen der Florentiner Akademie. Insbesondere diese letzte Quelle soll hier einer eingehenden Discussion unterzogen werden, und wird uns auch zu interessanten Resultaten verhelfen.

Es scheint das Verdienst Zöllner's zu sein [8], zuerst darauf hingewiesen zu haben, dass die Correspondenz Galilei's noch manchen wichtigen Aufschluss in dieser Angelegenheit bieten könne. Von einem genaueren Zeitmesser spricht Galilei in einem Briefe an den Venetianischen Mönch Fulgentius Micanzio, ohne freilich sich in nähere Beschreibung einzulassen. Nachdem er im Eingang davon gesprochen, dass nun bald völlige Blindheit über ihn kommen werde, dass diess jedoch seinen Arbeiten kein Hinderniss bereiten solle, fährt er fort [9]:

»E pur ora sono intorno al distendere un catalogo delle più importanfi operazioni Astronomiche, le quali riduco ad una precisione tanto esquisita, che mercè della qualità degli stromenti per le osservazioni della vista, e per quelli, co' quali misuro il tempo, conseguisco precisioni sottilissime quanto alla misura non solamente di gradi e minuti primi, ma di secondi, e terzi, e quarti ancora, e quanto

Gegenwärtig bin ich dami beschäftigt, ein Verzeichniss der wichtigeren astronomischen Arbeiten zusammenzustellen, welchen ich ebensosehr Genauigkeit geben will, als Dank der Beschaffenheit der Werkzeuge für die Beobachtungen des Gesichts und für die Zeitmessung bereits in so hohem Grade erreicht wurde, einerseits bei der Bestimmung nicht allein der Grade und Minuten, sondern a' tempi parimente esattamente si hanno le ore, minuti primi, secondi, e terzi, e più, se più ne piace.«

auch der Secunden, Terzien und sogar der Quarten, und andrerseits bei der Zeitbestimmung, welche einen ganz ähnlichen Grad von Genauigkeit erreicht hat, und wo die Stunden, Minuten, Secunden, Terzien und noch kleinere Zeittheile sich angeben lassen, wenn man hierin noch weiter gehen will.

An dieser Stelle ist Galilei nicht näher auf die Beschreibung der Hülfsmittel eingegangen, durch welche er eine so grosse Genauigkeit erzielen will; er thut diess jedoch in einem Briefe an den holländischen Admiral Realis, wo er schreibt [10]):

»Da questo verissimo e stabile principio traggo io la struttura del mio numeratore del tempo, servendomi non d'un peso pendente da un filo, ma di un pendulo di materia solida e grave, qual sarebbe ottone o rame; il qual pendulo fo in forma di settore di cerchio di dodici o quindici gradi, il cui semidiametro sia dul o tre palmi; e quanto maggiore sarà, con tardo minor tedio se gli potrà assistere. Questo tal settore fo più grosso nel semidiametro di mezzo, andandolo assottigliando verso i lati estremi, dove fo che termini in una linea assai tagliente, per evitare quanto si possa le' impedimento dell' aria, che sola lo va ritardando. Questo è perforato nel centro, pel quale passa un ferretto in forma di quelli sopra i quali si voltano

Aus diesem wahren und feststehenden Grundsatz ziehe ich die Construktion meines Zeitmessers, und zwar bediene ich mich nicht eines an einem Faden hängenden Gewichtes, sondern eines Pendels aus einem schweren, soliden Stoff, wie Messing oder Kupfer; diesem Pendel gebe ich die Form eines Kreisausschnitts von zwölf bis 15 Graden, dessen Radius zwei bis drei Spannen beträgt; je grösser er ist, desto weniger langsam wird er zum Stehen kommen. Diesen Sektor verdicke ich alsdann im mittleren Radius und verdünne ihn auf beiden Seiten, wo ich es so einzurichten suche, dass die Enden in eine hinlänglich scharfe Linie auslaufen, damit ihm, soweit möglich, die Luft nicht widerstehe, welche allein seinen le stadere; il qual ferretto terminando nella parte di sotto in un angulo, e posando sopra due sostegni di bronzo, acciò meno consumino pel lungo muovergli il settore, rimosso esso settore per molti gradi dallo stato perpendicolare (quando sia lene bilicato) prima che fermi anderà reciprocando di qua e di là numerō grandissimo di vibrazioni, le quali per poter andare continuando secondo il bisogno, converrà che chi gli assiste, gli dia a tempo un impulso gagliardo, riducendolo alle vibrazioni ample.«

Gang zu verlangsamen strebt. An seinem Mittelpunkte hat er eine Oeffnung, durch welche ein Eisen geht, wie jenes, um welches sich eine Wage bewegt; dieses Eisen endigt sich unten in eine scharfe Ecke und ruht auf zwei ehernen Stützen, welche durch die oftmalige Bewegung des Sektors weniger abgenützt werden. Wenn nun der Sektor um einen grossen Bogen vom bleirechten Stand enfernt und seinem eigenen Falle überlassen wird (sobald er sich richtig im Gleichgewichte befindet), so legt er eine sehr grosse Anzahl von Schwingungen zurück, bis er still steht. Damit er aber diese Schwingungen fortsetze und immer weiter aushole, so muss Derjenige, der ihm beisteht, ihm von Zeit zu Zeit einen starken Stoss geben.

Auch darauf war Galilei bedacht, das Zählen der Schwingungen dem Instrument selbst zu übertragen; er schlug dazu ein hleines Stirnrad (»ruota leggerissima«) vor, welches bei jeder Schwingung durch einen an der Pendellinse anzubringenden Dorn (»un piccolissimo e sottilissimo stiletto«) um einen Zahn fortzuschieben wäre [11]). Zöllner sagt hierüber (a a. O.): »Trotzdem aber kann man nach der Beschreibung nicht anders, als das Instrument doch noch für ein sehr mangelhaftes und unvollkommenes halten. Man würde aber sehr unrecht thun, wenn man die Erinnerung davon ohne Weiteres in die Rumpelkammer werfen wollte, wie es von denen geschieht, welche die Erfindung der Pendeluhr einzig und allein dem Mathematiker Huyghens zuschreiben möchten. Die wesentlichste Vervollkommnung, hauptsächlich die Ankerhemmung und die Zufügung schwerer Gewichte, durch welche der Gang erhalten wird, stammt allerdings von diesem (1657), die erste Idee aber ausgesprochen zu haben, dieser Ruhm dürfte Galilei doch wohl nicht vorzuenthalten sein.« Diese wenigen Worte genügen vollständig, das Verdienst des grossen Italieners in's rechte Licht zu setzen.

[6]) Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, Tome IV, Paris 1841. S. 172.

[7]) Ibid. S. 284.

[8]) Zöllner, Die Kräfte der Natur und ihre Benutzung, Leipzig und Berlin 1872. S. 82.

[9]) Le opere di Galileo Galilei, Tomo VII, Firenze. 1848. S. 193.

[10]) Ibid. S. 169.

[11]) Zöllner, S. 83.

3. Es geht aus dem Briefe Galilei's an Realis, welcher am 6. Juni 1637 geschrieben wurde, (die Angabe Zöllner's (a. a. O.), derselbe sei vom 5. Juli 1639 datirt, ist hienach zu berichtigen) hervor, dass derselbe nicht nur die Idee der Pendeluhr in sich trug, sondern dieselbe auch zu verwirklichen suchte. Welcher Art sein Instrument war, lässt sich einigermassen schon aus der oben mitgetheilten Beschreibung ersehen, welche freilich noch vieles dunkel lässt. Es ist uns jedoch eine Abbildung dieses Instrumentes aufbehalten worden, und zwar durch die in mehrfacher Beziehung um die physicalischen Wissenschaften so hoch verdiente Academia del Cimento in Florenz. Wir haben es eben hier mit jener bereits oben nach Libri angeführten Quelle zu thun, welche für die Geschichte der Pendeluhr von hoher Wichtigkeit ist. Es ist jedoch nicht einzusehen, warum Libri (a. a. O.) erst auf die im Jahre 1691 erschienene Ausgabe ihrer Abhandlungen hinweist, da doch die uns hier speziell interessirende Stelle [12]) bereits in der Auflage von 1666 sich findet. Der Inhalt dieses Kapitels ist im wesentlichen folgender.

Es wird zunächst hervorgehoben, dass eine genaue Zeitmessung bei den verschiedensten experimentellen Untersuchungen unabweisbares Bedürfniss sei, während man doch andrerseits auf das Zeugniss der Sinne sich ganz und gar nicht verlassen könne. Die verschiednen hiedurch entstehenden Fehlerquellen werden eingehend besprochen und gezeigt, dass sich ihnen auf gewöhnlichem Wege nicht wohl abhelfen lasse. Dagegen wird das Pendel (»il Pendolo, o Dondolo«) als genauestes Zeitmessinstrument gerühmt, dessen etwaige Fehler nie eine irgend beträchtliche Höhe erreichen könnten, wenn man nur einige Uebung in seiner

Behandlung habe. Es wird jedoch hier nicht das gewöhnliche, aus einer an einem dünnen Faden hängenden Linse bestehende Pendel empfohlen welches im Gegentheil seine Schwingungen nicht mit der nöthigen Genauigkeit vollziehen soll, sondern vielmehr das an zwei Fäden-befestigte — etwa in der Weise also, wie diejenigen Pendelapparate, durch welche die Elementargesetze der Pendelschwingungen nachgewiesen zu werden pflegen. Es werden dann einige allgemeine weniger hieher gehörige Betrachtungen über solche Pendel angestellt, wobei besonders die Erwähnung der Thatsache von Interesse ist, dass die Schwingungen eines Pendels um so schneller sind, je länger die Pendelstange ist. Der Schluss lautet alsdann:

»Qui par luogo di dire, che l'esperienza, c'aula mostrato (come fu anche auuertito dal Galileo, dopo l'osseruazione, che prima d'ogni altro ei fece indorno all' anno 1483 della, loro prossima vgualità) non tutte le vibrazioni del Pendolo correre in tempi precisamente tra loro vguali, ma quelle che di mano in mano s'accostano alla quiete, spedirsi in piu' breue tempo che non fanno le prime, come si dirà a suo luogo. Per tanto in quell' esperienze, che richiedono squisitezza maggiore, e che sono di sì lunga osseruazione, che le minime disuguaglianze die tale vibroozioni, dopo vn gran numero arriuano a farsi sensibili, fu stimato bene applicare ib Pendolo all'oriuolo, su l'andar di quello, che prima d'ogni altro immaginò il Galileo, e che dell' anno 1649, messe in pratica Vincenzio Galilei suo figliuolo. Così, è necessitato il

Es ist hier nun auch zu bemerken, dass die Erfahrung gezeigt hat, dass nicht alle Pendelschwingungen in gleichen Zeiten geschehen, sondern dass, jemehr das Pendel zur Ruhe kommt, die spätren Schwingungen sich allmälig gegen die früheren verlangsamen, wie diess an seinem Orte gesagt werden wird — es wurde diess auch von Galileo bemerkt, zufolge der Beobachtung, welche er vor allen Andren im Jahre 1583 in Bezug auf die annähernde Gleichheit der Schwingungen machte. Mit Rücksicht hierauf ward es bei solchen Versuchen, welche grössre Genauigkeit erheischen, und welche eine so lange Beobachtungsdauer erfordern, dass die kleinsten Ungleichheiten der Schwingungen durch deren grosse Anzahl bemerkbar werden müssen, für zweckdienlich gehalten, das Pendel auf die Uhren anzuwenden, ganz so, Pendolo dalla forza della molla, o del peso a cader sempre dalla medesima altezza; onde con iscambieuob beneficio non sol amente vengono a perfettamente vguagliarsi i tempi delle vibrazioni, ma eziandio a correggersi in certo modo in difetti degli altri 'ngegni di esso oriuolo. Noi per poterzi valere d'vn tale strumento a di uerse esperienze, le quali vogliano il tempo piu, o meno sottilmente di uiso, abbiam fatte varie palline di metallo infilzate in sottilissimi fili d'acciaio di diuerse lunghezze, e tutti da inserirsi nella medesima madreuite secondo 'l bisogno. Di questi il piu corto compie la sua intera vibrazione in vn mezzo minuto secondo d'ora; che è la piu minuta diusione, che cisia rinscito, di fare: essendochè tutti gli altri piu corti riescono così veloci, che gli occhi non gli posson seguire. E infin qui basti auer detto di quegli strumenti, che vengono piu spesso in vso nelle seguenti esperienze.«

wie es Galileo zuerst ersonnen und sein Sohn Vincenz Galilei praktisch ausgeführt hat. Es ist so das Pendel durch die Kraft des Hauptrades, resp. Gewichtes genöthigt, stets von der gleichen Höhe herabzufallen; wodurch man dann unabweislich den doppelten Vortheil erlangt. dass einerseits die Schwingungszeiten sich vollständig ausgleichen, und andrerseits bis zu einem gewissen Grade die Fehler corrigirt werden, welche im Bau der Uhr liegen mögen. Um ein solches Werkzeug für verschiedne Experimente, welche einer oder minder feiner Messung der Zeit bedürfen, herzustellen, haben wir verschiedne kleine Metallkugeln an sehr feinen Stahlfäden von ungleicher Länge befestigt und Sorge getragen, dass sie in derselben Schraube gezogen werden. Von diesen Kugeln vollendet die am kürzesten Drath hängende ihre ganze Schwingung in einer halben Zeitsecunde, dem kleinsten Zeittheil, welcher sich noch angeben lässt, indem noch kürzre Pendel so rasch schwingen, dass die Augen ihnen nicht zu folgen im Stande sind. Hiemit möge denn vorläufig genug über diese Werkzeuge gesagt sein, deren Nutzen in den nun weiter zu beschreibenden Experimenten uns häufig wieder entgegentreten wird.

Das Instrument ist auf einer dazugehöringen Figurentafel abgebildet. Es zeigt auf einem Stativ eine horizontale Trommel, auf deren Oberfläche Zeiger und Zifferblatt (letztres von 1—15 gehend) sichtbar sind. Auf der einen Seite hängt das Pendel herab, während auf der andren ein Zapfen sich zeigt, dessen Bestimmung zum Aufziehen der Uhr der daneben hängende Schlüssel deutlich kennzeichnet. Ueber die innere Einrichtung lässt sich nichts vermuthen.

12) Saggi di naturali esperienze fatte nell' accademia del cimento, Firenze 1666. S. 16—22 *

4. Ehe wir Italien verlassen und zur Betrachtung der Verdienste übergehen, welche deutsche Gelehrte sich in dieser Sache erworben haben, müssen wir noch darauf Rücksicht nehmen, diess von mancher Seite auch der berühmte Mediciner Sanctorius als Erfinder der Pendeluhr genannt wird. Besonders ist hier an Thomas Young zu erinnern [13]), welcher nach Humboldt's [14]) Angabe dem Sanctorius die Verbindung des Pendels mit einem Räderwerk zuschreibt. Nun ist es zwar bekannt, dass Sanctorius die bereits von Galilei ausgesprochne Idee, das Pendel medicinisch zu verwerthen, wirklich durchgeführt und ein »pulsilogium« (s. a.) construirt hat; allein ob diess in der That die von Young angegebnen Eingenschaften gehabt habe, scheint nicht sicher. Wenn man die Beschreibung liest, welche ein zeitgenössischer Schriftsteller, Daniel Schwenter [15]) von dieser Vorrichtung giebt — ohne freilich dieselbe aus eigner Anschauung zu kennen —, so wird man eine ganz verschiedne Ansicht bekommen. »Santes Sanctorius« — sagt derselbe — »ein sehr berühmter Medicus zu Pariss hat ein Instrumentum, von ihme Sphigmaticum genennet, erfunden, dardurch er bey einem Kranken erfahren können, ob der Puls natürlich oder unnatürlich schlage, und um wie viel Grad: Solches aber, wie ich von einem Doctore Medicinae berichtet worden, von einem Jahr bis auf 60, und das Instrument sei gemacht von einem messinen Massstab, und einer Schnur, daran ein Bleygewichtstein hänget.«

---

*) Diese höchst wichtige Stelle scheint nur sehr wenig bekannt zu sein; jedoch ist zu bemerken, dass Herr Professor Beetz (nun in München) in seinen an der hiesigen Hochschule gehaltnen Vorträgen stets darauf aufmerksam zu machen pflegte.

Nach Schwenter's Darstellung hat man es hier nicht mit einer der Pendeluhr, sondern vielmehr dem Monochord ähnlichen Vorrichtung zu thun.

13) Th. Young, Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts, Vol. I., London 1807. S. 191.

14) Humboldt, Kosmos 2. Band. S. 451.

15) Schwenter, Deliciae physico-mathematicae, Nürnberg 1636. S. 451.

5. Die allerjüngste Zeit hat uns eine sehr gründliche Studie über die Geschichte der Pendeluhr gebracht, aus der mit absoluter Sicherheit hervorzugehen scheint, dass lange vor Huyghens der Schweizer Jobst Bürgi bereits wirkliche Pendeluhren verfertigte, und wir werden desshalb im Folgenden die Resultate dieser Untersuchung im engsten Anschluss an die Worte Wolf's [16]) geben, dem eben dieser wichtige Fund gelungen ist. Dass Bürgi als einer der bedeutendsten Männer jener Zeit betrachtet werden muss, war freilich schon längre Zeit bekannt; man wusste, dass derselbe durch seine »Progresstabuln« den Logarithmen ziemlich nabe gekommen war, ohne allerdings, nach Matzka [17]), sie wirklich zu erfinden, und ebenso gelang ihm als gewandten Mechaniker die Construktion eines Proportionalzirkels resp. eines Doppelzirkels mit beweglichem Kopfe (wie Wolf [18]) nachweist). Es wird eine hierauf bezügliche Stelle von Berthoud [19]) angeführt, die hier ebenfalls einen Platz finden möge: »Le Docteur Jean-Joachim Becher fit imprimer en 1680, en Angleterre, un livre portant pour titre, De novâ temporis demetiendi ratione theoria, qu'il dédia à la Socité royale de Londres. Dans ce livre il dit que le comte Magalotti, résident à la cour de l'empereur, lui raconta tout l'histoire des pendules appliquées à l'Horlogerie, niant que M. Huyghens de Zulichen y eût eu part: et qu'un nommé Treffler, horlogeur du père du grand-duc de Toscane d'alors, lui conta la même chose, lui ajoutant quil était le premier qui avoit fait à Florence une horloge à pendule, par l'ordre du grand-duc de Toscane, et sous la direction de Galileus à Galileo, mathématicien de son altesse, dont on transporta un modèle en Hollande; enfin, que le comte dont on vient de parler, dit de plus, qu'un nommé Gaspar Doms, Flamand et mathématicien de Jean-Philippe de Schönborn, dernier électeur de Mayence, lui avoit raconté qu'au temps de l'empereur Rodolphe (c'est à dire vers 1612), il avoit vu à Prague une horloge à pendule, faite par le fameux Justus

Borgen (Juste Birge), mathématicien et horlogeur de l'Empereur, dont le grand Tycho-Brahé s'est servi dans ses observations astronomiques. Ainsi s'exprime Bécher.«

Diesem »vagen und mit Zweifeln wohl durchspickten« Zeugniss für Bürgi's Prioritätsansprüche hat nun Wolf eine Reihe begründeter Beweise anzureihen vermocht. Derselbe hat nämlich ein Manuskript des Cassler Hofastronomen Rothmann aufgefunden, der bekanntlich längere Zeit mit Bürgi zusammenarbeitete. In demselben befindet sich eine Beschreibung der Instrumente ihrer Sternwarte; der auf die Uhren bezügliche Passus lautet nach Wolf's Uebersetzung [20]) folgendermassen: »Was nun aber unsere Uhren anbelangt, deren wir zu unseren Beobachtungen drei zur Hand haben, so wäre es zu weitläufig und mühsam, dieselben zu beschreiben. Das aber wenigstens müssen wir erwähnen, dass die erste Uhr mittelst ihrer drei Zeiger nicht nur die einzelnen Stunden und Minuten, sondern auch die einzelnen Secunden angibt. Die Dauer einer Secunde ist nicht so sehr kurz, sondern kömmt der Dauer der kleinsten Note in einem mässig langsamen Liede gleich. Die Unruhe (oder der Balancier) wird nicht auf gewöhnliche, sondern auf ganz besondere, neu erfundene Weise so getrieben, dass jede ihrer Bewegungen einer einzelnen Secunde entspricht. Auch diess ist sehr eigenthümlich, dass wenn der Secundenzeiger mit der Hand bewegt wird, sich auch zugleich Minten- und Stundenzeiger um den betreffenden Betrag verschieben, das gleiche ist der Fall, wenn der Minutenzeiger bewegt wird, während bei Bewegung des Stundenzeigers die übrigen Zeiger an ihren Orten verbleiben. Der Secundenzeiger hat auch einen eigenen Platz, während die beiden übrigen von demselben Centrum ausgehen.«

Aus dieser Beschreibung Rothmann's zieht Wolf, gewiss mit vollem Rechte, den Schluss, dass man es hier mit einer Räderuhr zu thun habe, deren Gang durch ein Secundenpendel unterhalten wurde. Allein es lassen sich auch noch direktere Belege beibringen. In der Wiener Schatzkammer befinden sich nämlich ausser einer prachtvollen nachweislich von Bürgi herrührenden Kunstuhr noch zwei andre Uhren, von denen Professor Weiss in Wien [21]) nachstehende Beschreibung gibt: »Die eine sehr ähnlich gebaut (nur nicht so complicirt, da sie einfach Stunden und Minuten zeigt, und erstere und Viertel schlägt) von Sneeberger in Prag aus dem Jahre 1606 (also wohl unter

Bürgi's Aegyde gemacht), die zweite, welche in der Ornamentik der Sneeberger'schen fast gleichkommt, aber an der Unruhe ein vollkommenes kleines Pendel angebracht hat, dessen Linse sogar verschiebbar ist.« Es geht aus allen hier in Frage kommenden Umständen zum wenigsten mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit hervor, dass »Bürgi den Isochronismus des Pendels mindestens eben so frühe als Galilei entdeckte, — dass er sofort die Bedeutung dieser Entdeckung für Vervollkommnung der Uhren erkannte, — und mit dieser Entdeckung nicht (wie es ihm vorgeworfen werden wollte) hinter dem Berge hielt, sondern sie in der für ihn als Uhrmacher passendsten Weise dadurch publicirte, dass er eben Pendeluhren construirte und auf den Markt brachte.«

Wir hätten so eine dreifache Entdeckung des Isochronismus der Pendelschwingungen zu registriren — das erstemal bei Galilei, das zweitemal bei Bürgi, und wohl auch noch bei Caramuel v. Lobkowitz, indem dieser Gelehrte des Isochronismus ganz ausdrücklich Erwähnung thut [22]), ohne Galilei oder sonst Jemand zu nennen.

16) Wolf, Astronomische Mittheilungen, Vierteljahrsschr. d. Züricher naturf. Gesellschaft, Jahrgang 1873. S. 99.

17) Matzka, Ein kritischer Nachtrag zur Geschichte der Erfindung der Logarithmen, Grunert's Archiv d. Math. Phys., 34. Theil. S. 341.

18) Wolf, S. 100.

19) Berthoud, Histoire de la mesure du temps par les horloges, Tome I, Strasbourg 1798. S. 98.

20) Wolf, S. 102.

21) Ibid. S. 104.

22) Günther, Die Vorgeschichte des Foucault'schen Pendelveruchs. Sitzungsber. d. Erl. phys.-med. Societät, Jahrg. 1873. S. 62.

6. Zum Schlusse haben wir noch auf die Verdienste eines deutschen Gelehrten, des Danziger Astronomen Johann Hevel, hinzuweisen, dessen hier in Frage kommende Bemühungen gänzlich der Vergessenheit anheimgefallen zu sein scheinen, obschon in neuerer Zeit sein Biograph Westphal ausdrücklich für ihn eingetreten ist. Derselbe führt Folgendes an [23]): »Hevelius verliess die Federuhr ganz und bediente sich vom Jahre 1640 an, eines frei schwebenden Pendels, weil er aus Galileo's Gesprächen über das Weltsystem erfahren hatte, dass die Schwingungszeiten eines Pendels gleich wären, es möchten die Bogen gross

oder klein sein. Bei einer Mondfinsterniss im Jahre 1649 gebrauchte er z. B. ein Pendel, welches $43^1/_4$ Schwingungen in einer Minute machte [24]); diese Schwingungen wurden von Gehülfen gezählt und aus ihnen konnten, nachdem aus den gemessenen Höhen die wahre Zeit bestimmt war, die einzelnen Momente einer Sonnen- oder Mondfinsterniss hergeleitet werden. Indessen war dies Zählen der Schwingungen äusserst beschwerlich, und Hevelius brachte deshalb eine Vorrichtung in der Kugel des Pendels an, durch welche auf einem Zifferblatte ein Zeiger die Anzahl der Schwingungen angab.« Man sieht, dass die Verbesserungen, welche Hevel an seinem Instrumente successive anbrachte, ganz denjenigen entsprechen, welche auch Galilei erfand; jedoch ist der Deutsche offenbar noch um einen Schritt über seinen Vorgänger hinausgegangen. Hören wir, wie die erreichten Vortheile ihn noch nicht befriedigten, er vielmehr noch auf weitre Vervollkommnung seines Instrumentes bedacht war [25]).

»Verùm, nec in his tum temporis acquievi, sed animo tum volvebam, quomodo efficerem, ut dictum Perpèndiculum, quod jam suas oscillationes et numeraret et ostenderet, à potentiâ quâdam vel extrinsecâ, vel intrinsecâ ultrò, absque omni manuum vi atque commotione, posset commoveri: sic enim hocce funependulum multò accuratius et alsolutius reddi posse sperabam. Quò autem opus istud eò procliviùs, ut putabam, succederet, loco funium, chordarum sive catenularum vectem subtilem chalybeum, haud usque, adeò crassum sex circiter pedes longum adhibui, cui dictum istud machinamentum in inferiori extremitate annexi. Hujus vectis altera extremitai superior super cardinem erat volubilis; ita ut nonnisi in duas plagas Coeli observas commoveri posset. At caetera pendula saepiùs ad latera deviant, et nunqam fermè eundem semper tenent ductum. Hocce perpeudiculum, ese illo vecte chalyleo, et machinamento illo constructum, peculiari artificio eò deducere cogitabam, quò etiam se se ipsum absque ullis manibus, ut modò dicebam, posset commovere, atque in motu continuo detinere; sic ut non solùm numerum oscillationum, sed etiam horas, Min. et Secunda singula ostenderet. At verò, cùm hocce negotium jam ipso opere suscepissem, en ecce, Artifex et Automathurgus meus, aliàs in suâ arte peritissimus, fato fungitur. Hincque coactus, cùm nonnulla majorum meorum Instrumentorum, utpote Quadrantem, Sextantem et Octantem non-dum omnimodè perfecerat, Socium ejus, natione Suecum, hominem Rei Automatariae benè gnarum in domum meam recipere; qùo ejus operâ tam dicta Instrumenta, quàm istud Perpendiculum feliciter ad finem perducerentur. Isto itaque cum Sueco dictum Perpendiculum resumpsi, quò tandem et se commoveret, et temporum momenta, uti diximus, sponte suâ exactissimè commonstraret. Initio quidem Automatarius ille aegrè admodùm induci poterat (penitùs nempe persuasus, id factu vixe esse possibile) ut opus istud susciperet: attamen, cùm id seriò urserim, meisque impensis tentaverim, tandem manus, felicissima etiam successu, operi admovit, ut in Horologium, absque tamen irrequieto, elatere, pyramide aequatoreâ chordâ huic' circumvolutâ vel catenulâ, solo videlicet pendulo, uno pondere, paucisque tantum rotulis dentatio concesserit.«

Diese letzte Angabe ist die entscheidende; denn wenn wir uns eine Uhr denken, bei der ausschliesslich Zahnräder, Gewichte und Pendel vorkommen, so müssen wir dieselbe nothwendig für eine Pendeluhr in unsrem Sinne erklären. Noch sichrer gestaltet sich die Sache, wenn wir die folgende Stelle in Erwähnung ziehen, wo Hevel bezüglich der Bekanntmachung der Erfindung die Priorität seines grossen Nebenbuhlers Huyghens ausdrücklich anerkannt. Er sagt [26]):

»Eodem ferè tempore, dum ista duo Horologia cum pendulis sub manibus Artificis versabantur, necdûm penitùs erant absoluta (rarius enim Artifici à perficiendis praecipuis Organis Astronomicis illis majoribus, ad consummandum hocce opus vacabat) accidit, ut Celeberrimus et Ingeniosissimus Christianus Hugenius similia Horologia, pariter felicissima ausu, anno 1657 adinvenerit, paullò quoque pòst, anno videlicet 1658 illud ipsum, maximo Rei Literariae bono, delineatum evulgaverit, de quo ipsi maximoperè gratulor. Nam praestantissimum hocce Inventum insigne remedium omnibus nunc Automatis hactenus confectis praebet, atque maximam inaequalitatum earum partem tollit; tam quae in libramentis, quàm axiculis, plumulis atque rotulis delituerunt.«

23) Westphal, Leben, Studien und Schriften des Astronomen Johann Hevelius, Danzig 1829. S. 61.

24) Hevelius, De eclipsi Lunae 1649 ad Eichistadum.

25) Hevelius, Machinae coelestis pars prior, Gedani 1673. S. 365.

26) Ibid. S. 366.

7. Rekapituliren wir nochmal unsre Ergebnisse, so gelan-

gen wir zu folgendem Schlussresultate: Sehen wir von den undiscutirbaren Ansprüchen ab, welche Harris und Sanctorius auf die Erfindung der Pendeluhr haben sollen, so muss vor Allem Galilei, resp. sein Sohn, genannt werden als der, welcher zuerst eine vom Pendel getriebene Uhr construirte, die zugleich die Zeitangabe selbst besorgte. Ganz unabhängig von ihm construirte Jobst Bürgi ein ähnliches Instrument, und nur kurze Zeit vor Huyghens entstand ebenfalls eine Pendeluhr — dam Anscheine nach die vollkommenste der genannten — in dem Observatorium Hevel's zu Danzig. Auch den Mitgliedern der Academia del cimento dürften manche Verbesserungen an Galilei's Uhr, vor Allem aber auch Bekanntschaft mit der Thatsache zuzuschreiben sein, dass das Galilei'sche Gesetz vom Isochronismus der Pendelschwingungen nicht in aller Strenge Gültigkeit habe.

Danach legte der Vorsitzende, Professor Ehlers vor:

Erwiderung gegen Herrn Professor Greeff in Marburg.
Von Dr. **Ed. Everts** in Haag.

In der Sitzung der physikalisch-medicinischen Gesellschaft vom 26. Mai dieses Jahres machte Herr Professor Ehlers eine kurze vorläufige Mittheilung über die Ergebnisse, zu denen ich bei einer Untersuchung der Vorticella nebulifera gelangt war. Diese kurze Notiz hat Herrn Prof. Greeff*) zu einer Kritik Veranlassung gegeben, auf welche ich hier in Kürze eingehen möchte. Herr Greeff hat diese Kritik an Herrn Prof. Ehlers gerichtet, damit mein Verhältniss zu der Arbeit verdunkelt, um so mehr, als er im weiteren Verlaufe seiner Kritik nicht nur von den beiden Verfassern der Arbeit, Ehlers und Everts, spricht, sondern auch nur Herrn Ehlers allein anführt. Es ist mir unverständlich, was Herrn Greeff zu einem solchen Vorgehen berechtigt; um so mehr aber sehe ich mich veranlasst, für die Arbeit hier einzutreten, und damit mein Anrecht auf diese Untersuchungen hier nachdrücklich zu wahren, da alle mitgetheilten Beobachtungen nur von mir gemacht sind. Als die Kritik des Herrn Greeff erschien, war das Manuscript meiner Arbeit

*) Sitzungsbericht der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg Nr. 3. Juni 1873

bereits in den Händen der Redaction der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie; ich konnte daher in dessen Texte des Herrn Greeff's Einwendungen nicht mehr berücksichtigen, um so weniger, als ich der Meinung war, die Arbeit, welche als Dissertation der Erlanger philosophischen Facultät vorgelegen hatte, unverändert zum Abdrucke bringen zu müssen.

Jene vorläufige Mittheilung sollte in aller Kürze nur die Ergebnisse bringen, zu welchen die Untersuchung gelangt war; und so wurde eine möglichst knappe Darstellung vom Bau und von der Entwicklung der Vorticellen, wie sich dieses nach meinen Untersuchungen der Vort. nebulifera mir dargestellt hatte, hier mitgetheilt; Bekanntes und — meiner Ansicht nach auch wenigstens etwas — Neues, immer aber nur eigene Beobachtungen, zu einem Bilde vereinigt; und daran die Deutung des Vorticellenkörpers als eines einzelligen Organismus angeknüpft. Fern lag es mir dabei, den Verdiensten irgend eines um die Kenntniss der Vorticellen verdienten Forschers zu nahe zu treten, oder die Meinung erwecken zu wollen, als seien alle meine Beobachtungen neu; die Leser, für welche wesentlich diese vorläufige Mittheilung bestimmt war, würden, so dachte ich, in der gänzlichen Vernachlässigung aller literarischen und historischen Verweise die Absicht erkennen, in möglichster Kürze nur meine Anschauungen darzulegen, deren weitere Begründung dann der ausführlicheren Arbeit vorbehalten blieb. Zu meinem Bedauern sehe ich, dass Herr Greeff diese Absicht nicht erkannt hat; er ist hingegen der Meinung, es müsse, da in den einleitenden Worten von mir nur der hauptsächlichen Differenz zwischen seiner und meiner Ansicht gedacht ist, unabweislich die Ansicht entstehen, sämmtliche in der vorläufigen Mittheilung enthaltenen Resultate seien neu, und von den seinigen abweichend. Vielleicht wird Herr Greeff, wenn ihm die vollständige, hoffentlich bald erscheinende, Arbeit vorliegen wird, einsehen, dass ich seine Verdienste nicht im mindesten habe schmälern wollen.

Ohne auf jene Punkte einzugehen, in denen ich bei Vorticella nebulifera zu den gleichen Resultaten gelangt bin, wie vor mir Herr Greeff, will ich hier zunächst desjenigen Punktes gedenken, der der wichtigste Differenzpunkt ist, da in ihm ein Unterschied in unseren Beobachtungen besteht. Er liegt in den Angaben über die Bewegungserscheinungen, welche man im Körper der Vorticelle wahrnimmt: und hier muss ich die Anwesenheit der erwähnten in der ausführlichen Arbeit auch in schematischer Zeichnung dargestellten Körnchenbewegung in der Rindenschicht, welche neben der Bewegung der centralen Substanz zu Stande kommt, aufrecht erhalten, Greeff's Angaben gegenüber, der sie in Abrede stellt. Die Beschreibung, welche er in seiner Kritik von der Körnchenbewegung im Innern einer Epistylis unter Deckglasdruck giebt, ist gewiss zutreffend, beweist aber nichts gegen meine Angaben, die sich nur auf die Beobachtung der Vorticella nebulifera stützen, und bei welcher das Thier nur in ruhiger Lage bei völlig entfaltetem Peristom und geschützt vor jedem Druck unter starker Vergrösserung untersucht wurde. Vielleicht ist diese Körnchenbewegung in der Rindenschicht nicht bei allen Vorticellen, vielleicht selbst nicht einmal in allen Altersstadien derselben Vorticellen-Art zu finden. Jedenfalls dürfte die Anwendung von Deckglasdruck, welche ich bei meinen Untersuchungen stets zu vermeiden suchte, für die Erkennung der normalen Bewegungen in der Substanz des Vorticellenkörpers nur von Nachtheil sein.

Die Substanz des Vorticellenkörpers habe ich als Protoplasma bezeichnet; zu der Wahl dieses Namens, der allerdings in jetziger Zeit wohl oft in zu weiter Bedeutung verwandt wird, veranlassten mich vor Allem die an ihm wahrnehmbaren Bewegungserscheinungen. Ich will nicht noch einmal auf meine in der ausführlichen Darstellung gegebenen Gründe eingehen, wegen deren ich die Greeff'sche Bezeichnung dieser Substanz als Chymus nicht annahm; kann mir aber nicht versagen, Greeff's jüngste Auffassung dieser Substanz hier wörtlich wiederzugeben »Im Allgemeinen kann man somit den centralen Inhalt des Vorticellenkörpers als eine dünnflüssige körnige Eiweissmasse bezeichnen, in welche von Aussen beständig Wasser und Nahrung einströmt und verdaut wird; das Produkt dieser Verdauung ist die Eiweissmasse selbst, die beständig in dem von festen Wandungen umgrenzten Innenraume rotirend, die Ernährung des Körpers bewerkstelligt.« Ich fasse diese Worte richtig wohl so auf, dass die Verdauung der Nahrung in der Eiweissmasse, und nicht durch dieselbe stattfinden soll; sonst wäre das Verdauende ja zugleich das Produkt der Verdauung, und es wäre nicht einzusehen, wodurch der Anfang einer Verdauung eingeleitet werden sollte. Nach dieser Auffassung muss dann der Vorticellenkörper, bevor das Thier Nahrung auf-genommen hat, ausschliesslich von der Rindensubstanz gebildet sein, und diese muss zugleich das Vermögen der Verdauung besitzen; erst durch die Ausübung dieser Thätigkeit entstände die centrale Substanz als das Produkt der Verdauung. — Unsere Aufgabe würde dann zunächst also darin bestehen, den Nachweis zu führen, dass erst mit der Aufnahme von Nahrungsstoffen, welche verdaut werden, sich diese Substanz bilde. Alles was ich von der Entwicklung und dem Wachsthum der Vorticella nebulifera gesehen habe, hat mir nichts gezeigt, was nach dieser Richtung zu verwerthen wäre. — Vorläufig halte ich also an meiner Anschauung fest, und bin der Meinuug, dass die centrale Substanz des Vorticellenkörpers, wie z. B. die centrale Leibesmasse einer Amöbe, ein integrirender Bestandtheil des ganzen Körpers ist, und nicht nur das Produkt der Verdauung, sondern wie der ganze Körper durch die Ernährungsvorgänge erhalten oder wachsend.

Was Greeff gegen den Vergleich der auch von mir angenommenen Schichten des Vorticellenkörpers mit einem Ectoderm und Entoderm vorträgt, trifft mich nicht. Hier hat Herr Greeff sich seine Kritik bequem gemacht, indem er den von mir aufgestellten Vergleich in einer Weise auffasst, welche mir völlig fern lag. Es heisst in meiner vorläufigen Mittheilung: »das Ectoderm entspricht der Rindenschicht mit der Cuticula, dem Bewegungsorgan und dem für die Fortpflanzung bedeutungsvollen Kern; das Entoderm entspricht der centralen Substanz mit seiner Bedeutung für die Ernährung.« Hier, wo ich also nur auf die Analogien hinweisen will, die sich auf die Thätigkeiten beziehen, welche wir in diesen unter einander verglichenen Theilen localisirt finden, schiebt Herr Greeff eine Deutung unter, die allerdings nur von der Absurdität ausgehen kann, als wäre hier in dem als einzelligen Organismus dargestellten Wesen ein Theil dem vielzelligen Ectoderm oder Entoderm morphologisch gleichwerthig. In der kurzen vorläufigen Mittheilung wäre also doch wohl, wie ich jetzt sehe, eine Bemerkung, welche in der ausführlichen Arbeit Platz gefunden hat, für zu rasch urtheilende oder übelwollende Leser angebracht gewesen. — Dass nun dieser Vergleich den Greeff'schen „Untersuchungen über die Rindenschicht und dem mehrfachen ausdrücklichen Hinweis auf verwandtschaftliche Beziehungen der Vorticellen zu den Coelenteraten« entnommen sei, ist eine Unterstellung, die ich hier gleichfalls zurückweise. Ich hatte zunächst das Ectoderm und Entoderm diblastischer Thiere überhaupt ins Auge gefasst, unbekümmert um die Anordnung, welche dasselbe bei der einen oder anderen Thierform gewinnen kann; und erst in zweiter Linie hatte ich bei meinen Erwägungen in Bezug auf die Lage des für die Fortpflanzung bedeutungsvollen Kernes die Coelenteraten herangezogen, wesentlich zunächst mit Rücksicht auf Kleinenberg's Arbeit über Hydra. — Bei diesem ganzen Vergleiche ging meine Absicht darauf hinaus, die Anordnung der für bestimmte Thätigkeiten differenzirten Theile des einzelligen Organismus, wie ich nun mal die Vorticelle auffasste, scharf hervorzuheben; das scheint Herr Greeff aber gar nicht verstanden zu haben.

Ich komme zu den Bemerkungen, welche Herr Greeff meinen Mittheilungen über die Fortpflanzungsverhältnisse gewidmet hat. Da ist es u. A. zunächst characteristisch für sein Verfahren, dass er den Vorwurf erhebt, es hätte der Zerfall des Nucleus in einzelne Segmente als neue Entdeckung vorgeführt werden sollen, während von ihm der Vorgang bereits auf das Genaueste beschrieben sei. Und nun folgt die Darstellung des Vorganges, wie sie früher von Greeff gegeben wurde, die hier aber dadurch von Interesse ist, dass sie von meinen Angaben thatsächlich abweicht. Nach Greeff zerfällt nämlich das Innere des Nucleus, während eine Nucleushaut, die später durchbrochen werden soll, bestehen bleibt: ich sage dagegen ausdrücklich: der Kern zerfalle in acht bis neun Theilstücke; von einer persistirenden Nucleushaut, welche etwa von diesen Theilstücken durchbrochen würde, ist bei mir keine Rede, eben weil ich ein derartiges Verhalten nicht gesehen habe. Und so halte ich meinen Ausdruck, der Kern zerfalle in Theilstücke, aufrecht, und konstatire damit nun nachdrücklich die Differenz mit Greeff's Anschauung, wonach nur das Innere des Nucleus zerfällt.

Meine weiteren Mittheilungen über die Veränderungen, durch welche diese Theilstücke des Kernes zu Trichodinen auswachsen, über die Umwandlung der Trichodinenform zur Vorticelle, werden zunächst mit den Bemerkungen begleitet, dass schon von anderen Forschern auf die Aehnlichkeit von Trichodinen und Vorticellen, auf die Möglickeit eines genetischen Zusammenhanges beider hingewiesen sei; Greeff selbst ist aber zu der Ueberzeugung von der Selbständigkeit der Trichodinen gelangt. Beides will ich gerne anerkennen: bin aber überzeugt, dass es dem Werth meiner auf thatsächlichen Beobachtungen beruhenden Angaben keinerlei Abbruch thut. Da nun aber gegen meine positiven Angaben nichts vorgebracht werden kann, so folgt, scheinbar in der Absicht, sie als unzuverlässig hinzustellen, die Bemerkung, dass eine sichere Verfolgung der einzelnen Individuen von Trichodina zu den grössten Schwierigkeiten gehöre. »Ein Paar der stürmischen, oft pfeilschnellen Bewegungen genügen, um das kleine Thierchen unserm Gesichtskreise zu entziehen.« Dass es mühsam ist, einzelne Trichodinen stundenlang zu verfolgen, dass zahlreiche Versuche fehlschlagen, das gebe ich Herrn Greeff gerne zu; dass aber die Schwierigkeiten, welche bei diesen Untersuchungen einem entgegentreten, zu überwinden sind, kann ich aus eigener Erfahrung ihm versichern. Ich habe mich bei diesen Untersuchungen nicht zufrieden stellen wollen mit den Ergebnissen, zu denen man kommt, wenn man die isolirten Thiere in feuchten Kammern längere Zeit erhält und beobachtet: die Vorgänge, welche ich beschrieben habe, haben sich unter meinen Augen vollzogen; und ich bin überzeugt, dass Herr Greeff diese Beobachtungen wird wiederholen können, falls er sich angelegen sein lässt, wie ich, einige Wochen hindurch täglich mehrere Stunden ununterbrochen der Beobachtung einzelner Vorticellen-Abkömmlinge und Trichodinen zu widmen.

Dass Herr Greeff schon vor Jahren einen »dreifachen alternirenden Modus der Fortpflanzung« vermuthet hat, ist allerdings wahr; dass aber diese seine Vermuthung, bei welcher die Trichodinen-Entwicklung ganz ausgeschlossen blieb, weder mit meinen Ergebnissen zusammenfällt, noch mich bei meinen Untersuchungen geleitet hat, will ich Greeff gegenüber doch hervorheben, um so mehr, da er behauptet, es seien meine Angaben »über Generationswechsel, Cystenbildung, Conjugation ohne alle Bedeutung und fast ausschliesslich wieder anderen Beobachtungen entnommen.“ Wenn Herr Greff mit den Worten: „andere Beobachtungen“ hat sagen wollen „Beobachtungen anderer Untersucher“, wie es den Anschein hat, (denn um Angaben über so verschiedene Dinge zu machen muss man selbstverständlich verschiedene „andere“ Beobachtungen gemacht haben) — so wäre es wohl angezeigt gewesen, anzugeben, wo Beobachtungen über den Generationswechsel mitgetheilt sind, welche mit den von mir gemachten zusammenfallen.

Herr Greeff schiebt mir ferner die Angabe unter, „die von Stein beobachtete Cystenbildung der Infusorien“ sei durch Mangel an Wasser *) oder starke Fäulniss hervorgerufen, während ich genau eine bestimmte Cystenbildung von Vorticellen, welche von Stein beschrieben wurde, als eine solche bezeichnet habe, die unter den in der umfassenderen Arbeit nun ausführlicher dargelegten Verhältnissen entstände, und ich bin auch jetzt noch der Meinung, dass es sich in jenem von Stein beschriebenen Falle um ähnliche Vorgänge wie die von mir beobachteten handelt. — Wenn in der vorläufigen Mittheilung gesagt wurde, dass es unentschieden geblieben sei, ob die in diesen Cysten entstandenen Körperchen parasitische Bildungen oder besondere Entwicklungszustände des zerfallenden Körpers waren, so habe ich mich in der ausführlichen Arbeit auf die dort angeführten Gründe gestützt, jetzt zu Gunsten der ersten Auffassung ausgesprochen die Möglichkeit der anderen Auffassung war mir durch die Beobachtungen nahe gelegt, welche in neuerer Zeit über die Bildung von Bacterien aus Blutkörperchen mitgetheilt waren.

Auf das, was Greeff gegen meine Mittheilung über die Conjugation vorbringt, will ich nur kurz bemerken, dass es mir gar nicht in den Sinn gekommen ist, alle Conjugationsvorgänge ohne weiteres ausser Beziehung zur Fortpflanzung setzen zu wollen. Nur um die von mir beobachtete Conjugation der Vorticelle unter den gegebenen Verhältnissen handelte es sich, und diese steht, wiederhole ich, nach meinen Beobachtungen in keiner Beziehung zur Fortpflanzung. Dass „offenbar im directen Anschluss an die ausgezeigneten Untersuchungen Cienkowski's über die Conjugation-Vorgänge die Conjugation der Vorticellen behandelt“ wird, wie Herr Greff sich ausdrückt, soll scheinbar die Auffassung begünstigen, als wäre ich hier von einer fremden Arbeit abhängig: Herr Greff hat es nämlich wohlweislich unterlassen, seiner Bemerkung hinzuzufügen, dass meine Deutung der Vorticellen-Conjugation unter den erwähnten Verhältnissen durchaus von jener abweicht, welche Cienkowski für die Verschmelzung der Noctiluca angegeben hat.

* Ich muss bemerken, dass hier durch Ausfallen einiger Worte ein sinnstörender Druckfehler entstanden ist. Es sollte nicht heissen „Mangel an Wasser“ sondern „Mangel an Luftzutritt zum Wasser“. Wassermangel führt nach meiner Anschauung zur Conjugation, wie das in der vorläufigen Mittheilung schon angegeben wurde.

Soviel zur Abwehr einer Kritik, deren Wesen wohl hinlänglich durch die von mir herangezogenen Punkte gekennzeichnet ist. Ich bin mir wohl bewusst, dass meine Untersuchungen noch weit davon entfernt sind, einen Abschluss gefunden zu haben; jene Punkte aber, auf welche Herr Greeff seine Angriffe gerichtet hat, sind es nach meiner Ueberzeugung am wenigsten, welche weiterer Untersuchung bedürfen. Hoffentlich wird es mir in nicht zu langer Zeit möglich sein, zu zeigen, dass unsere Kenntniss und Auffassung des Vorticellenkörpers aus der tiefer gehenden Erkenntniss seiner Entwicklung sich fördern lasse.

Sitzung vom 8. Dezember 1873.

Herr Prof. Dr. **Fr. Pfaff** spricht

Ueber die Bewegung und Wirkung der Gletscher.

Obwohl seit mehr als anderthalb Jahrhunderten bekannt, ist die Bewegung der Gletscher doch erst seit 45 Jahren ein Gegenstand der Untersuchung geworden. Hugi war der erste, welcher 1827 eine Messung derselben an dem Aargletscher vornahm, aber erst in den vierziger Jahren wurden diese methodisch und in einer solchen Ausdehnung vorgenommen, dass daraus sichere Schlüsse gezogen werden konnten.

Ziemlich gleichzeitig stellten Agassiz auf dem Aargletscher und Forbes auf dem Mer de Glace umfassende Beobachtungen über das Fortrücken der Eismassen an verschiedenen Stellen an. Ihren Arbeiten reihen sich die der Gebrüder Schlagintweit auf der Pasterze und die Tyndalls, ebenfalls auf dem Mer de Glace ausgeführt, an. Ausserdem haben wir noch eine grosse Reihe von Einzelbeobachtungen, d. h. solchen, welche an diesem oder jenem Gletscher die Bewegungen einer willkürlich gewählten Linie für eine kurze Zeit bestimmten. Durch diese zahlreichen Untersuchungen sind uns die Gesetze, nach welchen die Bewegung der Gletscher erfolgt, im Ganzen vollständig bekannt geworden, und auch über die Ursache dieser Bewegung ist eine Uebereinstimmung so weit hergestellt, dass es nur noch untergeordnete Punkte sind, über welche gegenwärtig noch eine Discussion möglich ist

Die Gesetze sind dieselben, welche für die Fortbewegung jeder flüssigen Masse gelten, es bewegt sich nämlich

1) die Gletschermitte stärker als die Seiten,

2) die Oberfläche rascher als die Tiefe,

3) an Krümmungen die nach dem Ufer convexe Seite schneller als die gegenüberliegende concave.

4) an engeren Stellen die Eismasse schneller als in Thalweitungen.

Dagegen zeigen sich auch wieder bedeutende Verschiedenheiten von einem Flusse, die wesentlich dadurch bedingt sind, dass das Eis als eine feste Masse den Gesetzen der Hydrostatik nicht unterworfen ist und vorzugsweise durch den Druck der höher gelegenen Firn- und Eismassen vorwärts geschoben und gepresst wird, dass es vielfache Zusammenhangstrennungen und Spalten erkennen lässt, und dass seine Bewegung von der Temperatur insoferne ganz bedeutend beeinflusst wird, als das oberflächlich geschmolzene Wasser, in die Tiefe gelangend, das Gleiten der Masse nachweisbar bedeutend vermehrt, so dass nach den bis jetzt allerdings spärlichen Beobachtungen die Bewegung im Winter nur etwa die Hälfte von der des Sommers beträgt.

Es haben daher auch nur die oben erwähnten 4 Gesetze der Bewegung allgemeine Gültigkeit; dagegen scheint jeder Gletscher seine besonderen Eigenthümlichkeiten in Beziehung auf die übrigen bei der Bewegung in Frage kommenden Verhältnisse zu besitzen, die gewiss von localen Eigenthümlichkeiten bedingt sind und noch viel Räthselhaftes darbieten, was wohl erst nach eingehenden Detailstudien an einer grossen Anzahl von Gletschern aufgehellt werden kann. Sehen wir auch ganz ab von der paroxystisch sich steigernden Bewegung einzelner Gletscher, wie des Vernagt, so ist die Quantität der Bewegung an verschiedenen Stellen der Länge des Gletschers nach eine auffallend verschiedene bei verschiedenen Gletschern. Am Aargletscher z. B. betrug sie ein Maximum ziemlich in der Mitte zwischen Firn und Gletscherende, beim Mer de Glace nahm sie vom Firn an eine Zeit lang zu, dann wieder ab, dann zu bis zum Ende, beim Morteratsch nimmt sie nach den vorliegenden allerdings wenigen Beobachtungen bis zum Ende ab, an der Pasterze von oben nach unten constant zu. Aus den bisherigen Beobachtungen geht so viel hervor, dass die Bewegung aller Gletscher eine sehr langsame und nur mit Hülfe feinerer Messinstrumente genau zu ermittelnde sei, die sich einigermassen abhängig zeigt von der Temperatur. Die stärkste bisher beobachtete Bewegung zeigt die Mer de Glace nämlich 864 mm. in 24 Stunden, dann folgt der Gurgler Gletscher mit 771 der Aargletscher mit 374, die Pasterze mit 257 mm. Vertheilt man diese Bewegung gleichmässig auf die 24 Stunden, so kommt auf je eine Stunde bei den genannten Gletschern 36 — 32 — 15 — 10,7 mm. und da dieses Maximum der Bewegung ziemlich nahe der Mitte des Gletschers zu liegen kommt, und nach dem Ufer zu sich bedeutend verringert, so war es nach dem bisher angewandten Verfahren der Messung nicht möglich die Frage zu beantworten: Welcher Art ist die Gletscherbewegung? Erfolgt dieselbe nach Art der Bewegung des Wassers gleichmässig und ununterbrochen oder ungleichmässig und ruckweise. Die bisherigen Messungen der Bewegung hatten nämlich alle den Zweck, die Gesetze für dieselbe und den Betrag des Fortrückens für die ganze Breite des Gletschers zu ermitteln und es musste zu diesem Behufe eine grössere Anzahl von Pfählen in einer geraden Linie, die senkrecht auf der Längsachse des Gletschers steht, aufgepflanzt und beobachtet werden. Das war und ist nur dadurch möglich, dass man einen Theodolithen so am Ufer aufstellt, dass man die ganze Reihe mit einem Male übersehen kann. Die wellige und gewölbte Form der Gletscheroberfläche macht es nothwendig, das Instrument ziemlich hoch am Ufer, also jedenfalls in beträchtlicher Entfernung von der Gletschermitte aufzustellen. Bedenken wir, dass die Breite der genannten Gletscher zwischen 1000 und 2000 Meter beträgt, so werden wir die Entfernung des Punktes, welcher das Maximum der Bewegung zeigt, im Minimum zu 600 Meter von dem Messinstrumente annehmen dürfen. In diesem Falle verhält sich also selbst das gefundene Maximum der Bewegung für 1 Stunde, 36 mm. zur Entfernung 600 Meter = 1 : 16666, was einer Drehung des Instrumentes von 12 Sekunden entspricht also eine Grösse, die gerade an der Grenze der Leistungsfähigkeit der gewöhnlichen Theodolithen steht. Bei dem wohl am häufigsten angewandten Verfahren, einen Gehülfen mit einem Zollstabe die Entfernung des vorgerückten Stabes von einem 2. messen zu lassen, der genau in derselben Visirlinie aufgestellt oder nur gehalten wird, in welcher der erste Stab, als er befestigt wurde, sich zeigte, giebt ebenfalls keine grössere Genauigkeit, und Fehler von 1—2 Centimeter sind bei der angenommenen

Entfernung nicht zu vermeiden, indem 1 Cm. auch nur bei einer Entfernung von 500 Meter unter einem Gesichtswinkel von 4 Sekunden erscheint. Zur Beantwortung unserer beiden Fragen, ob die Bewegung des Gletschers gleichmässig und ununterbrochen vor sich gehe, ist es aber selbstverständlich nothwendig, die Fortbewegung wo möglich auf Bruchtheile eines Millimeter messen zu können. Es leuchtet wohl auch ohne weitere Auseinandersetzung ein, dass man zu solchen minutiösen Messungen nicht vom Ufer weit entfernte Stellen benützen kann, sondern nur nahe dem Ufer gelegene.

Der Uebelstand, dass hier die Bewegung eine sehr gering ist, kommt bei dem Mikrogoniometer *), wie ich das zum Messen eingerichtete Mikroscop genannt habe, nicht sehr in Betracht, da mit demselben Bewegungen, die selbst unter $^1/_{20000}$ mm. herabgehen, noch wohl gemessen werden können. Die Hoffnung mit diesem die Frage nach der Art der Gletscherbewegung beantworten zu können, hat sich bei einem Besuche des Aletschgletschers in den verflossenen Herbstferien auch als eine vollkommen gerechtfertigte herausgestellt. Ich wählte diesen Gletscher, weil er der grösste aller Eisströme der Alpen ist und seiner ganzen Gestaltung nach als ein sehr regelmässiger und einfache Verhältnisse darbietender sich zeigt und nahe demselben im Hotel Riederalp eine ebenso günstig gelegene als angenehme Station sich findet. Ich überzeugte mich auch bald, dass gerade in diesem Jahre die zu einer solchen Messung erwünschte Beschaffenheit des Gletscherrandes an einer 1500 Meter über dem Ende gelegenen Stelle vollständig vorhanden war. Es fand sich nämlich eine felsige Terrasse hart am Eise, die erst kürzlich von dem wie alle Gletscher der Alpen gegenwärtig stark sich erniedrigenden Aletsch verlassen war, und über dieselbe zunächst ungefähr $1^1/_2$ Meter fast senkrecht aufragend das feste wenig zerklüftete Eis, das gegen die Mitte zu allmählig sich erhob. Das von der Terrasse sehr steil abfallende Ufer war, soweit man sehen konnte durch eine sehr schmale Kluft von dem Eise getrennt, so dass eine Reibung der obersten Eislagen am Ufer hier nicht Statt fand. Auf dieser Terrasse wurde nun das Messinstrument auf einem Theodolithenfusse aufgestellt. Ich hatte schon hier ein festes Gestell, aus einem horizontalen Kreuze mit

*) Das Mikrogoniometer ein neues Messinstrument, Erlangen, E. Besold 1872.

einem darauf befestigten senkrechten Arme von $1^1/_3$ Meter Höhe anfertigen lassen. An dem letzteren, möglichst nahe seinem unteren Ende war ein aus Blechröhren, die wie die Röhren eines Zugfernrohres in einander passten, gefertigter Arm, der sich zugleich auf das vordere Ende des einen horizontalen Theiles des Kreuzes stützte, unbeweglich befestigt. Die dünnste Röhre trug an einem starken Drahte von Aluminium eine sehr feine Nadelspitze. Durch Versuche in einem Saale der geologischen Sammlung hatte ich gefunden, dass ich den Arm 7 Meter lang machen konnte, ohne dass er schwankte, allein auf dem Gletscher war dieses nicht möglich. Erst als ich ihn auf 2 Meter verkürzt hatte, hörte das Zittern der Nadelspitze ganz auf, was für ein genaues Einstellen natürlich unerlässlich war. An den Enden des Kreuzes waren unten kleine Klötzchen von Holz befestigt, die wie das Kreuz selbst zuerst mit heissem Leinöl getränkt und dann mit Oelfarbe angestrichen waren. So ruhte das Kreuz nur mit seinen Enden auf dem Eise, das vor der Aufstellung soweit als es nöthig war eingeebnet wurde. Um eine Verrückung desselben zu verhindern, wurde es mit flachen Steinen beschwert und um eine Neigung desselben durch allenfallsige ungleiche Abschmelzung des Eises zu vermeiden, bedeckte ich die auf dem Eise ruhenden Enden mit weissen Tüchern. Ein an dem senkrechten Arme angebrachtes Loth gestattet sich von dem Nichteintritte einer Neigung zu überzeugen.

Ausser diesem Kreuze war noch ein mit einer eisernen Spitze versehener Stab in einer Entfernung von 8 Meter vom Rande des Eises in demselben unbeweglich befestigt. Etwa 30 cm. über dem Eise trug er eine unmittelbar in $^1/_2$ mm. getheilte Skala und ein Bleiloth, um auch an ihm seine unveränderte Stellung gegen den Horizont constatiren zu können. Auf die Skala wurde ein Fernrohr gerichtet, das mit einem 2zölligen Objectiv und einem astronomischen Oculare versehen, eine 60fache Vergrösserung gewährte, so dass damit auch eine Verrückung der Skala von $^1/_5$ mm. ganz gut erkannt werden konnte.

Die Beobachtung der Nadelspitze des Kreuzes mit dem Mikrogoniometer ergab nun unzweifelhaft, dass die Fortbewegung des Eises ohne alle Unterbrechung erfolgte. Die Nadelspitze rückte continuirlich durch das Gesichtsfeld ohne je den geringsten Stillstand zu zeigen. Ich beobachtete ohne auszusetzen, so lange es das Auge vertrug, ohne je ein auch nur momentanes Aufhören der Bewegung zu bemerken. Statt des Fadenkreuzes hatte ich ein Glasplättchen mit 1 horizontalen und 5 denselben kreuzenden senkrechten Strichen angebracht und mittelst einer Secundenuhr wurde jedesmal die Zeit gemessen, welche verfloss, bis die Nadelspitze von dem ersten bis zum dritten oder vierten der Striche gelangt war, dann wurde mit Hülfe der Mikrometerschraube an der Kreistheilung rasch das Mikroskop wieder so gerichtet, dass die Nadelspitze wieder am ersten Striche erschien. Welchem Betrage in mm. bei der angewandten Vergrösserung (60) diese Fortbewegung der Nadel von einem Theilstriche zum andern entsprach, wurde mittelst des Instrumentes selbst leicht an einem feinen Glasmikrometer bestimmt. Obwohl ich bei dem Verfolgen der Bewegung der Nadel eine Ungleichheit in der Schnelligkeit nicht wahrnehmen konnte, so zeigte die Messung doch eine solche sehr deutlich. Im Mittel betrug dieselbe 0,066 mm. für eine Minute und schwankte zwischen 0,057 und 0,08 mm.

Würde man dieses in den Mittagsstunden bei sonnigem warmen Wetter gefundene Mittel auch für die Nacht und für den ganzen Tag als giltig annehmen, so würde das eine Fortbewegung dieser Stelle des Gletschers von 95 mm. in 24 Stunden ergeben. Für den Rand wäre dies die stärkste bis jetzt beobachtete Bewegung. Wir werden aber gleich sehen, dass es nicht zulässig erscheint, auch für die kälteren Stunden und die Nacht jene Zahl als Mittel gelten zu lassen, sondern dass wir für diese eine geringere Mittelzahl annehmen müssen. Es ergiebt sich dies aus den Beobachtungen an dem etwas entfernteren Stabe mit der Skala, die an 2 Tagen in den Stunden von Vormittag 11 Uhr bis Nachmittag $5^1/_2$ Uhr vorgenommen wurden. Zunächst zeigte sich auch hiebei, dass die Bewegung ununterbrochen vor sich gehe; da wie oben erwähnt wurde, $^1/_5$ mm. mit dem Fernrohre noch ganz gut unterscheidbar war, so hätte eine Unterbrechung der Bewegung und ein ruckweises Auftreten derselben sich auch mit diesem wohl bemerklich machen müssen. Aber auch mit diesem Instrumente zeigte sich die Bewegung gleichförmig, es rückte ein Theilstrich nach dem andern durch das Fadenkreuz. Auch diese Beobachtung ergab jedoch eine sehr merkliche Ungleichheit der Bewegung. Während sie nämlich im Mittel für die ganze Beobachtungszeit 19 mm. für die Stunde betrug, ergab sie um 12 Uhr 8 mm. für dieselbe Zeit, Nachmittag um 4 Uhr 10, um $4^3/_4$ 24 mm. stieg bis 5 Uhr 5 Minuten, wo sie 30 mm.

für die Stunde ergeben hätte und sank um $5^1/_2$ Uhr wieder auf 18 mm. herab. Die Differenz zwischen Maximum und Minimum ist hier allerdings sehr bedeutend, indem das erstere fast das 4fache von dem Minimum erreichte. In dieser Beziehung ist also ein sehr grosser Unterschied zwischen der Bewegung eines Flusses und der eines Gletschers, indem der erstere bei gleichbleibender Wassermenge auch eine gleichbleibende Stromgeschwindigkeit an derselben Stelle erkennen lässt, während an einem Gletscher dieselbe im Verlauf weniger Stunden, wo wir eine Veränderung der Eismenge nicht annehmen können, beträchtlich wechselt. Aus den Beobachtungen von Agassiz auf dem Aargletscher vom Jahre 1845 geht übrigens deutlich hervor, dass auch für auf einander folgende Tage eine bedeutende Ungleichheit der Bewegung sich an diesem Gletscher herausstellte, die für den halben Tag von 6 Uhr Morgens bis 6 Uhr Abends in der Mitte des Gletschers zwischen 80 und 210 mm. schwankte. Ein direkter Einfluss der Witterung lässt sich zwar für die grösseren Schwankungen nachweisen, die sich bei Vergleichung der Bewegung in verschiedenen Jahreszeiten ergeben, aber für diese in so kurzen Zeiträumen auftretende Ungleichheit der Bewegung lassen sich meteorologische Verhältnisse durchaus nicht zur Erklärung herbeiziehen und es werden wohl noch ausgedehntere Beobachtungen angestellt werden müssen, ehe wir über die Gletscherbewegungen vollständig klar sein werden.

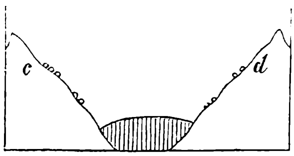
Und dennoch ist uns gerade darüber eine genauere Kenntniss nöthig, wenn wir etwas mehr als blosse Vermuthungen über einen Gegenstand aufstellen wollen, der in der neueren Zeit vielfach behandelt worden ist und zu den lebhaftesten Kontroversen Veranlassung gegeben hat. Ich meine die Thalbildung in den Alpen und den Einfluss der Gletscher auf dieselbe, worüber ich noch einige Bemerkungen hier anfügen will. Wie so häufig bei geologischen Erscheinungen sehen wir auch hinsichtlich des Einflusses der Gletscher die Meinungen so weit als möglich auseinandergehen. Ramsay und Tyndall stellen die alpinen Thäler und Seen z. Th. als durch die Gletscher »ausgehobelt« dar, sie lassen also die Thäler unter den Gletschern durch deren Fortbewegung entstehen, während Rütimeyer in seiner vortrefflichen Schrift »Ueber Thal- und Seebildung« die Gletscher als die entschiedensten Erhalter des Bodens, als ein eminent conservirendes Element hinstellt und behauptet: »Mit Vergletscherung wird

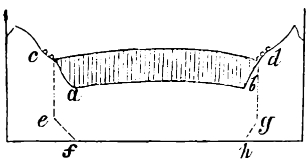
Thalbildung stille gestellt; sie geht nur ausserhalb und überhalb der Eisdecke vorwärts.« Diese Erscheinung lässt wohl den sicheren Schluss zu, dass wir uns eben bei dieser Frage noch mehr auf dem Gebiete der Vermuthungen als auf dem sicheren Boden von Thatsachen und Beobachtungen befinden und bei näherer Betrachtung dieser Eishobeltheorie sehen wir auch sehr klar, dass es gegenwärtig gar nicht möglich ist, sichere Beweise für oder gegen sie aus unserer jetzigen Gletscherkenntniss herzunehmen, indem uns nahezu Alles unbekannt ist, was wir wissen müssten um diese Hypothesen als wahr oder falsch hinzustellen. (Ueberhaupt scheint es Angesichts der Thatsachen, welche beweisen, dass Thäler auf sehr verschiedene Weise entstehen können, ganz unzulässig von einer Thalbildung im Allgemeinen zu reden, wir können immer nur ganz bestimmte einzelne Fälle betrachten). Trotzdem können wir doch diese Theorie insoferne einer Prüfung unterwerfen, als wir einmal die Voraussetzungen, die sie, wenn auch stillschweigend macht, näher untersuchen können, ebenso die Schlüsse, die mit Nothwendigkeit aus ihr hervorgehen und diese dann mit den Thatsachen, die uns die Beobachtung lehrt, vergleichen. Gehen wir zunächst an die Voraussetzungen. Wenn ein Gletscher das Thal aushöhlte und erzeugte, so müssen wir nothwendig voraussetzen, dass der Gletscher eher da war, als das Thal. Nun wissen wir aber bis jetzt nur das von dem Alter der Gletscher, dass sie alle nicht weiter als bis in die tertiäre Formation zurück verfolgt werden können. Jedes der Gletscherwirkung zugeschriebene Thal darf daher nicht älter sein, als die Tertiärzeit. Nun ist aber ganz entschieden ein grosser Theil der alpinen Thäler in Gesteine eingeschnitten, die weit älter sind und keine Spur von tertiären Ablagerungen tragen. Nach den bis jetzt geltenden geologischen Grundsätzen müssen wir dieselben auch zur Zeit der Tertiärformation als Festland annehmen und natürlich auch die Thalbildung zu derselben Zeit beginnend, in welcher diese Massen ins Trockne gelangten. Da die Gletscherwirkung seit einer kurzen Zeit erst wirkt, so müsste bei jedem Thal, das ihrer Wirkung zugeschrieben wird, zuerst die Untersuchung damit anfangen, in welche Zeit haben wir den Beginn der Bildung dieses Thales zu setzen? Eine zweite Voraussetzung, mit der diese ganze Theorie steht und fällt, ist die, dass sich die ganze Gletschermasse, auch auf ihrem Grunde noch fortbewege, denn es ist offenbar, dass wenn sich die untersten Schichten eines

Gletschers nicht über den Boden fortbewegen, sondern fest auf ihm ruhend sind, eine Abhobelung des Bodens nirgends erfolgen kann. Das einzige, was wir aber bis jetzt hinsichtlich dieser Frage durch Beobachtung wissen, ist das: die Gletscher bewegen sich an ihrer Oberfläche rascher als in der Tiefe. Ganz unbekannt ist uns aber das Gesetz, welchem die Abnahme der Geschwindigkeit mit der Tiefe folgt, und ebenso unbekannt die Dicke der Gletscher. So lange wir aber über diese beiden Verhältnisse nichts wissen, ist es reine Geschmackssache, ob man die Gletscherbewegung bis auf den Grund oder nur bis in eine gewisse Tiefe reichend annehmen will.

Wir sehen also, dass diese Theorie von 2 Voraussetzungen ausgeht, von denen die erstere in vielen Fällen entschieden falsch, die zweite in keiner Weise erwiesen ist. Wie sieht es nun mit den Folgerungen aus, zu denen sie führt? Dieselbe nimmt an, das Thal sei nach und nach durch den Gletscher ausgehobelt worden, der Grund immer mehr vertieft worden. Betrachten wir nun den gegenwärtigen Zustand eines Thales, in dem sich ein Gletscher befindet, so bietet es uns folgenden Durchschnitt, A. steigen wir an seinen Wänden hinauf, so können wir in der That s i c h e r e Spuren der Anwesenheit des Gletschers bei c, d bei manchen bis zu mehr als 1000 Fuss über die jetzige Oberfläche des Gletschers verfolgen. Nach der Aushobelungstheorie bot dann früher dasselbe Thal den Durchschnitt B dar.

A





A B

Und nun möchten wir fragen, wenn durch seine Abreibung auf dem Grunde a b und an den Seiten a c und b d der Gletscher das Thal vertiefte, wie kommt es, dass es sich nach unten verengt und nicht die Form c d h f angenommen hat? Die überall beobachtbare Verengerung des Thales nach unten scheint mir nach dieser Theorie vollkommen unerklärlich, sie führt nothwendig zu der Folgerung, dass der Gletscher durch seine Reibung das Thal immer tiefer aber sich immer schmäler gemacht habe, ohne dass irgend ein Grund für diese letztere Erscheinung angeführt werden kann. Denn der Verwitterung der vom Eise durch das Sinken des Gletschers frei gewordenen Stellen kann es deshalb nicht zugeschrieben werden, weil uns eben die bis c d wohl erhaltenen Spuren der Gletscherwirkung erkennen lassen, dass die Verwitterung seit dem sich der Gletscher zurückgezogen, um keinen halben Zoll die Felswände abgetragen habe.

Damit kommen wir sofort zu einer zweiten Folge dieser Theorie, welche nicht weniger fatal für dieselbe ist, sie muss nämlich eine ungeheuer rasche Aushöhlung der Thäler durch die Gletscher annehmen. Die Beobachtung zeigt uns nämlich sehr deutlich bis zu Höhen von mindestens 1000 Fuss über dem jetzigen Gletscher wohlerhaltene Gletscherschliffe und durch denselben erzeugte Schrammen. Dieselben sind von der Verwitterung noch nicht vertilgt. Freilich geben uns die Vertreter dieser Thalbildungstheorie keine Zahlen über den Betrag der Aushöhlung und der Verwitterung, aber wir müssen unter allen Umständen über das Verhältniss dieser beiden Faktoren, wie es sich nach dieser Theorie gestalten muss, folgendes schliessen: In der Zeit, in welcher die Verwitterung nicht im Stande war, seichte Furchen von den Felsen zu tilgen, die der Gletscher erzeugt, hat der Gletscher das Thal so ausgehöhlt, dass er sein stärkeres Abschmelzen in der Gegenwart mit eingerechnet 1000 Fuss tiefer liegt, als jene Zeichen. Eine weitere nothwendige Folge dieser Theorie ist die Annahme, dass die Gletscher vor den Thälern existirt haben, während nach allen Beobachtungen, die wir jetzt machen, ein Thal eine nothwendige Vorbedingung für das Bestehen eines solchen ist. Denn denken wir uns die Gletscherthäler mit Gesteinsmasse ausgefüllt, so bleibt uns nichts übrig als eine Hochebene, auf der wohl Schnee- und Firnmassen, aber kein Gletscher bestehen kann.

Es würde hier viel zu weit führen, noch näher auf diese und andere Schwierigkeiten dieser Theorie der Thalbildung durch die Gletscher einzugehen, da man ohnediess bei einer strengeren Diskussion derselben sich an ganz bestimmte Fälle halten müsste. So viel scheint mir aber sicher aus diesen allgemeinen Betrachtungen hervorzugehen, dass diese Theorie mit ihren Voraussetzungen und Folgerungen sich die grössten Schwierigkeiten bereitet und dass sie überdiess durchaus keine Beobachtung anführen kann, welche die Thalbildung durch die Gletscher auch nur wahrscheinlich machte.

Dagegen möchte ich auch nicht ohne Weiteres das entgegengesetzte Extrem, die Meinung Rütimeyer's als die richtige ansehen. Angesichts der Thatsache, dass die Gletscher bei ihrer Vorwärtsbewegung an ihren Seitenwänden die Felsen abrunden und abschleifen, dass eine ähnliche Einwirkung, wenn sich ein Gletscher zurückzieht, auch auf dem Grunde an seinem Ende klar zu erkennen ist, muss man die Möglichkeit einer wenn auch noch so geringen Vertiefung und Erweiterung seines Bettes zugestehen. Allerdings müssten wir aber den Betrag dieser Thätigkeit einigermassen schätzen oder bestimmen können und vor Allem nachweisen, dass er auf seinem ganzen Grunde eine ähnliche Thätigkeit entfaltete, wenn wir eine Bildung des Thales durch die Gletscher annehmen wollten. So lange das nicht der Fall ist, hat die Behauptung Rütimeyer's insoferne mehr Anspruch auf unsere Glaubwürdigkeit, als sie in keiner Weise den bis jetzt bekannten Thatsachen widerspricht und uns von den grossen Schwierigkeiten befreit hält, welche der Hypothese von der Aushöhlung der Thäler durch die Gletscher erwachsen. Den Nutzen wird die letztere jedenfalls haben, dass sie die Aufmerksamkeit auf diesen noch so wenig der Beobachtung unterworfenen Punkt der Gletscherfrage mehr zuwenden kann.

Herr Prof. Dr. **Wintrich**

macht Mittheilungen über Versuche, welche von demselben unternommen worden sind, um nach dem Vorschlage W. Weber's einen Tonstärkemesser zu gewinnen.

Längst wurde im Gebiete der Akustik ein Tonstärkemesser vermisst. Die bereits im Anfange dieses Jahrhunderts begonnenen Versuche missglückten.

Das Vertrauen auf einen so genialen, durchgebildeten und gerade in der Akustik so hoch verdienten erfahrenen Mann, wie W. Weber, veranlasste den Vortragenden, desselben Vorschlag, durch eine Zungenpfeife einen solchen Maassstab für die Tonstärke zu erlangen, experimentell genau zu prüfen.

Das Endresultat der mühevollen Untersuchungen war leider bezüglich des Hauptzweckes ein deprimirend negatives.

Doch entschädigten die interessanten und auch praktisch verwendbaren Nebenerfolge.

Darüber zu berichten ist die Intention dieses Vortrags.

In Poggendorff's Annalen B. XVI p. 198 spricht W. Weber von der Eigenschaft der Zungenpfeifen mit durchschlagenden Zungen, welche diese befähigt, je nach dem Unterschiede der Dichtigkeit der äusseren, auf die äussere Fläche der Zungenplatte drückenden, und der inneren, auf die innere Fläche der Platte drückenden, Luft — die Stärke des so erzeugten Tones zu bestimmen. Demnach wäre die Intensität eines solchen Tones proportional der Differenz dieser Dichtigkeiten.

Wie einfach, wie verlockend ist der Weber'sche Vorschlag! Sehr empfindliche Manometer diesseits und jenseits der Platte, wie leicht sind sie herzustellen und wie scheinbar mühelos wird also die Bestimmung sein! —

Mit diesen etwas sanguinischen Gedanken gieng der Vortragende an die Arbeit.

Diese deckte sehr bald Schwierigkeiten auf und zwar von so einflussreicher Bedeutung, dass sie selbst bald eine Quelle des Misstrauens und des Zweifels wurden.

Der Vortragende will die Gesellschaft nicht langweilen mit der vollständigen Auseinandersetzung dieser Schwierigkeiten und nur zwei Umstände schärfer ins Examen nehmen, an welchen die ganze Untersuchung hauptsächlich scheiterte.

Der Eine dieser Umstände wurde erst spät und nur auf Umwegen entdeckt.

Bei der Untersuchung der Fortleitung von Schallschwingungen durch verschiedene Medien — nicht bezüglich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sondern in Rücksicht der Intensität — benützte der Vortragende auch Klangstäbe und am häufigsten und erfolgreichsten Stimmgabeln.

Eine sehr lang fortklingende Stimmgabel von 435 Schwingungen in der Sekunde zeigte sich besonders brauchbar. Die mit ihr construirte Vorrichtung ist nachstehende:

Auf einem kleinen Tischchen wird ein Schallkegel (ähnlich wie am Polyskope des Vortragenden, vide verschiedene Nummern der medizinischen Neuigkeiten 1873 u. 1874) angeschraubt und dessen breiteres Ende mit einer zarten, empfindlichen Kautschukmembran in mässiger Spannung verschlossen. Von diesem Kegel gehen zwei Gummischläuche als Zuleitungsröhren für beide Ohren des Explorators ab. Auf die Membran ist eine kleine Holzscheibe geleimt als Träger eines Messinghäckchens. An dieses Häckchen wird das passende Leitungsmedium zweckmässig befestigt und von hier aus senkrecht nach oben geleitet und am anderen Ende an einer Scheibe aus dünnem Weissblech, welche ebenfalls nach abwärts ein Häckchen besitzt, eingehängt. Die obere Fläche dieser Scheibe trägt in einer Hülse die gerade aufwärts stehende Stimmgabel. Eine dünne Kautschukröhre ist als Schlinge am Rande der Blechscheibe festgemacht. Mittelst dieser Schlinge wird der ganze Apparat an einen kleinen Flaschenzug befestigt, welcher von der Zimmerdecke herabhängt.

Zur Erregung der Gabelschwingungen dient ein ganz kleines Kautschukhämmerchen mit dünnem Fischbeinstiel. Der wenn auch elastische Anschlag wird so leicht ausgeführt, dass man den Stimmgabelton in freier Luft und mit unbewaffneten Ohren in allernächster Nähe nicht hören kann.

An einem solchen, wie eben kurz beschriebenen Apparate, machte der Vortragende unter vielen möglichen zwei Fundamentalexperimente, welche genügen dürften, den beabsichtigten Aufschluss zu geben.

Zwischen die Scheibe mit der Stimmgabel und den Schallkegel wurde ein solider Strang von vulkanisirtem Kautschuk, etwa 20 Centimeter lang und 4 Millimeter dick eingehängt und mittelst Gewichten am Flaschenzuge mässig gespannt.

Erregte man leise die Schwingungen der Gabel so, dass die Excursionen nur sehr klein ausfallen mussten, dann vernahm man doch, nachdem die Zuleitungsröhren des Polyskopes in beide Ohren gesteckt worden waren, also binotisches Hören gegeben war, den Ton der Stimmgabel (das a der neuen Orchecterstimmung) sehr laut und etwa 4 Sekunden lang ohne sinnenfällige Abnahme der Intensität. Die ganze Dauer des Tones nach solcher, wenn auch leiser einmaliger Anregung beträgt circa 30 Sekunden.

Es dürfte wohl kaum nöthig sein, zu bemerken, dass unter den gegebenen Umständen die Schwingungen der Gabel nur durch den Kautschukstrang zu den Ohren des Beobachters gelangen konnten und nirgends anders woher.

Wurde nun der Kautschukstrang mit den Fingern oder einer Zange an irgend einer Stelle in geringer Ausdehnung gedrückt, so zog sich der Ton in jene Höhe, welche die Gabel vor das Ohr gehalten am Ende ihrer Ausschwingung zu geben pflegt. Sobald der Strang vom Drucke befreit war, in demselben Momente kehrte der tiefere Ton zurück. Diese Abwechselung konnte man während derselben, also einer einzigen Schwingungsdauer, 8—10 und mehrere Male eintreten lassen. Selbst am Ende einer solchen durch einen einmaligen leisen Stoss erzeugten Schwingungsdauer, also zu einer Zeit, in welcher die Excursionen sehr kleine sein mussten, war der Wechsel der Tonhöhe noch mit aller Bestimmtheit bis zum Erlöschen der Wahrnehmung zu unterscheiden.

Mit dem Wechsel der Höhe war aber auch bis zum Aufhören der hörbaren Schwingungen eine sehr auffällige Differenz der Intensität verbunden. Immer und immer war der tiefere Ton viel stärker und der höhere schwächer. Es wechselte darnach also auch während ein und derselben Schwingungsdauer die Intensität bis zum völligen Erlöschen der hörbaren Schwingungen.

Unter der ziemlich grossen Zahl von möglichen Experimenten mit anderen Leitungsmedien und gleichen Hauptresultaten wählte der Vortragende das folgende Gegenexperiment aus, um die Evidenz des bezeichneten Verhaltens gegen Einwürfe noch mehr zu schützen.

Ein englischer Stahldraht in der Dicke eines Millimeters, mit grosser Sorgfalt gleichmässig ausgeglüht, etwas über 1 Schuh lang, wurde beiläufig in der Mitte mit kleinem Krümmungsradius zwei Male umgebogen.

Dieser Draht wurde unter den Einfluss derselben Umstände gebracht, wie der Kautschukstrang. Der Stimmgabelton erschien sofort etwas tiefer und auffällig stärker, wenn man mit den Fingern den Draht an beiden Krümmungstellen drückte und augenblicklich wieder höher und schwächer, sobald man das Zusammendrücken unterliess. An den Krümmungsstellen sind nämlich die Molecule in der concaven Seite näher aneinander gepresst und an der convexen Seite auseinander gezerrt. Dass dadurch eine störende Aenderung der Schwingungsphasen an den bezeichneten Stellen eintreten musste, wenn Schallpulse durchgeleitet werden, dürfte ausser Zweifel sein. Der Druck mit den Fingern scheint die ungleiche und störende Einwirkung der verschieden sich verhaltenden Molecule zu vermindern und so die regelmässige Pendelbewegung der Schwingungen in dem von der Störung freieren Kern des Drahtes zu ermöglichen Die Abwechselung der Höhe und Intensität zeigte sich auch bei diesem Experimente bis zum Erlöschen der Wahrnehmung des Tones während derselben durch einmalige Anregung erzeugten Schwingungsdauer.

Dieses Verhalten bei beiden Experimenten wurde von mehreren Mitgliedern der Gesellschaft controlirt.

Die Zinke einer Stimmgabel ist bekanntlich denselben Gesetzen der Klangstäbe unterworfen, wie die durchschlagende metallene Zunge bei irgendwelchen derartigen musikalischen Instrumenten. Da sich nun, wie die beiden vorgeführten Experimente zeigen, dieser Tonfactor als ein bezüglich der Schwingungszahl und der Intensität so leicht veränderlicher erweist, so fehlt ihm jene Constanz, welche ein mathematisch verwendbarer Maassstab besitzen muss.

Um auch solchen Forschern, welchen eine so empfindliche Vorrichtung, wie die der Gesellschaft von dem Vortragenden gezeigte, nicht zu Gebote steht, die Controle der vorgeführten Thatsachen zu erleichtern, diene nachstehende Bemerkung:

Zwei Stäbe aus Tannenholz von der Länge eines Schuhes und der Dicke eines Centimeters genügen, um in einfachster wenn auch etwas grober Weise dasselbe Verhalten zu constatiren.

Das eine Ende eines solchen Stabes steckt man in eine etwa thalergrosse und 1 Centimeter dicke Scheibe aus Korkholz, welche letztere als Ohrplatte, wie bei einem Stethoskope, benützt wird. In der Mitte verbindet man beide Stäbe durch einen genügend kurzen Abschnitt einer passenden Kautschukröhre so, dass die Stäbe durch Ziehen daselbst ausser Berührung kommen und beim Nachlasse des Zuges sich wieder aneinander legen. Am freien Ende des zweiten Stabes lässt man eine Stimmgabel schwingen. Sobald nun die Schwingungen von dem einen Holzstabe zu den anderen nur mittelst der Kautschukröhre und der kleinen Luftschicht zwischen den Stäben gelangen können während des Trennungszuges, in demselben Momente zieht sich der Gabelton in die Höhe und wird auffällig schwächer. Beim Nachlass des Zuges, also bei wieder eintretender Berührung der Stäbe, tönt die Gabel sofort tiefer und viel intensiver. Diese Abwechselung kann ebenfalls während einer einzigen Schwingungsdauer mehrere Male mit dem gleichen Erfolge wiederholt werden.

An den vorhin beschriebenen Stahldraht kann ebenfalls mittelst Siegellack eine Ohrplatte gleicher Art befestigt werden, um die gleichen Resultate, wie durch das Polyskop, beim Aufsetzen der schwingenden Gabel an das freie Ende des Drahtes zu erreichen. Nur muss der Anschlag an die Gabel in diesen beiden Experimenten ziemlich kräftig sein.

Wie ist nun dieses verschiedene Verhalten des Stimmgabeltones während einer einzigen Auschwingungsdauer bezüglich der Differenz der Intensität und der Höhe (Schwingungszahl in der Zeiteinheit) je nach den eingeführten, veränderten Umständen zu erklären?

Diese Erklärung gestaltet sich befriedigend einfach, wenn man die von allen mathematisch und praktisch gebildeten Akustikern bestätigte Wahrheit zu Grunde legt, dass die Schwingungszahl eines Tones oder Klanges bei der Fortleitung durch verschiedene Medien nicht verändert werde.

Da man nun während einer und derselben Ausschwingungsdauer eines Stimmgabeltones bald einen höheren, bald einen tieferen Ton je nach den angegebenen Veränderungen der Umstände zu hören bekommt, so bleibt nur die einzige Vorstellung als die richtige in Rest, dass eben die Schwingungen eines und desselben Stimmgabeltones zu gleicher Zeit mit ungleichen Perioden vor sich gehen: schnellere und langsamere Pendelbewegungen müssen nebeneinander bestehen.

Diese Vorstellung ist keine neue. Grosse Mathematiker und Physiker haben sie theoretisch in aller wünschenswerthen Klarheit ausgebildet. So Taylor (Method. incrementorum. London, 1715; pag. 88—93), D. Bernoulli (Comment. Petrop. T. III, 1728, pag. 13), Poisson (Traité de mécanique, T. II, pag. 304). Diese Forscher liessen die vollkommene Gleichzeitigkeit der Schwingungen überhaupt und speziell bei Klangstäben, also auch Stimmgabeln nur unter der Voraussetzung zu, dass diese unendlich klein seien.

Der thatsächliche Nachweis aber fehlte. Was die Vibrographie oder die optischen Methoden bei dem jetzigen Standpunkte in der angeregten Frage nicht zu zeigen vermögen, das wird durch die angegebenen Experimente in einfacher Weise thatsächlich bewiesen.

Wenn aber nun bei einem Stimmgabelton Schwingungen von verschiedener Periode gleichzeitig vorhanden sind, und die Differenz der Schwingungszahl keine sehr grosse ist, warum höre ich den Unterschied nicht, warum kann ich auch keine Schwebungen wahrnehmen, wie bei zwei schwingenden Körpern, deren

Schwingungszahl in der Zeiteinheit etwa gleich different ist derjenigen, wie sie sich am Stimmgabelton analysiren lässt?

Auch auf diese Frage kann mit experimentellem Nachweise eine einfache und befriedigende Antwort gegeben werden.

Man verbinde zwei Kautschukröhren, jede etwa 25 Centimeter lang und 1 Centimeter Lumen haltend, durch eine passende Glasröhre in der Länge von circa 5 Centimetern durch Ueberstülpen der Kautschukränder und stecke die freien Enden der Gummiröhren, welche eichelförmige Ohreinsätze tragen, in den äusseren Gehörgang beider Ohren und setze eine schwingende Stimmgabel oder eine stark tickende Spindeluhr auf die Mitte der Glasröhre, so hört man die Schwingungen mit beiden Ohren gleich stark und deutlich.

Sobald ich aber die Gabel oder die Uhr jenseits der Glasröhre auf die Gummiröhre bringe, welche z. B. nach dem rechten Ohre führt, so höre ich die Schwingungen nur allein auch mit dem rechten Ohre und links gar nicht. Dass sie aber auch nach links geleitet werden, kann ich dadurch beweisen, dass ich zwischen Stimmgabel oder Uhr und zwischen dem rechten Ohre die Röhre durch Fingerdruck abschliesse. In diesem Falle höre ich den Ton etc. dann nur links und rechts gar nicht, obwohl die übrigen Umstände unverändert geblieben sind. Dasselbe Resultat erhalte ich, wenn ich dieselben Aenderungen mit der Gummiröhre vornehme, welche nach dem linken Ohre führt.

Die Erklärung dieses Verhaltens ist nicht schwer und führt zu einer sehr einfachen Vorstellung:

Setze ich die Gabel auf die Mitte der Glasröhre, so sind die Leitungsmedien für beide Ohren gleich und damit auch die Sinnesempfindung bei normalem Verhalten beider Ohren und der betreffenden Nerven und Gehirnganglien. Wenn ich jedoch die schwingende Gabel auf die Wand der Kautschukröhre, welche z. B. nach dem rechten Ohre führt, aufsetze, so werden die Leitungsmedien für beide Ohren ungleich. Die Schallwellen haben in den gegebenen Fällen nur zwei Wege zu den Ohren, nämlich durch die betreffende Luftsäule und durch die Wände. Die Luftsäule bleibt sich unter den gegebenen Umständen als Leitungsmedium bei dem geringen Unterschied der Länge in der Wirkung gleich, nicht so die Wände. Schwingungen werden in festen Körpern während der Fortpflanzung durch Differenz der moleculären Construction dieser Medien geschwächt und zwar durch Reflexion. Sitzt die schwingende Gabel also nach rechts auf der Kautschukröhre, so geschieht die Leitung nach dem rechten Ohre durch ein gleichartiges Medium, wird nicht geschwächt. nach dem linken Ohre aber wird ein Theil der Schwingungen an der Glasröhre zurückreflectirt nach dem rechten Ohre zu und nur ein kleinerer Theil kann in die Kautschukröhre, welche nach dem linken Ohre führt, übertreten. Die Hauptleitung durch die abgeschlossene Luftsäule bleibt dabei intact.

Es genügt sohin diese geringe Beeinträchtigung der Leitung, dass die Empfindung auf der einen Seite nicht zu Stande, nicht zur Wahrnehmung kommt, gedeckt wird. Der nur etwas stärkere Sinneseindruck auf der einen Seite verhindert also die Wahrnehmung auf der anderen.

Da es sich nun herausstellte, dass der tiefere Stimmgabelton während der ganzen Dauer einer einmaligen Ausschwingung immer viel stärker sei, als der höhere, so ist der letztere vom ersteren so lange gedeckt, als dieser nicht durch Dämpfung oder andere Hindernisse genügend abgeschwächt wird und vice versa.

Auch die Schwebungen werden aus gleichem Grunde nicht wahrgenommen. Lasse ich zwei Stimmgabeln, welche gleichstark erregt sehr schön die Schwebungen den Ohren und dem Gehirne zuführen, in der Stärke ungleich schwingen, indem ich die eine Gabel stark errege und die andere nur sehr schwach, so kann ich dadurch die Wahrnehmung dieser Schwebungen unmöglich machen, gleichsam auslöschen.

Dadurch werden wir auf eine noch zu lösende interessante Aufgabe der physiologischen Forschung geführt.

Wir wissen zwar durch E. H. Weber: »Wenn die Intensität einer Empfindung um gleiche Grössen wachsen soll, so muss die lebendige Kraft des Reizes um gleiche relative Grössen zunehmen.« Dieses Gesetz wurde von Fechner (Elemente der Psychophysik, 1860) mathematisch und experimentell noch schärfer als psycho-physisches ausgebildet und gipfelt in dem Satze: »Die Empfindung wächst proportional dem Logarithmus des Reizes.«

Es fehlen aber präcise Bestimmungen über das proportionale Verhalten der Differenz zweier gleichzeitiger und gleichartiger Reize, bei deren Wirkung die schwächere Empfindung durch die stärkere gedeckt, scheinbar negirt wird.

Dieses Gedecktwerden der schwächeren Schallwellen durch stärkere (für die Wahrnehmung) spielt bei der richtigen Beurtheilung sehr vieler Thatsachen besonders im ganzen Gebiete der Auscultation eine sehr wichtige Rolle.

Rohempirisch musste der Mensch dieses Gedecktwerden seit seiner Existenz schon kennen: Erst, wenn das viel stärkere Sonnenlicht den schwächeren Glanz der Sterne nicht mehr deckt, sieht man die letzteren funkeln und zwar um so heller, je dunkler bei sonst gleichen Verhältnissen die Nacht. Derartige Beispiele könnte man zu Hunderten aufführen.

Leicht begreiflich dürfte es sein, wie einfach und verlässig durch den oben beschriebenen Apparat mit den Kautschukröhren und der Glasröhre es dem Physiker, Physiologen und besonders dem Ohrenarzte gelingen muss, auch geringe Differenzen in der Schärfe des Hörens zwischen linkem und rechtem Ohre aufzufinden.

Diese geschilderten und experimentell erläuterten schönen Nebenresultate entschädigten den Vortragenden für das Fiasko bezüglich der Construction eines Tonstärkemessers mittelst einer Zungenpfeife.

Dieser Misserfolg wurde noch accentuirter durch die Prüfung des 2. Hauptumstandes, welchen W. Weber zur Construction eines Tonstärkemessers vorgeschlagen hat.

Die Differenz des Luftdruckes diesseits und jenseits einer Zungenpfeife ist nicht constant proportional der erzeugten Tonstärke, weil dabei ein Hauptfactor zu veränderlich ist. Mit der Stärke des Luftstromes diesseits einer Zungenpfeife wechselt die Tonstufe der dadurch erzeugten Geräusche und da diese auf dem Wege der Consonanz so mächtig die Intensität des Tones einer Zungenpfeife beeinflussen, so fehlt eben die nöthige Constanz der proportionalen Wirkung. Der Vortragende erläutert dieses veränderliche Verhalten durch mehrere Experimente an solchen Pfeifen.

Herr Prof. **Klein**

spricht über den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve.

Der allgemeine Functionsbegriff ist historisch aus der analytischen Geometrie (resp. aus der Mechanik und überhaupt der mathematischen Physik) erwachsen; aber es besteht kein Zweifel, dass er, um völlig correct zu sein, von jedem anschauungsmässigen Gebiete abgelöst und auf rein arithmetische Grundlage gestellt werden muss. Ich glaube, dass dies seither, auch nach Dirichlet's strenger Definition einer Function, noch nicht in hinreichendem Maasse geschehen ist*), so sehr das Bedürfniss dazu in allgemeinen mathematischen Kreisen empfunden wird. Und eben hierin scheint der Grund für die Schwierigkeiten zu liegen, die in so manchen Sätzen über willkürliche Functionen gefunden werden, wie z. B. in dem, dass es stetige Functionen ohne Differentialquotienten gibt.

Demgegenüber denke ich im Folgenden den rein arithmetischen Character des Functionsbegriffes deutlich zu bezeichnen (§. 1, 2). Ich gehe sodann dazu über, die Vorstellung der willkürlichen Curve zu analysiren (§. 3, 4) und finde, dass sie den aus ihr folgenden Eigenschaften nach nicht sowohl dem Functionsbegriffe als einem verwandten analytischen Begriffe, dem des Functions-Streifen's, wie ich ihn nenne, entspricht (§. 5, 6). Den inneren Grund dafür erblicke ich, ganz allgemein gesagt, in der Ungenauigkeit unserer räumlichen Anschauung (§. 3). Ich bin mir freilich bewusst, dass ich mit diesem Versuche einer Begründung aus dem rein mathematischen Gebiete hinaustrete und psychologische Probleme berühre, über die etwas Richtiges auszusagen ausserordentlich schwierig ist. Aber einmal stehe ich mit der bez. Auffassung der Raumanschauung nicht allein (vergl. §. 3); andererseits empfiehlt sie sich durch ihren Erfolg: die ganze Reihe von Misslichkeiten, welche die gewöhnliche Auffassung mit sich führt (§. 4), erledigt sich ohne Weiteres. In §. 7 endlich gebe ich noch einige Sätze über den Gebrauch von Reihen zur Darstellung willkürlicher Curven.

§. 1. Rein arithmetische Definition und Erzeugung einer Function.

Bei der Definition dessen, was Function zu nennen ist, wird man immer von einer reellen Grösse x als unabhängiger Variabeln ausgehen, die im Folgenden insbesondere so gedacht sein

*) Wenigstens gelangte eine solche Auffassung noch nicht zur Darstellung. Ich kann aber nicht zweifeln, dass sich mancher Mathematiker dieselben Ueberlegungen mehr oder minder deutlich gebildet hat, wie sie im Texte entwickelt werden sollen.

soll, dass sie nicht nur alle rationalen sondern auch alle irrationalen Werthe annehmen kann *).

Eine andere Grösse y heisst eine (eindeutige) Function von x innerhalb eines Intervall's **), wenn zu jedem Werthe von x innerhalb des Intervall's ein bestimmter Werth von y gehört. Dies ist Dirichlet's bekannte Definition; aber man wird die weitere Frage aufwerfen, wie man eine solche Function herzustellen hat? Indem die Betrachtung der anschauungsmässigen Gebiete, welche nach der gewöhnlichen Auffassung hier von Belang sind, zunächst völlig bei Seite gelassen werden soll, stellen wir folgenden Satz als Ausgangspunct voran:

Es kann nie eine unendliche, sondern immer nur eine endliche Anzahl von Dingen als willkürlich gegeben vorausgesetzt werden ***).

Dementsprechend kann eine Function nie für die unendlich vielen Werthe des Argumentes, für die sie hergestellt werden soll, willkürlich gegeben sein, sondern sie muss aus einer endlichen Zahl gegebener Elemente vermöge eines bestimmten Gesetzes für jeden Werth ihres Argumentes berechnet werden können.

Es soll das nicht missverstanden werden. Wenn die Function nach gewöhnlicher Ausdrucksweise in verschiedenen Intervallen oder auch für einzelne Werthe des Argumentes verschiedenen Gesetzen genügt, so bezeichnen wir deren Inbegriff eben als ein Gesetz.

---

*) Der rein arithmetische Begriff der Irrationalzahl ist in neuerer Zeit von mehreren Seiten her scharf als solcher entwickelt worden, was hier angeführt sei, weil diese Schriften ihrer Tendenz nach mit dem, was in §. 1, 2 des Textes auseinandergesetzt werden soll, übereinstimmen. Es sind: Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872; Heine, Die Elemente der Functionenlehre, Borchardt's Journal Bd. 74; Cantor, Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Mathematische Annalen, Bd. V.

**) An und für sich steht Nichts im Wege, von Functionen zu sprechen, die innerhalb verschiedener Intervalle oder auch nur für einzelne Werthe von x existiren. Aber die hierin liegende grössere Allgemeinheit würde für die Betrachtungen des Textes ohne Bedeutung sein, so dass es nicht nöthig scheint, sie explicite einzuführen.

***) Ich habe diesen Satz am schärfsten ausgesprochen und durchgeführt gefunden in Dühring's Natürlicher Dialectik (Berlin 1865).

In diesem Gesetze und der in ihm liegenden Möglichkeit der Berechnung ist dann das Wesen der Function zu erblicken. Die Function ist, dementsprechend, nicht als fertig existirend vorzustellen, wie dies in Anlehnung an die räumliche Anschauung wohl nur zu oft geschieht; sie existirt, im strengen Sinne des Wortes, nur für die einzelnen Werthe des Argumentes, für die sie berechnet worden ist (was selbst wieder voraussetzt, dass es Werthe gibt, für welche die Berechnung durch einen endlichen Process geleistet werden kann).

Insofern zwei verschiedene Werthe, für die man die Berechnung durchgeführt haben mag, nothwendig endlich verschieden sind, hat man bei diesen Festsetzungen über das Verhalten der Function für unmittelbar auf einander folgende Argumente und also über das Vorhandensein oder Nicht-Vorhandensein eines Differentialquotienten gar keine Intuition; die Schwierigkeit, welche man in der Annahme stetiger Functionen ohne Differentialquotienten zu finden glaubt, existirt überhaupt nicht.

§. 2. Von der Darstellung einer Function durch Reihen. Einführung des Functions-Streifen's.

Entsprechend dem voraufgeschickten Satze von der Unmöglichkeit, unendlich viele Dinge als willkürlich gegeben anzunehmen, hat eine unendliche Reihe von Operationen nur dann einen bestimmten Sinn, wenn wir in ihr bloss eine endliche Anzahl von Bestimmungen willkürlich denken, die übrigen durch ein Gesetz aus ihr ableiten. So ist es z. B. mit einer Potenzreihe; wir können von einer solchen Reihe als einer gegebenen nur sprechen, indem wir uns die Coëfficienten der in's Unendliche fortlaufenden Glieder durch eine Regel aus einer endlichen Anzahl voraufgegangener bestimmt denken *).

Wenn wir, ohne weitere Beschränkung, sagen, dass eine Reihe eine gewisse Function darstellen könne, so meinen wir einfach, dass das Gesetz, welches zur Berechnung der Function diente, in die Form des durch die Reihe angegebenen regelmässigen Processes gebracht werden kann.

*) Ich bin hierauf gelegentlich von Hrn. Kronecker gesprächsweise aufmerksam gemacht worden; in seiner Bemerkung lag für mich wohl der erste Anlass, mir die in §. 1, 2 des Textes niedergelegte Anschauung zu bilden.

Etwas, was von dieser exacten Darstellung einer Function durch eine Reihe begrifflich durchaus verschieden ist, was aber unter verschiedenen Gesichtspuncten (und insbesondere in allen Fällen der Anwendung auf practische Verhältnisse) dasselbe leistet, ist die nur approximative Darstellung einer Function. Wir sagen, dass eine (endliche oder unendliche) Reihe eine gegebene Function approximativ darstelle, wenn der Unterschied des Functionswerthes und des aus der Reihe berechneten immer kleiner ist, als eine gegebene Grösse δ. Die Darstellung würde nur dann eine exacte sein, wenn diese Grösse beliebig gelassen werden könnte.

Ueber die Möglichkeit der approximativen Darstellung von Functionen durch Reihen lassen sich ohne Weiteres allgemeine Sätze aufstellen, wie das in der Folge noch geschehen soll (§. 7), während es bekannt ist, dass über die Möglichkeit einer exaten Darstellung durch die gewöhnlich gebrauchten Reihen so lange Nichts behauptet werden kann, als nicht die im allgemeinen Functions-Begriffe liegende Willkürlichkeit beträchtlich eingeschränkt ist und namentlich sehr viel mehr eingeschränkt ist, als es durch die blosse Annahme der Stetigkeit geschieht.

Die nur approximative Darstellung einer Function characterisirt einen wichtigen Theil mathematischer Speculation, in welchem nicht von den exacten, sondern nur von den angenäherten Relationen der Grössen gehandelt wird *). In ihm wird man alle Functionen, deren Werthe um weniger als eine gegebene Grösse δ von einander abweichen, zu einem Ganzen zusammenfassen, das dann durch eine Gleichung der Form

$$y = f(x) + \varepsilon \qquad \varepsilon < \delta$$

characterisirt sein wird. Ein solches umfassendes Gebiet von zwei Dimensionen ist es, welches im Folgenden als ein Functions-Streifen oder schlechthin als ein Streifen bezeichnet werden soll. Diese Benennung ist mit Absicht so gewählt, dass sie an die geometrische Anschauung erinnert; denn diese kann, wie die weitere Ueberlegung zeigt, für die Theorie der Streifen ohne Weiteres verwendet werden (vergl. §. 5), wie dieselbe im Folgenden gebraucht werden soll.

Was ein Streifen ist, mag durch die vorstehenden Sätze nur erst veranschaulicht, noch nicht scharf definirt sein. In der That

*) In diesen Theil ist z. B. fast die ganze sogenannte »angewandte Mathematik« zu verweisen.

werden wir weiterhin (§. 5) noch eine wesentliche Zusatz-Bestimmung treffen und überdiess die Willkürlichkeit der zu Grunde liegenden Function f(x) in einem gewissen Sinne einschränken.

§. 3. Ueber die Möglichkeit, eine Function durch eine Curve darzustellen.

Indem ich mich nunmehr zu der Frage wende, in wie weit eine Function anschauungsmässig gegeben sein kann, beschränke ich mich auf das abstracteste unter den hier in Betracht kommenden Gebieten, auf den Raum, und, da nur von zwei Veränderlichen die Rede sein soll, auf die Ebene *). Die Puncte der Ebene seien in gewöhnlicher Weise durch die Werthe von y und x repräsentirt; ist es möglich, durch eine in der Ebene verlaufende Curve ein Functionsverhältniss zwischen y und x genau zu bezeichnen?

Durch eine willkürlich gezeichnete Curve sicher nicht; denn die Zeichnung sowohl als ihre spätere Beobachtung sind, wie alle derartigen Thätigkeiten, nur von approximativer Genauigkeit.

Durch eine gesetzmässig erzeugte Curve gewiss, sofern das Gesetz mitgetheilt wird, welches sie beherrscht. Aber in dem Falle ist es eben dieses Gesetz und die Voraussetzung voller Genauigkeit der geometrischen Axiome, durch welche die Function bestimmt wird; die Frage, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, liegt in einer wesentlich anderen Richtung.

Es soll sich nämlich darum handeln, ob man sich eine Curve überhaupt exact vorstellen und dieselbe somit, wenn auch nur subjectiv, als genaues Bild einer Function betrachten könne? wobei es denn gleichgültig sein wird, ob wir uns die Curve willkürlich oder vermöge eines bestimmten Gesetzes construirt denken. Ich behaupte: Nein. Die Vorstellung einer Curve hat nur approximative Genauigkeit; das analytische Gegenbild der Curve ist nicht die Function sondern der Streifen. Es mag zunächst der Sinn dieser Behauptung näher formulirt und erst in den folgenden Paragraphen auf die Vortheile hingewiesen werden, welche aus ihr hervorgehen. Nach der psychologischen Seite soll sie sich insbesondere

*) Auf mechanische Vorstellungen wird man im Grossen und Ganzen die Betrachtungen des Textes übertragen können.

auf diejenigen Erörterungen stützen, die neuerdings von Hrn. Stumpf in seinem Buche: »Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung« (Leipzig, 1873) gegeben worden sind (vergl. daselbst bes. p. 280).

Das Element der räumlichen Anschauung ist im Sinne der hier vorzutragenden Ansicht nicht der einzelne Punct, sondern der (dreifach) ausgedehnte Körper *). Wir können uns den Körper in hohem Maasse verkleinert denken, bekommen aber niemals die fertige Anschauung eines einzelnen Punctes. Es ist in demselben Sinne unmöglich, eine Curve exact vorzustellen; wir erblicken immer einen Körper, von dem nur zwei Dimensionen beträchtlich gegen die dritte zurücktreten. Wenn wir Geometrie auf einer Fläche, also insbesondere Geometrie der Ebene treiben, so ist damit die Tiefenvorstellung nicht ausgeschlossen; es wird nur nicht auf sie geachtet.

Bezüglich der Breite, die wir einer Curve in unserer Anschauung beilegen, gelten dann die folgenden Bestimmungen, die geeignet scheinen, den Gegenstand, um den es sich handelt, noch deutlicher zu bezeichnen: Man kann die Breite für einzelne Stellen der Curve durch Concentriren der Aufmerkmerksamkeit auf dieselben beträchtlich verringern, aber wohl nicht **) unter jede gegebene Gränze und sicher nicht unter jede beliebige Gränze. Für jede Stelle aber, die selbständig aufgefasst wird, ist dabei ein besonderer Act der Aufmerksamkeit nothwendig, wie man am besten wahrnimmt, wenn man sich die Curve in sehr viel grösserem Maassstabe denkt, als man gewohnt ist.

§. 4. Schwierigkeiten, die sich ergeben, wenn man Curve und Function entsprechend setzt.

Entgegen der Behauptung, wie sie im vorigen Paragraphen entwickelt wurde, soll jetzt zunächst ein genaues Entsprechen von Curve und Function angenommen und auf die Widersprüche

*) Hierin also liegt ein fundamentaler Unterschied zwischen unserer Vorstellung vom Punct-Raume und demjenigen arithmetischen Begriffe, den man als sein Analogon construirt hat, nämlich dem Begriffe der (n. fach ausgedehnten) Mannigfaltigkeit; das Erste bei der Auffassung der Mannigfaltigkeit ist das einzelne Werthsystem.

**) In der That scheint es unmöglich, einen Körper von gegebener Grösse zu denken, wenn diese Grösse sehr klein angenommen wird.

hingewiesen werden, welche dann entstehen. Es versteht sich dabei von selbst, dass der zusammenhängenden Curve nur eine Function ohne alle Unstetigkeiten entsprechend gesetzt werden kann.

Eine Curve hat, nach der Anschauung, die wir thatsächlich besitzen *), in jedem Puncte eine Tangente. Dementsprechend müsste jede stetige Function einen ersten Differentialquotienten haben, was nicht richtig ist.

Die Neigung dieser Tangente ändert sich, unserer Anschauung entsprechend, stetig, wenn wir auf der Curve fortschreiten. Sie ist also selbst wieder durch eine stetige Function vorgestellt, die man von Neuem durch eine Curve repräsentiren mag. Man findet so, dass jede stetige Function nicht nur einen ersten, sondern auch einen zweiten Differentialquotienten hat; und wenn man in derselben Weise fortfährt, ergibt sich, dass sie auch einen dritten, vierten, . . . überhaupt unbegränzt viele Differentialquotienten besitzt. Aber eine solche Function ist, nach dem Taylor'schen Satze, durch ihren Verlauf in dem kleinsten Intervalle gegeben. Eine willkürliche Curve müsste also durch ihr kleinstes Stück völlig bestimmt sein, was eine Contradictio in adjecto ist.

Wäre sie es nicht, so gäbe es eine neue Schwierigkeit. Ist eine Curve, ob auch willkürlich, in allen Puncten exact aufzufassen, so würde es möglich sein, eine Function für jeden Werth ihres Argumentes innerhalb eines Intervall's willkürlich zu geben, und dies verstösst gegen die in §. 1 formulirte Unmöglichkeit, unendlich viele Dinge als willkürlich gegeben vorauszusetzen.

Die entwickelten Schwierigkeiten fallen fort, wenn man die Curve nicht der Function, sondern dem Functions-Streifen adäquat setzt, wie nun gezeigt werden soll. Zugleich scheint dies die einzige Lösung zu sein, welche hier möglich ist. Wenigstens ist eine andere Lösung, so viel ich weiss, noch nicht vorgeschlagen worden **).

---

*) Nur von dieser ist im Texte überhaupt die Rede; ob wir dieselbe ev. werden modificiren können, ist eine Frage, die durchaus jenseits der Gränzen unserer Betrachtung liegt.

**) In einer Rede vor der British Association zu Brighton (1872. On the aims and instruments of scientific thoughts) hat Hr. Clifford darauf

§. 5. Nähere Betrachtung der Functions-Streifen.

Den Functions-Streifen führten wir in §. 2 durch eine Gleichung

$$y = f(x) \pm \varepsilon \qquad\qquad \varepsilon < \delta$$

in die Betrachtung ein. Wählen wir die gegebene Grösse δ so gross, dass sie bei räumlicher Repräsentation der y und x eine merkliche Strecke bezeichnet, so stellt die vorstehende Gleichung eben dasjenige dar, was man auch in der gewöhnlichen Ausdrucksweise als einen Streifen bezeichnet, und wofür ein Weg, ein Strom der gewöhnlichen Anschauung entnommene Bilder sein mögen.

Die Ränder eines solchen Streifen's wird man, je nachdem man sich der in §. 3 formulirten Ansicht anschliesst, oder nicht, als unbestimmt und nur approximativ gegeben oder als völlig bestimmt vorstellen. Demgegenüber soll jetzt die analytische Definition so gestellt werden, dass diese Ränder unbestimmt gedacht werden müssen. Es möge nämlich ϱ eine gegen δ sehr kleine Grösse bezeichnen, die aber im Uebrigen völlig unbestimmt gelassen wird, und der Streifen sei fortan definirt durch die Gleichung:

$$y = f(x) \pm \varepsilon \qquad\qquad \varepsilon < \delta - \varrho.$$

Wir haben sodann noch eine Beschränkung hinsichtlich der Willkürlichkeit von f(x) hinzuzufügen, damit der analytische Ausdruck völlig dem geometrischen Anschauungsbilde entspricht, wie es durch die Worte: Weg, Strom bezeichnet wird. Diese Bilder sagen nämlich aus, dass wir es mit einem Gebiete zu thun haben, das in einer Dimension sehr viel ausgedehnter als in der anderen ist. Analytisch wird man dies so formuliren können:

---

aufmerksam gemacht, dass eine Erledigung der entsprechenden Schwierigkeiten, die sich bei der Betrachtung der mechanischen Probleme aufdrängen, sachlich darin gesucht werden könne, dass man für unsere continuirliche Anschauung ein discontinuirliches Substrat voraussetzt — eine Vorstellungsweise, die sich auch schon in Riemann's Abhandlung: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, als eine mit den Thatsachen verträgliche angedeutet findet. Eine solche Vorstellung von dem, was unserer Anschauung in der Sphäre des Sein's entspricht, macht die Erläuterungen des Textes nicht nur nicht überflüssig, sondern muss dieselben geradezu voraussetzen.

Sei λ im Vergleiche zu δ eine beträchtliche, μ eine geringe Zahl; so bestimme man für alle in Betracht kommenden Werthe x_0 der unabhängigen Variabeln eine lineare Function

$$y = \alpha x + \beta,$$

welche für die Argumente x_0 und $x_0 + \lambda$ mit den Werthen $f(x_0)$ und $f(x_0 + \lambda)$ zusammenfällt (was natürlich voraussetzt, dass innerhalb des Intervall's, für welches die Function existirt, Differenzen von der Grösse λ Platz finden). Die hinzutretende Voraussetzung sei dann die, dass diese lineare Function innerhalb des Intervall's von x_0 bis $x_0 + \lambda$ von der gegebenen Function f(x) nirgends um mehr als um μ abweicht.

Man kann dann zeigen, dass die Abweichung der Function f(x) innerhalb der beiden Intervalle x_0 bis $x_0 + \lambda$ und $x_0 + \lambda$ bis $x_0 + 2\lambda$ von einer quadratischen Function:

$$y = a x^2 + b x + c,$$

die mit ihr für die Werthe x_0, $x_0 + \lambda$, $x_0 + 2\lambda$ des Argumentes übereinstimmt, ebenfalls in bestimmte Gränzen eingeschlossen ist etc.

§. 6. Fortsetzung. Differentialquotienten eines Streifen's. Zahl der Bestimmungsstücke, von denen ein Streifen abhängt.

Was geometrisch unter der Richtung eines Streifen's, unter seiner Krümmung zu verstehen ist, ist ersichtlich; beide sind keine exact bestimmten Grössen, sondern nur in dem Maasse genauer anzugeben, als der Streifen schmaler ist. Dementsprechend wird man analytisch von einem ersten und zweiten Differentialquotienten des Streifen's als approximativ gegebenen Grössen reden können. Als ersten Differentialquotienten im Puncte x_0 wird man geradezu den ersten Differentialquotienten der im vorigen Paragraphen aufgestellten berührenden linearen Function, α, oder auch der dort gegebenen berührenden quadratischen Function, $2 a x_0 + b$, bezeichnen können. Als zweiten Differentialquotienten mag man den zweiten Differentialquotienten der ersetzenden quadratischen Function, also $2a$, einführen. Die Gränzen, zwischen welche diese Angaben eingeschlossen sind, rücken in dem Maasse enger an einander, als man die Quotienten $\frac{\lambda}{\delta}$ und $\frac{\mu}{\delta}$ der im vorigen Paragraphen eingeführten Hülfsgrössen beträchtlicher resp. geringer annimmt. Ueberhaupt wird man von einem n. Differentialquotienten des Streifen's reden können; ein solcher Quotient ist niemals exact aber immer approximativ bestimmt.

Der Unterschied aber besteht zwischen den Differentialquotienten einer Function und eines Streifen's (abgesehen davon, dass letzterer keine exact gegebene Grösse ist): dass bei der Function der betr. Quotient streng an dem einzelnen Werthe des Argumentes haftet, dass er bei dem Streifen dagegen sich durch Beurtheilung des Gesammtverlaufes ergibt.

Achten wir noch auf das Maass der Willkürlichkeit, deren ein Streifen fähig ist, wobei ausdrücklich an die Unbestimmtheit seiner Ränder erinnert werden soll. Dementsprechend ist nämlich ein Streifen so vollkommen, als überhaupt möglich, bestimmt, wenn wir in jeder Strecke λ seines Intervall's eine endliche (hinreichend grosse) Zahl ihm angehöriger Puncte kennen. Der Streifen selbst hängt also nur von einer endlichen Zahl willkürlicher Festsetzungen ab.

Vergleichen wir das Resultat dieser Ueberlegungen mit den Widersprüchen, die sich in §. 4 ergaben, wo wir die Curve als exact dem Begriffe der Function entsprechend auffassen wollten. So ist ersichtlich, dass die letzteren alle fortfallen, sobald wir die Curve dem Streifen entsprechend setzen. Die Schwierigkeiten betr. die Differentialquotienten existiren nicht mehr, weil letztere jetzt eine andere Definition erhalten haben; der Widerspruch, dass unendlich viele Dinge als gegeben vorausgesetzt werden müssten, ist weggehoben, da die willkürliche Curve nur von einer endlichen Zahl von Festsetzungen abhängt. Und dieses ist die hauptsächliche Einsicht, welche durch die gegenwärtige Mittheilung entwickelt werden sollte.

§. 7. Repräsentation der Streifen (Curven) durch Reihen.

Noch einige Bemerkungen über die Repräsentation von Streifen durch Functionen und insbesondere durch Reihen mögen hier zugesetzt werden. Wir werden dabei sagen, dass eine Function einen Streifen darstelle, wenn alle ihre Werthe dem Gebiete des Streifen's angehören. Es ist dabei weder nöthig, dass die Function Differentialquotienten besitzt (nicht einmal, dass sie stetig ist), noch auch, wenn sie solche besitzt, dass dieselben mit den Differentialquotienten des Streifen's übereinstimmen. Aber man wird diejenige Darstellung für die vollkommenste halten, bei der dies der Fall ist.

Als ein erstes Beispiel nenne ich eine nach dem Vorhergehenden naheliegende Darstellung durch Fourier'sche Reihen. Man verbinde nämlich (geometrisch geredet) Puncte, welche dem Streifen angehören und den Argumenten

$$- n\lambda, \ldots, -\lambda, o, +\lambda, \ldots +n\lambda$$

entsprechen, so wie sie auf einander folgen, durch begränzte gerade Linien; das entstehende Polygon repräsentire man durch eine Fourier'sche Reihe. Dann hat man eine Repräsentation des Streifen's durch eine Function, die mit alleiniger Ausnahme der Puncte

$$x = o, \pm\lambda, \ldots, \pm n\lambda$$

überall Differentialquotienten hat. Die ersten Differentialquotienten stimmen mit denen des Streifen's (annähernd) überein; die übrigen nicht, sie haben den constanten Werth Null.

Diese Art der Repräsentation hat den Vorzug, an jeder Stelle nur von dem Verlaufe des Streifen's in nächster Nähe abhängig zu sein, und also die Willkürlichkeit, die wir in den Streifen hineinlegen, auch analytisch zum Ausdrucke zu bringen.

Als ein zweites Beispiel, das den entgegengesetzten Character besitzt, sei die Darstellung des Streifen's durch eine Potenzreihe genannt. Wir können, vermittelst der bekannten Lagrange'schen Interpolationsformel eine Potenzreihe herstellen, welche jede beliebige (endliche) Anzahl von Puncten des Streifen's enthält. Man überzeugt sich — und dieser Satz liegt implicite der Definition der Differentialquotienten eines Streifen's in §. 6 zu Grunde — dass bei richtiger Wahl der bestimmenden Puncte nicht nur die Potenzreihe selbst den Streifen annähernd darstellt, sondern namentlich auch, dass ihre Differentialquotienten an jedem Puncte mit den bez. Differentialquotienten des Streifen's approximativ übereinstimmen. In diesem Sinne kann also jeder Streifen durch eine Potenreihe dargestellt werden.

Schliesst man sich der Anschauung an, dass eine Curve nichts anderes ist, als ein Streifen, so sind diese Sätze Fundamentalsätze über die Darstellung willkürlicher Curven.

§. 8. Schlussbemerkung.

Die vorgetragenen Betrachtungen legen die Frage nahe, in wie weit es in analytischen Untersuchungen gestattet ist, geometrische Anschauung zu verwenden. Diese Frage ist um so wichtiger, als man einen Gebrauch dieser Anschauung in den mannigfachsten Gebieten nicht nur in ausgiebigster Weise, sondern auch mit dem grössten Erfolge macht. Ich denke dabei nicht sowohl an eigentliche Geometrie, die ja ausser in dem lebendigen Erfassen des im Raume Angeschauten noch an den Axiomen eine Stütze findet, als vielmehr an solche Disciplinen, wie Analysis situs oder geometrische Theorie der Differentialgleichungen. Es dürfte sehr schwer sein, die Gränzen für die Richtigkeit solcher Betrachtungen allgemein anzugeben. Aber die Fruchtbarkeit, welche diese Verknüpfung analytischer Probleme mit der Raumanschauung besitzt, scheint auf die erhöhte Uebersicht hinauszukommen, welche diese Anschauung mit sich führt, und für welche die nach der entwickelten Ansicht fehlende Genauigkeit im Kleinen nicht nur kein Hinderniss, sondern geradezu eine Förderung ist.

Herr Prof. **Reess**

macht folgende Mittheilung über die Flechtenfrage.

Der erste experimentelle Beleg, welchen ich für die von Schwendener anatomisch begründete Ansicht von der Zusammensetzung der Flechten aus je einem parasitischen Ascomyceten und einer Assimilationsalge vor zwei Jahren an einer Gallertflechte lieferte, überzeugte damals die unbefangenen Gegner jener Theorie bezüglich der homöomeren Flechten, während dieselben hinsichtlich der heteromeren Flechten vielfach auf ihrem Widerspruch bestanden.

Neuerdings haben aber Untersuchungen von Bornet und Treub (Bornet in Annales d. sc. nat. Bot. V sér. XVII. 1873, Treub in Bot. Ztg. 1873 Nr. 46 und »Onderzoeckingen over de natuur der Lichenen« Dissert. Leiden 1873) die Unumgänglichkeit der Schwendener'schen Theorie auch für die heteromeren Flechten dargethan, einmal durch den bestimmten Nachweis, dass die Gonidien nicht von den Hyphen erzeugt werden, sodann durch Culturversuche mit heteromeren Flechten. Bornet säete Ascosporen von Xanthoria parietina und von Biatora muscorum zwischen Zellen von »Protococcus viridis« und sah die Sporeneimschläuche auf die Algenzellen sich anlegen. Treub liess Sporen von Xanthoria parietina, Lecanora subfusca und Physcia pulverulenta zwischen Cystococcuszellen keimen; die Keimschläuche, alsbald an die Algenzellen sich festheftend, umspannen diese (binnen 2 Monaten) bis zur Bildung kleiner Flechtenanfänge. — Ich selbst habe mich 1871/72 längere Zeit und gelegentlich wieder neuerdings mit Culturversuchen an heteromeren Flechten gleichfalls beschäftigt, und bei zahlreichen Aussaatversuchen, welche durch Schimmelwucherung, mangelhafte Ernährung, Durchfeuchtung und Durchlüftung — wohl auch durch meine Ungeduld zu Grunde gingen, einmal einen Sporenkeimschlauch von Xanthoria parietina in eine Cystococcuscolonie eindringen, ein anderes Mal den verzweigten Keimschlauch einer Hagenia-Spore eine Cystococcuszelle umwachsen sehen.

Dass man von allerlei Culturschwierigkeiten über die allerersten Anfänge der Flechtenstockbildung bei den heteromeren Flechten noch nicht hinausgekommen ist, thut der Verwendbarkeit der Culturergebnisse für die Schwendener'sche Theorie kaum Eintrag. Denn die Anheftung der Flechtenpilzkeimschläuche an die Algenzellen und die Umspinnung dieser durch das Flechtenpilzmycelium, sind, im Gegensatz zu dem neutralen Verhalten anderer, in der Cultur etwa zwischen den Algenzellen herwachsender Pilzfäden, äusserst characteristisch und beweiskräftig.

Die Schwendener'sche Theorie im Allgemeinen bedarf überhaupt der Flechtenculturen nicht mehr. Wer durch Schwendeners und Bornet's und Treub's anatomische Darlegungen sowie durch die Ergebnisse der seit 1871 vorliegenden Culturen nicht überzeugt worden ist, der wird sich auch durch weit glänzendere Versuchsergebnisse nicht überzeugen lassen.

In einer anderen Richtung aber wäre, wie ich glaube, aus Flechtenculturen von der Spore ab noch Manches zu lernen, nämlich in Bezug auf den Entwicklungsgang der Flechtenpilze. Dass dergleichen Culturen nicht auf Objectträger beschränkt, und vielleicht Jahre lang fortgeführt werden müssen, liegt auf der Hand. —

Ich benütze diese Gelegenheit, um auf eine unabhängig von Sporenkeimschläuchen, und ausser Beziehung mit Soredienbildung vorkommende Propagation auch heteromerer Flechten hinzuweisen, deren Vorkommen bei Collema ich früher schon gezeigt habe. — Aus nicht allzu dünnen Durchschnitten durch den Thallus von Hagenia, Peltigera canina u. A. wachsen die unverletzten Hyphenspitzen in feuchter Luft, wie in Wasser, oft in dichten Büscheln, alsbald heraus. (Auch Bornet hat solches beobachtet a. a. O. p. 46). In Wasser untergetaucht sterben sie nach 8 bis 14 Tagen ab. Auf feuchten Objectträgern und ganz besonders auf feuchter Erde hingegen bilden sie bald durch H förmige Verbindungen ein reichmaschiges Netz (Peltigera). Die inzwischen aus dem Peltigerathallus isolirten und in fortgesetzter Zellentheilung rasch gewachsenen Polycoccuscolonien werden dann, wo solche Peltigerahyphen auf sie treffen, von diesen angebohrt, unter rascher Verzweigung der Hyphe umsponnen, und so in kleine Peltigerastöckchen verwandelt.

Herr Dr. **Günther** spricht:

Ueber eine unrichtige Anwendung der Differentialrechnung auf chemische Fragen.

1. Der Anstoss zu der vorliegenden Note wurde gegeben durch eine Abhandlung von Bunsen [1]), welche auf einen Gegenstand der praktischen Chemie die Differentialrechnung in einer Weise anwendet, die sich als unhaltbar erweisen dürfte. Die mathematische Behandlung des in Rede stehenden Gegenstandes ist folgende: »Nennt man v das Volumen des in der Flüssigkeit zu Boden gesunkenen oder nach dem Abtropfen auf dem Filter zurückgebliebenen wasserdurchtränkten Niederschlags, V das beim Auswaschen jedesmal aufgegossene Wasservolumen, n die Anzahl der Aufgiessungen und $\frac{1}{a}$ den Bruch, welcher angiebt, der wievielteste Theil der ursprünglich im wasserdurchtränkten Niederschlage enthaltenen Verunreinigung nach n Aufgiessungen noch übrig geblieben ist, so hat man

$$\left(\frac{v}{v+V}\right)^n = \frac{1}{a}$$

Ist ferner die Summe der zu n Aufgiessungen verwendeten Wasservolume W, also

$$n\,V = W.$$

so ist

$$\left(1 + \frac{W}{nv}\right)^n = a$$

oder

$$W = nv\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$$

Differenzirt man Wnach n und setzt man den Differentialquotienten gleich o, so ergiebt sich der Minimumwerth von W, wenn $n = \infty$,

$$W = v \text{ log. nat. a.}''$$

Wir sehen, die Rechnung nimmt ihren Ausgang von einer Formel, welche auch sonst in der Physik bei ähnlichen Fragen, z. B. bei Bestimmung der im Recipienten einer Luftpumpe noch vorhandenen Luftdichtigkeit, angewendet wird, und deren Verwendbarkeit für den vorliegenden Fall zugestanden werden muss. Der einzige Punkt, welcher Zweifel erregt, ist die Differenzirung der Grösse W nach n.

Es darf die Grösse V, obwohl diess nicht ausdrücklich bemerkt ist, unbedenklich als eine stetig veränderliche bezeichnet werden, indem die Menge des aufgegossenen Wassers eine völlig willkürliche ist, und es wird desshalb auch gestattet sein, die Grösse W als abhängig Variable anzusehen und dieselbe nach irgend einem unabhängig veränderlichen Parameter zu differentiiren. Es ist jedoch nicht richtig, die Zahl n als diesen Parameter zu betrachten.

Um diess einzusehen, ist es lediglich erforderlich, die ursprüngliche Bedeutung des Wortes »Differentialquotient« sich klar zu machen. Jeder Ausdruck, welcher die Differentiation gestattet, muss stetig sein, d. h. die Grösse, nach welcher differentiirt werden soll, muss alle innerhalb eines bestimmten Intervalles belegenen Werthe successive annehmen können, und das Gleiche gilt auch von der Grösse, nach welcher die Ableitung stattfinden soll. Nur unter diesen Umständen gewinnt der Differentialquotient seine anschauliche geometrische Bedeutung, insoferne wir bekanntlich unter

$$\frac{dy}{dx}$$

die trigononometrische Tangente des Winkels verstehen, welchen eine Berührungslinie der durch die Gleichung

$$y = f_x$$

charakterisirten Curve mit der Abscissenaxe bildet. Wir haben uns nun zu fragen, ob wir einen solchen Sinn auch mit dem Differentialquotienten

$$\frac{dW}{dn}$$

verbinden können.

Die Grösse n kann ihrer Bedeutung gemäss nur ganzzahlige positive Werthe annehmen, indem es ungereimt wäre, von einer

$$-4 \text{ oder } 6\tfrac{2}{3}$$

mal erfolgten Aufgiessung zu sprechen. Da V variabel ist, so muss diess auch W sein, und zwar ist W durch V eindeutig bestimmt. Es wird sich nun empfehlen, anstatt des oben genannten Differentialquotienten den nachstehenden

$$\frac{dn}{dW}$$

zu untersuchen. Betrachten wir W als Abscisse, n als Ordinate einer Curve, so erhalten wir nach dem, was über die Werthe von n und W gesagt wurde, folgendes Resultat: Im Allgemeinen entspricht einem Werthe von W kein Werth von n; nur in den Punkten, wo der Quotient

$$\frac{W}{V}$$

einer ganzen positiven Zahl gleichkommt, entspricht der reellen Abscisse eine reelle Ordinate. Unsere Curve zerfällt somit in eine allerdings unbegrenzte Reihe von sogenannten isolirten Punkten; der Begriff eines Differentialquotienten verliert hier alle Bedeutung, und es werden sonach auch allfallsige Schlüsse hinfällig, welche sich auf die Realität dieses Differentialquotienten gründeten. Was aber für den hier betrachteten Differentialquotienten gilt, besteht selbstverständlich auch für den reciproken.

1) Bunsen, Ueber das Auswaschen der Niederschläge, Annalen der Chemie und Pharmacie, 148. Band. S. 269.

2. Die Bedeutung eines Differentialquotienten, wie sie im Vorigen hingestellt wurde, ist allerdings nicht allgemein genug gegenüber den Anforderungen, welche die Mathematik der Neuzeit, speziell die Funktionentheorie stellen muss. Während es nämlich auf der einen Seite stetige Funktionen giebt, welchen ein Differentialquotient nicht zukommt, existirt im Gegentheil ein solcher für gewisse nicht stetige Funktionen. Es sei in dieser Beziehung an folgenden Satz von Hankel[3]) erinnert: „Nach dem Vorgang von Gauss, Dirichlet, Jacobi u. a. ist die Ueberzeugung, dass die Existenz eines Differentialquotienten stetiger Funktionen keine nothwendige Folge der Stetigkeit sei,

sondern eine besondere Voraussetzung involvire, unter den neueren Mathematikern eine ziemlich allgemeine geworden.«

Was die unstetigen Funktionen betrifft, so zerfallen dieselben, der Eintheilung desselben Mathematikers zufolge, in zwei Classen, in die linear und die total unstetigen Funktionen. Erstere sind [3]) solche, welche in unendlich vielen Punkten einer endlichen Strecke unstetig sind. Dieselben können in den Punkten, wo sie stetig sind, Differentialquotienten besitzen. Unsere oben betrachtete Funktion hingegen gehört zu der letzteren Classe; denn [4]) »total linear unstetig heissen solche Funktionen, in denen Punkte mit Sprüngen, die eine gewisse endliche Grösse übertreffen, ganze Intervalle erfüllen.« Eine solche Funktion hat nicht nur keine Differentialquotienten, es ist vielmehr überhaupt unzulässig, irgend welche analytische Operationen mit derselben vorzunehmen.

Anmerkung. Die Umstände, unter welchen die besprochene Differenzirung vorgenommen wurde, sind so beschaffen, dass, trotzdem diese Operation nicht als eine richtige bezeichnet werden kann, das eigentliche Wesentliche des Resultates erhalten bleibt. Der Schluss nämlich, der aus der analytischen Behandlung gezogen wird: »Dem Minimum des Waschwassers nähert man sich um so mehr, je grösser die Zahl der Auswaschungen und je kleiner mithin die dabei jedesmal aufgegossene Wassermenge ist,« ist unzweifelhaft richtig.

2) Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Funktionen, Tübingen 1870. S. 7.

3) Ibid. S. 25.

4) Ibid. S. 30.

3. In ganz ähnlicher Weise findet sich ein analytisches Versehen in einer kürzlich erschienenen Abhandlung von Blochmann, welche mit einem verwandten Gegenstande sich beschäftigt. Diese Arbeit liefert wichtige experimentelle Beiträge zur Theorie der Flamme, trägt jedoch an der Spitze einige den obigen ganz nahe verwandte Betrachtungen mathematischer Natur, deren Richtigkeit demnach ebensowenig zuzugeben ist. Die Frage, welche zur Anwendung des Calculs auffordert, formulirt der Verfasser [5]) folgendermassen: »Wie gross muss das aspirirte Volum sein, um mit Sicherheit annehmen zu können, dass die in dem Sammelkolben zurückgebliebene Luftmenge verschwindend klein ist?« Die Beantwortung dieser Frage stützt sich auf nachstehende Erwägungen.

»Ist der Kolben, welcher mit einem Gase angefüllt werden soll, durch einen doppelt durchbohrten Stopfen, der das Zu- und Ableitungsrohr trägt, verschlossen, so erhält man, wenn man diese beiden mit Waschfläschchen in Verbindung setzt, ein begrenztes Volum.

Dieses Volum sei V, das Volum einer Gasblase, welche durch die eine Waschflasche in den Kolben und durch die andere wieder aus demselben tritt, v, und der Bruch, welcher angiebt, wie viel von dem ursprünglichen Gase nach dem Durchleiten von n Gasblasen in dem Kolben zurückbleibt, $\frac{1}{a}$. Nimmt man nun an, dass jede Gasblase gleichmässig durch den Kolben diffundirt ist, bevor die nächste in denselben eintritt, und dass immer gleichzeitig eine Blase ein- und austritt, dann ist

$$\left(\frac{V-v}{V}\right)^n = \frac{1}{a}$$

Ist ferner die Gesammtmenge des aspirirten Gases G, also

$$nv = G$$

so ist:

$$\left(1 - \frac{v}{V}\right)^{\frac{G}{v}} = \frac{1}{a} \text{ oder}$$

$$G = \frac{-v \log a}{\left(\log 1 - \frac{v}{V}\right)}$$

Es war mir nun von Interesse, zu erfahren, welche endliche Minima oder Maxima G erleidet, wenn man es als Funktion von V betrachtet.

Differenzirt man G nach v, so findet man:

$$\frac{dG}{dv} = \frac{\log\left(1 - \frac{v}{V}\right) \log a + \frac{v \log a}{V - v}}{\log^2\left(1 - \frac{v}{V}\right)}$$

Setzt man diesen Differentialquotienten = 0, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \log a = 0, \text{ d. h.} \\ \quad a = 1 \\ 2.\ \log\left(1 - \frac{v}{V}\right) = \infty, \text{ d. h.} \\ \quad v = V \\ 3.\ \log\left(1 - \frac{v}{V}\right) + \frac{v}{V - v} = 0 \end{array}\right\} \text{Unbrauchbare Fälle.}$$

oder

$$\frac{v}{V}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v}{V}+\frac{1}{3}\left(\frac{v}{V}\right)^2+\ldots+\frac{v}{v-V}\right)=0$$

d. h. $\frac{v}{V} = 0$, oder $v = 0$, ohne dass die Parenthese $= 0$ würde.

Setzt man diesen Werth ein, so kommt $\frac{0}{0}$. Um nun zu erfahren, welcher Werth sich hinter diesem $\frac{0}{0}$ versteckt, wurde Zähler und Nenner differenzirt, der Quotient gebildet und erhalten:

$$G = (V-v) \log a$$

oder, wenn v im Vergleich zu V verschwindend klein ist,

$$G = V \log a$$

Da nun der zweite Differentialquotient bei allen Werthen von

$$v < V$$

negativ ist, so ist obiger Grenzwerth ein Maximum.«

5) Blochmann, Ueber die Vorgänge im Innern der nichtleuchtenden Flamme, Königsberg 1873. S. 6.

4. Die Unrichtigkeit der Methode tritt in dem hier betrachteten Falle ersichtlich nicht so offen hervor, wie in dem vorigen, und in der That ist auch hier der Fehler ein etwas andrer. Sowohl die Grösse G, als auch die Grösse v sind stetig veränderliche Grössen, und es steht somit der Differentiirung der einen nach der andern nichts im Wege. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass G und v noch durch eine einfache Bedingungsgleichung mit einander verbunden sind, welche diese Differentiirung, resp. die darauf weiterhin aufgebauten Schlüsse illusorisch macht. Analytisch würde sich die Sache so stellen:

Es ist

$$nv = G,$$

n ist eine Constante, v und G sind variabel. Die Differentiirung dieser Gleichung liefert

$$n\,dv = dG$$

oder

$$\frac{dv}{dG} = \frac{1}{n}$$

Andrerseits wird gefunden

$$\frac{dG}{dv} = \frac{\log\left(1-\frac{v}{V}\right)\log a + \frac{v \log a}{V-v}}{\log^2\left(1-\frac{v}{V}\right)}$$

Wir erhalten demnach

$$n \log^2\left(1-\frac{v}{V}\right) = \log\left(1-\frac{v}{V}\right)\log a + \frac{v \log a}{V-v}$$

und es ist aus dieser Gleichung sofort einleuchtend, dass ihre rechte Seite nicht gleich 0 gesetzt werden kann. Die Berechnung des Werthes

$$\frac{v}{V}$$

kann nur durch Auflösung einer transscendenten Gleichung geleistet werden, indem man etwa aus der für

$$\log\left(1-\frac{v}{V}\right)$$

quadratischen Gleichung diesen Werth in $\frac{1}{1-\frac{v}{V}}$ ausdrücken und die weitere Rechnung nach den Regeln der »regula falsi« einrichten würde.

Wir kommen also in Bezug auf die beiden besprochenen Arbeiten zu folgendem Resultat: Bei Bunsen ist eine Constante als Parameter betrachtet und nach derselben differentiirt, bei Blochmann dagegen ist ein richtig gebildeter Differentialquotient $= 0$ gesetzt, um eine Bestimmungsgleichung für eine in demselben auftretende Grösse zu erhalten — ein unrichtiges Verfahren, wenn man bedenkt, dass dieser Differentialquotient bereits einen bestimmten endlichen Werth hatte, also nicht mehr verschwinden konnte.

5. Wir haben oben bereits gesehen, dass trotz der unrichtigen Prämisse ein der Natur entsprechendes Resultat sich fand; das Gleiche ist in gewissem Sinne auch hier der Fall, denn wenn auch die Formel

$$G = V \log a$$

strenge genommen falsch ist, so gilt diess doch nicht für folgenden Schluss Blochmann's [6]): »Will man einen Kolben durch Verdrängen mit einem andern Gase bis auf einen bestimmten Bruchtheil des ursprünglich in ihm gewesenen Gases füllen, so giebt es ein bestimmtes grösstes Volum, welches man durchsaugen kann,« und weiterhin: »Diesem grössten Volum nähert man sich um so mehr, je kleiner die einzelnen Gasblasen sind, welche man in und aus dem Kolben treten lässt.« Es tritt sonach die Frage an uns heran, wie wir uns diess eigenthümliche

Faktum erklären können, dass trotz der nachgewiesenermassen unrichtigen Berechnungsmethode die Endresultate, wenigstens näherungsweise, richtige sind.

Die Antwort hierauf dürfte wohl die sein, dass man es hier nicht sowohl mit Differentialrechnung, als vielmehr mit endlicher Differenzenrechnung zu thun hat. »Wenn man annimmt, dass die Grössen, welche man betrachtet, zwar gleichfalls noch als veränderlich angesehen werden sollen, aber in Intervallen fortschreiten, welche eine bestimmte und endliche Grösse besitzen, so hat man damit den Gegenstand der Differenzenrechnung, die übrigens gleichwie die Differentialrechnung die Beziehungen aufzusuchen hat, welche unter den gleichzeitigen Aenderungen der unabhängigen Veränderlichen und der davon abhängigen Funktionen stattfinden.« [7])

Diess trifft hier vollkommen zu. Die Funktion

$$f_x = \frac{G}{v} = y$$

ist eine solche, welche nur für reelle ganzzahlige und positive Werthe von x eine Bedeutung hat. In den Punkten also, wo die Curve gewissermassen einen reellen Punkt zeigt, ist ein Differenzenquotient vorhanden und der Fehler jener Rechnung lässt sich dahin präcisiren, dass alle diese Punkte durch einen (parabolischen, resp. geraden) Curvenzug verbunden gedacht wurden, was, wie wir sahen, nicht statthaft ist. So erklärt es sich, dass das strikte, numerische Resultat einen eigentlichen Sinn nicht haben kann, während doch die allgemeinen Schlüsse anzuerkennen sind. Da der Differentialquotient nur der Grenzwerth des Differenzenquotienten ist, so muss eine allgemeine für den letztren zutreffende Relation nothwendig auch für ersteren ihre Gültigkeit behaupten.

Anmerkung. Wie in Wirklichkeit derartige Aufgaben zu behandeln sind, beweist am besten ein Beispiel, welches von Cantor [8]) ausführlich discutirt wurde.

6 Blochmann, S. 8.

7) Navier, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 2. Band, übers. von Wittstein, Hannover 1866. S. 215.

8) Cantor, Physikalische Aufgabe, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2. Jahrg. S. 64.

Sitzung vom 12. Januar 1874.

Herr **Professor Klein** legte die folgende Mittheilung von Hrn. Dr. W. Frahm in Tübingen vor:

Ueber die typische Darstellung bilinearer Formen.

Im Folgenden werde ich mich vorzugsweise mit den Formen mit zwei Reihen von contragredienten Veränderlichen beschäftigen, und die Resultate angeben, auf welche man geführt wird, wenn man gewisse bilineare Contravarianten als neue Veränderliche einführt, wobei die Grössen der einen Reihe als willkürliche Constanten angesehen werden. Diese Darstellungen, welche nach Hermite als typische zu bezeichnen sind, haben hier vor der bekannten canonischen Form den Vorzug, nur einem Ausnahmefalle unterworfen zu sein. Vollständige Beweise und nähere Ausführungen behalte ich einer späteren Arbeit vor. Die erwähnten Darstellungen habe ich ganz allgemein, und ohne Annahme einer canonischen Form ausgeführt, hier aber werde ich mich auf die Fälle von drei und vier Veränderlichen beschränken. Die Herren Clebsch und Gordan haben für den ersten Fall ein vollständiges Formensystem gegeben; es ist, wenn man die Grundform symbolisch mit $f = a_x u_\alpha$ bezeichnet, das folgende:

$$1)\ u_x;\quad f;\quad f_1 = a_x b_\alpha u_\beta;\quad J_1 \equiv a_\alpha;\quad J_2 = a_\beta b_\alpha;\quad J_3 = a_\gamma b_\alpha c_\beta$$

$$\varphi = \Sigma \pm \frac{du_x}{du_1} \cdot \frac{df}{du_2} \cdot \frac{df_1}{du_3};\quad \psi = \Sigma \pm \frac{du_x}{dx_1} \cdot \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{df_1}{dx_3};$$

und zwischen diesen Formen besteht eine einzige Relation. Für f_1 und die Invarianten kann man andere einführen, zu denen man folgendermassen gelangt. Bilden wir die Form $f - \lambda u_x$ und entwickeln die Determinante ihrer Coefficienten nach Potenzen von x, so sind die Coefficienten derselben Invarianten, welche die Herren Clebsch und Gordan mit $-i$, i', $-i''$ bezeichnen, und welche hier $-j_1$, j_2, $-j_3$ genannt werden mögen. Die angedeutete Entwicklung lautet also:

$$-\lambda^3 + j_1\lambda^2 - j_2\lambda + j_3$$

Nunmehr führe man folgende fundamentalen Zwischenformen ein

$$2)\ g_0 = \Sigma \frac{dj_1}{da_{ik}} u_i x_k = u_x;\quad g_1 = \Sigma \frac{dj_2}{da_{ik}} u_i x_k;$$

$$g_2 = \Sigma \frac{dj_3}{da_{ik}} u_i x_k;$$

wobei immer $a_{ik} \equiv a_k \alpha_i$ den Coefficienten des Products $u_i x_k$ in der Grundform f bezeichnet.

Betrachten wir jetzt in g_0, g_1, g_2 die x als Constanten x'_1, x'_2, x'_3 und bezeichnen die so erhaltenen Werthe als g'_0, g'_1, g'_2, so können wir die neuen Liniencoordinaten einführen

$$3)\left\{\begin{array}{l} v_1 = g'_2;\qquad v_2 = g'_1;\qquad v_3 = g'_0; \\ \text{und findet als neue Punctcoordinaten} \\ z_1 = f'_0;\qquad z_2 = f';\qquad z_3 = f'_1, \end{array}\right.$$

wo $f'_0 = u'_1 x_1 + u'_2 x_2 + u'_3 x_3$; $f' = f(u'x)$; $f'_1 = f_1(u'x)$, und wo die Constanten u' aus den x' durch folgende Gleichungen zu bestimmen sind:

$$3^a)\ u'_1 x'_1 + u'_2 x'_2 + u'_3 x'_3 = g_0(u'x') = o;$$
$$f(u'x') = o$$
$$f_1(u'x') = \varphi(x').$$

Die x' sind also der einzigen Beschränkung unterworfen, dass sie nicht der Gleichung $\varphi(x') = o$ genügen dürfen. Führt man jetzt die neuen Veränderlichen wirklich ein*), so finden sich die folgenden typischen Darstellungen:

$$4)\ f = v_1 z_2 + v_2 z_3 - v_3(-j_3 z_1 + j_2 z_2 - j_3 z_3)$$
$$g_2 = j_3(v_2 z_1 + v_3 z_2) + v_1(j_2 z_1 + j_1 z_2 + z_3)$$
$$g_1 = j_1 u_x - f.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Darstellung, nebst neuen geometrischen Interpretationen des Verschwindens der Invarianten j_1 und j_2, ergiebt sich auf folgende Weise:

Die Form f bestimmt **zwei** lineare Transformationen, eine

*) Dabei tritt als einzige Beschränkung die auf, dass die Form

$$\varphi = \Sigma \pm \frac{du_x}{du_1} \cdot \frac{df}{du_2} \cdot \frac{df_1}{du_3}$$

nicht identisch verschwinden darf, was allerdings, geometrisch gesprochen, bei den perspectivischen Transformationen Statt findet.

Puncttransformation durch die Gleichungen $z_i = \frac{df}{du_i}$, eine Geradentransformation durch $v_i = \frac{df}{dx_i}$. Die erste Transformation heisse $S^{(1)}$, die zweite $\Sigma^{(1)}$. Die aus der mehrmaligen Anwendung derselben entstehenden Transformationen mögen mit $S^{(i)}$, $\Sigma^{(i)}$ bezeichnet werden. Die zu $S^{(i)}$ gehörende Geradentransformation heisse Σ_i, die zu $\Sigma^{(i)}$ gehörende Puncttransformation S_i, dann überzeugt man sich leicht, dass

$$S^{(-1)} = S_1; \quad \Sigma^{(-1)} = \Sigma_1, \text{ daher}$$
$$S^{(-i)} = S_i; \quad \Sigma^{(-i)} = \Sigma_i,$$

wobei $S^{(-i)}$ diejenige Transformation bedeutet, auf welche $S^{(i)}$ angewendet die identische Transformation hervorruft, das heisst

$$\Sigma^{(i)} \cdot S^{(-i)} = S^{(o)}; \quad \Sigma^{(i)} \cdot \Sigma^{(-i)} = \Sigma^{(o)}.$$

Dies vorausgeschickt, sagen die Gleichungen 3) aus, dass als Seiten des neuen Coordinatendreiecks diejenigen zu Grunde gelegt werden, welche aus der willkürlichen Geraden u' durch successive Anwendung der Transformationen

$$\Sigma^o, \quad \Sigma^{(1)}, \quad \Sigma^{(2)}$$

oder, was nach dem Vorausgeschickten dasselbe ist, dass die Ecken aus dem zugehörigen Punkte x' durch successive Anwendung der Transformationen

$$S^o, \quad S^{(-1)}, \quad S^{(-2)}$$

entstehen.

Andrerseits sagt die Gleichung $f(ux) = o$ aus, dass x auf derjenigen Geraden liegt, welche aus u durch Σ^1 entsteht, also u durch den Punct geht, welcher aus x durch S^{-1} entsteht. Ein Punct und eine Gerade, welche in dieser Beziehung stehen, mögen conjugirt heissen. Liegt aber x auf derjenigen Geraden, welche aus u durch Σ_1 entsteht, geht also u durch den Punct, welcher aus x durch S_1 hervorgeht, so mögen in Ermangelung eines bessern Ausdrucks, u und x einander adjungirt heissen. Die analytische Bedingung dafür ist $g_2(ux) = o$.

Man sieht, wie dies der Theorie von Pol und Polare bei Kegelschnitten entspricht, nur, dass dort die Begriffe „conjugirt“ und „adjungirt“ zusammenfallen. Betrachtet man aber eine allgemeine bilineare Form mit cogredienten Variabeln, so treten diese Begriffe wieder auseinander.

Man kann nun, um bei unserm speciellen Problem stehen zu bleiben, fragen, ob es Dreiecke giebt, von der Beschaffenheit, dass jede Ecke mit der gegenüberliegenden Seite conjugirt, und ob solche, in denen derselbe Punct und dieselbe Gerade einander adjungirt sind, endlich ob Dreiecke, für welche beides gleichzeitig eintritt?

Die ersteren Dreiecke sollen (falls sie vorhanden sein sollten) „selbstconjugirte", die zweiten: „selbstadjungirte", die letzten „sycigetische" heissen.

Es ergiebt sich nun, dass im Allgemeinen keine von diesen drei Classen von Dreiecken existirt, vielmehr kann man folgende Sätze aussprechen:

> Damit selbstconjugirte Dreiecke vorhanden seien, ist erforderliche und hinreichende Bedingung, dass $j_1 = o$; sollen selbstadjungirte Dreiecke vorhanden sein, so muss $j_2 = o$ sein; wenn endlich gleichzeitig j_1 und j_2 verschwinden, so ist jedes selbstconjugirte Dreieck auch selbstadjungirt, und mithin sycigetisch.

Wenn $j_1 = o$, so kann jede Gerade einem selbstconjugirten Dreieck Ursprung geben, denn, indem man auf dieselbe die Transformationen Σ^0, Σ^1, Σ^2 anwendet, erhält man ein solches. Falls $j_2 = o$, ergiebt sich durch successive Anwendung der Transformationen S^0, S^1, S^2 auf einen Punkt ein selbstadjungirtes Dreieck. Oder man kann sagen, die oben gewählte typische Darstellung liefert uns selbstconjugirte Dreiecke, falls $j_1 = o$. Gerade ebenso giebt es eine zweite typische Darstellung, welche, wenn $j_2 = o$, selbstadjungirte Dreiecke liefert.

Sind endlich sycigetische Dreiecke vorhanden, so findet man

$$S^3 = S^0, \quad S^{i+3} = S^i$$
$$\Sigma^3 = \Sigma^0, \quad \Sigma^{i+3} = \Sigma^i.$$

Nach dreimaliger Wiederholung der erwähnten Transformationen rückt jedes Element in seine Ausgangslage zurück.

Wollen wir Anwendungen ähnlicher Betrachtungen auf den Raum machen, so muss dabei die räumliche Gerade als neues Element zu Hülfe genommen werden. Es sei für vier Veränderliche wieder symbolisch $f = a_x \cdot u_\alpha$ und die Entwicklung der Determinante der Coefficienten von $f - \lambda u_x$ nach Potenzen von λ laute

$$\lambda^4 - j_1\lambda^3 + j_2\lambda^2 - j_3\lambda + j_4.$$

Bilden wir folgendes Formensystem, welches zwar keineswegs ein vollständiges ist, aber für unseren Zweck genügt:

$$5)\quad u_x,\ f,\ f_1 = a_x b_\alpha u_\beta,\ f_2 = a_x c_\alpha b_\gamma u_\beta$$

$$g_0 = \Sigma \frac{df_1}{da_{ik}} u_i x_k = u_x \qquad g_1 = \Sigma \frac{df_2}{da_{ik}} u_i x_k$$

$$g_2 = \Sigma \frac{df_3}{da_{ik}} u_i x_k \qquad g_3 = \Sigma \frac{df_4}{da_{ik}} u_i x_k$$

$$\varphi = \Sigma \pm \frac{dg_0}{du_1} \cdot \frac{dg_1}{du_2} \cdot \frac{dg_2}{du_3} \cdot \frac{dg_3}{du_4}$$

$$\Gamma = (a_x b_y - a_y b_x)(\alpha\beta xy) = (abuv)(u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)$$

Die Gleichung $\Gamma = o$ stellt einen Reye'schen Strahlencomplex dar, und zwar denjenigen, welcher entsteht, wenn jeder Punct mit dem aus ihm durch die Transformation S hervorgehenden durch eine Gerade verbunden wird.

Dies vorausgesetzt hat man für f die typische Darstellung

$$6)\ f = v_1 z_2 + v_2 z_3 + v_3 z_4 - v_4 (j_4 z_1 - j_3 z_2 + j_2 z_3 - j_1 z_4),$$

wobei die v_i und die z_i aus den Formen g_i und f_i gerade so erhalten werden, wie bei nur drei Veränderlichen, und wo die Constanten u' mit den v' durch die Gleichungen zusammenhängen

$$7)\ g_0(u'x') = o \quad f(u'x') = o \quad f_1(u'x') = o \quad f_2(u'x') = \varphi(x').$$

Ueberhaupt kann man für eine beliebige Anzahl von Veränderlichen sagen: Die typische Darstellung einer bilinearen Form f mit contragredienten Variabeln entspricht einem Uebergange der Determinante der Coefficienten von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ in } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ j_n & j_{n-1} & j_{n-2} & & & j_1 \end{vmatrix}.$$

Wenn j_1 oder j_3 gleich Null, so kann man durch Anwendung der gegebenen Constructionen selbstconjugirte oder selbstadjungirte Tetraëder in beliebiger Anzahl construiren, verschwinden j_1 und j_3 gleichzeitig, so fallen beide Classen in eine zusammen. Es findet aber alsdann noch ein Weiteres statt; wenn nämlich die Invarianteureltaion: $j_1^2 j_4 - j_3^2 = 0$ erfüllt ist, so erhält man, indem man die Substitution:

$$S^0 \; S^1 \ldots\ldots S^9$$

auf einen beliebigen Punct anwendet, 10 Puncte, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und die zugehörigen Geradentransformationen 6 mal nach einander auf eine beliebige Linie angewendet liefern 6 Gerade, welche demselben linearen Complexe angehören; es wird durch die Transformation S ein Flächenbüschel zweiter Ordnung und ein Büschel linearer Complexe in sich selbst übergeführt. Dies findet ebenfalls statt, wenn $j_1 = 0$ und $j_3 = 0$.

Es bleibt also jetzt noch die Invariante j_2 zu betrachten. Die Gleichung des erwähnten Reye'schen Complexes ist unter Annahme der typischen Form

$$8) \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & j_x \\ y_2 & y_3 & y_4 & j_y \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$j_x = j_4 x_1 - j_3 x_2 + j_2 x_3 - j_1 x_4$$
$$j_y = j_4 y_1 - j_3 y_2 + j_2 y_3 - j_1 y_4,$$

wo für die 6 in der Entwicklung dieser Determinante auftretenden Grössen $x_i y_k - x_k y_i$ Strahlencoordinaten einer Geraden zu setzen sind. Betrachten wir hier der Kürze wegen nur die Transformationen S, so soll die Gerade a_1 zu a zugeordnet heissen, wenn sie die aus a durch die zu S gehörende Linientransformation hervorgehende schneidet. Tritt es aber insbesondere ein, dass auch a zu a_1 zugeordnet ist, so nennen wir a und a_1 einander wechselseitig zugeordnet. Man findet nun, dass in einem selbstconjugirten oder selbstadjungirten Tetraëder immer zwei Paare gegenüberstehender Kanten wechselseitig conjugirt sind, wenn aber $j_3 = 0$, und nur dann, so steht auch das dritte Paar von Kanten in dieser Beziehung. Untersucht man die Beziehung jeder Kante derartiger Tetraëder zu jeder anderen, so finden sich weitere Resultate, worauf wir jedoch nicht näher eingehen.

Drei Kanten eines selbstconjugirten Tetraëders gehören dem Complexe Γ an, die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit noch eine vierte Kante ihm ebenfalls angehöre, ist $j_2 = 0$.

Man kann von dem Vorhergehenden Anwendung machen, um gewisse Contravarianten und Covarianten geometrisch zu deuten, welche bei Betrachtung der viergliedrigen linearen Complexgruppe auftreten, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen denke.

Wenden wir uns jetzt zu den bilinearen Formen mit cogredienten Veränderlichen, so finden wir, dass eine Darstellung, welche der bis jetzt behandelten direct entspräche, nicht existirt. Wir können aber eine solche Form durch zwei andere ersetzen. In der That, nennen wir a_{ik} die Coefficienten der Form, so können wir setzen

$$a_{ik} = \frac{a'_{ik} + a''}{2} \qquad a_{ki} = \frac{a'_{ik} - a''_{ik}}{2};$$

so erhalten wir nunmehr zwei Formen; die Coefficienten der einen bilden ein System von symmetrischer, die des anderen von schiefer Determinante. Wir sehen uns so darauf geführt, das simultane Szstem zweier bilinearen Formen mit cogredienten Variabeln zu betrachten, deren Determinanten die erwähnte Beschaffenheit besitzen. Das in mancher anderen Hinsicht so interessante System einer Fläche zweiter Ordnung und eines linearen Complexes werde als Beispiel gewählt*).

Einem Puncte y entspricht in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung φ eine Polarebene, in Bezug auf einen linearen Complex eine Ebene, welche y enthält. Der Ort aller Ebenen, welche den Puncten von φ im Complexe entsprechen, ist identisch mit dem Orte der reciproken Polarlinien der Erzeugenden von φ in Bezug auf den Complex, und also mit dem Orte aller Puncte, welche den Ebenen von φ im Complex entsprechen. Diese Fläche heisse die Polarfläche von φ und werde mit φ_1 bezeichnet. Ebenso ist der Ort der reciproken Polarlinien der Geraden des Complexes, genommen in Bezug auf φ, ein linearer Complex; er heisse der Polarcomplex: c_1. Es entsprechen nun dem Puncte y auch in Bezug auf φ_1 und c_1 zwei Ebenen, so dass man in

*) Die Theorie der Verschiebung eines starren Körpers und der Kräftesysteme ergiebt sich durch die Betrachtung dieses Systems als Specialfall. Vergl. Lindemann, diese Berichte, Sitzung vom 28. Juli 1873, und Math. Ann. Bd. VII, sowie meine Habilitationsschrift.

Allem deren vier erhält. Die erwähnten vier bilinearen Covarianten sind die einzigen unabhängigen, welche das System zulässt, sie sollen aus diesem Grunde zur Coordinatenbestimmung dadurch verwendet werden, dass wir die besprochenen vier Ebenen als neue Coordinatenebenen einführen.

Zunächst bemerken wir, dass, wenn man symbolisch schreibt:

$$\varphi = a^2 = u^2_\alpha\,; \qquad c_1 = u_\gamma v_\delta - u_\delta v_\gamma = (\gamma\delta x y),$$

so sind die Gleichungen der Polarfläche:

$$\varphi_1 = (a_\gamma u_\delta - a_\delta u_\gamma)(a_{\gamma'} u_{\delta'} - a_{\delta'} u_{\gamma'}) = (\alpha\gamma\delta x)(\alpha\gamma'\delta' x) = o$$

und die des Polarcomplexes:

$$c_1 = (a_x a'_y - a_y a'_x)(a_\gamma a'_\delta - a_\delta a'_\gamma) = 0.$$

Man hat also nach dem Vorhergehenden die Substitutionen zu machen

$$9)\ z_1 = a_x a_y\,; \qquad z_2 = \varphi_x \varphi_y$$

$$z_3 = c\,; \qquad z_4 = c_1,$$

wobei die y als die Parameter der typischen Darstellung anzusehen sind. Indem man nun die neuen Veränderlichen wirklich einführt, findet man, abgesehen von einem sich absondernden Factor *) die folgenden typischen Darstellungen:

$$\varphi = \varphi(y)\,(-\triangle^2 z_1^2 + z_2^2 - K z_3^2 + 2\triangle z_3 z_4)\sqrt{D}$$
$$+ \varphi_1(y)\,(z_1^2 K + z_3^3 D^1 - z_4^2 - 2 z_1 z_2 \sqrt{D})$$

$$\varphi_1 = \varphi(y)\,(z_2^2 K + z_3^2 (K^2 - D\varDelta^2) + z_4^2 \varDelta^2 - 2 z_1 z_2 \varDelta^2 \sqrt{D} + 2 z_3 z_4 K \varDelta)$$
$$+ \varphi_1(y)\,(z_1^2 \varDelta^2 - z_2^2 + z_3^2 K + 2 z_3 z_4 \varDelta)\sqrt{D}$$

$$c_1 = \varphi(y)\,(\varDelta^2 \sqrt{D}\, p_{13} - K p_{23} + \varDelta p_{24}) + \varphi_1(y)\,(-\varDelta p_{14} + p_{23} \sqrt{D})$$

$$c_1 = \varphi(y)\,(\varDelta^2 \sqrt{D}\, p_{14} - D\varDelta p_{23}) + \varphi_1(y)\,(D\varDelta p_{13} - K p_{14} + p_{24} \sqrt{D})$$

$$p_{ik} = z_i z^1_k - z_k z^1_i\,;\ D = (aa'a''a''')^2\ \varDelta = (\gamma\delta\gamma'\delta')$$

$$K = (a_\gamma a'_\delta - a_\delta a'_\gamma)(a_{\gamma'} a'_{\delta'} - a_{\delta'} a'_{\gamma'}).$$

Aber diese Darstellungen haben einen anderen Character, als die für eine Form mit contragredienten Variabeln gegebenen, denn dieselben werden illusorisch, wenn bestimmte Invarianten verschwinden; wenn nämlich $D = o$, oder $\varDelta = o$ ist.

---

*) Der im Texte weiterhin definirten Covariante Φ (y).

Ferner bemerkt man das Auftreten der irrationalen Invariante $\sqrt{D}$, welches folgendermassen zu erklären ist. Die Flächen φ und φ_1 durchschneiden sich in einem windschiefen Viereck; das Product der Gleichungen der Seitenebenen des von den Ecken jenes Vierecks gebildeten Tetraeders, sondert sich aber bei den Darstellungen als überflüssiger Factor ab. Jenes Product kann in Function von φ und φ_1 dargestellt werden, jedoch nur so, dass die Irrationalität $\sqrt{D}$ hineinkommt. In der That, dasselbe ist

$$\Phi = \varphi^2 \varDelta^2 D - \varphi\varphi_1 K_1 \sqrt{D} + \varphi_1{}^2 D;$$

wenn sich also diese Grösse aus einem rationalen Product absondert, so muss der übrig bleibende Factor ebenfalls die Irrationalität $\sqrt{D}$ enthalten.

Es können daher simultane Invarianten auftreten, welche eine Irrationalität enthalten, die allein von den Coefficienten von φ abhängt. Die beiden einfachsten sind:

$$K + 2\varDelta\sqrt{D} = J$$
$$K - 2\varDelta\sqrt{D} = J'.$$

Das Verschwinden von J oder J' ist geometrisch leicht zu deuten. Wenn $JJ' = K^2 - 4D\varDelta^2 = 0$, so bestimmen die Complexe c und c_1 eine specielle lineare Congruenz. Die Gerade, welche dann den speciellen Complex der Gruppe bildet, berührt φ. Der Complex c hat im Allgemeinen mit den Erzeugenden jedes Systems von φ zwei Gerade gemein. Ist $J = 0$, so fallen die des einen, ist $J' = 0$ die des andern Systems in eine einzige zusammen; bei einem speciellen Complex tritt beides gleichzeitig ein. Ist $K = 0$, so liegen die Complexe c und c_1 in Involution.

Hierauf giebt

Herr Dr. **Günther**

eine Vergleichung zweier Methoden zur näherungsweisen Bestimmung irrationaler Grössen.

1. Die im Folgenden durchgeführte Vergleichung zweier Näherungsmethoden ist zunächst hervorgerufen durch eine hierauf bezügliche Frage von Fürst Boncompagni [1]). Dieselbe lautet: »On sait que si a_1 est une valeur approchée de $\sqrt{n}$,

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{n}{a_1}\right),\ a_3 = \left(a_2 + \frac{n}{a_2}\right),\ a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{n}{a_3}\right)\ldots$$

seront des valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{n}$ [2]).

On sait aussi que

$$\sqrt{a_1^2 + r} = a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

... On demande á quels quotients incomplets il faudra s'arrêter dans le second membre de cette équation pour avoir

$$a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots,$$

ou bien de quelle manière on peut démontrer que les valeurs

$$a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots,$$

ne sont pas comprises dans l'équation

$$a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}\text{«}$$

Die Frage zerfällt, wie man sieht, eigentlich in zwei Unterfragen, deren eine bereits bei einer anderen Gelegenheit[3]) ihre einfache Erledigung fand, ohne dass jedoch hiebei dem ersten Theile die gebührende Berücksichtigung zu Theil geworden wäre. Es hat nun Moret-Blanc[4]) den Nachweis geführt, dass in der That ein inniger Zusammenhang zwischen beiden Methoden statthabe, so zwar, dass jeder Näherungswerth des ersten Verfahrens einem bestimmten des zweiten gleich ist. Jener Beweis ist jedoch im wesentlichen nur eine allerdings sehr einfach a posteriori geleistete Verification einer Thatsache, zu deren Constatirung es nöthig war, eine grössre Anzahl von Näherungswerthen wirklich auszurechnen, und es wird sich daher empfehlen, rein analytisch diesen Zusammenhang zu untersuchen.

Beiläufig möge noch bemerkt werden, dass das erste hier erwähnte Näherungsverfahren kein neues ist, sondern bereits bei Hieronymus Cardanus[5]) sich findet. Cantor[6]) sagt hierüber: »Die eine Methode giebt eine sehr rasche, wenn auch etwas unbequeme Annäherung. Ist nämlich $\sqrt{a} = b$ in ganzen Zahlen und $a - b^2 = r_1$, so ist $\frac{r_1}{2b}$ dem Werthe b hinzuzufügen, und $b_1 = b + \frac{r_1}{2b}$, $b_1^2 = a + \frac{r_1^2}{4b^2} = a + r_2$. Dann bildet man $\frac{r_2}{2b_1}$ und setzt $b_2 = b_1 - \frac{r_2}{2b_1}$ u. s. f., indem man von dem zweiten Näherungswerthe an die Correktion immer abzieht, z. B. $\sqrt{20} = 4 = b$, $20 - 16 = 4 = r_1$, $4 + \frac{4}{8} = 4\frac{1}{2} = b_1$;

$20\frac{1}{4} - 20 = \frac{1}{4} = r_2$, $4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36} = b_2$; $20\frac{1}{1296} - 20 = \frac{1}{1296}$, $4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = b_3$ u. s. w. Man sieht, dass diess Verfahren mit dem Bertrand'schen identisch ist, wenn man

$$a_2 = b_1,\ a_3 = b_2 \ldots a_{n+1} = b_n$$

setzt.

Es ist leicht möglich, dass auch bei Cardan diese Methode keine originelle ist, sondern dass er dieselbe einem älteren italienischen Schriftsteller, dem Frater Lucas de Burgo Sancti Sepulchri [7]) entlehnt hat. Kästner [8]) giebt von dessen Verfahren folgende Analyse: »Aus 6 ist die erste Näherung zur Wurzel $2\frac{1}{2}$, aber davon ist das Quadrat $6\frac{1}{4}$. Man dividire den Ueberschuss $\frac{1}{4}$, durch das doppelte der ersten Näherung 5. kommt $\frac{1}{20}$, das ziehe man von $2\frac{1}{2}$ ab, bleiben $2\frac{9}{20}$; das nennt er die zweite Wurzel der 6, der Wahrheit näher als die erste Näherung« . . . Allgemein dargestellt ist der erste Näherungswerth von $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + r}$

$$a_2 = a_1 + \frac{r}{2a_1}$$

der zweite

$$a_3 = a_2 - \frac{a_2^2 - n}{2a_2} = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{n}{a_2}\right)$$

und entsprechend alle folgenden Näherungswerthe.

1) Boncompagni, Question (1111), Nouvelles Annales de Mathématiques, tome XII.

2) Joseph Bertrand, Traité d'Arithmetique, Paris 1867. pag. 245 et suiv.

3) Günther, Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen, Grunert's Archiv d. Math. u. Phys., 55. Theil. 4. Heft.

4) Moret-Blanc, Solution de la question 1111, proposée dans les nouvelles annales de mathématiques, Nouv. Ann. tome XII.

5) Cardanus, Practica arithmeticae generalis, Mediolani 1539. Cap. XXIII.

6) Cantor, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert, Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. 2. Bd. S. 373.

7) Lucas de Burgo Sancti Sepulchri, Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita, Venetiae, 1494. pag. 46.

8) Kästner, Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796. S. 68.

2. Im Folgenden bedürfen wir des Satzes, dass der pte Näherungswerth des Kettenbruches

$$a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \ldots}}$$

sich in der Form

$$\frac{(a + \sqrt{a^2 + r})^{p+1} - (a - \sqrt{a^2 + r})^{p+1}}{(a + \sqrt{a^2 + r})^p - (a - \sqrt{a^2 + r})^p} - a$$

darstellen lasse. So zahlreiche Beweise auch für diess Theorem existiren, wollen wir denselben gleichwohl hier noch auf eine etwas abweichende Weise zu führen suchen, welche zu mancherlei andren nicht uninteressanten Bemerkungen Veranlassung bieten wird. Statt des obigen Ausdrucks betrachten wir aber den durch eine einfache Transformation aus ihm hervorgehenden

$$\sqrt{a^2 + r}\,\frac{(a + \sqrt{a^2 + r})^p + (a - \sqrt{a^2 + r})^p}{(a + \sqrt{a^2 + r})^p - (a - \sqrt{a^2 + r})^p}$$

welcher für die praktische Anwendung weit bequemer ist, jedoch weniger bekannt zu sein scheint.

Wir gehen von dem bekannten System trinomischer Gleichungen aus, durch welches die Sinus der Vielfachen eines Winkels sich recurrirend bestimmen lassen; dasselbe ist folgendes:

$$\begin{aligned} \sin \varphi - 2 \cos\varphi \sin 2\varphi + \sin 3\varphi &= 0 \\ \sin 2\varphi - 2 \cos\varphi \sin 3\varphi + \sin 4\varphi &= 0 \\ \sin 3\varphi - 2 \cos\varphi \sin 4\varphi + \sin 5\varphi &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aus diesem System ergiebt sich die bekannte Kettenbruchentwickelung

$$\frac{\sin p\varphi}{\sin (p+1)\varphi} = \cfrac{-1}{-2\cos\varphi - \cfrac{1}{-2\cos\varphi - \ldots - \cfrac{1}{-2\cos\varphi_{(p)}}}}$$

Bezeichnen wir durch K_p den Werth des rechts stehenden Kettenbruches, so können wir setzen

$$K_p = \frac{-\cos p\varphi + i\sin p\varphi + \cos p\varphi + i\sin p\varphi}{-\cos(p+1)\varphi + i\sin(p+1)\varphi + \cos(p+1)\varphi + i\sin(p+1)\varphi}$$

Durch Anwendung des Moivre'schen Lehrsatzes folgt hieraus

$$K_p = \frac{(-\cos\varphi + i\sin\varphi)^p - (-\cos\varphi - i\sin\varphi)^p}{(-\cos\varphi + i\sin\varphi)^{p+1} - (-\cos\varphi - i\sin\varphi)^{p+1}}$$

Setzt man $\qquad \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = i\sin\varphi$

so erhält man

$$K_p = \frac{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p - (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p}{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^{p+1} - (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^{p+1}}$$

Es ist also

$$-\cos\varphi - \frac{1}{-2\cos\varphi - \frac{1}{-2\cos\varphi - \ldots - \frac{1}{-2\cos\varphi_{(p)}}}} = \frac{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p - (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p}{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^{p+1} - (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^{p+1}}$$

$$-(-\cos\varphi) = \sqrt{\cos^2\varphi - 1}\,\frac{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p + (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p}{(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p - (-\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^p}$$

Ist a ein beliebiger ächter Bruch, so darf

$$\cos\varphi = -a$$

gesetzt werden. Durch diese Substitution gelangt man zu dem Schlussresultat

$$K_{p+1} = a - \frac{1}{2a - \frac{1}{2a - \ldots - \frac{1}{2a_{(p)}}}} = \sqrt{a^2 - 1}\,\frac{(a + \sqrt{a^2 - 1})^p - (a - \sqrt{a^2 - 1})^n}{(a + \sqrt{a^2 - 1})^p - (a - \sqrt{a^2 - 1})^p}$$

$$o < a < 1.$$

Es handelt sich nun darum, diesen speciellen Fall entsprechend zu verallgemeinern, so dass sowohl an Stelle des Bruches a, als auch des Theilzählers (-1) beliebige reelle Grössen treten können.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zuvörderst den Kettenbruch

$$K'_{p+1} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \ldots + \frac{b}{2a_{(p)}}}}$$

wo a vorläufig seine eingeschränkte Bedeutung noch beibehalten möge. Um nun auch für diesen endlichen Kettenbruch den independenten Ausdruck zu finden, bedienen wir uns eines Verfahrens, welches, von **Möbius** zuerst angegeben, ganz besonders für derartige Generalisationen sich zu eignen scheint. Acceptiren wir den

Sinn des griechischen »πόρισμα«, welchen Cantor [9]) diesem Worte unterlegt — »Eigenschaften einer gegebenen Funktion zu finden, giebt das Theorem an; Werthe der Funktion bei gegebenem Argument leitet das Problem ab; endlich aus Eigenschaften auf die Art der Funktion schliessen, lehrt das Porisma« — so dürfen wir die im Folgenden angewandte Schlussweise als eine den Porismen mindestens sehr nahestehende bezeichnen.

Damit, für $b = -1$, K'_{p+1} in K_{p+1} übergehe, muss offenbar folgende Relation bestehen:

$$K'_{p+1} = b^{2M}\sqrt{a^2b^{2N} + b^{2P-1}\,\frac{\left(ab^{2r_1} + b^{2s_1}\sqrt{a^3b^{2t_1} + b^{2u_1-1}}\right)p^{b^{v_1}} + b^{2Q}\left(ab^{2r_2} + b^{2s_2}\sqrt{a^2b^{2t_2} + b^{2u_2-1}}\right)p^{b^{v_2}}}{\left(ab^{2r_3} + b^{2s_3}\sqrt{a^2b^{2t_3} + b^{2u_3-1}}\right)p^{b^{v_3}} - b^{2R}\left(ab^{2r_4} + b^{2s_4}\sqrt{a^2b^{2t_4} + b^{2u_4-1}}\right)p^{b^{v_4}}}}$$

Es wird nun leicht möglich sein, die hier auftretenden unbekannten Exponenten zu bestimmen.

Der Kettenbruch K'_{p+1} lässt sich ohne weiteres in Determinantenform schreiben; man hat dann

$$K'_{p+1} = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & 2a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & 2a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots b & 2a \end{vmatrix}_{(p+1)}}{\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & 2a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & 2a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots b & 2a \end{vmatrix}_{(p)}}$$

Denkt man sich beide Determinanten entwickelt, so ist sofort klar, dass sämmtliche Wurzelzeichen verschwinden müssen; dieser Umstand hat aber offenbar zur Folge, dass

$$\begin{array}{ccccccccc} s_1 &=& s_2 &=& s_3 &=& s_4 &=& 0 \\ N &=& t_1 &=& t_2 &=& t_3 &=& t_4 \\ P &=& u_1 &=& u_2 &=& u_3 &=& u_4 \\ & & v_1 &=& v_2 &=& v_3 &=& v_4 \end{array}$$

sein muss. Auch ergiebt sich unmittelbar $M = 0$. Da weiterhin das Aggregat im Zähler mit dem Gliede a^{p+1}, das im Nenner mit dem Gliede a^p beginnen muss, so folgt

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$$
$$v = Q = R = 0$$

Damit schliesslich, wie uns der blosse Anblick der Determinanten lehrt, die Reihen im Zähler und Nenner nach absteigenden Potenzen von a und aufsteigenden Potenzen von b fortschreiten, muss zuletzt

$$N = 0,\ P = 1$$

sein, und es ergiebt sich

$$K'_{p+1} = \sqrt{a^2+b}\ \frac{(a+\sqrt{a^2+b})^p + (a-\sqrt{a^2+b})^p}{(a+\sqrt{a^2+b})^p + (a-\sqrt{a^2+b})^p}$$

Dass dann endlich dieser Werth auch seine Richtigkeit behauptet, wenn a aufhört, ein ächter Bruch zu sein, ergiebt sich unmittelbar, wenn man in der letzten Gleichung

$$a = \frac{m}{n}$$

setzt und die für jeden einzelnen Näherungswerth bestehende Identität

$$\cfrac{nb}{m + \cfrac{n^2b}{m + \cfrac{n^2b}{m + \dots}}} = \cfrac{b}{\frac{m}{n} + \cfrac{b}{\frac{m}{n} + \cfrac{b}{\frac{m}{n} + \dots}}}$$

berücksichtigt.

9) Cantor, Ueber die Porismen des Euclid und deren Divinatoren. Schlömilch's Zeitschrift, 2. Band. S. 27.

3. Wir gehen nunmehr an die Lösung unsrer eigentlichen Aufgabe, welche wir folgendermassen formuliren können: Es soll untersucht werden, für welche Werthe von x und y die Relation

$$\sqrt{a^2+b}\,\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^x+(a-\sqrt{a^2+b})^x}{(a+\sqrt{a^2+b})^x-(a-\sqrt{a^2+b})^x}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2+b}\,\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^y+(a-\sqrt{a^2+b})^y}{(a+\sqrt{a^2+b})^y-(a-\sqrt{a^2+b})^y}\right.$$

$$\left.+\frac{a^2+b}{\sqrt{a^2+b}}\,\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^y-(a-\sqrt{a^2+b})^y}{(a+\sqrt{a^2+b})^y+(a-\sqrt{a^2+b})^y}\right]$$

Gültigkeit habe. Offenbar können wir auf beiden Seiten durch

$$\sqrt{a^2}+b$$

dividiren. Wir können weiter der rechten Seite unsrer Gleichung nachstehende Form geben

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[\begin{array}{l}(a+\sqrt{a^2}+b)^{2y}+2(-b)^y+(a-\sqrt{a^2+b})^{2y}\\+(a+\sqrt{a^2+b})^{2y}-2(-b)^y+(a-\sqrt{a^2+b})^{2y}\end{array}\right]}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2y}-(a-\sqrt{a^2+b})^{2y}}$$

so dass erstere nun übergegangen ist in

$$\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^x+(a-\sqrt{a^2+b})^x}{(a+\sqrt{a^2+b})^x-(a-\sqrt{a^2+b})^x}=\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{2y}+(a-\sqrt{a^2+b})^{2y}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2y}-(a-\sqrt{a^2+b})^{2y}}$$

Hieraus ergiebt sich demnach

$$x = 2y$$

und wenn k_α den αten Näheruugswerth unsres Kettenbruches bezeichnet,

$$a_2 = k_2,\ a_3 = k_4,\ a_4 = k_8\ \ldots$$
$$a_m = k_{2^{m-1}}\ .$$

Diese Deduktion dürfte, ebenso wie sie unmittelbar aus der Natur der Sache hervorgeht, auch etwas rascher zum Ziele führen, als die von **Moret-Blanc** gegebene.

Hierauf referirte

Herr Professor Dr. **Hilger**

über verschiedene Arbeiten, welche in seinem Laboratorium in der letzten Zeit zum Abschlusse kamen:

1. Ueber das Verhalten von Selen und Tellur gegen concentrirte Schwefelsäure.

Vorbereitungen zu Collegienversuchen gaben Gelegenheit, eingehendere Versuche über das genannte Thema anzustellen. Schon längst bekannt und verbreitet in allen Hand- und Lehrbüchern der reinen und analytischen Chemie ist die Thatsache, dass die Lösung des Selens in concentrirter Schwefelsäure mit grüner Färbung erfolgt, Tellur sich dagegen mit rother Farbe in concentrirter Schwefelsäure löst. Wasser veranlasst in beiden Lösungen wieder die Abscheidung der Elemente in den ursprünglichen charakteristischen Formen.

Das Schicksal der beiden Körper in ihren Lösungen bei längerer Einwirkung der Wärme dagegen ist, wie es scheint, in unserer neueren chemischen Literatur unberücksichtigt geblieben, wohl aus dem Grunde, dass gerade hierüber keine bestimmten Versuche in der letzten Zeit vorlagen. — Versuche, in dieser Richtung angestellt, führten zu nachstehendem Resultate:

1. Tellur löst sich in concentrirter Schwefelsäure bei Anwendung von wenig Wärme mit rother Farbe und Wasser fällt daraus schwarzes Tellur. Wird dagegen die Tellurlösung in concentrirter Schwefelsäure längere Zeit gekocht, so tritt reichliche Entwicklung von schwefeliger Säure ein und es entsteht tellurige Säure, welche sich je nach der Concentration der Lösung wieder krystallinisch ausscheidet. Wasser scheidet nicht eine Spur von unverändertem Tellur aus dieser Lösung aus.

Es ist hiemit die Angabe von Rose in seinem analytischen Lehrbuche bestätigt, die bis jetzt aber keine weitere Verbreitung trotz ihrer Wichtigkeit gefunden hat.

2. Selen verhält sich sich in dieser Frage vollständig übereinstimmend, obgleich wir in Lehrbüchern angeführt finden, gerade zum Unterschiede des Selenes von Schwefel, dass dasselbe in der Wärme beim Kochen mit concentrirter Schwefelsäure keine schwefelige Säure entwickle.

Eine Lösung von Selen (nicht zu concentrirt) in Schwefelsäure bleibt längere Zeit beim Kochen intakt, plötzlich beginnt eine sehr stürmische Entwicklung von schwefliger Säure und seleniger Säure tritt in der Lösung auf, sich allmälig ausscheidend in fester Form, während Wasser ebenfalls keine Selenausscheidung mehr veranlassen kann.

Wir sehen hieraus eine vollständige Uebereinstimmung der beiden Elemente mit Schwefel, der sich bekanntlich beim längeren Kochen mit Schwefelsäure ebenfalls oxydirt:

$$S + 2\,(H_2\,SO_4) = 3\,(SO_2) + 2\,(H_2O)$$

Mögen diese Bemerkungen dazu beitragen, die chemische

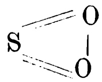
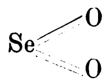
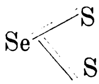
Charakteristik der beiden Elemente Selen und Tellur zu vervollständigen.

2. Ueber die Schwefelverbindungen des Selens.

Herr Dr. v. Gerichten hat auf meine Veranlassung die Verbindung des Schwefels mit Selen einer genaueren Prüfung unterzogen.

Nach Berzelius kann das Selen in allen Verhältnissen mit Schwefel verbunden werden. Aber besonders zwei Verbindungen hebt er als jedenfalls chemische hervor, nämlich das selenige Sulfid SeS_2, erhalten durch Zusammenschmelzen in den bestimmten Gewichtsverhältnissen oder durch Einleiten von Schwefelwasserstoff in selenige Säure und zweitens das Selensulfid SeS_3 erhalten durch Zusammenschmelzen von einem Selen auf drei Schwefel. Selensäure wird durch Schwefelwasserstoff bekanntlich nicht zersetzt. In neuerer Zeit hat sich Rathke (Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. C L II. Heft 2 1869) mit der Frage, ob die Niederschläge, erzeugt durch Einleiten von Schwefelwasserstoff in eine Lösung von seleniger Säure und umgekehrt durch Einleiten von Selenwasserstoff in schweflige Säure, als chemische Verbindungen zu betrachten seien, beschäftigt. In dieser vortrefflichen Arbeit kam Rathke zu dem Resultate, dass der Niederschlag $S+Se_2$ nicht reines SS_2 ist, obgleich dieses vorwaltet, sondern dass er vielmehr als Gemisch von $Se + SSe_2 + SeS_2$ zu betrachten sei, der Niederschlag $Se + 2S$ dagegen überwiegend aus SeS_2 bestehe, dagegen aber auch SSe_2 und freien Schwefel enthalte.

Die Grenze, die zwischen mechanischem Gemenge und chemischer Verbindung gezogen wird, ist eigentlich niemals scharf zu fixiren, da sie wesentlich als eine Function der Affinität der zusammensetzenden Atome angesehen werden muss, dagegen kann mit Sicherheit ein Körper als chemische Verbindung dann erkannt werden, wenn auf irgend eine Weise eben eine solche Affinität nachweisbar ist. Die Intensitäten der verschiedenen Anziehungsrichtungen eines Atoms aber können, wie Michaelis kürzlich nachzuweisen suchte, im allgemeinen betrachtet werden als eine Function der Temperatur und wie der Schwefel erst bei ganz niedriger Temperatur seine vier Affinitäten zu Chlor geltend zu machen vermag, so sind die Atombewegungen des Selens noch bei ganz hoher Temperatur so stark, die Anziehungskräfte der Atome im

Chlorm lecül zu überwinden und diesen gegenüber die eigene Affinität geltend zu machen. Sind also die Intensitäten der einzelnen Affinitäten eines Schwefelatoms so verschieden von denen eines Selenatoms beim Vergleich mit ein und derselben Molecülart, so ergibt sich schon daraus, dass zwar eine Verbindung Se S_2 aber niemals eine der Zusammensetzung SSe_2 Bestand haben kann, abgesehen von der Verschiedenheit der Aggregatzustände der betreffenden Chloride dieser Verbindungen. Nimmt man aber den Aggregatzustand z. B. der schwefligen Säure und den der selenigen Säure als constanten Factor an, so ergibt sich, dass die bei gewöhnlicher Temperatur gasförmige schweflige Säure nur derart  die selenige Säure aber auch nur in der Weise  constituirt sein kann. Eine Verbindung  kann existiren bei gewöhnlicher Temperatur wie die entsprechende Säure desselben Aggregatzustandes, eben weil die vier Affinitäten des Selens und die zwei des Schwefels bei gew. Temperatur zur Geltung kommen können, eine Verbindung $S\,Se_2$ muss aber immer ein mechanisches Gemenge sein bei der nämlichen Temperatur. — Obgleich derartige theoretische Entwicklungen wenig practischen Werth haben, ohne die nöthige auf practischem Wege gefundene Ergänzung, so haben diese vielleicht doch den Zweck neue Gedanken darzulegen und auf diese Weise der Wissenschaft zu dienen. Soweit diese Ergänzung mir möglich war, will ich sie in Folgendem kurz vorlegen.

Leitet man in eine Lösung von Seleniger Säure Schwefelwasserstoff, so erhält man, wie bekannt, zuerst einen citrongelben, allmählig pomeranzengelben, beim Erhitzen rasch feuerroth werdenden Niederschlag von der Zusammensetzung Se + $_2$S. Die anfangs entstehende citrongelbe Fällung nun wurde rasch abfiltrirt. Auf dem Filter anfangs noch gelb wurde sie in kurzer Zeit roth gefärbt. Es ist dieses Verhalten nur auf die Weise zu erklären, dass die anfangs höchst wahrscheinlich chemische Verbindung sich ganz analog der Selenigen Säure an der Luft rasch zersetzt und sich roth färbt durch Ausscheidung von Selen. Die zuerst filtrirten anfangs citrongelben dann roth gewordenen Massen wurden analysirt und es fand sich, dass sie genau der Zusammensetzung Se S_2 entsprachen nämlich:

berechnet	gefunden I.	gefunden II.
Se — 55,42	55,55 —	55,61
S — 44,58	—	—

H. Rose hält die roth gewordenen Massen demnach mit Recht für keine vollständig chem. Verbindung, aber sie ist es nicht desshalb, weil sie sich nicht wie die entsprechende Tellurverbindung in Ammoniak löst; sie ist desshalb unlöslich in Ammoniak, weil sich die rein gelbe Fällung in demselben Reagens sehr rasch zersetzt unter Freiwerden von Selen. Kocht man sie weiter mit Ammoniak, so tritt eine fast gänzliche Schwärzung der Massen ein. Bei weiterem Einleiten von Schwefelwasserstoff in die Lösung von seleniger Säure tritt immer wieder anfangs die citrongelbe allmählig roth werdende Füllung ein. Die Analyse der zuletzt erzielten Gesammtfällung gab statt 55,42, — 55,21, ein selbst für die quantitative Analyse brauchbares Resultat.

Leitet man in eine stark mit Kalihydrat übersättigte Lösung von Seleniger Säure Schwefelwasserstoff, so erhält man keine Fällung, sondern allmählig eine rothbraune Färbung, die dann alles Selen als solches fallen lässt. Die selenige Säure wird demnach vollständig reducirt durch Schwefelwasserstoff; es bildet sich Schwefelselen, welches sofort durch das vorhandene freie Alkali zersetzt wird, indem sich mehrfach Schwefelalkali bildet und freies Selen sich ausscheidet. Nur oben am Gefässe an den Berührungsstellen mit der Luft bildet sich anfangs eine rothe Ausscheidung, die jedoch sehr leicht sich wieder löst. Leitet man dagegen nicht so viel Schwefelwasserstoff ein, als zur vollständigen Reduction der selenigen Säure, zersetzt dann die rothbraun gefärbte Lösung mit verdünnter Schwefelsäure vollständig, so erhält man hier eine starke Ausscheidung von jedenfalls ungebundenem Se + 2S. Sie enthielt 54,10 Se. Die nunmehr mit $So_4\ H_2$ angesäuerte Lösung von Seleniger Säure gibt mit Schwefelwasserstoff wieder eine Fällung ganz entsprechend der procent. Zusammensetzung von $Se\,S_2$ nämlich I. 55,70 und II. 56,10%. Setzt man zu Seleniger Säure etwas Schwefelammonium so entsteht sofort ein rothbrauner Niederschlag von der Formel $Se\,S_2$ (gefunden wurde 55,91 Se) leicht löslich im Ueberschuss des Fällungsmittels, jedenfalls eine vollständig zersetzte Verbindung. Kocht man einen der durch Schwefelwasserstoff in seleniger Säure erzeugten Niederschläge mit Kalihydrat so löst sich zuerst aller Schwefel, zuletzt alles

Selen, welch' letzteres beim Stehen der Lösung in schwarzen unter dem Mikroskope deutlich krystallinischen Massen ausfällt. Gerade dieses letztere Verhalten gibt den Beweis, dass die Verbindung $Se\,S_2$ eine schon durch Alkali sehr leicht zersetzbare ist und wenn Rathke den Beweis einer chemischen Bindung durch die Löslichkeitsverhältnisse des Niederschlags in Schwefelkohlenstoff liefert und auf diese Weise zu dem Resultate kommt, dass er grösstentheils zwar aus $Se\,S_2$ mit Beimengung einer isomorphen Mischung von SSe_2 und freiem Schwefel bestehe, so ist dagegen anzuführen, dass die aus seleniger Säure erzeugte Verbindung bei gewöhnlicher Temperatur wohl sich wahrscheinlich nur in geringem Grade zersetzt und das $Se_2\,S + S$ wohl eher betrachtet werden kann als $Se + S_3$, besonders da es nicht wahrscheinlich ist, dass hier die Löslichkeit in Schwefelkohlenstoff entscheiden kann, da ja ähnliche Verhältnisse bekannt sind, wie bei Legierung von Platin und Silber, wo vielleicht chemische Bindung aber doch nicht solche in unserem Sinne vorhanden ist. Dass aber Rathke bei der allmähligen Krystallisation, sowohl der Lösungen des $S\,Se_2$ als des $Se\,S_2$ in Schwefelkohlenstoff zuerst selenreiche und allmählich immer selenärmere Krystalle wie bei dem Producte, das erhalten wurde durch Zusammenschmelzen von einem Atom Se und zwei Atomen S, und dass er ferner im Stande war durch Erhitzen der Verbindung SSe_2 fast den grössten Theil des vorhandenen Selens in Schwefelkohlenstoff unlöslich zu machen, ist ein directer Beweis für das Nichtvorhandensein einer vollständigen chemischen Bindung in beiden Producten. Es soll und kann hier in keiner Weise der schönen und gründlichen Arbeit Rathke's der geringste Abbruch gethan werden, da im Gegentheil seine Resultate in anderer Beziehung zu den isomorphen Mischungen zweier Elemente von hohem Interesse sind und wahrscheinlich auch Bedeutung haben für die Resultate die H. Topsöe beim Zusammenkrystallisiren von selensaurer und schwefelsaurer Beryllerde erhalten hat.

Ferner wurden zwei Verbindungen dargestellt auf trockenem Wege durch Zusammenschmelzen der Bestandtheile genau in den bestimmten Verhältnissen, nämlich ein Arsensulfoselenür und ein Arsenselenosulfür, $As_2\,Se\,S_2$ und $As_2\,S\,Se_2$. Das Arsensulfoselenür stellt geschmolzen eine rothe, durchsichtige vollständig homogene Masse dar mit stark glänzendem tiefschwarzem Bruch. Es löst sich als feines Pulver in der Kälte sehr leicht und vollständig in Ammoniumhydrosulfit, indem es der Lösung eine dunkelbraunrothe Färbung ertheilt. Nach zweitägigem Stehen hat sich alles Selen aus der Verbindung als solches abgeschieden. In kohlensaurem Ammoniak löst es sich mit Hinterlassung von wenig Selen. Beim Zersetzen der Schwefelammoniumlösung mit verd. Schwefelsäure wurde ein rothgelber Niederschlag erhalten mit 23,10 S statt 21,91 S., welches obiger Formel entsprechen würde.

Das Arsenselenosulfür wurde erhalten als undurchsichtige anscheinend vollständig krystallinische Masse, bei der Destillation unverändert übergehend. Löst sich etwas schwerer in Ammoniumhydrosulfit als die vorige Verbindung mit schön tiefgelber Farbe mit Hinterlassung eines geringen Rückstandes. Bei längerem Stehen wird diese Lösung allmählig roth gefärbt. Beim Zersetzen derselben mit Säure erhält man eine braunrothe Fällung mit ungefähr 11,01 S statt der Formel entsprechend 9,46 % S. Sie ist demnach wesentlich von der vorigen Verbindung verschieden.

Auch eine Selenschwefelverbindung des Antimons wurde erhalten durch Zersetzung einer stark mit Weinsäure angesäuerten Lösung von Antimonchlorid mittelst der Lösung $Se S_2$ in Kalihydrat.

Ob man es hier mit wirklich chemischen Verbindungen zu thun hat und welche Constitutionsformel dieselben haben muss ich vorderhand unentschieden zu lassen, da die meisten Anhaltspunkte zur Erledigung dieser Frage mir zur Zeit fehlen.

Endlich sei noch einer sehr merkwürdigen Reaction Erwähnung gethan, welche zufällig bei der Analyse obiger Körper sich ergab und mir wenigstens vollkommen unbekannt war. Setzt man nämlich zu seleniger Säure jene Magnesiamischung, die zur Füllung der Phosphorsäure und Arsensäure angewandt wird, so entsteht allmählich, nicht sofort wie bei jenen Säuren, die nämliche ganz characteristische krystallinische Füllung besonders beim Reiben der Glaswandungen mit ganz den gleichen u. d. M. deutlich sargdeckelähnlichen Kryställchen, wie sie für die phosphorsaure und arsensaure Ammonmagnesia so bezeichnend sind. Sie enthalten Selenige Säure Ammoniak und Magnesia. Ob diese Fällung für die quantitative Analyse brauchbar ist, darüber sollen noch Versuche angestellt werden.

3. Ueber den oberfränkischen Eklogit.

Der Eklogit findet sich im Fichtelgebirge in dem Glimmer- und Gneissgebirge in untergeordneten Lagern. Bei Weissenstein bildet er eine kahle Kuppe und bei Silberbach und Fattigau gehen dessen Lager zu Tage aus. Er zeigt einen sehr deutlichen Uebergang in Hornblendegestein in der Weise, dass eine Menge von Uebergangsformen entstehen, die es zuletzt unmöglich machen, den Eklogit streng vom Hornblendegestein abzugrenzen. Seine wesentlichen Bestandtheile sind entweder Omphacit oder Hornblende vorherrschend, sodann Granat. Der Omphacit tritt gewöhnlich auf in Stengeln von lauchgrüner oder auch in körnigen Aggregaten von grasgrüner Farbe und verhält sich u. d. M. noch R. v. Drasche ganz wie der Angit, zeigt schwachen Dichroismus, schiefe Orientirung der optischen Hauptschnitte zu den Spaltungskanten und gleich vollkommene Spaltbarkeit nach zwei Flächen. Nach v. Drasche ist der Spaltungswinkel gleich dem Augitwinkel $= 87^\circ$. Die Hornblende kommt entweder als grasgrüne Varietät, Smaragdit (Spaltungswinkel n. v. Drasche 124°) oder als in Adern das gewöhnlich dichte Gestein durchziehende schwarz-grüne Hornblende, sogenannter Karinthin vor. Der Granat erscheint, da wo er in kleinen Körnern in die dichteren Massen eingestreut vorkommt, mit deutlichen Rhombendodekaederflächen, seltener sieht man solche, da wo er in grösseren oft mit einander verwachsenen Krystallen die strahlige oder stengelige Structur des ganzen Gesteins wenig ändert. Ringsum den Granat tritt nach Sandberger (Würzb. naturw. Zeitschr. 1867 VI. S. 128) oft eine deutliche Zone von grüner Hornblende auf, eine Beobachtung die später R. v. Drasche bestätigt hat. Letzterer fand »einen gut ausgebildeten Granatkrystall, im Durchschnitt als Achteck erscheinend, von allen Seiten von einem Hornblendekrystall umgeben.« Dass diese Verhältnisse für die Genesis des Gesteins sicher Anhaltspunkte sein können, unterliegt keinen Zweifel, aber welche Deutung hier wohl die richtige ist, lässt sich vorderhand noch nicht entscheiden.*)

---

*) An accessorischen Gemengtheilen sind die Eklogite sehr reich. Sandberger hat besonders auf den Reichthum der oberfränkischen Eklogite an accessorischen Bestandtheilen in neuerer Zeit aufmerksam gemacht; er fand: Disthen, Karinthin, Muscovit, Biotit, Oligoklas, Smaragdit, Quarz, Hyazinth, Olivin, Titaneisen, Magnetkies und Eisenkies.

Was chemischerseits über den Eklogit überhaupt bis jetzt bekannt ist, reducirt sich auf eine einzige Analyse eines Eklogits von Eibiswald in Steiermark von J. Mauthner und zwar ist dies blos eine Bauschanalyse. Granat, Omphacit, Hornblende und wenig Quarz waren die Gemengtheile des untersuchten Gesteins.

Von Professor Sandberger veranlasst, unternahm ich nun die Analysen der oberfränkischen Eklogite und zwar standen mir zu diesem Behufe drei Handstücke zur Verfügung, eines von Eppenreuth, ein zweites von Silberbach, beide fast reine Omphacit führende Eklogite und ein drittes von der Falser Höhe bei Markt Schorgast mit viel Hornblende. Zunächst lieferten Bauschanalysen einen ersten Anhaltspunkt über die Natur des Gesteins, sodann gaben die Analysen der drei Granaten, sowie diejenige der Grundmassen Aufschluss über die Vertheilung vōn Granat und Grundmasse und endlich lieferten Analysen des Glimmers und des Disthens mit den schon ven Fikenscher ausgeführten Analysen des Omphacits einen Einblick in die chemische Beschaffenheit der Grundmasse.

I. Analyse eines Ekl. von Eppenreuth. Bestandtheile: rothbrauner Granat mit schön ausgebildeten Flächen ∞ 0 202, Omphacit in Körnern von grasgrüner Farbe, oft unterbrochen von strahlig angeordneten Kryställchen von Disthen und wasserklaren Quarzkörnern. Hie und da Nadeln von Apatit und Eisenkieskörner (in sehr geringer Menge, vielleicht grösstentheils Magnetkies. Schwefelwasserstoffentwicklung konnte nicht wahrgenommen werden). Sp. Gew. nahe 3.40. II. Analyse eines Ekl. von Silberbach. Fasriges Aussehen bedingt durch die stenglige Structur des Omphacits. Bestandtheile wie beim vorigen. Die Granatkörner etwas grösser die strahlige Structur des Gesteins wenig ändert. Sp. Gew. nahe 3,42. III. Analyse eines Ekl. von der Falser Höhe bei Markt Schorgast, mit allen von Sandberger (s. oben) für die oberfränkischen Ekl. angeführten accessorischen Bestandtheilen. Vorwaltend kleinkörnig mit schwarzen Gangspalten von Karinthin.

Granat in kleinen Körnern in die dichte Grundmasse eingesprengt. Spuren von Schwefelsäure, Chlor und Zirkonerde.

Analyse von S. Mauthner eines Eklogits von Eibiswald in Steiermark.

	I.	II.	III.
Kieselsäure	57,10	55,00	48,81
Phosphorsäure	Spuren	Spuren	Spuren
Thonerde	11,66	13,54	16,25
Eisenoxyd *)	2,84	2,74	6,00
Eisenoxydul	3,22	3,37	7,48
Calciumoxyd	13,80	12,09	9,72
Magnesiumoxyd	6,37	10,21	7,52
Manganoxydul	0,31	0,20	0,43
Kali	0,81	0,50	0,46
Natron	2,21	2,10	2,64
Wasser	0,54	0,32	0,16
	98,92	100,07	99,47

Die beiden Eklogite von Eppenreuth und Silberbach stimmen demnach als Omphacit führende wesentlich überein, während jener von Markt Schorgast grosse Aehnlichkeit hat als hornblendeführendes Gestein mit jenem von Mauthner analysirten Hornblendeeklogit von Eibiswald. Im Folgenden seien die Analysen der diesen Eklogiten entsprechenden Granaten I. II. und III. angeführt, deren hoher Kieselsäuregehalt, sich aus der von S a n d b e r g e r gemachten Beobachtung erklärt, dass sie stark mit Quarzkörnern imprägnirt wird.

	I.	Sauerstoff.		II.	Sauerstoff.		III.	Sauerstoff.	
Kieselsäure	43,37	23,13		43,16	23,01		41,45	22,10	
Thonerde	23,13	10,88		23,04	10,84		16,15	7,60	11,05
Eisenoxyd	—	—		—	—		11,50	3,45	
Eisenoxydul	14,63	3,25		14,60	3,24		12,40	2,75	
Manganoxydul	0,98	0,21		0,91	0,20		0,91	0,20	
Kalk	13,48	3,86	9,23	13,54	3,86	9,72	10,51	3,34	9,30
Magnesia	4,78	1,91		6,05	2,42		8,36	3,01	
	100,37			101,30			101,28		

Die Analysen der entsprechenden Grundmassen ergaben sich, wie folgt:

*) Dia Oxydationsstufen des Eisens ergaben sich in der angegebenen Weise. Jedoch bin ich aus Gründen eher geneigt, alles Eisen als Oxydul anzunehmen.

	I.	II.	III.
Kieselsäure	60,43	59,85	56,06
Thonerde	8,49	9,14	16,02
Eisenoxydul	4,10	3,80	4,50
Kalk	14,21	13,28	10,23
Magnesia	10,10	10,52	6,52
Kali	1,34	0,58	1,09
Natron	2,50	2,86	3,89
Wasser	0,61	0,47	0,30
	101,78	100,80	98,61

Bei der Berechnung ergibt sich nun aus den angegebenen Daten und den ebenfalls ausgeführten Analysen des Disthens und des Glimmers für die omphacitführenden Eklogite I. und II. etwa folgendes Resultat: 25% Granat, 4,5% Quarz, Disthen und Glimmer und 70,5% Omphacit, während der Eklogit III. zusammengesetzt erscheint aus je 50% Granat und Grundmasse.

Diese Gesteine, derart untersucht, liefern uns vorderhand nur ein allseitig klares Bild der fertigen Masse, über die Genesis derselben bleiben uns nur wenig Anhaltspunkte und diese bleiben hypothetischer Natur, wenn nicht vielleicht Analysen der verschiedensten Uebergangsformen zwischen Eklogit und Hornblendeschiefer in umfassendster Weise angestellt einen festeren Halt bieten. Arbeiten in dieser Richtung wären von grossem geologischen und chemischen Interesse und ich hoffe, vielleicht später über einen derartigen Versuch berichten zu können.

Sitzung vom 2. Februar 1874.

Herr Professor v. **Gorup-Besanez**

spricht über das Auftreten von

Leucin neben Asparagin in dem frischen Safte der Wickenkeime.

Mehr und mehr kömmt unter Chemikern und Physiologen die Ansicht zur Geltung, dass Leucin und Tyrosin, längst gekannte Spaltungsproducte der Eiweisskörper, zu diesen in viel näherer Beziehung stehen, als man früher voraussetzte. Ihr nicht seltenes Vorkommen im lebenden Thierorganismus, ihr Auftreten im Harn bei gewissen Krankheiten, ihre innerhalb weniger Stunden erfolgende Bildung bei der Peptonisirung der Eiweissstoffe durch Bauchspeichel, und andere Gründe mehr sprechen dafür dass sie, ganz besonders aber Leucin, zu den nächsten Derivaten der Eiweissstoffe gehören. Seitdem aber unter den Zersetzungsproducten der letzteren auch Asparaginsäure aufgefunden ist und das Asparagin selbst, auf Grund seines massenhaften Auftretens während der Keimperiode der Papilionaceen, sowie seines Verschwindens in späteren Entwickelungsphasen der Pflanzen als »Translationsform« der Proteïnstoffe betrachtet wird (Pfeffer, J. Sachs), ist auch dieses Amid für die brennende Frage der Constitution der Eiweisskörper bedeutungsvoll geworden.

Bei dieser Sachlage dürfte die von mir jüngst gemachte Beobachtung, dass sich in dem ganz frischen, durch rasches Aufkochen, theilweise auch durch Dialyse von Eiweissstoffen völlig befreiten Safte der auf feuchter Gartenerde und im Dunkeln gekeimten Wicken neben Asparagin eine erhebliche Menge von Leucin vorfinden kann, nicht ohne chemisches und physiologisches Interesse sein. Die von dem ausgeschiedenen Asparagin getrennte Mutterlauge, etwas weiter concentrirt, schied nach kurzer Zeit einen körnigen Körper ab, der auf der Oberfläche der Flüssigkeit Krusten bildete und dessen mikroscopische Formen: scharf contourirte Kugeln, vollkommen mit den für Leucin so ausserordentlich characteristischen übereinstimmten. Dieser Körper, auf Gypsplatten getrocknet, löste sich in kochendem Weingeist von 75% ziemlich leicht, und schied sich beim Erkalten der Lösung in ähnlicher Form wieder ab. Unter dem Mikroscop erschienen nun aber die Kugeln radial gestreift, und auch wohl an den Contouren mit spiessigen Nadeln besetzt. Genau so verhält sich aber das Leucin. Durch wiederholtes Umkrystallisiren aus kochendem Weingeist weiter gereinigt, zeigte er in der That alle Eigenschaften und Reactionen des Leucins. In einer Glasröhre vorsichtig erhitzt, lieferte er ein weisses wolliges Sublimat und amylamin-ähnlich riechende, alkalisch reagirende Dämpfe, auf Platinblech mit etwas Salpetersäure abgedampft, einen Rückstand, der beim Erwärmen mit etwas Natronlauge sich zu einem kugeligen, das Platinblech nicht benetzenden Tropfen zusammenzog (sehr characteristische von Scherer angegebene Reaction); er löste sich in Wasser, wenig in kaltem, reichlich in heissem

Weingeist, und es wurden seine wässrigen Lösungen durch Eisen- und Kupfersalze, sowie durch Bleizucker nicht, wohl aber durch Bleizucker und Ammoniak gefällt; er gab endlich mit Salz- und Salpetersäure Lösungen, die bei vorsichtigem Verdunsten krystallisirende Verbindungen ausschieden, und in concentrirter salzsaurer Lösung einen gelben Niederschlag des Platindoppelsalzes. Nach allen diesen Reactionen lag hier unzweifelhaft Leucin vor.

Vorläufig glaube ich mich aller Conjecturen über die mögliche Bedeutung dieser Beobachtung, so nahe sie auch liegen mögen, enthalten zu sollen, ich halte sie aber für wichtig genug, um sie weiter zu verfolgen. Die nächstliegende Aufgabe wird sein zu ermitteln, ob das Vorkommen des Leucins unter den gegebenen Bedingungen ein constantes ist, dann aber wird das Verhältniss des Leucins zu dem gleichzeitig vorhandenen Asparagin, und zur Menge der Eiweisskörper fortzustellen sein.

Vor mehreren Jahren erhielt Herr H. Reinsch aus dem Safte von Chenopodium album, und zwar aus der jungen vor dem Blühen gesammelten Pflanze, einen Körper, welchen er Chenopodin nannte. Die mikroscopischen Formen, welche derselbe bei seiner Abscheidung aus seiner Lösung zeigte und welche ich zu sehen Gelegenheit hatte, stimmten mit jenen des Leucins so vollkommen überein, dass ich keinen Augenblick daran zweifelte, dass es Leucin war. Die von Herrn Reinsch später gegebene Beschreibung seines Chenopodins *) konnte mich in meiner Ansicht nur bestärken, denn sie passte in allen wesentlichen Puncten auf Leucin. Wie ich einer Stelle in »Husemann, die Pflanzenstoffe« **) entnehme, erklärt auch Dragendorff das Chenopodin für Leucin. Leider bin ich nicht in der Lage, die Angabe Dragendorff's näher zu würdigen, da die Originalquelle derselben: eine Dorpater Dissertation (Bergmann, das putride Gift 1866) auch nichts Näheres darüber enthält. Weitere Angaben über das Vorkommen des Leucins in frischen Pflanzensäften liegen meines Wissens nicht vor.

Herr Prof. v. **Gorup**

theilte ferner mit, dass eine Untersuchung über das von Leared behauptete Vorkommen von Rhodanmetallen im Blut und Harn ihm ein negatives Resultat gegeben habe.

*) Neu. Jahrb. d. Pharm. XX. 268. XXI. 123. XXIII. 73. XXVIII. 193.
**) S. 100.

Endlich demonstrirte Derselbe Präparate von flüssiger Kohlensäure und einen Krystall von Cyanplatinmagnesium.

Herr Prof. **Rosenthal**

zeigte ein von ihm modificirtes Meidinger-Rollet'sches galvanisches Element, welches sich durch grosse Constanz auszeichnet; sodann einen Apparat zur Veranschaulichung der Ventilation in einem Zimmer und das Sciopticon, welches, wie die Demonstration einer Anzahl auf Seidenpapier gedruckter Holzschnitte aus dem Stricker'schen Handbuch zeigte, sich als ein ausserordentlich werthvolles Hülfsmittel für den Unterricht erweist.

Zum Schluss demonstrirte

Herr Prof. **Gerlach**

mittelst desselben eine Anzahl mikroskopischer Präparate.

Herr Prof. **Klein** sprach:

Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen.

Bei der Untersuchung der algebraischen Functionen y einer Veränderlichen x pflegt man sich zweier verschiedener anschauungsmässiger Hülfsmittel zu bedienen, deren jedes seine eigenthümlichen Vorzüge besitzt. Man repräsentirt nämlich entweder y und x gleichmässig als Coordinaten eines Punctes der Ebene, wo dann die reellen Werthe derselben allein in Evidenz treten und das Bild der algebraischen Function die algebraische Curve wird, — oder man breitet die complexen Werthe der einen Variabeln x über eine Ebene aus und bezeichnet das Functionsverhältniss zwischen y und x durch die über der Ebene construirte Riemann'sche Fläche.

Bis jetzt fehlte es an einem directen Uebergang von dem einen Anschauungsbilde zum zweiten, so wünschenswerth die Kenntniss eines solchen in sehr vielen Beziehungen erscheinen muss.

Ein solcher Uebergang ist nun aber in einfachster Weise herzustellen, wenn man die algebraischen Curven als Classencurven betrachtet und den Riemann'schen Gedanken einer mehrblättrigen Fläche mit der Bemerkung verbindet, dass jede complexe Gerade der Ebene durch einen reellen Punct hindurchgeht.

Man lasse nämlich jeder imaginären Tangente einer algebraischen Curve ihren reellen Punct, jeder reellen Tangente ihren Berührungspunct entsprechen *), und construire dann eine Fläche, welche jeden Theil der Ebene mit so vielen Blättern überdeckt, als durch die Zahl der Tangenten angezeigt wird, die durch die Puncte desselben repräsentirt werden. Die so entstehende Fläche kann dann als vollständiges Bild der betr. algebraischen Function dienen; sie hat gegenüber der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche den Vorzug, in unmittelbarster Weise auf die betr. algebraische Curve bezogen zu sein; sie ist überdies in den einfachen unten angeführten Beispielen viel übersichtlicher, als die gewöhnliche Fläche.

Nehmen wir als erstes Beispiel einen Kegelschnitt, etwa eine Ellipse. Die Puncte der Ebene, durch welche imaginäre Tangenten derselben hindurchgehen, erfüllen dessen Inneres doppelt. Die Riemann'sche Fläche nimmt also hier die Gestalt eines ellipsoidischen Doppelblattes an. Eine ellipsoidische Fläche zerfällt aber durch jede auf ihr gezogene geschlossene Curve: desshalb ist der Kegelschnitt vom Geschlechte $p = 0$.

Betrachten wir ferner eine Curve dritter Classe. Eine solche enthält jedenfalls einen geschlossenen Zug mit drei Spitzen; ausserdem kann sie noch ein Oval besitzen, das den ersteren Zug völlig umschliesst. Beide mögen, was immer gestattet ist, als durchaus im Endlichen gelegen angesehen werden. Die reellen Puncte der imaginären Tangenten der Curve erfüllen dann, falls ein Oval vorhanden ist, den ringförmigen Raum zwischen den beiden Curvenzügen doppelt: denn alle underen Theile der Ebene werden von reellen Tangenten der Curve dreifach, er selbst noch einfach von reellen Tangenten überdeckt. Die zugehörige Riemann'sche Fläche wird also eine Ringfläche, das

*) Dies sind mit einander harmonisirende Festsetzungen, da der zwei conjugirt-imaginären Tangenten gemeinsame reelle Punct in den Berührungspunct der reellen Tangente übergeht, in welche die beiden imaginären Tangenten zusammenfallen können. — Einer Doppeltangente mit zwei reellen Berührungspuncten werden diese zwei Puncte entsprechend zu setzen sein. Dagegen wird man für reelle Doppeltangenten mit imaginären Berührungspuncten eine besondere Verabredung zu treffen haben, auf die indess hier nicht eingegangen werden soll.

Geschlecht p der Curve dritter Classe ist gleich 1. — Fehlt dagegen das umschliessende Oval, so erscheint der ganze Theil der Ebene ausserhalb des mit drei Spitzen versehenen Curvenzuges doppelt mit Puncten überdeckt, die Riemann'sche Fläche ist also eine Art einschaliges Hyperboloid, p ist nach wie vor gleich 1.

Man vergleiche die Curve dritter Classe mit nicht isolirter Doppeltangente. Eine solche Curve besteht aus einem Ovale mit einwärts gewandter Spitze (die Curve kann wiederum als ganz im Endlichen gelegen vorausgesetzt werden). Man denke sich bei ihr, um den Uebergang zur allgemeinen Curve dritter Classe (mit Oval) zu bewerkstelligen, denjenigen Theil der Doppeltangente gezogen, der zwischen den Berührungspuncten im Endlichen verläuft.

Dieses Stück der Doppeltangente spalte man sodann in zwei Curvenäste, von denen sich der eine mit dem äusseren Theil der gegebenen Curve vereinigt, um das umschliessende Oval zu liefern, während der andere zur Bildung des eingeschlossenen, mit drei Spitzen versehenen Curvenzuges verwandt wird. Dabei ist nun völlig deutlich, warum die Riemann'sche Fläche, die in dem allgemeinen Falle eine Ringfläche war, in dem besonderen Falle eine nur einfach zusammenhängende ist, warum also die Curve dritter Classe mit Doppeltangente im Gegensatze zur allgemeinen Curve das Geschlecht Null hat. —

Ebenso übersichtlich stellen sich diese Verhältnisse bei den Curven vierter Classe. Ich will hier nur angeben, wie man für den vorliegenden Zweck recht brauchbare Beispiele der letzteren erhält. Man zeichne zwei Ellipsen, die sich in vier reellen Puncten kreuzen, nebst denjenigen Stücken ihrer vier in diesem Falle reellen gemeinsamen Tangenten, die, im Endlichen verlaufend, bez. von Berührungspunkt zu Berührungspunkt reichen. Um Curven vierter Classe zu erzeugen, hat man es dann in der Hand, ob man auf ein's dieser Stücke, oder auf mehrere, oder endlich auf alle den soeben bei den Curven dritter Classe beschriebenen Auflösungsprocess anwenden will. (Löst man z. B. alle gemeinsamen Tangenten auf, so erhält man eine Curve vierter Classe ohne Doppeltangente, bestehend aus einem mit vier Doppelpuncten und acht Spitzen versehenen inneren Curvenzuge und einem umschliessenden Ovale). — So lange man die beiden Ellipsen mit den ungeänderten Doppeltangenten zu Grunde legt, besteht die

Riemann'sche Fläche, wie sie hier zu construiren ist, aus zwei getrennten ellipsoidischen Doppelblättern, die sich zum Theil überlagern, aber weiter keinen Zusammenhang unter einander zeigen. Sowie man aber die Doppeltangenten auflöst, werden Zusammenhänge zwischen ihnen hergestellt; ist die Zahl der aufgelösten Doppeltangenten bez. 1, 2, 3, 4, so ist der Zusammenhang der zugehörigen Fläche bez. 1, 3, 5, 7 *) und also das Geschlecht der Curve bez. 0. 1, 2, 3, wie es sein muss. —

Sitzung vom 9. März 1874.

Herr Prof. Dr. **Hilger**

theilt nachstehende Untersuchungen aus seinem Institute mit:

I. Zum Nachweise der selenigen und tellurigen Säure.

Bei einer Versuchsreihe über die Schwefelverbindungen des Selens, welche Herr Dr. v. Gerichten in meinem Laboratorium ausführte, wurde ein charakteristisches Verhalten der Selenigen Säure gegenüber Magnesiasalzen beobachtet, darin bestehend, dass Lösungen von seleniger Säure oder selenigsauren Alkalien bei Gegenwart von überschüssigem Chlorammonium durch Chlormagnesium oder schwefelsaure Magnesia und Ammoniak gefüllt werden und zwar vollständig.

Die Fällung tritt selten sofort ein, sondern erst beim längeren Stehen; durch heftiges Schütteln oder Reiben an den Glaswandungen wird dieselbe beschleunigt.

Der Niederschlag besitzt krystallinische Beschaffenheit und bildet beim längeren Stehen wohl ausgebildete Krystallisationen, welche bei der Beobachtung mit Hilfe des Mikroskopes vollständig mit den charakteristischen Krystallen der phosphorsauren Ammon-magnesia übereinstimmen. Besonders sind es die Sargdeckel ähnlichen Krystalle, welche hier sehr deutlich zur Ausbildung gelangen.

Der Niederschlag ist leicht löslich in Essigsäure und den gewöhnlichen Mineralsäuren, enthält selenige Säure, Ammon und

*) Der Zusammenhang der geschlossenen Flächen ist so gezählt, als wenn bei ihnen an irgend einer Stelle ein Punkt herausgehoben wäre.

Magnesia. Bestimmte Anhaltspunkte über die Zusammensetzung dieser Füllung, sowie deren Werth bei quantitativen Bestimmungen des Selens fehlen bis jetzt, werden jedoch in einer späteren Mittheilung, wenn ausführlichere Versuche vollendet sind, folgen.

Jedenfalls lässt sich dieses Verhalten benützen, um selenige Säure von Selensäure, schwefliger Säure, Tellursäure, Schwefelsäure zu trennen, resp. aus Lösungen abzuscheiden, welche genannte Säuren durch Magnesiasalze und Ammon bei Gegenwart von Chlorammonium nicht zur Abscheidung gelangen.

Der Gedanken lag nahe, auch die tellurige Säure in derselben Richtung zu prüfen, was auch geschah und das Resultat lieferte, dass tellurige Säure und tellurigsaure Alkalien sich gegenüber Magnesiasalzen und Ammon wie die selenige Säure verhalten, nur mit dem Unterschiede, dass der Niederschlag keine krystallinische Beschaffenheit besitzt. Auch die näheren Verhältnisse dieser Fällung werden in Gemeinschaft mit der selenigen Säure weiter verfolgt und später bestimmte Mittheilungen liefern.

II. Ueber Amylnitrit.

Die Verbreitung des Amylnitrits $C_5 H_{11}, NO_2$ als Anaestheticum in der neuesten Zeit veranlassten ein eingehenderes Studium der Darstellung und sonstigen Eigenschaften dieses Präparates, welches mit Unterstützung der Herren Brimmer und Dr. von Gerichten zu nachstehenden Resultaten führte.

Balard stellte zuerst 1844 das Amylnitrit dar, entweder durch Einwirkung von Salpetersäure auf Amylalcohol bei vorsichtiger Anwendung von Wärme oder durch Einleiten von salpetriger Säure aus Stärkemehl und Salpetersäure gewonnen in Amylalcohol bei etwa 100 °C. Die zuerst erhaltenen Produkte werden durch wiederholte Rectification vollständig gereinigt. Die hier erhaltenen Produkte sind blassgelbe Flüssigkeiten, bei 96° siedend, welche durch wiederholtes Erhitzen an Intensität der Farbe zunehmen.

Rieckher (Jahrb. f. Ph. XIV) berichtet später über denselben Gegenstand mit Anwendung analoger Bereitungsmethoden und gibt mit Angabe verschiedener Zersetzungserscheinungen, die hier nicht zu berücksichtigen sind, den Siedepunkt zu 95° C. und das spec. Gew. 0,8773. (Auch ist der Siedepunkt zu 90° angegeben?)

Bis zur ersten Verwendung des Präparates als Arzneimittel in England treffen wir keine weiteren Berichte hierüber, zu welcher Zeit Schering (Archiv der Pharmacie 194. 100) das Präparat ohne weitere Angaben als Arzneimittel erwähnt. Bald darauf weist Umneii (Pharmac. Journ. and Transact. 3 Ser. I. 422) auf die Unreinheit des Präparates in den englischen Officinen hin, gestützt auf eigene Erfahrungen.

Endlich berichtet Pick über das Amylnitrit und seine therapeutische Wirkung (Berlin, Verlag von Hirschwald, 1874) ausführlich über Anwendung und Wirkungen des Präparates und berührt nur wenig den chemischen Theil. Wir erfahren hier die leichte Zersetzbarkeit des Präparates, die Verschiedenheit der Handelswaare, ausserdem einen Vorschlag zur Verhütung der raschen Zersetzung, darin bestehend, dass geglühtes Chloralcium zugesetzt wird zur Wegnahme der Feuchtigkeit.

Meine Versuche waren zunächst auf die Darstellung des Präparates gerichtet, wobei sich nach wiederholter Darstellung die Methode der Bildung mittelst salpetriger Säure als die zweckmässigste erwies.

Die Anwendung von Salpetersäure veranlasst, auch bei der grössten Vorsicht hinsichtlich der Erwärmung, die Bildung von Amylnitrat ($C_5 H_{11} NO_3$) in reichlicher Menge, ausserdem Blausäure in grösseren Mengen, Ammoniak und sogar Baldriansäure. Die Ausbeute an Amylnitrit bei Anwendung von Salpetersäure ist verhältnissmässig eine sehr geringe.

Die Methode, welche mir die besten Resultate gab, war folgende:

In eine beliebige Quantität Amylalcohol (chemisch rein) wird bei einer Temperatur (unter dem Siedepunkt des Wassers am besten) von 70—90^0 salpetrige Säure eingeleitet, die durch Einwirkung von Salpetersäure auf arsenige Säure dargestellt war. Das Einleiten des Gases kann so lange fortgesetzt werden, als der Geruch nach reinem Amylalcohol zu bemerken ist. Das Destillat wird möglichst rasch mit Magnesiumoxyd oder verdünnter Kalilauge geschüttelt, vollständig entwässert, mit Anwendung von Chlorcalcium (ohne alcalische Reaction) und etwas Magnesiumoxyd rectificirt. Die Temperatur muss bei der Rectification gewissenhaft beobachtet werden, am besten beseitigt man die ersten Antheile des Destillates und benützt nur das zwischen 90 und 95^0 übergegangene Destillat, welches auf diese Weise vollständig säurefrei erhalten wird. Auf diese Weise wird ein

Produkt erhalten, welches vollständig frei von Säure ist, blassgelb von Farbe, mit charakteristischem, eigenthümlichen Geruche versehen, einem Siedepunkte von 94—95° C. und einem spec. Gew. von 0,902—0,9026. Die Angabe von Rieckher und Balard bezüglich des specifischen Gewichtes dürften sich auf nicht völlig reine Produkte beziehen, indem verschiedene Produkte des Handels von mir untersucht mit dem oben angegebenen spec. Gewicht übereinstimmen. Die leichte und verhältnissmässig rasche Zersetzbarkeit des Amylnitrit zeigte sich in einer Probe, welche circa 5 Monate unter zeitweiligem Oeffnen des Gefässes stehen geblieben war. Die Säurebildung tritt sehr rasch ein und zwar zunächst salpetrige Säure und Salpetersäure; letztere wirkt oxydirend und erzeugt Valeriansäure nebst valeriansaurem Amyl, ausserdem ist Amylalcohol unter den Produkten der Zersetzung. Blausäure in grösseren Mengen bei der freiwilligen Zersetzung nachzuweisen, gelang nicht. Das Präparat, welches Gelegenheit bot, die ebengenannten Veränderungen zu beobachten, verhielt sich bei der fractionirten Destillation folgendermassen:

Die Temperatur stieg beim Erwärmen ziemlich rasch über 100° C., wenig Amylnitrit war demnach vorhanden. Bei 130—132° C. hielt sich die Temperatur längere Zeit constant, was uns die Gegenwart von Amylalcohol entschieden beweist; dann war ein weiterer Stillstand im Steigen der Temperatur bei 147° C. zu bemerken. Das hier erhaltene Destillat zeigten den charakteristischen Geruch des Amylnitrates, dessen Siedepunkt Hoffmann zu 148° C. angiebt, während Rieckher von 137° C. Siedepunkt spricht.

Endlich trat eine abermals rasche Temperatursteigerung ein bis 180—190°, es war der charakteristische Geruch des valeriansauren Amyls in hohem Grade vorhanden.

Die vorliegenden Resultate beweisen zur Genüge, dass das Amylnitrit unendlich rasch der freiwilligen Zersetzung unterworfen ist und dessen Wirkungen in Folge dessen unter Umständen von sehr zweifelhaftem Erfolge begleitet sein werden.

Vor Allem ist Zutritt von Feuchtigkeit nicht geeignet, die Zersetzung aufzuhalten, aus welchem Grunde auch nach meiner Meinung die Aufbewahrung dieses Präparates in unseren Officinen am besten mit kleinen Zusätzen von Chlorcalcium (ausgeglüht und frei von alkalischer Reaction) und gebrannter Magnesia geschehen wird.

Bei dem Ankaufe des Präparates ist eine Prüfung auf freie Säure jedenfalls die erste Arbeit, und eine Probe auf die Qualität der freien Säure empfehlenswerth. Durch Schütteln mit Wasser können salpetrige Säure, Salpetersäure, Blausäure, Baldriansäure leicht entzogen werden und bedarf es nur der Anwendung der speciellen Reagentien.

Mögen diese Bemerkungen in der Praxis ihre Würdigung finden!

III. Ueber ölsaures Quecksilber.

(Quecksilberoleat.)

Professor John Marshall (Lancet I. 21; 25 May 1872) hat zuerst das Oleat des Quecksilbers in allen Fällen, wo man bisher Unguentum Hydrargyri ciner. anwandte, in Gebrauch gezogen. Die Präparate, welche derselbe darstellen liess und anwandte, sind Lösungen von frisch gefälltem, rasch getrocknetem Quecksilberoxyd in Oelsäure oder Oleïn und zwar von verschiedenem %-Gehalt,

I 5 % HgO eine hellgelbe Flüssigkeit,

II 10 % HgO ebenfalls noch flüssig,

III 20 % HgO eine salbenartige Masse von dunkelgelber Farbe.

Die Präparate sind nach dieser Bereitungsweise als Lösungen von Quecksilberoleat in Oelsäure zu betrachten.

Dr. O. Martini zu Dresden (Schmidt's Jahrbücher Bd. 160 Nr. 10) theilt ebenfalls über die therapeutischen Wirkungen dieses Präparates Resultate mit, welcher Abhandlung über die Darstellung der Präparate in der Mohrenapotheke in Dresden Nachstehendes zu entnehmen ist:

Das Hydrargyrum oleïnicum ist oleinsaures Quecksilberoxyd, eine wirklich chemische Verbindung, in gleicher Weise wie das Bleipflaster oleïnsaures Bleioxyd ist. Es wird bereitet durch Auflösen von Quecksilberoxyd in Oleïn (Oelsäure, Oleïnsäure) in mässiger Wärme des Dampfbades; bei höherer Temperatur findet Reduction zu Quecksilberoxyd oder auch Quecksilberoxydul, auch wohl zu Metall statt. Die Bereitung geht gleich gut von statten, ob dann ein auf trocknem Wege dargestelltes HgO benützt wird oder ein solches, das aus einer Lösung von salpetersaurem Quecksilberoxyd durch Fällen mit Kali erhalten wurde. HgO löst sich in verschiedenen Verhältnissen in Olein; eine 5 % Lösung bleibt noch flüssig, eine 20—25 % repräsentirt eine Salbe von praktikabler Consistenz; noch concentrirter scheint sich die Lösung zweckmässiger Weise nicht machen zu lassen! — Die Darstellung dieser Präparate sowohl wie die Herstellung eines chemisch reinen Präparates, frei von ungebundener Oelsäure und Prüfung der englischen Fabrikate waren Gegenstand ausgedehnter Versuchsreihen, bei welchen mich Herr Cand. pharm. Christen aus Hof unterstützte. Vor allem wurde eine Quantität chemisch reiner Oelsäure hergestellt durch wiederholte Reinigungsprocesse, frei von Palmitin- und Stearinsäure. Die zahlreichen Versuche über die Löslichkeit des HgO in der Oelsäure zum Zwecke der Herstellung der erwähnten Präparate führten zu folgenden bestimmten Resultaten:

I. Das anzuwendende Quecksilberoxyd ist unter allen Verhältnissen das auf nassem Wege bereitete, möglichst rasch getrocknet. Dasselbe löst sich schnell in Oelsäure, während das krystallinische auf trocknem Wege dargestellte Präparat nur langsam in Lösung gebracht werden kann.

II. Die zweckmässigste Temperatur zum Lösen des Quecksilberoxydes schwankt zwischen 50 und 70 % C. Höhere Temperaturen veranlassen sofort Zersetzung des HgO zu Hg sowie der Oelsäure.

Das Quecksilberoxyd löst sich bis zu 15—16 % in Oelsäure und bildet dickflüssige Massen von schwachgelb bis rothbrauner Färbung. Steigt der Procentgehalt, so ist die Beschaffenheit der Lösung salbenartig. Bis 30 % ist eine Lösung von Quecksilberoxyd in Oelsäure möglich bei den erwähnten Vorsichtsmassregeln. Mehr Quecksilberoxyd veranlasst in dieser Mischung sofort sehr schnelle Zersetzungen, Abscheidungen von Hg, dunklere Färbung etc., kurz und gut eine vollständige Veränderung des Präparates.

Ein Präparat aus England, der Fabrik Messrs Hopkins und Williams, Hatton Garden, London, entnommen, verdanke ich der Güte des Herrn Professor Bäumler. Dasselbe ist 10 % Quecksilberoleat von salbenartiger Consistenz, eine auffallende Erscheinung, die mich vermuthen liess, dass entweder mehr Quecksilberoxyd gelöst vorhanden ist, oder Beimengungen von Palmitinsäure oder Stearinsäure. Die quantitative Bestimmung des Quecksilbers ergab in verschiedenen Proben Schwankungen von 8—10 % HgO, dagegen waren Beimengungen von Palmitin- und besonders

Stearinsäure vorhanden, so dass dieses Präparat jedenfalls seine festere Consistenz diesen Beimengungen verdankt.

Bei der Zersetzung des englischen Präparates mittelst Alkali zum Zwecke der Isolirung der Oelsäure und anderer Säuren zeigte sich sofort keine reine Ausscheidung von $Hg(HO)_2$, sondern metallisches Hg gemengt mit HgO, ein Beweis, dass in dem Präparate ein Theil des HgO bereits in reducirtem Zustande vorhanden war. Aehnliche Beobachtungen machte ich mit den Produkten, die ich selbst darstellte, so dass zu vermuthen ist, dass ein Quecksilberoleat, das längere Zeit bereitet ist und namentlich nicht mit reiner Oelsäure, sondern mit Olein und anderen ähnlichen kauflichen Produkten dargestellt wurde, niemals Anspruch auf constante Zusammensetzung machen kann.

Die Versuche, ein Quecksilberoleat chemisch rein darzustellen, sind nach verschiedenen Methoden versucht, vorläufig resultatlos geblieben. Die oben erwähnten Thatsachen verhindern eine Darstellung des Produktes durch Lösen von HgO in Oelsäure wegen der leichten Reducirbarkeit. Den Weg, das Oleat durch Umsetzungen von ölsaurem Alkali oder Baryt mit Quecksilberoxydsalzen zu erhalten, führte ebenfalls zu keinem bestimmten Resultate.

Wässerige Lösungen von ölsaurem Kali oder Natron wurden mit wässerigen Lösungen von Quecksilberchlorid oder -Nitrat versetzt, wohl traten Abscheidungen ein von pflaster-ähnlichen Massen, die aber unendlich schnell sich schwärzten und Quecksilber abschieden. Auch alcoholische Lösungen von ölsauren Alkalien und ölsaurem Baryt mit alkoholischen Quecksilberchlorid versetzt, schieden zuerst beim Verdunsten die betreffenden Chloride oder Nitrate aus, während sich rothgelb gefärbte, flockige Massen ausschieden, die aus Quecksilberoleat bestanden.

Beim längeren Stehen, namentlich Trocknen, zeigten dieselben gerade so die leichte Zersetzbarkeit. Die gegenseitige Umsetzung ölsaurer Salze mit Quecksilbersalzen in Lösungen scheint demnach zur Reindarstellung des Quecksilberoleates nicht möglich zu sein. Die zum therapeutischen Gebrauche nothwendigen Präparate werden demnach nach oben erwähnten Maximen darzustellen sein; empfehlenswerth dürfte sein, kleine Zusätze von Stearinsäure oder Palmitinsäure zur Oelsäure, wodurch einerseits die Haltbarkeit der Präparate gefördert wird, andererseits die Consistenz eine zweckmässigere Form erhält. Solche Präparate sind natürlich kein reines Quecksilberoleat, sondern Mischungen mit Palmitat oder Stearat, ein Umstand, der sicher die Wirkungen des Präparates nicht beeinträchtigen wird.

Herr Dr. **Günther**

spricht hierauf über

Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Faulhaber.

§. 1. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im Wesentlichen mit einem Gegenstande, den wir als speziellen Fall eines speziellen Wissensgebietes bezeichnen möchten, desjenigen Gebietes nämlich, innerhalb dessen man sich mit Lösung mathematisch-historischer Probleme beschäftigt. Wir verstehen unter einem solchen Probleme eine Aufgabe, deren Lösung der reinen Mathematik angehört und auch ausschliesslich durch rein mathematische Hülfsmittel erreicht werden soll, während dagegen die Auswahl dieser Hülfsmittel keine willkürliche mehr ist, sondern nur innerhalb enge gesteckter Grenzen vorgenommen werden darf. Wir treffen in der Geschichte der Wissenschaft nur allzuhäufig auf gewisse Thatsachen, an deren Richtigkeit wir nicht zweifeln dürfen, ohne dass wir doch über die Art und Weise, wie diess Faktum zu Stande kam, von vorne herein irgend etwas Sicheres zu ermitteln vermöchten. Hier haben wir dann also ein mathematisch-historisches Problem; es tritt die Aufforderung an uns heran, uns in den Gedankengang irgend einer historisch bedeutsamen Persönlichkeit hineinzudenken und uns von den Schlüssen Rechenschaft zu geben, aus welchen zuletzt jene isolirt dastehende Wahrheit resultirte. Man übersieht sofort, dass solche Aufgaben mehrentheils sowohl im exakten als im gewöhnlichen Sinne den unbestimmten beizuzählen sind, man wird aber auch nicht leugnen können, dass solche dem Grenzgebiete zwischen Theorie und Geschichte angehörige Probleme einen eigenen Reiz besitzen, besonders wohl auch dadurch, dass die Spezialgeschichte keiner andren Wissenschaft zu so eigenartigen Untersuchungen Veranlassung bietet. Fragt man nach prägnanten Beispielen, so möchten wir auf Nesselmann's [1]) hübsche Darlegung der von Diophant zur Reduction der Brüche auf Summen von Einheitsbrüchen angewandten Verfahrens, oder auf Bretschneider's [2]) Erläuterung gewisser Construktionsmethoden des Archytas hinweisen; hieher gehört auch die Erklärung, welche Cantor [3]) von dem plötzlichen Auftreten des Sternfünfecks gab. In grössrem Massstabe führen derartige Versuche zu den eigentlichen Divinationen, wie solche Viviani und Chasles (bezüglich der Euclid'schen Porismen) in so überraschender Weise gelangen. Auch das Folgende sucht zu einer ähnlichen nicht uninteressanten Frage einen kleinen Beitrag zu liefern.

1) Nesselmann, Algebra der Griechen, Berlin 1842. S. 113.

2) Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euclides, Leipzig 1870. S. 152.

3) Cantor, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker, Halle 1863. S. 98.

§. 2. Zu den bedeutendsten deutschen Mathematikern in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts gehört unstreitig der Ulmer Mathematiker Johann Faulhaber. Die Wirksamkeit dieses Mannes ist, wenn wir von seinen ausschliesslich für seine Zeit bedeutsamen mechanischen und astronomischen Arbeiten absehen, hauptsächlich eine algebraische, Auflösung verwickelter algebrischer Gleichungen und Summation höherer arithmetischer Reihen bildeten seine Lieblingsbeschäftigung, und in letztrer Thätigkeit müssen wir auch seine specifisch-wissenschaftliche Bedeutung sehen, die ihn mit Männern, wie Descartes und Kepler, zusammenführte. Allein auch noch in mancher andren Beziehung geben uns Faulhaber's Werke interessante Gesichtspunkte an die Hand, und es ist sehr zu bedauern, dass die beiden Historiker, welche sich bisher mit diesem Gegenstande beschäftigten, Kästner [4]) und Ofterdinger [5]) hierauf nicht näher eingegangen sind; jedoch dürfte von letztrem Gelehrten eine Ergänzung in diesem Sinne zu erwarten sein.

Diejenige Untersuchung Faulhaber's, deren Analyse den Gegenstand der folgenden Zeilen bilden soll, ist in einem fortifikatorischen Werke [6]) enthalten. Kästner [7]) berichtet: „Zuletzt allerlei Aufgaben. Eine; 130 S. hat er etlichen Gelehrten in Schriften vorgegeben, welche sich durch die Logarithmen auf eine besondre neue Manier gar schön resolviren lässt. Ich habe ein irregulirtes Siebeneck in einem Cirkel beschrieben: thun die Seiten 2300; 1600; 1290; 1000; 666; 1260; 1335. Ist die Frage wie der halb Diameter solches Cirkels zu finden, welcher das irregular Siebeneck aufs genauest in sich schliesst? und wieviel

Grad und Minuten jeder Winkel just halte? Auch was für Mysterien aus der Geometria Miraculorum zu demonstriren seien?"

Kästner giebt noch weiter an, dass Tobias Mayer diese Aufgabe gelöst und für die Winkel nachstehende Werthe erhalten habe:

1.	90°	13′	15,″9
2.	60	43	54, 2
3.	48	61	18, 7
4.	36	50	10, 0
5.	24	17	39, 3
6.	46	55	6, 6
7.	49	53	44, 5.

Diese Rechnung ist nicht völlig genau; die Summe dieser Centriwinkel ist nicht, wie sie sein sollte, und wie sie auch Kästner angiebt, 360°, sondern vielmehr

357° 55′ 19,″2.

Den Halbmesser giebt Tobias Mayer nicht an, wohl aber thut dies Faulhaber selbst [8]) bei einer späteren Stelle, indem er denselben zu

1582,6323 Schuh

bestimmt. Es scheint demnach sicher, dass Faulhaber sein Problem auch selbst löste — ein Problem, welches vor ihm noch nie behandelt wurde und auch nach ihm genau 200 Jahre bis zu seiner wissenschaftlichen Erledigung warten musste.

4) Kästner, Geschichte der Mathematik, 3. Band, Göttingen 1799. S. 111—152.

5) Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts, Ulm 1867. S. 8—12.

6) Faulhaber, Ingenieurschul, 1. Theil, Nürnberg 1630.

7) Kästner, S. 167.

8) Faulhaber, Der andre Theil der Ingenieurschul, Ulm 1633. 14. Cap.

§. 3. Wenn wir uns nun nach den Mitteln fragen, welche unser Autor zur Auflösung seiner Aufgabe in Anwendung gebracht haben kann, so ist es jedenfalls erstes Erforderniss, dass wir selbst diese Lösung zu leisten im Stande seien. Und wir erkennen sehr bald, dass das Problem durchaus nicht zu den leichtesten gehört, wie auch schon daraus hervorzugehen scheint, dass so lange Zeit Niemand sich eingehend mit demselben beschäftigt hat. Der erste Mathematiker, welcher diesem Gegenstande, resp. einem noch allgemeineren, seine Theilnahme zugewandt hat, ist Möbius [9]).

Derselbe beschäftigt sich damit, aus den gegebenen Seiten eines beliebigen einem Kreise einbeschriebenen n Ecks den Radius dieses Kreises zu berechnen. Die allgemeine hiezu dienende Formel lässt sich ohne weitres angeben; da die Summe aller Centriwinkel 360° ergeben muss, so kann man, wenn $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ diese Centriwinkel sind, von einer der beiden folgenden Gleichungen ausgehen:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma + \ldots.) = \sin 2\pi = 0,$$
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma + \ldots.) = \cos 2\pi = 1.$$

Die Sinus der einzelnen hier vorkommenden Winkel enthalten ersichtlich den Radius rational; demnach gehen in jede vollständig entwickelte Gleichung soviel Irrationalitäten ein, als Cosinus vorhanden sind, und das Problem reducirt sich auf das Rationalmachen eines algebraischen Ausdrucks.

Um diesen stets schwierigen Prozess einigermassen zu vereinfachen, hat Möbius das sinnreiche Auskunftsmittel getroffen, das Rationalmachen gleich bei der unentwickelten Gleichung zu beginnen. Um eine Andeutung seines Verfahrens zu geben, möge an das Dreieck angeknüpft werden, wobei noch bemerkt sein möge, dass Möbius aus naheliegenden Gründen, bei denjenigen Vielecken, deren Eckenzahl gerade ist, die zweite, im anderen Fall die erste der oben aufgestellten Gleichungen verwendet. Hier wurde also die Gleichung

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = o$$

zu Grunde zu legen sein. Da jede rationale Funktion des Sinus sich nicht ändert, wenn man statt α

$$\alpha + (2p + 1)\pi$$

setzt, unter p irgend einen ganzzahligen Werth verstanden, so besteht auch die „nach sin α rationalisirte Gleichung“ [10])

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(-\alpha + \beta + \gamma) = o,$$

und leitet man aus ihr die weitre auch für sin β rational gemachte Gleichung

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(\alpha + \beta - \gamma) \sin(\alpha + \beta - \gamma) = o$$

ab, so überzeugt man sich leicht, dass in derselben auch sin γ nur noch rational vorkommt, und die gestellte Forderung ist sonach erfüllt.

Andeutungsweise hat Möbius die hier skizzirte Methode auch auf das für uns besonders wichtige Siebeneck ausgedehnt und hiebei gezeigt, dass das in Frage kommende Produkt in diesem Falle aus

$$1 + 7 + 21 + 35 = 64$$

Faktoren bestehe. Zum Schluss wird auch noch gezeigt, auf welche Weise man den Grad jeder solchen nach dem Radius r aufgelösten Gleichung bestimmen könne; es findet sich derselbe für das (2 m — 1) Eck gleich der Zahl

$$(2m-1)\frac{(2m-2)(2m-3)\ldots(m+2)(m+1)m}{(m-1)!}-2^{2(m-1)};$$

da jedoch erweislich nur gerade Potenzen der Unbekannten in jene Gleichung eingehen können, so lässt sich dieselbe in eine Gleichung von halb so hohem Grade für $r = \sqrt{z}$ erniedrigen. In unsrem Beispiele wäre jene Zahl

$$7 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2^6 = 76,$$

so dass mithin, selbst bei Anwendung aller Hülfsmittel der modernen Analysis, die direkte Auflösung des Faulhaber'schen Problems die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung vom 38ten Grade involviren würde.

9) Möbius, Ueber die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden, Crelle's Journal, 3. Band. S. 5.

10) Ibid. S. 10.

§. 4. Es ist nicht ohne Interesse, zu untersuchen, wie gross die Vereinfachung ist, welche das Möbius'sche Verfahren in dem hier vorliegenden Falle mit sich bringt. Wir fragen uns zu diesem Zwecke, wieviele irationale Ausdrücke die direkte Entwickeluug der Gleichung.

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \Theta) = o$$

uns ergeben haben würde.

Diess entnehmen wir nun sofort aus einer Tabelle, welehe Unferdinger[11]) mit grossem Fleisse berechnet hat, und deren Anfangsreihen wir hier wiedergeben. Entwickelt man

$$\sin(\Theta + \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_{n-1})$$

so ist die Zahl der positiven und negativen Glieder in dieser Entwicklung nachstehende:

n	+	—
1	1	0
2	2	0
3	3	1
4	4	4
5	6	10
6	12	20
6	28	36

Im Ganzen kommen also dieser Zusammenstellung zufolge $28 + 36 = 64$ Glieder vor; von diesen ist nur ein einziges, nämlich

$$\sin \Theta \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \sin \Theta_3 \sin \Theta_4 \sin \Theta_5 \sin \Theta_6,$$

rational, und es würde somit die Bestimmungsgleichung für r nicht weniger als 63 Irrationalitäten enthalten; man sieht also, wie wesentlich die Vereinfachung ist, welche man Möbius verdankt.

11) Unferdinger, Ueber die Entwickelung von $\cos(\Theta + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{n-1})$, $\sin(\Theta + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{n-1})$ und über einen damit verwandten Satz aus der Theorie der Zahlen, Grunert's Archiv, 34. Theil. S. 79.

§. 5. Treten wir nun unsrem eigentlichen Vorhaben näher. Dass zur Herstellung der Schlussgleichung in gleich rationaler Form die Mittel eines Mathematikers des siebzehnten Jahrhunderts nicht ausreichten, braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden; allein auch der uns so naturgemässe Weg, den Sinus und Cosinus einer vollen Umdrehung als Funktion des Radius darzustellen, war für den damaligen Standpunkt trigonometischen Wissens eine Unmöglichkeit. Es muss jedoch eine Methode gegeben haben, die mit Irrationalitäten behaftete Schlussgleichung zu finden; und mit der Reconstruktion einer solchen Methode wollen wir uns nunmehr beschäftigen, obschon durchaus nicht etwa behauptet werden soll, Faulhaber habe wirklich diesen und keinen andren Weg eingeschlagen. Nur daran ist festzuhalten, dass die angewandten Mittel dem Ulmer Mathematiker wirklich geläufig waren. Wie sich derselbe verhalten haben mag beim Wegschaffen der Irrationalitäten, hierüber müssen wir uns freilich auf blosse Vermuthungen beschränken; nicht, als ob jener Epoche Aufgaben dieser Art ganz fremd gewesen wären, denn ungefähr in die nämliche Zeit fielen die über diesen Gegenstand zwischen Fermat und Cartesius gepflognen Discussionen, allein an einer so complicirten Aufgabe möchte doch auch die Geduld eines unermüdlichen Rechners erlahmt sein. Man muss hier also wohl die Annahme machen, dass Faulhaber die Unbekannte durch irgend ein Nährungsverfahren aus der irrationalen Gleichung entnommen habe; wie diese jedenfalls ziemlich rohe Approximationsmethode beschaffen gewesen sei, darüber geben uns vielleicht des Autors eigene Worte einigen Aufschluss, indem er ja (s. o §. 2) selbst sagt, dass er sich der Logarithmen bedient habe, — wie wir diess weiter unten ausführlicher darlegen werden.

Es bleibt somit nur noch die Frage zu beantworten, durch welche geometrische Betrachtungen die Finalgleichung gewonnen werden konnte. Wir werden dieser Forderung gerecht zu werden suchen und uns lediglich zweier Lehrsätze bedienen, die Faulhaber nothwendig kennen musste: des Lehrsatzes von Ptolemaeus und jenes Theorems, welches wir heutzutage in der ebenen Trigonometrie unter dem Namen des Cosinussatzes kennen, welcher jedoch als verallgemeinerter pythagoreischer Lehrsatz bereits den Alten bekannt war.

§. 6. Es sei ABCDEFG ein Kreissiebeneck, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 seine Seiten; Zieht man die beiden Diaganalen AD und AE, so zerfällt das Siebeneck in die beiden Sehnenvierecke ABCD und AEFG und in das Dreieck ADE. Unsre nächste Beschäftigung sei nun die Bestimmung der beiden Strecken $AD = x$ und $AE = y$; zu diesem Behufe verwenden wir mehrmals hintereinander den Ptolemäi'schen Lehrsatz, ganz in der Weise, wie es dessen Erfinder [12]) selbst that, um aus den Sehnen zweier Winkel die Sehne der Winkelsumme resp. Winkeldifferenz zu berechnen — eine Operation, auf welcher bekanntlich seine Construction trigonometrischer Tafeln in letzter Instanz beruhte.

Wir ziehen noch die beiden Geraden $AC = z$ und $BD = u$. Um z durch die bekannten Grössen auszudrücken, verbinden wir B durch einen Durchmesser mit seinem Gegenpunkt H auf dem Kreise und erhalten dann

$$AC.\ BH = AB.\ CH + BC.\ AH,$$

oder, indem wir für diese Grössen ihre Werthe einsetzen,

$$2rz = a_1\sqrt{4r^2 - a_2^2} + a_2\sqrt{4r^2 - a_1^2},$$

wonach

$$z = \frac{a_1\sqrt{4r^2 - a_2^2} + a_2\sqrt{4r^2 - a_1^2}}{2r}.$$

Um u zu finden, brauchen wir nur a_3 an die Stelle von a_1 treten zu lassen und erhalten

$$u = \frac{a_3\sqrt{4r^2-a^2_2} + a_2\sqrt{4r^2-a^2_3}}{2r}.$$

Da ferner

$$AD.\ BC = AC.\ BD - AB.\ CD$$

ist, so ergiebt sich

$$x = \frac{(a_1\sqrt{4r^2-a^2_2} + a_2\sqrt{4r^2-a^2_1})\ (a_3\sqrt{4r^2-a^2_2} + a_2\sqrt{4r^2-a^2_3}) - 4r^2a_1a_3}{4a_6r^2}.$$

Der hier stehende Ausdruck geht in y über, wenn wir die Indices 1, 2, 3 resp. durch 7, 6, 5 ersetzen; es ist folglich

$$y = \frac{(a_7\sqrt{4r^2-a^2_6} + a_6\sqrt{4r^2-a^2_7})\ (a_5\sqrt{4r^2-a^2_6} + a_6\sqrt{4r^2-a^2_5}) - 4r^2a_5a_7}{4a_6r^2}.$$

Es ist nun weiterhin

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AH}^2 - 2AD.\ AH.\ \cos(DAH);$$

fällen wir vom Kreiscentrum M aus ein Loth MK auf DE und ziehen MD, so ist

$$\angle\ DMK = \angle\ DAH,$$

also

$$\cos(DAH) = \frac{DH}{DM} = \frac{a_4}{2r},$$

und

$$a^2_4 = x^2 + y^2 - 2xy\,\frac{a_4}{2r}.$$

Setzen wir in diese Gleichung die für x und y gefundnen Werthe ein, so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für r; dieselbe nimmt nach einigen einfachen Reduktionen folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
0 = {} & M_1 + M_2 \sqrt{(4r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_2)} + M_3 \sqrt{(4r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_3)} \\
& + M_4 \sqrt{(4r^2 - a^2_2)(4r^2 - a^2_3)} + M_5 \sqrt{(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_6)} \\
& + M_6 \sqrt{(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_7)} + M_7 \sqrt{(4r^2 - a^2_6)(4r^2 - a^2_7)} \\
& + M_8 \sqrt{(r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_2)(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_6)} \\
& + M_9 \sqrt{(4r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_2)(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_7)} \\
& + M_{10} \sqrt{(4r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_2)(4r^2 - a^2_6)(4r^2 - a^2_7)} \\
& + M_{11} \sqrt{(4r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_3)(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_6)} \\
& + M_{12} \sqrt{(4r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_3)(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_7)} \\
& + M_{13} \sqrt{(4r^2 - a^2_1)(4r^2 - a^2_3)(4r^2 - a^2_6)(4r^2 - a^2_7)} \\
& + M_{14} \sqrt{(4r^2 - a^2_2)(4r^2 - a^2_3)(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_6)} \\
& + M_{15} \sqrt{(4r^2 - a^2_2)(4r^2 - a^2_3)(4r^2 - a^2_5)(4r^2 - a^2_7)} \\
& + M_{16} \sqrt{(4r^2 - a^2_2)(4r^2 - a^2_3)(4r^2 - a^2_6)(4r^2 - a^2_7)}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält, wie man sieht, nur noch 15 irrationale Grössen, indem sämmtliche M rationale Funktionen von r sind; es ist somit durch den hier angewandten Kunstgriff die Anzahl der in die Schlussgleichung eingegangenen Irrationalitäten (s. o. §. 4) bedeutend erniedrigt worden. Es würde also nur noch übrig bleiben, die hier stehende Gleichung rational zu machen — eine Operation, die noch bedeutend durch dem Umstand erleichtert wird, dass ein Theil der vorkommenden Wurzelgrössen in einfacher Weise sich aus den übrigen zusammensetzt.

Es übrigt uns nur noch ein Erklärungsversuch, wie wohl Faulhaber bei Auflösung der vorliegenden Gleichung sich verhalten habe. Seine oben genannte Aeusserung über die Verwendung der Logarithmen liesse sich etwa so deuten: das allgemeine Glied der Gleichung ist von der Form

$$W = M_\alpha \sqrt{(r^2 - m^2)(4r^2 - n^2)(4r^2 - p^2)(4r^2 - q^2)}$$

Er nahm nun wahrscheinlich irgend einen ersten vorläufigen Werth, etwa r_1 für die unbekannte Grösse r an und fand dann

$$\begin{aligned}
\log W = {} & \log M_\alpha + \tfrac{1}{2} \log (2r_1 - m) + \tfrac{1}{2} \log (2r_1 + m) \\
& + \tfrac{1}{2} \log (2r_1 - n) + \tfrac{1}{2} \log (2r_1 + n) + \cdots
\end{aligned}$$

Durch Aufsuchen des Numerus bekam er dann jedes einzelne Glied seiner Gleichung und brauchte nur den Fehler zu bestimmen, welcher durch Substitution dieses Werthes in der Gleichung entstand, um sofort einen Näherungswerth von grössrer Genauigkeit für r zu erhalten. So, oder doch gewiss im Wesentlichen ähnlich, haben wir uns Faulhaber's Behandlungsweise dieses Gegenstandes zu denken.

Anmerkung. Wie grosses Gewicht Faulhaber selbst auf diese seine Leistung legte, geht wohl aus dem Umstande hervor, dass er dieselbe, hierin offenbar Archimedes copirend, auf seinem Bildnisse darstellen liess. Es berichtet nämlich Kästner [13]) von einem Kupferstich unsres Autors aus dem Jahre 1630; »auf dem Tische ein aufgeschlagenes Buch Secreta, unten, Faulhaber's Siebeneck, Geometria miraculorum.«

12) *Πτολεμαίου μεγάλη σύνταξις*, Lib. I.

13) Kästner, 4. Band, Göttingen 1800. S. 511.

Herr Professor **Reess**

sprach sodann über

Pflanzenreste aus den Todtenbäumen von Oberflacht.

Ein bei Gelegenheit der Oeffnung alter Grabhügel in der Nähe von Muggendorf in der fränkischen Schweiz (vergl. diese Sitzungsberichte 10. November 1873) geäusserter Wunsch meines Collegen, Herrn Prof. Ehlers, gab mir die Anregung zur vergleichend botanischen Bearbeitung der in alten Gräbern wohl nicht allzuselten sich vorfindenden Pflanzenreste. Diese bilden gewiss schätzenswerthe Belege für einen Zeitabschnitt aus der Cultur- und Pflanzengeschichte unseres Vaterlandes, über welchen nur spärliche Urkunden von geringer Zuverlässigkeit und schwankender Auslegung vorhanden sind. Eine zusammenstellende, vergleichende, sichtende Bearbeitung jener Materialien erschien darum von vornherein als eine nicht undankbare Aufgabe.

Als Vorbild ermuthigten mich dabei die in kulturgeschichtlicher wie pflanzengeschichtlicher Hinsicht gleich werthvollen Ergebnisse von Heer's Untersuchung der Flora der Pfahlbauten. An diese konnte ich anknüpfen, von ihnen den Faden fortspinnen über Perioden, welche nach Zeitrechnung und Cultur uns näher liegen, und auch über solche deutsche Landschaften, denen aus örtlichen oder ethnographischen Gründen die Pfahlbauansiedelungen fehlen. Dass die Pflanzenreste aus Gräbern an Reichhaltigkeit und Bedeutung hinter denen der Pfahlbauten weit zurückbleiben würden, war nach dem Character beider Aufbewahrungsorte selbstverständlich vorauszusetzen.

Die mir auf zahlreiche Anfragen zugegangenen einschlägigen Materialien und Litteraturnachweisungen, für deren Vermittelung ich vor Allem den Herren Professoren Ehlers und O. Fraas vielen Dank schulde, waren aber doch über alle Erwartung dürftig. Man scheint — einzelne Fälle abgerechnet — den Pflanzenresten theils bei den Ausgrabungen selbst, theils bei der Aufsammlung der Fundstücke geringe Beachtung zu schenken. *) Unter solchen Umständen muss ich von der allein dankbaren vergleichenden Bearbeitung für jetzt ganz absehen, und mich auf einige Notizen über einen, an Pflanzenresten besonders ergiebigen Gräberfund beschränken, dessen in der württemb. Sammlung vaterländischer Alterthümer zu Stuttgart aufbewahrte pflanzliche Materialien ich durch die Gefälligkeit des Herrn Professor Fraas einsehen konnte.

Diese Pflanzenreste stammen aus einem am Fusse des Lupfen, beim Dorf Oberflacht, königl. württemb. Oberamts Tuttlingen gelegenen, 1846 durch Dr. Wolfgang Menzel und Hauptmann von Dürrich aufgeschlossenen, als »Kreuzbühel« ortsbekannten Begräbnisshügel.**) In diesem fanden sich, 4—5′ tief in Letten eingesenkt, 40 Gräber, meist je einen »Todtenbaum«, selten eine künstlich gearbeitete »Todtenbettstatt« enthaltend. Die »Todtenbäume« sind ungefähr 9′ lange, nur mit der Axt bearbeitete, längsgespaltene und ausgehöhlte Blöcke aus Eichen- (seltener Birnbaum-) stämmen, deren eine Hälfte die Basis, die andere den Deckel des eine Leiche bergenden Sarges bilden.

Die Särge enthielten ausser den Gerippen: Waffen aus Eisen, Holz und Stein; Gefässe aus Steingut, Thon, Glas und Holz; Geräthschaften aus Bronze, Eisen, Holz und Stein; einige symbolische Gegenstände (Todtenschuhe); Kleidungsstücke aus Leder

*) So erwähnen z. B. die praktischen Rathschläge für künftige Oeffnung von Grabhügeln, welche Lubbock ertheilt, neben den besonders hervorgehobenen Thierknochen der Pflanzenreste mit keinem Wort. (Lubbock, die vorgeschichtliche Zeit. Deutsch von A. Passow. Jena 1874. I. Bd. S. 169.)

**) Die Heidengräber am Lupfen (bei Oberflacht). Aus Auftrag des württemb. Alterthumsvereins geöffnet und beschrieben von dem k. württ. Hauptmann von Dürrich und Dr. Wolfgang Menzel. Stuttgart 1847. Im dritten Rechenschaftsbericht des württemb. Alterthumsvereins.

und gewebten Zeugen; Schmuck aus Bronze, Horn, Amethyst, Bernstein und Glaskorallen, einige Thierknochen und viele Pflanzenreste. Die letzteren sind (a. a. O. S. 22) namentlich verzeichnet:

„Moos, ein ganzer Korb voll aus Sarg Nr. 20.
Stroh und Blätter fast in jedem Sarge.
Haselstecken in mehreren Särgen.
Haselnüsse 307 Stück in Nr. 2. 5. 28. 31. und 40.
5 welsche Nüsse in Nr. 2. 15. 29.
1 Pflaumenkern in Nr. 29.
1 Pfirsichkern in Nr. 22.
2 Kürbisse in Nr. 2 und 5. (Von diesen nur einer noch »in seiner Rundung erhalten«, 4″ Durchm., der andere »gross, aber nicht mehr in seiner Rundung erhalten« a. a. O. S. 8 und 9.)
Birnen, 7 grössere in Nr. 14, viele kleinere in Nr. 32. Ausserdem viele Birnenkerne zerstreut in einigen Särgen.
92 Kirschkerne in Nr. 11 und 29 und einige in einzelnen andern Särgen.
Speisebrei von unerkennbarem Stoff in den meisten Gefässen.«

Von den Gegenständen dieser Aufnahme befindet sich in der Stuttgarter Sammlung leider nur noch ein kleinerer Theil, der mir, bis auf zwei defecte Haselnüsse, vollständig vorlag, nämlich:

1. ein Kirschkern, von Prunus avium, der Süsskirsche;
2. ein Kern von der Traubenkirsche, Prunus Padus;
3. zwei Kerne von der Schlehe, Prunus spinosa;
4. eine Hälfte der Frucht von Sorbus Aria, der Mehlbeere;
5. eine Haselnuss (Corylus Avellana f. ovata);
6. eine Wallnussschalenhälfte (Juglans regia);
7. ein Pfirsichkern (Amygdalus Persica);
8. ein Stück graubrauner, papierdünner, häutiger, faltiger Thallus von Merulius papyraceus, einer Art Holzschwamm.

Nr. 1—3, die Prunuskerne, Nr. 5, die Haselnuss, sind wohl erhalten und stimmen überein mit sorgfältigst verglichenen Früchten und Fruchttheilen unserer wilden bezüglichen Gewächse. Nr, 4, die Mehlbeere, in dem mir aus Stuttgart zugegangenen Sammlungsverzeichniss als »Obststück« bezeichnet, ist verschrumpft, gebräunt, fast zerreiblich, aber mit den Früchten von wilder Sorbus Aria hinreichend identificirbar. Nr. 6 und 7 sind von unsern cultivirten gewöhnlichen Wallnüssen und Pfirsichkernen nicht verschieden. Nr. 8, der Holzschwamm, stimmt specifisch überein mit der Fries'schen Beschreibung des s. Z. »in truncis Helvetiae« gesammelten Merulius papyraceus (Fries, Systema mycologicum, Suppl. Vol. I. p. 61.), Originalexemplare des Pilzes konnte ich trotz mehrfacher Bemühung nicht vergleichen. Dass er ein Merulius ist, und nicht, wie die Stuttgarter Sammlungsnotiz sagte, eine »Obsthaut«, ergibt auf den ersten Blick seine mikroskopische Structur. —

Abgesehen davon, dass die Stuttgarter Sammlung nur einen kleinen Theil der 1846 gefundenen Gegenstände noch besitzt, finden die Differenzen zwischen dem Menzel'schen Verzeichniss und meinem Befund der Sammlungsstücke ihre Aufklärung darin, dass Menzel die Prunuskerne nicht richtig unterschied, *) die Mehlbeere wahrscheinlich zu den kleinen Birnen rechnete u. s. w.

Für die antiquarische Verwerthung der beschriebenen Pflanzenreste kömmt zunächst Nr. 8, der im todten Holze des Sarges, muthmasslich bald nach dessen Eingrabung, zur Entwickelung gelangte Holzschwamm selbstverständlich nicht in Betracht. Bezüglich der übrigen ist die Möglichkeit nachträglicher Einschleppung durch Nagethiere wohl ausgeschlossen, einmal durch den völligen Mangel von Zahnspuren an den Pflanzenresten, sodann durch Einzelnbefunde, wie denjenigen von Sarg Nr. 11 (S. 10), in dessen Mitte, der Lage der Eingeweide genau entsprechend, 58 Kirschkerne auf einem Haufen gefunden wurden.

Zu welchen Schlüssen in cultur- und pflanzengeschichtlicher Beziehung berechtigen nun aber diese Pflanzenreste? Menzel und von Dürrich erkennen in den Früchten, die man allgemein als Speise für die Wanderschaft durch die Unterwelt den Todten ins Grab gelegt, »nichts Symbolisches,« sondern »nur interessante Beweise der damaligen Obstcultur.« Diese Beweise bedürfen genauerer Prüfung.

Es stammt nämlich der grössere Theil der 1846 ausgegrabenen, und zumal der bis jetzt erhaltenen Früchte und Fruchttheile sicher von solchen Pflanzen, welche zur Bestattungszeit dieser Särge ebensowohl wie heute, in der Flora der Tuttlinger Gegend wild wuchsen, so Haselnuss, Traubenkirsche, wilde Süsskirsche, Schlehe und Mehlbeere. Ueber die 1846 vorhanden gewesenen Birnen lässt sich heute nichts mehr aussagen, doch können auch sie wilde

*) Um so mehr hätten dieselben sämmtlich aufbewahrt werden sollen.

(Holzbirnen) gewesen sein. Menzel's nicht mehr nachweisbarer Pflaumenkern dürfte in einem der vorhandenen Schlehenkerne stecken. In diesem Falle ist das gänzliche Fehlen der cultivirten Prunusarten: Haferschlehe, (P. insititia) Pflaume, (P. domestica) und des Apfels besonders bezeichnend. Darf man nämlich auch daraus, dass gewisse Obstsorten in den Gräbern fehlen, einen Wahrscheinlichkeitsschluss ziehen, so ist die Obstcultur bei einem Volke, das weder cultivirte Pflaumen noch Aepfel, dafür aber wilde Schlehen, Traubenkirschen und Mehlbeeren genoss, wie die Kinder in den benachbarten Gegenden heute noch thun, eine sehr primitive gewesen.

Durch den Fund eines Pfirsichkerns, der Wallnüsse und der Kürbisse wird diese Annahme keineswegs beseitigt. Der einzige Pfirsichkern ist glatt abgerieben, wie polirt, an der Spitze mit einem Oehr durchbohrt, und ist medaillonartiger Bestandtheil eines Halsbandes aus Glaskorallen gewesen (S. 11). Er wird also schwerlich an Ort und Stelle gewachsen, vielmehr als Schmuckgegenstand eingeführt sein. Ob die Wallnüsse ortserzeugt oder auch eingeführt sind, ob nicht vielleicht der einjährige, darum leicht acclimatisirte Kürbis als die einzige bei diesen Ausgrabungen nachgewiesene Kulturpflanze der Gegend erscheint, mag dahingestellt bleiben. —

Kirsche, Schlehe, Traubenkirsche, Mehlbeere, Holzbirne und Haselnuss sind in genau denselben Formen, wie sie aus Oberflacht mir vorliegen, schon aus den älteren Pfahlbauten der Schweiz, die Wallnuss erst aus den jüngeren italienischen Pfahlbauten von Fontinellato bei Parma bekannt (vergl. Heer, die Pflanzen der Pfahlbauten, S. 26 ff. 31). Wallnuss und Kürbisse wurden in Italien zur Kaiserzeit sicher unterschieden, Pfirsiche gegen die Mitte des I. Jahrh. unserer Zeitrechnung in Italien, zu Columella's Zeit auch in Südfrankreich gebaut (Hehn, Kulturpflanzen und Hausthiere). In Deutschland aber werden Pfirsich, Wallnuss und Kürbis zuerst constatirt durch Carls des Grossen Capitulare de villis (vergl. E. H. Meyer. Geschichte d. Botanik Bd. III S. 396 ff.)

Aus den zuletzt genannten Geschichtsquellen lässt sich für Zeit und Ort der Oberflachter Begräbnisse nichts ableiten. Diese bezieht Menzel auf einige nach dem vierten Jahrhundert hier lebende Familien von Herren und Knechten, heidnische Alemannen. — Wir müssen also die vorgefundenen Pflanzenreste vorsichtig aus sich selbst deuten. Dann aber gestatten sie einen sichern Schluss nur auf den damals in der Tuttlinger Gegend häufigen Genuss einheimischer wilder schlechter Obstfrüchte (Schlehen, Traubenkirschen, Waldkirschen, Mehlbeere, Holzbirnen? und Haselnüsse). — Sie machen ferner die Kürbiscultur an Ort und Stelle wahrscheinlich, ebenso den Verkehr mit pfirsichbauenden südwestlicheren Gegenden. Ob Birnen und Wallnüsse am Orte gebaut, oder ob letztere gleichfalls von fernher eingeführt wurden, lässt sich nach den vorliegenden Materialien und Daten nicht sicher entscheiden. —

Sitzung vom 11. Mai 1874.

Herr Prof. v. **Gorup-Besanez**

macht eine weitere Mittheilung über das Auftreten von Leucin neben Asparagin während des Keimprocesses der Wicken.

Meine erste Mittheilung über das Auftreten von Leucin neben Asparagin im Safte der Wickenkeime kann ich nun dahin vervollständigen, dass dasselbe ein constantes ist. Herr stud. rer. nat. Hermann Will übernahm die weitere Verfolgung des Gegenstandes unter meiner Leitung. Wir haben bisher in vier Culturen, bei welchen die Keimung auf feuchtem Sande und bei nur spärlichem Lichtzutritte (mit Ausschluss alles directen Sonnenlichtes) vor sich ging, nach zweiwöchentlicher (Keimlänge 12—15 Cm.), nach dreiwöchentlicher (Keimlänge 20—25 Cm.), nach vierwöchentlicher Keimdauer (Keimlänge etwa 25 Cm.), und nach so lange fortgesetztem Keimen, bis die Reservestoffe der Samen völlig entleert waren, neben Asparagin constant Leucin im ganz frischen Safte aufgefunden, und zwar in dem letzterwähnten Falle in relativ grösster Menge.

Bei unseren ersten Versuchen verfuhren wir in der Weise, dass wir den durch Auspressen der zerquetschten Wickenkeime unter Zusatz von etwas Wasser gewonnenen Saft zur Entfernung der Eiweisskörper rasch aufkochten, und das Filtrat von dem Eiweisscoagulum dialysirten. Die Dialysate schieden concentrirt zunächst Asparagin und die Mutterlauge dann Leucin aus. Bei den späteren Versuchen verliessen wir aber diesen Weg, einmal weil die Dialyse so viel Zeit beanspruchte, dass dem Einwande es handle sich hier um einen beginnenden Fäulniss- oder ähnlichen Zersetzungsprocess, Raum gelassen wurde, aber dann auch um deswillen, weil dadurch der Zweck, die Trennung der krystallisirbaren vor den unkrystallisirbaren Bestandtheilen des Saftes nur sehr unvollständig, erreicht wurde. Nach 48 stündiger Dauer der Dialyse fand sich in der auf dem Dialysator zurückgebliebenen Flüssigkeit noch ziemlich viel Asparagin und Leucin. Bei den späteren Versuchen wurde daher dieser Weg verlassen und der nachstehende eingeschlagen: die in einer Reibschale rasch zerquetschten Wickenkeime wurden unter Zusatz von etwas Wasser tüchtig ausgepresst, der so erhaltene Saft sofort aufgekocht, wodurch sämmtliche Eiweisskörper vollständig entfernt wurden, — denn das Filtrat vom Eiweisscoagulum verhielt sich mit den empfindlichsten Reagentien auf Proteïnstoffe geprüft, völlig negativ, — und dasselbe sofort mit einem grossen Ueberschuss von Alcohol von 90° gefällt. Der durch Alcohol entstandene Niederschlag enthielt die grösste Menge des Asparagins und nicht näher untersuchte, durch Bleiessig fällbare stickstofffreie organische Substanzen; das Filtrat vom Alcoholniederschlage concentrirt, schied zuerst noch etwas Asparagin, sodann aber Leucin aus. Die Mutterlauge von Leucin enthielt Zucker, oder wenigstens eine alkalische Kupferlösungen beim Erwärmen reducirende Substanz. Dem Einwande, dass das Leucin erst während der Operationen durch Zersetzung von Eiweisskörpern entstehe, dürfte durch den beschriebenen Untersuchungsgang wirksam begegnet sein.

Bei einer Untersuchung der reifen Wickensamen fand ich darin unter den in die wässerige Lösung übergehenden Bestandtheilen Legumin (dieses fehlt, wie schon von anderer Seite beobachtet wurde, in den Wickenkeimen), Albumin, Zucker, und eine sehr geringe Menge eines krystallisirbaren Körpers, der nach den mikroscopischen Krystallisationen zu schliessen, möglicher Weise Asparagin war (auch Ritthausen fand in den Wickenkeimen eine dem Asparagin ähnliche Substanz), Leucin aber konnte nicht aufgefunden werden. Letzteres entsteht demnach erst während des Keimprocesses aus den Reservestoffen des Samens.

Auf meine Aufforderung hat Herr Kellermann aus Althaeawurzel und aus der Wurzel von Scorzonera hisp. Asparagin dargestellt und dabei geprüft, ob sich auch hier neben Asparagin Leucin vorfinde; jedoch ein negatives Resultat erhalten.

Bei dieser Gelegenheit will ich bemerken, dass sich in der Scorzonerawurzel unter Umständen sehr viel, unter Umständen aber gar kein Asparagin vorfinden kann. Das Auftreten des Asparagins scheint hier an Vegetationsstillstand d. h. an den Ruhezustand der Pflanze geknüpft zu sein.

Im 3. Hefte der Berichte d. deutsch-chem. Gesellsch. 1874 finde ich eine Untersuchung des Herrn Schützenberger erwähnt, nach welcher Hefe beim Verweilen unter Wasser bei + 35° ohne geringsten Fäulnissvorgang neben anderen Körpern Leucin liefern solle. Dass beim Faulen der Hefe reichliche Mengen von Leucin gebildet werden, ist von Dragendorff längst nachgewiesen.

Sodann sprach Derselbe:

»Ueber Ostruthin einen neuen krystallisirbaren Pflanzenbestandtheil.

In der Absicht, das Peucedanin einem näheren Studium zu unterwerfen, und auf Grund der bisherigen Angaben seine Identität mit Wackenroder's Imperatorin voraussetzend, versuchte ich aus der Meisterwurzel (von einer sehr zuverlässigen Quelle: Hrn. Hofapotheker Fuchs in Kempten bezogen) Peucedanin in grösserer Menge darzustellen, erhielt aber statt dessen einen Körper, welcher in Zusammensetzung und Eigenschaften von dem Peucedanin Erdmann's und Bothe's so sehr abweicht, dass von Identität beider nicht die Rede sein kann. So lange übrigens der Grundsatz gilt, dass Identität gleiche Eigenschaften voraussetzt, kann dasselbe auch nicht das Imperatorin Osann's und Wackenroder's sein, wie sich aus der Vergleichung der Eigenschaften beider ergeben wird. Ich schlage daher bis auf Weiteres für den neuen Körper den Namen Ostruthin vor.

Ich gewann das Ostruthin aus der Meisterwurzel mittelst eines Verfahrens, welches mit dem von Schlatter und Bothe bei der Darstellung des Peucedanins aus Peucedanumwurzel befolgten im Wesentlichen übereinstimmte. Seine Reinigung war aber mit so grossen Schwierigkeiten und Verlusten verkünpft, dass ich aus 50 ℔ Imperatoriawurzel nur ebenso viel chemisch reines Ostruthin erhielt, um durch mehrere Analysen seine Zusammensetzung mit Sicherheit festzustellen und seine wichtigsten Eigenschaften zu studiren.

Die zerkleinerten Wurzeln wurden parthienweise mit heissem Weingeist von 80° digerirt, die erhaltenen dunkelbraunen Auszüge gesammelt und durch Destillation vom überschüssigen Weingeist befreit. Der noch ziemlich dünnflüssige Destillationsrückstand erstarrte nach dem Abkühlen zu einer zähen braunen vogelleimartigen Masse, welche auch nach längerem Stehen durchaus keine Neigung zur Krystallisation zeigte. Da auf diese Weise nichts zu erreichen war, wurde die Masse mit Aether, dem etwas Ligroin zugesetzt war, ausgezogen, der ätherische Auszug filtrirt und mit noch so viel Ligroin versetzt, bis sich starke Trübung einstellte. Nach kurzem Stehen setzte sich nun am Boden des Gefässes eine braune amorphe Masse ab, und die davon abgegossene heller gewordene Lösung, schied, der freiwilligen Verdunstung überlassen, reichliche gelbgefärbte rhombische Krystalle ab, die aber von einem hochgelben schmierigen Oele durchsetzt waren. Sie wurden auf ein Saugfilter geworfen, mit nicht zu viel kaltem Aether gewaschen und dann auf Gypsplatten gestrichen, wodurch sie von dem schmierigen Oele grossentheils befreit werden konnten; aber auch durch mehrmals wiederholtes Umkrystallisiren aus Alkohol und Aether und in der Weise, dass man die alkoholische Lösung bis zur Trübung mit Wasser vermischte, gelang es nicht, den Körper vollkommen rein zu erhalten. Die theilweise sehr wohl ausgebildeten rhombischen Krystalle waren immer noch grünlich-gelb gefärbt und gaben bei der Analyse und bei der Bestimmung des Schmelzpunktes Resultate, welche ganz unzweifelhaft auf eine Verunreinigung hinwiesen. Völlig rein erhielt ich den Körper, indem ich ihn in sehr verdünnter Kalilauge löste, die Lösung mit Kohlensäuregas bis zum Verschwinden der alkalischen Reaction sättigte, das sich nun schneeweiss ausscheidende Ostruthin auf einem Filter sammelte, sorgfältig auswusch, sodann auspresste, trocknete, in Alkohol von 80° löste und die alcoholische Lösung mit Wasser bis zur bleibenden Trübung versetzte. Nach einiger Zeit war die Flüssigkeit mit haarfeinen, seideglänzenden schneeweissen Nadeln erfüllt, welche sich auf dem Filter beim Trocknen ähnlich dem Tyrosin oder Cholesterin plattenförmig verfilzten.

So dargestellt, besass das Ostruthin alle Kennzeichen chemischer Reinheit, erwies sich stickstofffrei, und lieferte bei der Analyse Zahlen, welche in der empirischen Formel

$$C_{14}H_{17}O_2$$

ihren annäherndsten und einfachsten Ausdruck finden, wie die nachstehende Zusammenstellung der berechneten mit dem Mittel der in sechs Analysen gefundenen Werthe ergibt:

			berechnet		Mittel aus 6 Analysen
Kohlenstoff . . .	14	At.	168	77,42	77,06
Wasserstoff . . .	17	»	17	7,83	7,93
Sauerstoff . . .	2	»	32	14,75	15,01
			217	100,00	100,00

(Maxim. des Kohlenstoffs 77,52%, Minim. 76,6%, Maxim. des Wasserstoffs 8,21, Min. 7,74).

Die von mir festgestellten Eigenschaften des Ostruthins sind folgende: Weisse seidenglänzende haarfeine Nadeln, oder aus alcoholischer oder ätherischer Lösung bei der freiwilligen Verdunstung sich ausscheidende wasserklare grössere rhombische Krystalle (zuweilen schöne Rhombenoctaëder), völlig geruchlos, nahezu geschmacklos (auch in weingeistiger Lösung); auf Platinblech an der Luft erhitzt, schmilzt es, bräunt sich, fängt Feuer, verbrennt mit leuchtender russender Flamme und hinterlässt eine glänzende, bei weiterem Erhitzen ohne Rückstand verbrennliche Kohle. Das Ostruthin schmilzt bei 115° und erstarrt wieder bei 91° C. zunächst zu einer durchscheinend wachsartigen, dann strahlig-krystallinischen Masse. In einer Glasröhre über seinen Schmelzpunkt erhitzt, bräunt es sich, zersetzt sich unter Bildung eines brenzlichen Oeles und unter Entwicklung unangenehm aromatisch-riechender Dämpfe. Es ist unlöslich in kaltem Wasser, nur spurenweise löslich in kochendem, in welchem es zusammensickert, ohne zu schmelzen, leicht löslich auch in kaltem Alcohol von 80°. Die alcoholischen Lösungen sind ohne Einwirkung auf Pflanzenfarben, völlig ungefärbt, fluoresciren aber auch im verdünntesten Zustande schön himmelblau; versetzt man sie aber mit einigen Tropfen Wasser, so zeigen sie prachtvolle blaue Fluorescenz in einem nur mit jener des Aesculins vergleichbaren Grade. Auch sehr concentrirte alcoholische Lösungen ergeben keine Circumpolarisation. Vermischt man alcoholische Lösungen mit Wasser bis zu bleibender Trübung, so erfüllt sich die Flüssigkeit sehr bald mit haarfeinen Nadeln von Ostruthin. In Aether löst es sich ebenfalls leicht auf, wenig aber in Petroleumäther und in Benzol. Wasser, dem einige Tropfen Kali- oder Natronlauge zugesetzt sind, löst es ebenfalls leicht. Die

Lösungen sind gelb gefärbt, fluoresciren blau, wenngleich schwach, und es wird aus ihnen schon durch Einleiten von Kohlensäure das Ostruthin gefällt. Auch in kaustischem Ammoniak löst sich das Ostruthin, leichter beim Erwärmen, zu blassgelber deutlich fluorescirender Flüssigkeit. Concentrirte Schwefelsäure löst es in der Kälte nahezu farblos; aus dieser Lösung wird es durch Zusatz von Wasser, wie es scheint, unverändert wieder ausgeschieden. Mässig concentrirte Salpetersäure ist in der Kälte ohne bemerkbare Einwirkung, beim Erwärmen löst sich das Ostruthin auf, die Säure färbt sich gelb, es entwickelt sich Untersalpetersäure, und beim Verdünnen mit Wasser fällt ein citronengelber Niederschlag: wahrscheinlich ein Nitrokörper. Durch längeres Kochen mit weingeistiger Kalilösung wird es zersetzt. Die Lösung färbt sich braun und verdünnte Schwefelsäure fällt daraus ein amorphes Harz; Angelicasäure wird dabei nicht gebildet.

Zu weiteren Versuchen reichte das Material nicht aus, so namentlich nicht um zu prüfen, ob das Ostruthin zur Classe der Glykside zu zählen sei, was jedoch angesichts des hohen Kohlenstoffgehaltes desselben, und seiner völligen Unlöslichkeit in Wasser wenig wahrscheinlich ist.

Bei der Reinigung des Ostruthins durch Auflösen in sehr verdünnter Kalilösung und Ausfällen durch Kohlensäure blieb ein Körper in Lösung, der sich daraus durch Essigsäure ausfällen liess. Er verhielt sich im Allgemeinen dem Ostruthin nicht unähnlich, seine Lösungen reagirten aber deutlich sauer und zeigten nicht die geringste Fluorescenz. Bei einer Analyse erwies er sich bedeutend kohlenstoffärmer und wasserstoffreicher. Jedenfalls war er aber nicht rein und zur Reinigung desselben reichte seine Menge nicht aus.

Der leichteren Uebersicht halber stelle ich die differentiellen Charactere des Imperatorins von Osann und Wackenroder, des Peucedanins von Schlatter, Bothe und O. L. Erdmann, und meines Ostruthins tabellarisch zusammen.

Imperatorin v. Osann u. Wackenroder.	Peucedanin von Schl. B. u. E.	Ostruthin
Dicke, scharfkantige harte rhomb. Säulen oder seideglänzende Blättchen	Weisse, leichte, büschelförmig vereinigte Prismen	Feine weisse seideglänzende Nadeln
Brennend-scharf schmeckend	Brennend u. kratzend schmeckend	Geschmacklos
Schmilzt bei + 75° C.	Schmilzt bei + 60° C.	Schmilzt bei + 115° C.
Schwierig löslich in kaltem Weingeist von 80°	Schwierig löslich in kaltem Weingeist von 80°. Die Lösungen gelb gefärbt.	Leicht löslich in kaltem Alcohol von 80°, die Lösungen fluoresciren und sind farblos.
Löslich in Aether	Löslich in Aether und Petroleumäther	Löslich in Aether, wenig löslich in Petroleumäther
Unlös. in Ammon wenig lösl. in verd. Kali	Lösl. in heissem Ammon und verd. Kali	Löslich in kaltem Ammon und verd. Kali

Die aus den Analysen von O. L. Erdmann und Bothe für das Peucedanin berechnete Formel $C_{24}H_{24}O_6$ verlangt 70,58 pCt. Kohlenstoff und 5,88 pCt. Wasserstoff, demnach Werthe, welche den für Ostruthin gefundenen sehr ferne stehen. Das Imperatorin Wackenroder's wurde von diesem Chemiker nicht analysirt und es findet sich in der gesammten Literatur auch sonst keine Analyse desselben angeführt. Angesichts dieser Verhältnisse liegt es nahe, die Frage aufzuwerfen, worauf sich denn die in alle Lehr- und Handbücher übergegangene Angabe: Peucedanin und Imperatorin seien seien identisch, stützt. In Gmelin's Handb. VI. 4. Aufl. S. 83 lässt der Wortlaut: »R. Wagner wies die Identität von Wackenroder's Imperatorin mit dem von Schlatter entdeckten Peucedanin nach« — an Bestimmtheit nichts zu wünschen übrig und nicht ahnen, dass die einzige Stütze dieses Satzes eine Stelle aus einer im Jorn. f. pract. Chemie Bd. LXI. S. 504 **also im Jahre 1854** abgedruckten brieflichen Mittheilung K. Wagner's an O. L. Erdmann ist, die folgendermassen lautet: »aus meiner Untersuchung der chemischen Bestandtheile einiger Umbelliferen kann ich Ihnen bis jetzt folgende Thatsachen mittheilen. Das Peucedanin ist identisch mit dem Imperatorin . . . . . Die Identität des Peucedanins mit dem Imperatorin habe ich nachgewiesen durch völlige

Uebereinstimmung der physicalischen Eigenschaften, durch Uebereinstimmung der chemischen Zusammensetzung und durch Uebereinstimmung der Zersetzungsproducte. Beim Verseifen mit weingeistiger Kalilösung geben nämlich beide Körper angelicasaures Kali und Oroselon ..... In einigen Wochen hoffe ich Ihnen das Nähere mittheilen zu können.« — In der That durfte man eine baldige nähere Darstellung und analytische Begründung dieser interessanten Angaben wohl erwarten. Eine solche aber ist auch Heute nach zwanzig Jahren nicht erfolgt und steht demnach wohl kaum länger in Aussicht. Jedenfalls wird man zugestehen müssen, dass die Fundamente, auf welchen die Lehre von der Identität des Peucedanins und Imperatorins ruht, ziemlich unsichere sind, sowie dass eine Wiederaufnahme des Studiums beider Körper an der Zeit ist. Eine solche behalte ich mir vor.

In der Reindarstellung des Ostruthins und in der Ausführung der Analysen wurde ich von den Herren D. D. v. Rad, S. Pfaff und Heut auf das Wirksamste unterstützt, wofür ich ihnen auch an dieser Stelle meinen besten Dank sage.

Hierauf gab

Herr Prof. **Klein**

folgende »Weitere Mittheilung über eine neue Art von Riemann'schen Flächen.«

Wenn man, wie dies unter vielen Beziehungen vortheilhaft scheint, den Zusammenhang einer geschlossenen Fläche um eine Einheit geringer ansetzt, als Riemann es thut, so ist der Zusammenhang der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche einfach gleich dem Doppelten des Geschlechtes der auf sie bezüglichen algebraischen Function, also, wenn letztere durch eine Curve n. Classe mit t Doppeltangenten und w Wendetangenten repräsentirt ist,

$$= n - 1 \cdot n - 2 - 2t - 2w.$$

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, wie man vermöge der neuen Art von Riemann'schen Flächen, die in einer früheren Mittheilung beschrieben wurden (vergl. diese Berichte, Februar 1874), diese Zahl unmittelbar aus der Gestalt der Curve herzuleiten im Stande ist. Wegen der Beweise wenigstens eines Theiles der Hülfssätze, die ich im Folgenden anführe, verweise ich auf eine demnächst in den Mathematischen Annalen, Bd. VII, erscheinende Arbeit.

1. Wenn eine Curve n. Classe reelle, isolirte Doppeltangenten oder überhaupt reelle Wendetangenten besitzt, so wird die zugehörige Riemann'sche Fläche der neuen Art diese Linien bez. als Doppelgeraden und Rückkehrkanten enthalten. Sie ist dann also nicht ausnahmslos eindeutig auf die gew. Riemann'sche Fläche bezogen, sondern so, dass sich auf letzterer eine Anzahl von Fundamentalpunkten befinden, denen auf unserer Fläche ganze Linien entsprechen. Nennt man die Zahlen der hier in Betracht kommenden Doppeltangenten t', der Wendetangenten w', so ist die Zahl der Fundamentalpunkte $2(t' + w')$. Aber es besteht der allgemeine Satz, dass, sobald, bei im Allgemeinen eindeutiger Beziehung zweier Flächen, auf der einen μ, auf der anderen ν Fundamentalpuncte auftreten, der Zusammenhang der ersteren, vermehrt um μ, um ν grösser ist, als der der zweiten. Unsere Fläche muss daher, und das soll nunmehr bewiesen werden, einen Zusammenhang haben:

$$= n - 1 \cdot n - 2 - 2(t - t') - 2(w - w'),$$

oder wenn man setzt:

$$t - t' = t'', \qquad w - w' = w'',$$

einen Zusammenhang:

$$= n - 1 \cdot n - 2 - 2t'' - 2w''.$$

2. Die Richtigkeit dieser Formel soll zunächst für einen speciellen Fall gezeigt werden. Bei ihm besteht die zu betrachtende Fläche freilich aus getrennten Theilen; aber auch bei einem Flächensysteme ist der Begriff des Zusammenhangs, oder, wie er ihn nennt, der Grundzahl, nach C. Neumann's Untersuchungen statthaft. Es sei nämlich die Curve n. Classe in n einzelne Puncte zerfallen, von denen $2n'$ imaginär sein mögen. Dann besteht unsere Fläche, den $\overline{n - 2n'}$ reellen Punkten entsprechend, aus $\overline{n - 2n'}$ je nullfach zusammenhängenden (unendlich kleinen) Kugeln, sie besteht ferner, den n' Paaren von conjugirt imaginären Puncten entsprechend, aus n' ebenfalls je nullfach zusammenhängenden Doppelebenen. Die Grundzahl des Systems ist also

$$= -2(n - n' - 1).$$

Aber auf dieselbe Zahl kommt man, wenn man die Doppel- und Wende-Tangenten der Curve abzählt. Die Zahl der Doppeltangenten überhaupt, d. h. der Verbindungslinien der einzelnen Puncte, ist:

$$t = \frac{n \cdot \overline{n-1}}{2}$$

Reell und isolirt sind unter ihnen $t' = n'$, die Verbindungsgeraden der zusammengehörigen conjugirten Puncte. Das gibt also:

$$t - t' = t'' = \frac{n \cdot \overline{n-1}}{2} - n'.$$

Die Zahl der Wendetangenten ist Null; wir finden somit

$$\overline{n-1} \cdot \overline{n-2} - 2\,t'' - 2\,w'' = -2\,(n - n' - 1),$$

wie es in der That sein sollte.

3. Den Beweis für die Allgemeingültigkeit unserer Behauptung führen wir nun in der Art, dass wir die Modificationen untersuchen, welche die Zahl für das Geschlecht wie andererseits die Zahl für den Zusammenhang unserer Fläche bei beliebiger continuirlicher Aenderung einer Curve n. Classe erleidet. Dreierlei Modificationen der Curve sind es, welche dabei im Allgemeinen auftreten und die berücksichtigt werden müssen. Es kann

1) eine Doppeltangente neu entstehen, oder eine bis dahin vorhandene kann aufgelöst werden;

2) es kann eine Doppeltangente in eine Wendetangente übergehen, oder umgekehrt;

3) es kann ein reeller, nicht isolirter Doppelpunct, in dessen unmittelbarer Nähe die Curve zwei Spitzen besitzt, indem diese Spitzen zusammenfallen und weiterhin imaginär werden, in einen reellen isolirten Doppelpunct übergehen, resp. letzterer durch den umgekehrten Process in einen nicht isolirten Doppelpunct verwandelt werden.

Es ist zu zeigen, dass der Zusammenhang unserer Fläche von diesen Vorkommnissen nur insofern beeinflusst wird, als das Neuauftreten einer Doppeltangente t'' den Zusammenhang um 2 Einheiten erhöht, resp. ihr Verschwinden ihn um die gleiche Zahl erniedrigt.

Aber dieser Nachweis erwächst unmittelbar, wenn man sich von den gestaltlichen Verhältnissen unserer Fläche, die mit solchen Uebergängen verknüpft sind, Rechenschaft gibt.

4. Zuvörderst ist ersichtlich, dass das Auftreten einer isolirten reellen Doppeltangente, oder auch deren Verwandlung in

eine reelle Wendetangente den Zusammenhang der Fläche nicht ändert. Denn zerschneidet man die modificirte Fläche längs der Tangente und die ursprüngliche Fläche längs eines ähnlich verlaufenden Rückkehrschnittes, so sind beide Punct für Punct in einander überführbar.

Die Doppeltangenten t'' andererseits zerfallen in zwei Classen, je nachdem sie reell oder imaginär sind. Im ersteren Falle ist die Richtigkeit der auf sie bezüglichen Behauptung nach Dem, was in meiner vorigen Mittheilung bez. des Entstehens einer solchen Doppeltangente gesagt wurde, evident. Wegen der imaginären Doppeltangenten gilt das Folgende.

Eine imaginäre Doppeltangente enthält, mit ihrer conjugirten zusammen, einen reellen Punct der Ebene, welcher zwei verschiedenen Doppelblättern unserer Fläche je beiderseitig angehören wird. Man kann nun beweisen, dass dieser Punct, wenn man die Doppeltangente auflöst, in zwei Puncte sich trennt, welche, in ihrer Beziehung zur Curve, als isolirte Doppelpuncte aufzufassen sind *), mit Bezug auf die Fläche aber zwei Doppelverzweigungspuncte vorstellen. Ich verstehe darunter solche Puncte, in denen sich sowohl die oberen Seiten als auch die unteren Seiten zweier Doppelblätter verzweigen; isolirte Doppelpuncte einer Curve sind immer Doppelverzweigungspuncte auf der zugehörigen Fläche, wovon weiter unten noch Gebrauch gemacht werden soll.

Aber bei diesem Uebergange eines für den Zusammenhang der Fläche nicht weiter ausgezeichneten Punctes in ein Paar von Doppelverzweigungspuncten wächst der Zusammenhang der Fläche um 4, während die Zahl der Doppeltangenten t'' um 2 abnimmt; unsere Behauptung ist also in diesem Falle richtig. —

Ein übersichtliches Beispiel für diese Art des Uebergangs ist etwa das folgende. Man betrachte zwei sich schneidende Kreise. Dieselben stellen zusammen eine Curve 4. Classe mit 2 reellen und 2 imaginären Doppeltangenten vor; der reelle Punct der letzteren ist kein anderer, als der sogenannte innere Aehnlichkeitspunkt. Andererseits bilden die zu den beiden Kreisen

*) Wenn eine Doppeltangente aufgelöst wird, so treten nach den Plücker'schen Formeln eine grössere Zahl von Doppelpuncten der Curve auf. Die Behauptung des Textes ist, dass von diesen Doppelpuncten 2 und nur 2 reell sind, wenn der Auflösungsprocess gleichzeitig zwei conjugirt imaginäre Doppeltangenten betroffen hat.

gehörigen Doppelflächen ein System vom Zusammenhange — 2. Aber ersetzt man den Aehnlichkeitspunkt durch zwei (zunächst benachbart gelegene) Doppelverzweigungspuncte, so entsteht eine Fläche vom Zusammenhange + 2, welche mit einer Riemann'schen doppelten Kugelfläche mit 4 Verzweigungspuncten, wie sie zur Darstellung des Falles $p = 1$ gewöhnlich dient, grosse Aehnlichkeit hat und unmittelbar in sie übergeführt werden kann.

5. Der Uebergang eines Paares conjugirt-imaginärer Doppeltangenten in ein Paar von Wendetangenten gestaltet sich in der Weise, dass der reelle Punct des bez. Tangentenpaares sich mit einem in der Nähe gelegenen isolirten Doppelpuncte der Curve vereinigt. Da letzterer Doppelverzweigungspunct der Fläche ist, so wird auch der entstandene Punct es sein, wie denn überhaupt die einzigen Verzweigungspuncte, welche unsere Fläche besitzt, durch die isolirten Doppelpuncte und die reellen Puncte der imaginären Wendetangenten vorgestellt werden.

Wenn es ersichtlich ist, dass bei einem solchen Processe der Zusammenhang der Fläche nicht geändert wird, so ergibt sich das Gleiche für die dritte oben genannte Möglichkeit einer Aenderung der Curve. Doch lassen sich die bez. Verhältnisse ohne Zeichnung kaum deutlich erläutern. Es genüge also zu bemerken, dass der isolirte Doppelpunct, der aus einem reellen Doppelpuncte durch den oben genannten Process hervorgeht, Doppelverzweigungspunct eben für diejenigen beiden Doppelblätter wird, deren Begrenzungen sich früher in dem reellen Doppelpuncte kreuzten. —

Hiermit ist, soweit es ohne ausführlicheres Eingehen auf Einzelheiten gelingen wollte, der Beweis für die Richtigkeit der oben für den Zusammenhang der Fläche aufgestellten Formel erbracht, und indirect ein neuer Beweis für die Unveränderlichkeit des Geschlechts einer algebraischen Curve gegenüber eindeutiger Transformation.

Diesem Beweise haftet nur zunächst die Unvollkommenheit an, dass die algebraische Curve, die gegebene wie die transformirte, bei ihm als eine reelle Curve vorausgesetzt ist, d. h. als eine Curve, deren Gleichung lauter reelle Coefficienten besitzt. Aber von dieser Unvollkommenheit kann man ihn befreien, indem man eine Curve, deren Gleichung complexe Coefficienten besitzt, mit ihrer imaginär conjugirten vereinigt und auf das

Aggregat beider die im Vorstehenden auseinandergesetzten Betrachtungen anwendet.

Herr Dr. **Günther**

theilt hierauf mit:

Historische Notizen über die Lateral-Refraction,

§. 1. Die Theorie der astronomischen sowohl als der terrestrischen Refraction nimmt bekanntlich an, dass von dem leuchtenden Punkte ein Strahl in unser Auge gelange, welcher aus einer durch die beiden genannten Punkte senkrecht auf den Horizont gelegten Ebene nicht heraustrete. Diese Annahme behält nur solange ihre Richtigkeit, als die Dichtigkeit der kugelförmig gedachten Atmosphäre entweder constant bleibt oder doch wenigstens nur in concentrischen Kugelschichten variirt. Denken wir uns dagegen, dass die geometrischen Oerter gleich dichter Lufttheilchen beliebige andere Flächen seien, so erhellt, dass ein Lichtstrahl im Allgemeinen keine ebene, sondern vielmehr eine doppelt gekrümmte Curve sein wird, und dass nicht blos eine vertikale, sondern auch eine seitliche Verschiebung stattfinden muss. Es steht freilich zu erwarten, dass diese letztere Verrückung ein verhältnissmässig nur kleiner Bruchtheil der erstren ist und dieser durch die physikalischen Verhältnisse unserer Lufthülle bedingte Umstand hat es auch allein möglich gemacht, dass eine allen Anforderungen der Praxis genügende Theorie der astronomischen Strahlenbrechung überhaupt entstehen konnte. Gleichwohl wird die so überhaupt verfeinerte Beobachtungskunst der Neuzeit auch die durch die laterale Refraktion bedingten kleinen Correktionen anbringen müssen, und da diese Frage sicher baldigst mehrfach besprochen werden wird, so dürfte es nicht ohne Interesse sein, All das zusammenzustellen, was sich über ihren bisherigen Stand ermitteln liess.

An Hülfsmitteln zur Erreichung dieses Zweckes fehlt es ganz. Ebenso wie die berühmten Theoretiker, welche die Lehre von der Strahlenbrechung bearbeiteten, die Lateralrefraction ganz ignoriren zu können glaubten, — man sehe zu diesem Behufe die sorgfältige Zusammenstellung nach, welche Bruhns[1]) gegeben hat — so haben auch diejenigen Schriftsteller, welche mehr eine allgemeine Uebersicht über die atmosphärischen Erscheinungen zu liefern beabsichtigten, hierauf nicht näher eingehen zu müssen vermeint. Es blieb sonach lediglich übrig, auf die Quellenschriften selbst zurückzugehen; die dürftige Ausbeute, welche sich hiebei ergab, ist im Folgenden niedergelegt.

1) **Bruhns**, die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung dargestellt, Leipzig 1861.

§. 2. Die erste Erwähnung und Beschreibung der Lateralrefraction glauben wir bei dem Nürnberger Astronomen Eimmart im Eingang des vorigen Jahrhunderts zu finden.

Derselbe bespricht in einer allgemeine Betrachtungen über astronomische Gegenstände enthaltenden Schrift unter Andrem auch die Erddrehung und knüpft an einige in dieser Angelegenheit angestellte Experimente folgende Bemerkungen [2]:

»Nostrum, quod nuper nobis natum est circa hanc considerationem Phaenomenon (si, quod ignoro, primum nobis istud animadvertere contigit) nisi aliquid contribuerit ad primariae hujus caussae rationem plausibilem afferendam, haud ita dilucidè per alias, minus, opinor, appropriatas et adaequatas, (etsi causas alias concorrentes non excluserim) demonstrabitur.

Est autem hujusmodi: Si Tubum opticum fulcro sive palo, terrae firmiter infixo, ita alligaveris, ut adversus quemvis impetum, etiam fortiorem, immobilis eidem inhaereat, nec agitatione aëris vel valido flante vento minimum titubare sentiatur; et ad Objectum aliquod in summitate aedium aut turris, distantiâ ducentorum et ultra passuum direxeris, comperies, notato quodam signo propè centrum vitri ocularis, illud Objectum, post exiguum temporis spatium ab eo dimotum esse, vel sursum, vel deorsum, vel ad latera: Post intervallum autem temporis idem signum pristino loco restitui; dehinc denuò dimoveri; ut quandoque saepius uno die ac citius, quandoque rarius ac serius, quandoque etiam intra horulam frequentius, irregulariter quidem ista restitutio et alteratio motùs contingat.: quandoque etiam plus, quandoque minus à puncto medio in vitro signato divergat.

Item si Tubus opticus in situ Horizonti parallelo ita firmetur, ut ad cuspidem alicujus turris alteriusvè rei, in superficie terrae existentis, (objecti remotione duûm triumvè milliarium) directus sit, deprehendes, alias terrae vel Objecti partes in motu Horizonti parallelo, aliis continuò succedere; post aliquam autem morulam, easdem partes quae prius è peripheria vitri ocularis penitus quasi perreptârunt, ac ideò inconspicuae evaserunt, postmodum rursus capacitatem vitri ingressas, alternis similiter vicibus eundem motum reiterare: id quod saepiculè expertus sum, non uno solùm adhibito Tubo, sed pluribus simùl ad idem Objectum collineantibus. Ouare interim Phaenomenon hoc non incongruè (ut mihi quidem videtur) motui Telluris diurno accensendum fuerit, quia in superficie ejus conspicitur ac per varium situm objectorum in Tubo optico deprehenditur, quem ideo, motum reciprocationis Objectorum appellare libet.«

2) G. Chr. Eimmart, Ichnographia nova contemplationum de Sole in desolatis antiquorum pbilosophorum ruderibus, Norimbergae MDCCI. S. 23.

§. 3. Wir sehen in dem letzten Absatze das Wesen der Lateralrefraction mit einer Deutlichkeit dargestellt, welche nichts zu wünschen übrig lässt, und die Bedeutsamkeit dieser Stelle wird dadurch nicht verringert, dass dem Beobachter die richtige Erkenntniss des Vorgangs abgeht. Die damals noch vielfach bestrittene Lehre des Copernicus forderte seine Anhänger auf, all' ihre Kräfte zur Sicherstellung seiner Sätze einzusetzen, und so konnte es nicht fehlen, dass man hie und da über das Ziel hinausschoss und auch da Wirkungen der Erdbewegung zu sehen glaubte, wo in Wirklichkeit der causale Zusammenhang ein ganz anderer war. So hatte Eimmart, wie wir diess an einem andren Orte [3]) ausführlicher zeigten, auch für die spontanen Bewegungen freihängender Pendel eine seltsame im Zusammenhang mit seiner Lieblingstheorie stehende Erklärung aufgestellt, welche gleichwohl das Richtige ahnen liess, und so dürfen wir uns auch nicht wundern, dass er in der alternirenden Bewegung horizontaler Gegenstände im Gesichtsfelde seines Fernrohrs eine »titubatio terrae« zu erkennen glaubte.

Wie der Biograph Eimmarts, Doppelmayr, angiebt, hat ersterer selbst sich späterhin von der Unrichtigkeit seiner Hypothese überzeugt, und die wahre Ursache aufgefunden. Doppelmayr [4]) sagt nämlich, nachdem er einen kurzen Ueberblick über das angewandte Verfahren gegeben, Folgendes: »Die Ursach dieses Phaenomeni wollte Eimmartus anfänglich einen motui tremulo der Erden, der sich bei derselben stäten Umdrehung äussern mögte, attribuiren, er änderte aber nach mehr angestellten Untersuchungen seine Gedanken, und schriebe diese Variation vielmehr einer andern Ursach, und zwar der immer veränderlichen Refraction in der Lufft, vor welche sie auch Christ. Hugenius eine geraume Zeit zuvor gar wohl angegeben, zu.« Schriftliches scheint Eimmart über seine verbesserte Auffassung nichts bekannt gegeben zu haben; dass er seine erste Theorie selbst nicht als abschliessend betrachtete, geht wohl aus den Worten hervor [5]), mit welchen er den diese Materie behandelnden Abschnitt beendete: »Quod quidem Phaenomenon, quoniam cum Hypothesi nostra ejusdem est cognationis, dignum videbitur, ut Orbi Erudito insimùl innotescat, quia magnum Philosophis argumentum, tormentum curiosis infere poterit.«

3) Günther, Die Vorgeschichte des Foucault'schen Pendelversuches, Diese Sitzungsberichte, 5. Heft. S. 67.

4) Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnberger Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730. S. 128.

5) Eimmart, S. 24.

§. 4. Wenn Doppelmayr im Obigen den Versuch macht, die richtige Deutung der beschriebenen Erscheinung für Huyghens in Anspruch zu nehmen, so ist derselbe als nicht gerechtfertigt zu bezeichnen. Denn der Ausspruch des niederländischen Mathematikers, auf welchen er sich bezieht [6]), weiss nichts von dieser Thatsache. Er lautet: »Il y a une Experience, qui rend cette refraction fort visible, qui est, qu'en fixant une Lunette d'approche en quelqu' endroit, en sorte qui elle regarde un objet eloigné de demie Lieue ou plus, comme un clocher, ou une maison, si on y regarde à des heures differentes du jour, la laissant tousjours attachée de méme, l'on verra que ce ne seront pas les mémes endroits de l'objet, qui se presenteront au milieu de l'ouverture de la Lunette, mais que d'ordinaire la matin et le soir, lorsqu'il y a plus de Vapeurs près de la Terre, ces objets semblent monter plus haut, en sorte que la moitié ou d'avantage n'en sera plus visibile, et qu'ils baisseront vers le midy quand es vapeurs seront dissipées.«

Man erkennt sofort, dass hier lediglich von der gewöhnlichen Strahlenbrechung die Rede ist, und in keiner Weise von der uns allein interessirenden; es wird also hiedurch unser obiges Resultat nicht alterirt, und wir dürfen, insbesondere mit Rücksicht auf seine eigenen Angaben (s. o. §. 2), Eimmart als den Entdecker der Lateralrefraction mit vollem Rechte bezeichnen.

6) Huyghens, Traité de la lumière, Lugduni Batavorum MDCXC. Chap. IV.

§. 5. Man könnte aus den Beobachtungen, welche Eimmart mit seinen sicherlich nur sehr mässigen optischen Hülfsmitteln anstellte, den Schluss zu ziehen geneigt sein, als genüge im wesentlichen einige Aufmerksamkeit, um diess Phänomen wahr-zunehmen; merkwürdigerweise vergehen aber nunmehr nicht weniger als 138 Jahre, bis auf dasselbe wieder hingewiesen wird. Selbst Beobachter, deren Zuverlässigkeit über allen Zweifel erhaben ist, und deren ausgesprochener Zweck die Untersuchung der terrestrischen Refraction war, thun einer seitlichen Verschiebung der Objecte keine Erwähnung. Es dürfte hier besonders Brandes namhaft gemacht werden, der in einer vollständig analogen Weise beobachtete, wie diess Eimmart that, und dessen Fernrohr den unachromatischen Gläsern des Nürnberger Astronomen weit überlegen sein musste. »Er richtete« — sagt [7]) Birnbaum — »Morgens früh sein Fernrohr nach einem Orte der etwa eine halbe Meile entfernt lag, und fasste damit den Thurm, das Schloss, oder irgend einen anderen passenden Gegenstand scharf in's Auge, so dass davon ein Schallloch, Zifferblatt, Fenster oder irgend ein anderes Object genau in's Fadenkreuz passte. Dann befestigte er das Fernrohr, damit es unverrückt in seiner Lage verbleiben konnte,« sah jedoch bei seinen Observationen nur ein vertikales Auf- und Absteigen der Gegenstände. Sollte vielleicht die von Brandes gewählte Distanz einer geographischen Stunde zu klein sein, um die Wirkungen der Lateralrefraction mit hinlänglicher Deutlichkeit hervortreten zu lassen, oder hielt es derselbe nicht für nöthig, die vielleicht beobachteten kleinen Seitenabweichungen mit in seinen Bericht aufzunehmen, da sie mit der gangbaren Theorie sich nicht vereinbaren liessen?

7) Birnbaum, Grundzüge der astronomischen Geographie, Leipzig 1863. S. 14.

§. 6. Die Nothwendigkeit eines gründlichen Studiums der terrestrischen Strahlenbrechung trat im Jahre 1836 an diejenigen Gelehrten heran, welchen die Ermittlung des Höhenunterschiedes zwischen dem schwarzen und kaspischen Meere als Aufgabe gestellt war; es ward hiedurch einer der Theilnehmer dieses grossen Unternehmens, Sabler, veranlasst, diesen Gegenstand einer gründlichen Revision zu unterwerfen. Seine Untersuchungen sind in seiner mit Unrecht nur wenig bekannten Inauguralschrift [8]) enthalten.

Wie wenig Sabler geneigt war, sich durch die bereits bestehenden Anschauungen leiten zu lassen, geht schon aus dem Umstande hervor, dass er den Fundamentalsatz, wonach jede von zwei Beobachtern zu gleicher Zeit in verschiedenen Punkten Eines Meridianes gemessene Zenithdistanz nicht nur eine genaue Bestimmung des Höhen-Unterschiedes, sondern auch einen Werth der Refraction selbst giebt, nicht anerkennt, denn [9]) »hiebei wird vorausgesetzt, dass die Refractionscurve an beiden Endpunkten eine symmetrische Krümmung habe«, d. h. unter anderem auch, dass sie keine Curve doppelter Krümmung sei. Nachdem er hierauf mit kurzen Worten die Lehre von der homogenen Zusammensetzung concentrischer Luftschichten besprochen hat, fährt er fort: »Es ist zu erwarten, dass dieser Ausdruck der Refraction mit der Natur wirklich übereinstimmt, sobald keine Störung der Brechungskraft der untern atmosphärischen Schichten durch irgend eine Ursache, z. B. Ungleichheit der Temperatur derselben eintritt. Unter diesen Umständen wird das Bild eines entfernten irdischen Gegenstandes in einer vollkommenen Ruhe und Deutlichkeit, frei von dem sonst stattfindenden Wallen erscheinen.«

Sabler zeigt nun an der Hand früherer Beobachtungen, insbesondere von Struve [10]), dass diese Störung der homogenen Luftconstitution zweimal täglich eine periodische sei, so dass also zweimal an jedem Tage ein normaler Ruhezustand eintritt, welcher selbstverständlich eine grösstmögliche Genauigkeit für eine um diese Stunde angestellte Beobachtung verbürgt; ob beidemale der nämliche Refractionscoefficient anzunehmen sei, lässt Sabler unentschieden [11]). Hierauf schildert er die beobachteten Erscheinungen folgendermassen: »Die Grösse der Veränderung der Strahlenbrechung hängt von der grösseren oder geringeren Einwirkung der Sonne durch mehr oder minder heitern Himmel, von der Höhe der Sonne über dem Horizonte, von der Stärke der Ausstrahlung des Erdbodens, die sich gleichfalls nach der Heiterkeit des Himmels richtet, vorzüglich aber von der geringeren oder grösseren Entfernung des vom Lichtstrahl durchlaufenen Weges, vom Erdboden, besonders in der nächsten Umgebung des Beobachters, ab. Fast alle diese Ursachen sind der Art, dass sie sich schwerlich wohl je der Rechnung werden unterwerfen lassen, und somit wäre uns eine Bestimmung der jedesmaligen Refraction für eine einseitig beobachtete terrestrische Zenithdistanz gänzlich unmöglich, wenn es nicht noch einen Umstand gäbe, der mit den Veränderungen der Refraction aufs innigste verbunden, mit denselben gleichen Schritt hält, und daher das Mass derselben abgeben kann, und diess ist: Der Zustand der grösseren oder geringeren Unruhe der Bilder. In der That, je grösser der Unterschied der Temperatur und daher der Dichtigkeit der unteren Luftschichten ist, desto grösser wird das Bestreben der Aus-gleichung, und hierdurch tritt das so gewöhnliche Wallen und Schwirren der irdischen Objecte ein. In den Nachmittagsstunden in denen meine Beobachtungen ohne Ausnahme angestellt sind, fand zuerst gewöhnlich ein Wallen der Objecte statt, bei Sonnenschein und ungünstigem flachen Standpunkte mitunter so stark, dass die Beobachtung der Zenithdistanzen unmöglich war. Dieses nahm allmälig ab, die Bilder näherten sich dem Zustande der Ruhe immer mehr, bis sie ihn, wie schon bemerkt, gewöhnlich um $^2/_3$ der Zeit zwischen Mittag und Sonnenuntergang erreichten, und bald kürzere bald längere Zeit behielten. Dann trat wieder ein Schwirren ein, aber nun aus einem entgegengesetzten Grunde, das allmälig zunahm, und zwar meistens in einer kürzeren Periode, als die vor der Ruhe.« Um Beobachtungen, die zu verschiedenen Tagesstunden gemacht waren, hinsichtlich ihres Gewichtes mit einander vergleichen zu können, entwarf sich Sabler eine Scale in folgender Ordnung: sehr unruhig, unruhig, etwas unruhig, fast ruhig, ruhig, sehr ruhig, und so wiederum in aufsteigender Reihenfolge; jeder Beobachtung ist in dem grossen Verzeichnisse, welches Sabler liefert, in einer besonderen Rubrik der betreffende Scalentheil beigeschrieben.

8) Sabler, Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung und über die Gesetze der Veränderung derselben, Dorpat 1839.

9) Ibid. S. 8.

10) Beschreibung der unter Allerhöchstem Kaiserl. Schutze von der Universität zu Dorpat veranstalteten Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet in den Jahren 1821—1831 mit Beihülfe des Capitän-Lieutenants B. W. v. Wrangell und Anderer von F. G. W. Struve, Director der Sternwarte, 1. Band, Dorpat 1831. S. 87.

11) Sabler, S. 10.

§. 7. Im weiteren Verlaufe legt sich Sabler die Frage vor, ob die Refractions-Veränderungen, welche sich in den verschiedenen Ruhezuständen der Bilder manifestiren, den Entfernungen proportional seien. Er verneint dieselbe, findet es vielmehr [12]) für höchst wahrscheinlich, »dass, für einen bestimmten Zustand der Unruhe der Bilder, die Veränderung der Refraction eine, von der Entfernung unabhängige, constante ist, so dass, für einen bestimmten Zustand der Unruhe der Bilder, die Veränderung der Refraction eine, von der Entfernung unabhängige, constante ist, so dass also die jedesmalige Refraction ϱ sich durch die Formel

$$\varrho = 0{,}0880\ C + K$$

ausdrückt, in welcher K eine von dem jedesmaligen Zustande des

Bildes allein, nicht aber von der Entfernung abhängige Grösse ist.« C bedeutet die geodätische Distanz des Objectes vom Standorte des Beobachtenden, in Secunden ausgedrückt. Diese Formel hat offenbar auch Wolf [13]) im Auge, wenn er sagt: »In der Schrift von Sabler soll sich eine Relation zwischen Zustand des Bildes und Quantität der Refraction nachgewiesen finden.« Für die Gültigkeit seines Gesetzes führt Sabler verschiedene praktische wie theoretische Gründe auf.

Es kann bei der Lectüre der hier kurz analysirten Schrift vielleicht auffallen, dass der Verfasser, obgleich er von einer Veränderlichkeit der Bilder spricht, doch nicht eigentlich einer lateralen Verschiebung derselben erwähnt, und man könnte zu zweifeln geneigt sein, ob der Autor in der That ein klares Bewusstsein von der Lateralrefraction besessen habe. Diese Zweifel beseitigt jedoch kurz die dritte unter den Thesen, welche der Dissertation angehängt sind; dieselbe ist nämlich folgende: »Lateralrefractionen sind nicht nur möglich, sondern finden in den meisten Fällen sogar nothwendig statt.«

12) Sabler, S. 13.

13) Wolf, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie, 2. Band, Zürich 1872. S. 180.

§. 8. Wie bereits oben bemerkt wurde, hatte sich Sabler's Arbeit nicht derjenigen Anerkennung zu erfreuen, deren sie würdig war, und so blieb denn die Lehre von der Lateralrefraction in dem Zustande, den sie bereits im Jahre 1839 erreicht hatte. So wenig sich der wissenschaftliche Astronom *) ihre Existenz und die aus derselben entspringenden Irregularitäten verhehlen konnte, so finden sich doch, wie es wenigstens den Anschein hat, in der Literatur keine Angaben über diesen Gegenstand. Erst im Jahre 1871 nahm Fr. Pfaff denselben von neuem auf.

Die Arbeit, welche derselbe [14]) hierüber veröffentlichte, kann in drei wesentliche Theile zerlegt werden. Zunächst suchte sich der Verfasser ein hinlängliches Material von Thatsachen zu verschaffen, und beobachtete zu diesem Zwecke die Azimuthalablenkungen, welche ein am Horizonte erscheinendes Object von der Normalrichtung erleidet. Solche Gegenstände eignen sich selbstverständ-

*) Verf. dieses kann zur Begründung seines Ausspruches eine ihm von Hrn. Prof. v. Lamont zu München im Jahre 1871 gemachte Bemerkung anführen, wonach derselbe die genaue Berücksichtigung der Lateralrefraction als für die praktische Sternkunde unumgänglich nothwendig bezeichnete.

lich am Besten für genaue Bestimmungen, indem die Zusammensetzung der Luft am Horizonte am stärksten schwankt, und so auch die Lateralrefraction ihren stärksten Betrag gewinnen muss. Sodann geht der Verfasser dazu über, die Fehlerquellen zu untersuchen, welche etwa aus mangelhafter Aufstellung, unrichtiger Ablesung des Apparates u. dgl. resultiren können, und weist nach, dass dieselben zu unbedeutend sind, um nicht die seitliche Ablenkung der Lichtstrahlen deutlich erkennen zu lassen. Schliesslich wird die Frage nach den physicalischen Entstehungsgründen der Erscheinung discutirt, und insbesondere auch für den eigenthümlichen Umstand eine Erklärung zu geben gesucht, dass [15]) »die Differenz in den beobachteten Winkeln für das doppelt soweit entfernte Object nicht grösser ausfällt, als für das nähere.« Die Ursache dieser auf den ersten Blick sonderbar erscheinenden Thatsache sucht Pfaff in der Bodenbeschaffenheit des vor dem Beobachtungsorte sich hinstreckenden Terrains. Ob die verschiedenen Tagesstunden merkliche Verschiedenheiten in dieser Hinsicht darbieten, lässt Pfaff unentschieden; nach Sabler's oben angeführten Bemerkungen ist es so gut wie gewiss.

14) F. Pfaff, Beobachtungen über die Lateralrefraction, Sitzungsber. d. math.-phys. Classe der Academie zu München, Jahrg. 1872. S. 147—162.
15) Ibid. S. 160.

§. 9. Wie aus dem Angeführten erhellt, stellt sich die Frage nach dem eigentlichen Charakter der Lateralrefraction als besonders wichtig heraus für die Geodäsie, und in der That ist die einzige Arbeit, welche zu dieser Frage theoretische Beiträge zu liefern sucht, von diesem Standpunkte aus angegriffen. Dieselbe rührt her von Sonderhof [16]). Der Verfasser zeigt zunächst, dass die Lichtcurve im Allgemeinen eine Linie doppelter Krümmung ist, glaubt jedoch nicht, dass ihre theoretische Bestimmung möglich sei. Diess wird man allerdings zugeben müssen, wenn man mit dem Verfasser daran festhält, dass die Flächen gleicher atmosphärischer Dichtigkeit als Parallelflächen zu dem in seiner äussern Gestalt ziemlich unregelmässigen Erdsphäorid zu betrachten seien. Denn dann ist »selbst der zenithale Lichtstrahl keine gerade Linie, sondern eine Curve, welche nahe, aber nicht ganz, mit der Umhüllungslinie der Normalen übereinstimmt.« [17]). Temporäre Aenderung der Geoidflächen durch Temperaturstörungen etc. werden nicht berücksichtigt.

Nur für die Punkte sphärischer Krümmung auf der Erde kann man nach Sonderhof die rechnende Bestimmung der Lateralrefraction für möglich halten, indem allerdings jene Parallelflächen in diesem Falle in concentrische Kugelflächen übergehen. Solche Punkte sphärischer Krümmung sind jedoch nur dann die Pole, wenn wir die Erde als Rotationsellipsoid betrachten; stimmt dieselbe dagegen, wie es wahrscheinlich ist, mehr mit einem dreiaxigen Ellipsoid überein, so congruiren diese Punkte (die Nabelpunkte) nicht mehr mit den Polen, sondern fallen in der Beobachtung zugängliche Gegenden. Den Schlusssatz: »Unter solchen theils unbekannten, theils complicirten Verhältnissen kann die Ermittelung der horizontalen Abweichung der astronomischen Lichtcurve, wenn eine solche überhaupt bemerkbar ist, nur Aufgabe der Beobachtung sein,« wird man unterschreiben, jedoch auch darauf hinweisen müssen, dass nach den oben näher charakterisirten Untersuchungen von Sabler und Pfaff die darin noch schwebend gelassene Frage als völlig entschieden anzusehen ist.

Anmerkung. Es sei noch bemerkt, dass die von Sonderhof gewählte Bezeichnung der lateralen als »horizontale Refraction« zwar an und für sich gewiss vollkommen berechtigt ist, jedoch aus dem Grunde sich nicht empfiehlt, weil auch die gewöhnliche vertikale Refraction von dem Horizonte nahe parallel laufenden Lichtstrahlen bei den Astronomen diesen Namen führt.

16) Sonderhof, Die geodätischen Correctionen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel, Grunert's Archiv d. Math. u. Phys., 50. Theil, S. 20—41.

17) Ibid. S. 40.

Sitzung vom 8. Juni 1874.

Herr Professor **Rosenthal**

legte eine Beschreibung und Zeichnung der von ihm schon früher besprochenen, neuerdings aber verbesserten

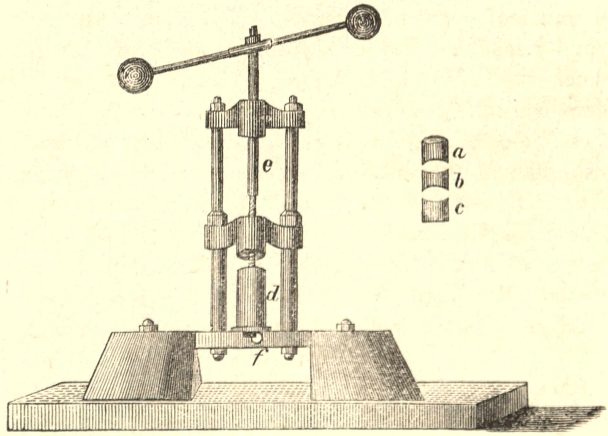
Presse zur Compression voluminöser Arzneimittel

vor.

So wesentliche Fortschritte die neuere Entwickelung der Chemie, namentlich die Darstellung der Alkaloide auf die Receptirkunst gehabt hat, so geringfügig sind die Veränderungen in der mechanischen Seite derselben gewesen. Neben Pillen, Pulvern, Latwergen u. s. w., welche heute noch im Wesentlichen in derselben Weise verordnet und bereitet werden, wie vor 100 Jahren und früher, ist höchstens das Einhüllen schlecht schmeckender und riechender Stoffe in Kapseln sowie die Dosirung sehr wirksamer Stoffe durch Auflösen in Leimlösung und Ausgiessen derselben auf Glastafeln zu nennen, wodurch dünne Platten entstehen, die in regelmässige Quadrate zerschnitten werden. Alle bisherigen Methoden sind jedoch unzureichend, wenn es sich darum handelt, sehr grosse Mengen eines Medicaments, welches durch Geschmack, Geruch oder beides widerlich ist, beizubringen Am häufigsten macht man wohl diese Beobachtung mit Kusso und andern Wurmmitteln, von welchen grosse Dosen nöthig sind, um zu wirken. Fast $^3/_4$ der Kuren missglücken, weil es nicht gelingt, eine hinreichend grosse Dosis beizubringen. Für solche Fälle nun ist die von mir erfundene Presse vorzugsweise bestimmt. Trotzdem sie bisher noch nicht in weitern Kreisen bekannt geworden ist, bin ich doch schon jetzt in der Lage, eine ganze Reihe gelungener Bandwurmkuren anführen zu können, wo die Patienten bis zu 36 Grm. Kusso ohne alle Beschwerden genommen haben und wo jedesmal der Wurm (1 Mal Taenia mediocanellata, in den andern Fällen T. solium) ganz abging und radicale Heilung erfolgte.

Die von mir vorgeschlagene Methode besteht darin, die Medicamente ohne allen Zusatz, namentlich ohne Wasser mittelst einer dazu geeigneten Presse zu comprimiren und in Form von Tabletten zu bringen, welche leicht und ohne Belästigung der Geschmacks- und Geruchsnerven geschluckt werden können. Die dazu verwandte Pressse ist, wie die Figur zeigt, eine Schraubenpresse. Auf einem rechteckigen Grundbrett, welches mittelst Zwingen oder Schrauben fest auf dem Arbeitstische befestigt werden kann, sind zwei Klötze angebracht, auf denen die eigentliche Presse ruht. Das eiserne Lager, welches die Presse trägt, ist in der Mitte durchbohrt; eine gleichfalls durchbohrte und mit einem Ringe (f) als Handhabe versehene Platte, kann die Oeffnung des Lagers decken oder, wenn sie mittelst des Ringes hervorgezogen wird, offen lassen. Auf dieses Grundbrett wird der Hohlcylinder (d) aufgesetzt und in demselben das Pulver mit Hilfe der Einsatzformen (a, b, c, in der Seitenfigur) eingeschlossen. Indem man nun mit Hilfe des

Stempels (e) einen hinreichenden Druck ausübt, verwandelt man das lockere Pulver in eine feste Tablette, welche aus dem Cylin-



der herausgenommen, entweder unmittelbar oder nach vorherigem Gelatiniren (s. u.) verbraucht werden kann.

Von Pillen, und den üblichen Boli, Zeltchen u. s. w., mit denen diese »Tabletten« ja eine gewisse Aehnlichkeit haben, unterscheiden sie sich wesentlich durch den Mangel jedes Bindemittels. Hierdurch werden aber wesentliche Vortheile erreicht. 1) Wird das Volum nicht unnütz vermehrt, was bei Medicamenten, welche in grossen Dosen gebraucht werden, sehr ins Gewicht fällt. Im Gegentheil wird durch die Compression das Volum auf etwa $^1/_3$ des von dem Pulver eingenommenenen vermindert, und dadurch das Einnehmen sehr erleichtert. — 2) Die Anwendung von Klebemitteln, wie sie bei Pillen etc. üblich ist, hat zur Folge. dass die Massen beim Aufbewahren steinhart werden und im Magen nicht mehr erweicht werden. Solche Pillen gehen bekanntlich häufig ganz unverändert durch den Darm ab, können daher gar nicht wirken. Bei unsern Tabletten ist dies nicht der Fall; sie können Monate lang aufbewahrt werden, ohne sich zu verändern. Sobald sie in den Magen kommen, zerfallen sie zu Pulver, welches so wirkt, als wäre es direct in Pulverform in den Magen gebracht worden. — 3) Die Nichtanwendung von Constituentien, Corrigentien u. s. w. bewirkt eine erhebliche

Ersparniss, welche das Medicament billiger macht, als es in anderer Form gereicht werden kann.

Diese Vortheile legen es nahe, das Verfahren der Compression auch auf andere Medicamente auszudehnen, als gerade Kusso u. d. g. In der That lässt sich jeder beliebige Stoff, Flüssigkeiten selbst nicht ausgenommen, in Tablettenform bringen, natürlich unter Anwendung geeigneten Constituentien, wenn das Medicament allein nicht dazu geeignet ist. Ich habe in dieser Beziehung noch wenig Erfahrungen gesammelt, einige günstige aber doch schon. So werden z. B. die in den später mitgetheilten Formeln unter Nr. 13 aufgeführten Tabletten von Pulv. liqu. comp. sine saccharo sehr gern genommen und sind in manchen Familien ein sehr beliebtes diätetisches Mittel geworden. Indem bei diesem Mittel der Zucker fortgelassen wird, erhält man ein Medicament von der doppelten Wirksamkeit wie das der Pharmakopoe, so dass 1 Grm. schon eine gut wirkende Dosis darstellt. Schwierigkeiten breiten nur die feuchten und hygroscopischen Substanzen, doch können sie durch passende Wahl der Constituentien beseitigt werden. Als Beispiel verweise ich auf Nr. 6 (Ol. Crotonis) und Nr. 18 (Kalium jodatum). Alkaloide u. d. g., welche schon in sehr geringen Dosen wirken, werden mit irgend einem passenden Constituens gemischt (Vgl. Nr. 11 und 12).

Die passendste Grösse der Tabletten ist die von 1 Grm. Substanz. Bei Kusso, wo 30 Grm. und darüber auf ein Mal genommen werden müssen, ziehe ich 2 Grm. vor. Tabletten von mehr als 2 Grm. fallen zu dick aus und werden von manchen schwer geschluckt. Die von 1 und 2 Grm. aber lassen sich sehr leicht verschlucken, leichter als Pillen. Selbst ganz ungeübte und selbst kleine Kinder nehmen die Tabletten leicht. Wenn man sie einfach auf den hintern Theil der Zunge legt und den Mund schliesst, so gehen sie hinunter, ohne dass es irgend einer Anstrengung dazu bedarf. Ein Schluck Wasser erleichtert den Act noch für solche, denen es ohne diesen Schwierigkeiten machen sollte. Im Uebrigen habe ich zweierlei Formen machen lassen. Die tiefer ausgehölten dienen für die schwerern Tabletten, die flachern für die leichten von 1 Grm. Klebrige und fest anhaftende Substanzen (wie Magn. usta) dürfen aber nur in den flachern Formen gepresst werden, da sie aus den tiefern zuweilen nicht ohne Zerbrechen herausgebracht werden können. Um die

Arbeit des Pressens abzukürzen, dienen die s. g. Zwischenformen, mit Hilfe deren es möglich ist, mehr als eine Tablette auf ein Mal zu pressen.

Die Möglichkeit, diese Tabletten, besonders wenn sie gelatinirt sind, beliebig lange aufzubewahren, gestattet von öfter gebrauchten Medicamenten Vorräthe zu halten. Ihre leichte Transportfähigkeit empfiehlt die Tabletten zum Mitnehmen bei der Landpraxis u. d. g., wo es zuweilen sehr erwünscht ist, das Mittel sofort zur Hand zu haben. Bei Vergiftungen z. B. würden einige Tabletten nach der Formel Nr. 5 (Tart. stib. 0,03, Pulv. Ipecac. 1,0) sehr gute Dienste leisten können. Wenn die Maschiene bei Aerzten und Apothekern Anklang findet, wird sich der Kreis ihrer Brauchbarkeit bald erproben [1]).

Die Vorschrift für die Anfertigung der Tabletten würde etwa folgender Maassen zu machen sein:

Rp. Tart. stib. 0,03
Pulv. Ipecac. 1,0
M. Compr. in mach. ut fiat tabell.
Disp. tales doses III.
S. In Zwischenräumen von 10 Minuten zu nehmen bis Wirkung erfolgt.

Oder: Rp. Flor. Kusso 2,0
Compr. ut fiat tabell.
Disp. tales doses XV.
S. Innerhalb einer halben Stunde Morgens mit schwarzem Kaffee zu nehmen.

Für diejenigen, welche Versuche mit diesen Tabletten anzustellen beabsichtigen, lasse ich hier noch eine Gebrauchsanweisung folgen:

1. Behandlung der Presse.

Die Presse wird auf einem Tisch mit Zwingen oder Schrauben so befestigt, dass der Ring der Platte dem Arbeiter zugekehrt ist. Man zieht die Platte hervor, setzt den Cylinder auf sie, legt eine Form ein, schüttet mittelst eines Kartenblattes das abgewogene Pulver ein, legt eine Zwischenform ein, schüttet

1) Pressen dieser Art sind bei Herrn Universitätsmechaniker Bauer in Erlangen zu haben. Tabletten sind von den Herren Apothekern Dr. Schacht in Berlin (Friedrichstr. 153a), Böttiger in Erlangen u. A. zu beziehen.

wieder Pulver auf u. s. f. bis der Cylinder voll ist und setzt schliesslich die Schlussform auf (bei kleinen Dosen bis zu 1 Grm. kann man 3—4, bei grossen 2 Tabletten auf einmal pressen). Nun schiebt man die Platte mitsammt dem Cylinder vor, bis dieser unter der Schraube steht, presst so stark man ohne Anwendung zu grosser Gewalt kann, schraubt dann ein klein wenig zurück, zieht die Platte wieder vor und drückt nun mittelst der Schraube die fertigen Tabletten heraus, welche unten auf das Brett fallen oder besser in der untergehaltenen Hand aufgefangen werden. Von Zeit zu Zeit muss man die Schraubenspindel ölen und den Cylinder mit einer runden Bürste, wie sie zum Reinigen der Reagensgläser gebraucht wird, ausbürsten.

2. Gelatiniren der Tabletten.

Man übergiesst in einem weithalsigen Glase käufliche Gelatine mit Wasser und lässt sie 12 Stunden quellen, giesst dann ein gleiches Volum Alcohol zu und erwärmt gelinde, indem man das Glas in warmes Wasser stellt und von Zeit zu Zeit schüttelt. Die Masse muss nach dem Erkalten ganz fest und weiss werden. — Zum Ueberziehen der Tabletten verflüssigt man die Masse wieder durch Einsetzen des Glases in warmes Wasser. Man spiesst dann die Tabletten auf Nähnadeln, indem man die Spitze der Nadel senkrecht auf die Oberfläche aufsetzt und etwa einen Millimeter tief eindrückt, und taucht die aufgespiesste Tablette 1 Mal in die Leimlösung. Das Trocknen erfolgt schnell und gut folgender Maassen: Man bohrt in ein Brett Löcher von etwa 1 Mm. Weite und 1 Cm. Tiefe in Abständen von 5 Cm. In diese steckt man die Nadeln mit den feuchten Tabletten, so dass diese nach oben gekehrt sind. Das Verfahren geht sehr schnell von Statten. Sind alle Tabletten so auf dem Brett aufgestellt, so trocknen sie, besonders in der Wärme, sehr schnell und man kann sie leicht von den Nadeln abziehen und beliebig lange aufbewahren, doch dürfen sie nicht nass werden. Um das Abziehen der Tabletten von den Nadeln zu erleichtern, thut man gut, die Spitzen derselben, ehe man die Tabletten aufspiesst, in Oel zu tauchen. Die Gelatinelösung wird während des Tauchens auf dem Wasserbade warm erhalten. Wenn sich eine Haut auf der Oberfläche bildet, fügt man etwas Alcohol zu und rührt mit einem Glasstabe um.

3. Formeln für Tabletten.

1. Flor. Kusso 1,0 oder 2,0.
2. Pulv. herbae Digital. 0,2.
   Sacch. lact. 0,3.
3. Calomel 0,03
   Sacch. lact. 0,6
   Pulv. Jalapp 0,3.
4. Natri bicarb. 1,8
   Magn. carb. 0,2.
5. Tart. stib. 0,03
   Pulv. Ipecac. 1,0.
6. Ol. Croton. gtt $^1/_2$.
   Amyli
   Magn. carbon. ana 0,5.
7. Magn. ustae 1,0.
8. Cupr. sulfur. 0,1.
   Sacch. lact. 0,7.
9. Sulphur. loti 1,0.
10. Secal. corn.
    Magn. ustae ana 0,5.
11. Chini sulfur. je nach Wunsch mit Chocoladepulver, lässt sich bis zu gleichen Theilen mischen.
12. Santonini 0,05.
    Pulv. Chocol. 1,0.

    Ebenso jedes beliebige Alkaloid oder Salz bis zu gleichen Theilen.
13. Pulv. liquir. comp. sine sacch. 1,0.
    (Pulv. liquir. — Senna — Schwefel, nach Angabe der Pharmacopoe, mit Fortlassung des Zuckers).
14. Pulv. rad. rhei 0,5 bis 1,0.
15. Santonini
    Calomel ana 0,05
    Pulv. tub. Jalapp.
    Sacch. lact. ana 0,45.
16. Pulv. rad. fil. mar. 1,0.
17. Ammoni muriat. 0,2.
    Pulv. liquir. 0,8.

18. Kalii jod. 0,3 bis 0,5
Ammon. carb. 0,2.
Amyli
Magn. ustae ana 0,5.

Derselbe

machte sodann weitere Mittheilungen über die Darstellung von Fleischpeptonen ohne Verdauungssäfte.

Herr Prof. **Hilger**

sprach hierauf über die künstliche Alizarinindustrie nach den neuesten Darstellungsmethoden mit Vorzeigung zahlreicher Präparate aus den Fabriken von Gebr. Gessert in Elberfeld und Meister, Lucius und Brüning in Höchst a/M. Ausserdem besprach Derselbe die neuesten Fortschritte der Papierfabrikation und legte der Gesellschaft Proben vor von Papier aus Brennnessel (Urt. urens) und Hopfenrückständen der Bierfabrikation.

Sitzung vom 13. Juli 1874.

Herr Prof. **Zenker**

machte Mittheilungen über einen Fall von Pancreashaemorrhagie bei einem älteren Mann, der todt im Flusse gefunden wurde. Wie in 2 früher von dem Vortragenden beobachteten Fällen von Pancreashaemorrhagie, in welchen letztere zur Ursache plötzlichen Todes geworden war, wurde auch hier Verfettung des Pancreas und hochgradige Hyperämie des Ganglien solare nachgewiesen. Dieser Sectionsbefund machte es wahrscheinlich, dass es sich in dem vorliegenden Falle nicht etwa um einen Selbstmord handelte, sondern dass der Verstorbene während er am Flusse angelte, durch die Pancreashaemorrhagie rasch das Bewusstsein verloren hatte, und in das Wasser gefallen war.

Hierauf berichtete

Herr Dr. **Fr. Pfaff**

Ueber die Wärmeleitung des Eises.

Ueber die physikalischen Eigenschaften des Eises liegen aus älteren wie neueren Zeiten eine Reihe von Untersuchungen vor, welche uns im Wesentlichen die Natur des Eises nach allen Seiten hin kennen gelernt haben. Namentlich waren es die Eigenschaften, welche in irgend einer Beziehung zu den Gletschertheorien standen, denen man besondere Aufmerksamkeit widmete. Vor wenigen Jahren hat Moseley die früher gewonnenen Resultate, so wie die durch eigene Versuche erhaltenen zusammengestellt. Auffallender Weise hat, so viel mir bekannt geworden ist, weder dieser noch ein anderer Naturforscher die Wärmeleitung des Eises untersucht und doch ist gerade diese von nicht unerheblicher Wichtigkeit für unsere Vorstellungen von der Bewegung der Gletscher. Ich benützte daher die kurze Kälteperiode des verflossenen Winters, um darüber einige Versuche anzustellen, da dieselben selbstverständlich nur bei Temperaturen unter Null gemacht werden können.

Ich wendete dazu dasselbe Verfahren an, welches ich zur Ermittlung der Wärmeleitung der Krystalle nach ihren verschiedenen Achsen als zweckmässig erkannt habe mit geringen durch die veränderten Umstände gebotenen Modificationen. Es wurden 2 gleiche Platten, die eine von Eis, die andere von Schmiede-Eisen und zwar von quadratischer Basis (32 Mm. Seite) und 10,5 Mm. Dicke hergestellt und in eine etwas weniger dicke Korkplatte eingepasst. Beide Platten wurden in einem Raume, dessen Temperatur — 1° betrug so lange gelassen, bis ein kleines metallenes Gefäss, das mit einem vollkommen eben geschliffenen dünnen Bleche am Boden geschlossen war und ein Gemische von etwas Weingeist mit Wasser enthielt, auf die Platten gestellt, ebenfalls an einem feinen, direct in $^1/_5$° C. getheilten Thermometer, das in die Flüssigkeit reichte, dieselbe Temperatur zeigte. Vor dem Fenster dieses Raumes war eine Kupferplatte aufgestellt, welche während der Versuche eine Temperatur von — 15° C. hatte. Die Platten wurden dann durch das Fenster rasch zugleich mit dem kleinen Gefässe auf die Kupfertafel gesetzt und mittelst einer Secundenuhr die Zeit genau bestimmt, welche nöthig war, um die Temperatur der Flüssigkeit in dem kleinen Gefässe das beiläufig 10 Grm. davon enthielt, um 4° zu erniedrigen. Da das kleine Gefäss selbst oben mit einem dicken Korke, durch den das Thermometer ging, luftdicht verschlossen und an den Seitenwänden ungefähr 1 Cm. dick mit Seide umwickelt war, so konnte die Erniedrigung der Temperatur fast nur durch die Platten hindurch vor sich gehen. Nehmen wir an, dass die Abkühlungszeit in diesem Falle proportional der Wärmeleitungsfähigkeit der beiden Substanzen sei, so lässt sich auf diese Weise das Verhältniss der Wärmeleitung des Eises zu der des Eisens leicht bestimmen. Als das Mittel aus mehreren unter einander wohl übereinstimmenden Versuchen ergab sich für das Eis 250 Secunden für das Eisen 205 Secunden als die Zeit, welche nöthig war, um eine Abkühlung von 4° zu Wege zu bringen.

Leider weichen die Angaben über die Wärmeleitung der Metalle überhaupt und namentlich über die des Eisens so ausserordentlich vor einander ab, dass eine bestimmte Zahl für die Wärmeleitung des Eises daraus nicht abgeleitet werden kann. Nach den Untersuchungen von Despretz erhält Gold die Zahl 1000, Platin 981, Silber 973, Eisen 374, Zinn 303, nach Wiedemann und Franz Silber 1000, Gold 432, Zinn 115, Eisen 119, Platin 84. Folgen wir dem ersteren, dessen Werthe nach einigen Versuchen mit Platin, Kupfer, Zinn und Eisen, über die ich mir später zu referiren erlauben werde, mir richtiger erscheinen, so erhält Eis die Zahl 314, während sie nach Wiedemann und Franz nur 97 sein würde. Wie dem auch sei, jedenfalls erscheint festes Eis als ein ziemlich guter Wärmeleiter und es erscheint demnach nicht zulässig, die Temperatur im Innern der Gletscher als kaum bemerklich unter Null liegend, und flüssiges Wasser überall bis auf seinen Grund dringend anzunehmen. Denn wir haben es hier offenbar mit einer Masse zu thun, die nur von der Oberfläche aus Temperaturveränderungen unterworfen ist, und die Eigenthümlichkeit darbietet, dass jene nie über Null sich erwärmen, aber weit unter Null sich abkühlen kann. Wenn nun gleich auch der lockere Schnee ein sehr schlechter Wärmeleiter ist, so ist doch die Oberfläche eines Gletschers nicht immer in den kälteren Zeiten von Schnee bedeckt, und dann muss nothwendig die Kälte von aussen in die Tiefe eindringen. Bis zu welchem Grade unter Null dieselbe aber sinken kann, darüber etwas auszusagen, fehlen uns bis jetzt alle Anhaltspunkte, doch scheint der Schluss gerechtfertigt, dass sie eben der verhältnissmässig guten Leitungsfähigkeit des Eises wegen nicht so wenig unter Null in der Tiefe sein dürfte, wie man bisher angenommen hat.

Herr Prof. **Rosenthal**

berichtete über demnächst von ihm vorzunehmende Untersuchungen über die Bodentemperatur und den Kohlensäuregehalt der Grundluft, sowie über die von ihm zur Temperaturmessung gewählte Methode.

Herr Prof. Dr. **Reess**

berichtete über eine an Puccinia Malvacearum Mtge. angestellte Untersuchung des Herrn Stud. Ch. Kellermann.

Puccinia Malvacearum, deren östliche Verbreitungsgränze in Europa im Herbst v. J. bis Strassburg und Rastatt sich vorgeschoben hatte, tritt seit Anfang Juni d. J. in der Erlanger und Nürnberger Gegend auf Althaea rosea allgemein verbreitet auf. Dass sie bis zum Frühsommer dieses Jahres hier nicht vorkam, lässt sich bei ihrer auffälligen Erscheinung aus den übereinstimmenden Aussagen der Pappelrosen bauenden Landwirthe sicher entnehmen. Der in unserer Gegend geradezu charakteristisch im Grossen betriebene Anbau der Althaea rosea begünstigte aber die Ansiedelung des eingewanderten Rostpilzes in dem Grade, dass seit der ersten Entdeckung fast Tag für Tag neue ausgiebige Fundorte der Puccinia gemeldet werden. Vermöge der Dichtigkeit und täglich steigenden Ueppigkeit seines Auftretens ist jetzt der Malvenrostpilz für unsere Gegend ein beachtenswerther Feind einer ihres Blüthenfarbstoffs halber wirthschaftlich hochgeschätzten Nutzpflanze geworden.

Es erschien darum gerade hier wünschenswerth, über die Entwickelungsgeschichte und Biologie der Puccinia Malvacearum, welche bereits durch Durieu [1]) und Schröter [2]) in vielen Punkten aufgeklärt worden ist, vervollständigende Untersuchungen

1) Durieu de Maisonneuve in Actes d. l. soc. Linn. d. Bordeaux t. XXIX. 2. Liv. 1873.

2) Schröter in Hedwigia 1873 p. 183 ff.

anzustellen, deren vorläufiges Ergebniss hier kurz mitgetheilt werden soll.

Als Nährpflanze der Puccinia Malvacearum war hier bis vor wenigen Tagen nur Althaea rosea und Malva vulgaris bekannt geworden. Endlich gelang es, den Pilz auch auf Althaea officinalis nachzuweisen. (Um Kraftshof bei Nürnberg). Dadurch ist seine Identität mit Montagne's chilenischem Pilze wirklich sicher gestellt, welche bei aller Uebereinstimmung in der Structur des chilenischen und europäischen Pilzes solang anfechtbar erschien, als der Pilz in Europa die Althaea officinalis verschmähte.

Die Krankheitserscheinungen an den pilzbefallenen Malven, die rasche Vermehrung der Pilzpusteln auf früher erkrankten und frisch befallenen Theilen der Malve, der Bau des Myceliums und des Sporenlagers sowie die Keimung der Teleutosporen sind von Durieu und Schröter erschöpfend beschrieben. Wir können die Angaben dieser Beobachter einfach bestätigen mit der Ergänzung, dass die Krankheits- und Pilzentwickelungserscheinungen an Althaea officinalis mit denen an Althaea rosea übereinstimmen [1]). — Unser Interesse galt somit, da ein Abschluss des Entwickelungsganges der Puccinia Malvacearum durch Nachweisung des vermuthlich heteröcischen Aecidiums nur von besonderer Gunst des Zufalls zu erwarten steht, zunächst der Art des Eindringens der Sporidienkeime in die Pappelrose, dann der Verbreitung des Myceliums in den erkrankten Pflanzen, der Entstehung neuer Pusteln, der Ueberwinterungsart des Pilzes, endlich der Feststellung des Pilzschadens an Althaea rosea, sowie der Mittel zu möglichster Verhütung des Schadens.

Die Sporidienkeime auf Pappelrosenblättern zur Entwickelung gebracht, dringen alsbald in diese ein. Zwanzig Stunden nach dem Auflegen promyceliumbedeckter Pusteln auf gesunde Blätter fanden sich bereits Hunderte von eingedrungenen Sporidienkeimen, an Länge das Sporidium 6—9mal übertreffend. Das Eindringen wurde in sehr zahlreichen Fällen, stets nach demselben Typus verlaufend, beobachtet: der Sporidienkeimschlauch wächst bis auf die Gränzwand zweier Epidermiszellen, und dringt daselbst, zu dünner Spitze ausgezogen, die Epidermiszellen-Membran spaltend, sofort ein. — Unter die Epidermis gelangt, schwillt

1) Wir kennen allerdings von Althaea officinalis, welche noch vor 3 Wochen in der ganzen Gegend gesund war, nur die ersten Erkrankungszustände mit spärlichen Sporenpusteln.

er wieder an, und wächst intercellular weiter[1]). Schon am 5. oder 6. Tage nach der Aussaat findet man reichverzweigtes, noch farbloses, intercellulares Mycelium, das da und dort Haustorien in die Zellen sendet. Später — vor der Sporenlagerbildung, — wird das Mycelium durch Oeltropfen röthlich-gelb, und durchzieht an den inficirten Stellen in Collenchym, Parenchym und Weichbast alle Intercellularräume, diese beträchtlich erweiternd, die Zellenlumina einengend, mit reichgelappten Haustorien einzelne Zellräume ausfüllend.

Es gibt für die Regel keine Myceliumverbindung zwischen zwei Sporenlagern. Nur ausnahmsweise fliessen, zumal an Blattstielen und Internodien, zwei anfänglich getrennte Pusteln zusammen. Aber ein Wachsthum des Myceliums vom Blatt in den Blattstiel und den Stamm, weiter im Stamm aufwärts und von einem Blatt zum andern findet nicht statt. Vielmehr ist jede neue Pustel, welche an schon vorher befallenen oder an frisch erkrankenden Theilen auftritt, das Ergebniss einer speciellen Infection durch Sporidien. Diese werden an jedem feuchten Tage oder thaugesegneten Morgen zu Tausenden erzeugt, und durch Wind und Regen und Thiere, — zumal Schnecken — verbreitet.

Da das Mycelium der Puccinia Malvacearum in der Nährpflanze nicht wandert, so ist die Möglichkeit, dass es etwa in unterirdischen Theilen den Winter überdauere, um im Frühjahr wieder in Stamm und Blätter hinaufzuwachsen, ausgeschlossen, und vielmehr die Annahme nahe gelegt, die Ueberwinterung des Pilzes erfolge durch keimfähig bleibende Sporenlager. In der That hat Herr Oberstabsarzt Dr. Schröter, wie er uns brieflich gefälligst mittheilt, um Rastatt im Freien die letzten Sporenlager im December entstehen, und in den ersten Apriltagen erst auskeimen gesehen, worauf alsbald die Erkrankung zahlreicher Malvenpflanzen der Nachbarschaft erfolgte. Ins Zimmer verpflanzte Stöcke erzeugten den Winter hindurch fortwährend neue Sporenlager [2]).

1) Wenn Magnus (Bot. Zeitg. 1874 p. 330) von einem Eindringen der Sporidienkeime durch die Spaltöffnungen spricht, so hat er das wohl nicht beobachtet, sondern aus der Analogie mit Puccinia Dianthi geschlossen. Wir haben über Hundert Sporidienkeimschläuche der P. Malvacearum eindringen sehen, aber keinen durch eine Spaltöffnung.

2) Bekanntlich erzeugt auch Puccinia straminis im Freien während

Eine nennenswerthe Schädigung der Wirthpflanzen unserer Puccinia durch die Pilzkrankheit, speciell also eine wirthschaftliche Beeinträchtigung unserer Pappelrosenkultur steht ausser Zweifel. Der Pilz befällt — einzelne unerklärter Weise geschützte Striche und Stöcke abgerechnet — einen Acker nach dem andern. Kein Stock und kein Theil eines befallenen Stockes bleibt verschont. Unentfaltet welken die am kranken Stock später angelegten Blüthen; der Blüthenertrag wird also durch den Pilz unmittelbar verringert. Aber auch die Zahl der anzulegenden Blüthenknospen wird davon abhängig sein, ob eine Althaeapflanze einer reichlichen assimilirenden Belaubung sich erfreut, oder an fortgesetztem Welken und Vertrocknen ihres vom Pilz fast aufgezehrten Laubes leidet. — Es wird sich also praktisch immerhin empfehlen, auf Mittel gegen solchen Pilzschaden bedacht zu sein.

Vermöchte man sämmtliche hiesige Ausgangspunkte für die frühjährliche Ausbreitung des Pilzes zu zerstören, so wird man doch ohne internationale Massregeln nicht hindern können, dass der Pilz alljährlich wieder einwandert. Man wird aber bei gutem Willen wenigstens dafür sicher zu sorgen im Stande sein, dass er nicht in unserer Gegend selbst im Frühjahr von Tausenden von Verbreitungsheerden ausgehe. Man achte nur im ersten Frühjahr an cultivirten und wilden Malvaceen auf etwaige pilzbefallene Theile und zerstöre deren Sporen, am besten durch Verbrennung.

Es wird niemals nöthig sein, die ganze befallene Pflanze zu opfern, wenn man frühzeitig sorgsam ihre befallenen Theile derart entfernt und zerstört, dass deren Sporenpusteln nicht zu keimen vermögen.

Herr Prof. **Klein**

gab folgende Mittheilung:

Ueber eine Classe binärer Formen.

Wenn man die Punkte einer Kugel als Bild der complexen Werthe einer Variabeln ansieht, so gewinnen die Punktsysteme,

---

des Winters von Zeit zu Zeit neue Uredosporenlager, von denen eine Ansteckung anderer Grasstöcke ausgehen kann. Und bei P. Malvacearum spielt ja die Teleutospore biologisch auch die Rolle der Uredo.

welche durch die Ecken der regulären Körper dargestellt sind, eine besondere algebraische Bedeutung; sie haben vor allen Dingen die Eigenschaft, dass sie, entsprechend den Bewegungen, welche einen regulären Körper mit sich zur Deckung bringen, eine endliche Anzahl linearer Transformationen in sich besitzen. Aber man kann leicht weitere Beispiele für Formen dieser Eigenschaft auffinden. Uebt man z. B. auf einen beliebigen Punkt der Kugel eben die Bewegungen, welche einen regulären Körper mit sich zur Deckung bringen, oder auch nur irgend eine in der Gesammtheit dieser Bewegungen enthaltene Untergruppe aus, so entsteht ein Punktsystem, welches durch eine Gleichung eben dieser Eigenschaft dargestellt sein wird. Dieselbe Eigenschaft besitzen ferner alle Gleichungen, deren Wurzelpunkte Aggregate verschiedener solcher Punktgruppen vorstellen. Es gehören endlich dahin alle Formen, deren Wurzelpunkte unter einander vertauscht werden, wenn man eine Rotation der Kugel durch einen bestimmten rationalen Theil von 2π eintreten lässt.

Ich habe mich nun zuvörderst überzeugt, wie in einer in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit über diesen Gegenstand weiter ausgeführt werden soll,

dass die genannten Beispiele überhaupt alle binären Formen erschöpfen, welche lineare Transformationen in sich zulassen,

und bin dann dazu übergegangen, deren Eigenschaften nach verschiedenen Richtungen hin zu studiren.

Die grosse Zahl der zu den genannten gehörenden Formen liefert dabei, wenn man von dem Gesichtspunkte, unter welchem sie hier betrachtet werden, und der daraus fliessenden Beweismethode absieht, Nichts eigentlich Neues. Es ist nur eine Form, bei welcher Dieses der Fall sein dürfte: diejenige Form 12. Grades, welche durch die Ecken eines Ikosaëder's vorgestellt wird*), oder auch, wenn man will: die durch die Ecken eines Pentagondodekaëder's definirte Form vom 20. Grade. Es sei gestattet, speciell für diese Form die von mir in der genannten Arbeit entwickelten Resultate anzuführen, insofern dieselben zugleich geeignet erscheinen, den Cha-

*) Man kann dieselbe in canonischer Form folgendermassen schreiben:

$$x_1^{12} - x_2^{12} + 11\, x_1^6\, x_2^6$$

rakter zu kennzeichnen, welcher den untersuchten Formen überhaupt zukommt.

Die Zahl der Bewegungen, welche ein Ikosaëder mit sich selbst zur Deckung bringen, ist 60. Uebt man diese Bewegungen auf einen beliebigen Kugelpunkt aus, so entstehen binäre Formen vom 60. Grade, hinsichtlich deren der Satz gilt:

dass sich dieselben aus je zweien unter ihnen linear und homogen zusammensetzen lassen.

Aber es finden sich unter ihnen mehrfach zählend drei Formen von niederem Grade: nämlich fünffach zählend das Ikosaëder selbst (f), dreifach zählend das zugehörige Pentagondodekaëder (H) und doppelt zählend eine Form 30. Grades, (T), die folgenderweise definirt ist. Wenn man durch je 2 Paar gegenüberstehender Ecken des Ikosaëder's eine Ebene legt, so kann man diese 15 Ebenen in fünf Tripel von zu einander rechtwinkeligen zusammenfassen. Die fünfzehn Kanten dieser fünf Tripel schneiden aus der Kugel die gemeinte Form 30. Grades aus. Zwischen f^5, H^3, T^2 besteht dann also eine homogene lineare Relation.

Durch die gewählte Bezeichnung soll bereits angedeutet sein, was man durch Betrachtung der linearen Transformationen von f in sich leicht beweist, dass H die Hesse'sche Form f ist, T deren Functionaldeterminante mit f. Bezeichnet man f symbolisch durch $a_x{}^{12}$, so verschwinden von den Formen zweiten Grades in den Coëfficienten, ausser H, alle anderen identisch, bis auf die Invariante $(ab)^{12}$ und die Form 12. Grades $\Pi = (ab)^6 a_x{}^6 . b_x{}^6$, von der man zeigt, dass sie bis auf einen Factor mit f identisch ist, so dass Π: f eine Invariante vorstellt.

Die Formen f, H, T und die Invariante Π:f bilden dann das vollständige Formensystem von f, d. h. diejenigen Formen, vermöge deren sich alle anderen Formen rational und ganz mit blosser Hülfe numerischer Factoren darstellen lassen.

Aber die bemerkenswerthesten Eigenschaften besitzt f hinsichtlich einer Auflösbarkeit. Aus den Anordnungsverhältnissen seiner Wurzelpunkte schliesst man mit Leichtigkeit:

Die algebraische Gruppe von f besteht nach Adjunction der numerischen Irrationalität $\sqrt{5}$ aus 60 Substitutionen, und f $=$ o ist dann durch eine Gleichung fünften Grades auflösbar, deren Differenzenproduct bekannt ist.

Nun kann man aber umgekehrt eine Gleichung der letzteren Art nach Kronecker auf eine Gleichung 12. Grades mit paarweise entgegensetzt gleichen Wurzeln zurückführen, welche durch einfache Transformation in die Gleichung sechsten Grades übergeht, die für den Multiplicator der elliptischen Functionen bei Transformation fünfter Ordnung derselben bekannt ist.

Und in der That ist die Gleichung des Ikosaëder's durch einfache rationale Transformation in die Kronecker'sche überzuführen und so die Auflösung der Ikosaëdergleichung durch elliptische Functionen zu bewerkstelligen.

Sodann legte Prof. Klein die folgende Arbeit vor:

Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades.

Von **Axel Harnack.**

Die Theorie der Curven höheren Grades hat seit den grundlegenden Arbeiten von Clebsch ein wesentliches Hülfsmittel durch die Parameterdarstellung der Curvenelemente vermittelst der Abel'schen Functionen gewonnen. In einem kürzlich erschienenen Aufsatze*): »Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen« hat Herr Professor Klein nachgewiesen, welch' anschaulich geometrischer Ausbildung diese Methode noch fähig ist, indem das binäre Gesammtgebiet einer Curve durch ein reelles ternäres Gebiet ersetzt wird. Durch Einführung dieser Art von Flächen wird der Uebergang von der einen, von Riemann gegebenen, Abbildung der algebraischen Function durch eine mehrblätterige, über die $x + iy$ ausgebreitete Fläche, zu der anderen geometrischen Repräsentation durch algebraische Curven in einfacher Weise hergestellt, und es ergeben sich weitere Probleme, die für die geometrischen Verhältnisse der Curve, sowie auch für die Theorie der mit ihr verbundenen Function gleich wesentlich sind. In einer demnächst zu veröffentlichenden

*) Math. Annalen B. VII. pag. 558.

grösseren Arbeit habe ich, von Herrn Professor Klein dazu aufgefordert, die durch eine Curve dritten Grades gebildete Fläche, welche also den Verlauf des elliptischen Integrales vollständig übersehen lässt, ausführlicher untersucht, und erlaube mir mit Bezugnahme auf die genannte Abhandlung einige der gewonnenen Resultate in Kürze hier mitzutheilen. Bevor ich jedoch auf die Erörterung der bei den Flächen in Frage kommenden Probleme eingehe, ist eine an sich bemerkenswerthe Betrachtung vorauszuschicken, die an dieser Stelle mehr nur als nothwendige Einleitung für das Verständniss des Folgenden in Betracht kommt.

Wenn man von einer zweitheiligen Curve 3. Classe, deren Modul folglich eine reelle Zahl ist, zunächst ausgehend die beiden reellen Züge durch die Werthe der Perioden des elliptischen Integrales ω und $\omega' i$ darstellt, so dass die Elemente des einen Zuges alle Werthe von 0 bis ω, die des anderen die nämlichen Werthe vermehrt um $\frac{\omega' i}{2}$ erhalten, so ist ein einfaches Criterium der 3 Arten correspondirender Paare durch die Werthdifferenzen $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega' i}{2}, \frac{\omega + \omega' i}{2}$ geliefert. Die Schnittpunkte je zweier correspondirender Tangenten bilden die 3 Curven 3. Ordnung, die als Hesse'sche Curven der gegebenen, aufgefasst als Cayley'scher, zugeordnet sind, und deren Lagenverhältnisse aus der Vertheilung der Argumentenwerthe, sowie aus dem Satze, dass conjugirt imaginäre Tangenten auch conjugirt imaginäre Parameter erhalten, in einfacher Weise sich übersehen lassen. Ueberträgt man die Argumente der beiden correspondirenden Tangenten auf ihren Schnittpunkt, so sind die Punkte der Hesse'schen Curven gleichfalls in eindeutiger Weise durch Parameter dargestellt, und von den beiden Perioden des elliptischen Integrales für diese Curven bleibt die eine gleich einer ursprünglichen, während die andere bezüglich die Werthe $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega' i}{2}, \frac{\omega + \omega' i}{2}$ erhält.

Mithin sind durch den Uebergang von der Cayley'schen zu den 3 Hesse'schen Curven und umgekehrt die 3 einfachsten nicht äquivalenten Typen der quadratischen Transformation des elliptischen Integrales geometrisch repräsentirt.

Mit diesem Uebergange gewinnt man zugleich die Möglichkeit, die Verhältnisse der eintheiligen Curven, deren Modul eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage gleich 1 ist, aus denen der zweitheiligen abzuleiten, da die eine Hesse'sche Curve mit der reellen Periode ω und der complexen $\frac{\omega + \omega' i}{2}$ zu dieser Gattung von Curven gehört.

Betrachtet man nun die durch eine zweitheilige Curve gebildete Ringfläche, dadurch entstanden, dass die reellen Tangenten durch ihre Berührungspunkte, die imaginären durch ihre reellen Träger repräsentirt, und diesen Punkten die Argumente der ihnen zugeordneten Tangenten beigelegt werden, so gruppiren sich sämmtliche Elemente zu den beiden Systemen von Meridian- und Breitencurven, welche die einfachsten Formen der beiden auf der Riemann'schen Fläche zu ziehenden Querschnitte begründen. Die ersteren werden durch die Tangenten des dreispitzigen Zuges der Curve gebildet, indem auf jeder dieser Linien diejenigen Punkte zusammengefasst sind, für welche der reelle Theil der Argumente constant ist, während in der zweiten Gruppe von Curven jede die Trägerin irgend eines zwischen 0 und $\omega' i$ gelegenen constanten Werthes ist. In diesem Sinne gehören die beiden reellen Curvenzüge zu dem Systeme der Breitencurven, da auf dem einen nur reelle Parameterwerthe vertheilt sind, auf dem anderen der constante Werth $\frac{\omega' i}{2}$ haftet. Desgleichen bildet das Oval derjenigen Hesse'schen Curve, welche durch den Schnitt zweier Tangenten von der Form $u + \frac{\omega' i}{4}$ und $u - \frac{\omega' i}{4}$ geliefert wird, diejenige Breitencurve, längs welcher sämmtlichen Punkten das Argumen $u + \frac{\omega' i}{4}$ zukommt, wenn u alle Werthe von 0 bis ω annimmt.

Um allgemein die Frage nach der Art der vorliegenden Curven zu beantworten, hat man, wenn die Coordinaten der Tangenten der gegebenen Curve durch doppelt periodische Functionen dargestellt sind, den Schnitt zweier Tangenten mit den Argumenten $u + iv$, und $u - iv$ zu bilden, und diejenigen Punkte zusammenzufassen, denen bei variabelem Werthe von u derselbe zwischen 0 und $\omega' i$ gelegene Werth von vi angehört. Das auf diese Weise mit Zugrundelegung einer einfachen canonischen

Form gewonnene Gleichungssystem führt alsdann zu folgenden Resultaten.

Je zwei Breitencurven, die von dem genannten Ovale der Hesse'schen Curve gleichen Abstand haben, (den Abstand gemessen durch die Differenz der imaginären Werthe vi und $\frac{\omega' i}{2}$ — vi von $\frac{\omega' i}{4}$) bilden das vollständige reelle Gebiet einer algebraischen Curve, deren Ordnung gleich 6 und deren Geschlecht $p = 1$ ist. Diese Curven sind untereinander und auf die ursprüngliche sämmtlich eindeutig bezogen, und mithin ist auch der Modul für alle Curven der gleiche. Nur die eine Hesse'sche Curve tritt in diesem Systeme doppelt gezählt als Curve 6. Ordnung auf, und durch dieses Zusammenfallen wird es geometrisch evident, dass dieselbe, einzweideutig auf die gegebene Classencurve bezogen, einen anderen Modul als das übrige Curvensystem erhält, und ausserhalb der Ringfläche noch ein weiteres reelles Gebiet besitzen kann, wie solches in der That der Fall ist.

Die Bestimmung der Singularitäten dieser Curven ergiebt im Allgemeinen 9 einfache Doppelpunkte, von denen 6 völlig imaginär, 3 dagegen isolirte reelle Punkte sind, die sämmtlich auf den Rückkehrtangenten der K_3 liegen, so zwar, dass die 3 letzteren Punkte noch in die Ringfläche hineinfallen. Für das zusammengehörige Breitencurvenpaar, längs welches $vi = \pm \frac{\omega' i}{6}$ und $\pm \frac{\omega' i}{3}$ ist, rücken diese Punkte auf den zweiten reellen Zug, und bilden also mit je 2 imaginären Doppelpunkten zusammen drei dreifache Punkte der Curve, die zugleich diejenigen Punkte sind, in denen jede der reellen Rückkehrtangenten von zwei conjugirt imaginären geschnitten wird, das heisst also die reellen Träger der imaginären Rückkehrtangenten der ursprünglichen Curve.

An diese allgemeine Erörterung der Natur der Breitencurven schliesst sich eine geometrische Repräsentation für die Theorie der eindeutigen Transformationen der Curve in sich selbst. Denn die gesammte Gruppe dieser Transformationen ist dadurch erschöpft, dass einem Punkte mit dem Argumente u der Punkt $\pm u + C$ zugeordnet wird, wobei C eine Constante von der Form $\frac{\omega}{a} + \frac{\omega' i}{a'}$ bedeutet. Mithin gehen durch eine beliebige eindeutige Transformation der Curve in sich selbst die reellen Elemente im Allgemeinen in imaginäre über, deren reellen Träger jedesmal auf einer algebraischen Curve 6. Ordnung gelegen sind, während umgekehrt die eine Gruppe derjenigen imaginären Elemente, die dieser Curve 6. Ordnung angehören, in die reellen übergeführt werden. Das System der Breitencurven wird durch diese Art von Transformationen in sich transformirt. Bei denjenigen imaginären Transformationen, welche zugleich eine lineare Transformation der ganzen Ebene bilden, gehen die reellen Elemente in diejenigen über, welche durch das oben genannte Breitencurvenpaar $\frac{\omega' i}{6}$, $\frac{\omega' i}{3}$ repräsentirt sind. Diese Curve lässt sich daher in besonders einfacher Weise mit Zugrundelegung eines Wendepunktdreiseites algebraisch darstellen; geometrisch wird sie dadurch construirt, dass man für die Tangenten der gegebenen K_3 die Pole in Bezug auf das reelle Dreiseit bestimmt.

Ueberhaupt ist die geometrische Construction aller Breitencurven für eine durch die Gesammtheit ihrer Tangenten wirklich vorliegend gedachte K_3 ausführbar, indem der für dieselben wesentliche Satz besteht: Das Doppelverhältniss der 4 reellen Schnittpunkte jeder Curve mit den Tangenten am dreispitzigen Zuge der ursprünglichen Curve ist constant. Und zwar sind die auf diesen Tangenten gelegenen 4 reellen Schnittpunkte eines zusammengehörigen Breitencurvenpaares so vertheilt, dass das Doppelverhältniss irgend eines von ihnen mit einem beliebigen Tripel, ausgewählt aus den 4 der Fundamentalcurve angehörigen Punkten, auch auf jeder anderen Tangente bei entsprechender Anordnung das gleiche bleibt. Des weiteren lassen sich diese Punkte paarweise so combiniren, dass sie harmonisch zu den beiden Schnittpunkten des oben genannten Ovales gelegen sind. Denkt man sich nunmehr die Ringfläche mit einem Netze von Breiten- und Meridiancurven in hinlänglicher Zahl überdeckt, so ist damit die Möglichkeit geboten, mit beliebiger Annäherung das Schnittpunktsystem einer Curve nten Grades mit der vorliegenden aus 3n—1 gegebenen Parameterwerthen auch geometrisch auszuführen.

Diese Eigenschaft weiset ferner darauf hin, dass die Breitencurven den Theil eines Curvensystemes bilden, welches in algebraischer Vollständigkeit dadurch erhalten werden kann, dass man auf jeder Tangente zu der binären biquadratischen Form, gebildet durch die Schnittpunkte der K_3, das Büschel $\varkappa F + \lambda H$ construirt; die 3 Paare correspondirender Punkte der 3 Hesse'schen Curven repräsentiren die Form T dieses Büschels.

Für die Breiten- und Meridiancurven besteht schliesslich noch die Relation, dass die von jedem Punkte der Ringfläche ausgehenden imaginären Tangenten harmonisch zu den Richtungen dieser Curven gelegen sind. Begründet man demnach auf der Ringfläche eine Massbestimmung, in welcher die zu den Kreispunkten gehenden Linien durch das imaginäre Tangentenpaar ersetzt sind, so kann in Bezug auf dieselbe die Verwandtschaft, zwischen der Abbildung der unter der Quadratwurzel im elliptischen Integrale stehenden Function auf einer gewöhnlichen Riemann'schen Fläche und der Repräsentation des bis zu dem Punkte hingeleiteten Integrales auf der Ringfläche, eine isogonale genannt werden. Zugleich ergiebt sich damit der Satz, dass die behandelten Curven ein System von Berührungscurven der vorliegenden K_3 bilden, da in jedem Schnittpunkte die beiden imaginären Tangenten und also auch die Tangente der C_6 zusammenfallen. Das algebraisch vollständige Curvensystem wird ferner diesem Satze zu Folge durch eine Differentialgleichung auch so dargestellt werden können, dass man zu der binären cubischen Form, gebildet durch die von jedem Punkte der Ebene an die K_3 ausgehenden Tangenten, die Form Q construirt. Durch diese sind alsdann die Fortschreitungsrichtungen der 3 durch jeden Punkt hindurchgehenden C_6 gegeben.

Wie oben erwähnt ist es nicht schwierig, alle diese Theoreme auch auf die eintheiligen Curven zu übertragen, deren Fläche hinsichtlich ihrer Erstreckung in's Unendliche als ein auf die Ebene flach ausgebreitetes Hyperboloid gedacht werden kann. Die Perioden solch' einer Curve sind durch ω und $\frac{\omega + \omega' i}{2}$ vorgestellt. Definirt man als Meridiancurve auch hier dasjenige Gebiet, auf welchem sämmtliche Punkte den nämlichen reellen Theil des Argumentes besitzen, als Breitencurve das Punktsystem, für welches der imaginäre Theil constant ist, so ist der einzige wesentliche Unterschied dieses Falles von dem vorigen dadurch gekennzeichnet, dass sämmtliche Breitencurven, als vollständige algebraische Gebilde gefasst, eintheilige Curven 6ten Grades sind, die aber gleichfalls im Allgemeinen 3 reelle isolirte Punkte besitzen. Der unpaare Zug der einen, einzig und allein im Reellen vorhandenen Hesse'schen Curve, die der ursprünglichen als Cayley'scher zugeordnet ist, bildet diejenige Breitencurve, welche gewissermassen in der Mitte liegend, dem oben discutirten Ovale entspricht. Die geometrische Construction erfolgt in einfacher Weise aus der vorliegend vorausgesetzten K_3 nach dem Satze, dass auf jeder reellen Tangente der ursprünglichen K_3 die beiden dieser Curve angehörigen Punkte und das auf einer Breitencurve gelegene Punktepaar ein constantes Doppelverhältniss bestimmen. Dabei bleibt dann auch die andere Relation bestehen, dass jedes dieser Punktepaare harmonisch zu den beiden mit ihm auf derselben Tangente befindlichen correspondirenden Punkten der Hesse'schen Curve liegt, von denen hier der eine dem unpaaren, der andere dem paaren Zuge angehört. Dem entsprechend wird die Ausführung der geometrischen Construction sich in diesem Falle am einfachsten so gestalten, dass man aus den als gegeben vorausgesetzten Tangenten die reelle Hesse'sche Curve darstellt, und auf allen Tangenten aus den auf diese Weise bestimmten 4 Punkten, von denen 2 der Cayley'schen, 2 der Hesse'schen Curve zugehören, entsprechende Tripel bildet, zu welchem alsdann Punkte mit gleichem Doppelverhältniss construirt werden. Der zweite auf der nämlichen Tangente befindliche Punkt einer Breitencurve wird nach dem Satze von der harmonischen Lage aus dem erst gefundenen erhalten. Die oben aufgestellten, zum algebraisch vollständigen Curvensysteme hinleitendem Theoreme behalten selbstverständlich auch hier ihre Gültigkeit, und führen zu weiteren reellen Curven, die auch den innerhalb der gegebenen Curve gelegenen Raum dreifach mit reellen eintheiligen C_6 überdecken; wie denn auch bei der zweitheiligen Curve das Innere des dreispitzigen Zuges und das Aeussere des Oval's dreifach von den reellen Curven des algebraischen Systemes überdeckt sind.

Sitzung vom 27. Juli 1874.

Herr Professor **v. Gorup-Besanez**

berichtet über einige in der letzten Zeit in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten und zwar:

1) Ueber Ratanhin; 2) über das Auftreten von Leucin im Keimprocesse der Wicken und seine Bedeutung; 3) Ueber das Vorkommen von Caesium und Rubidium in allen Stassfurther Abraumsalzen und über das noch nicht beobachtete von Thallium im Carnallit; 4) Ueber einige Aschenanalysen (von Lithospermum off., Bambusa arundinacea und Calamus Rotang). Die Asche des spanischen Rohrs kann nach den Resultaten der Analyse als ein Kalk-Magnesiasilicat der Formel

$$MgO, CaO, 4\,SiO_2 = \left.\begin{matrix} Mg'' \\ Ca'' \\ 4\,Si^{IV} \end{matrix}\right\} O''_{10}$$

betrachtet werden. Die übrigen Bestandtheile betragen zusammen nur $2{,}_{59}$ pCt.

Endlich 5) über eine Ascitesflüssigkeit von einem an linealer Leukämie Leidenden, welche ausserordentlich fettreich, ganz das Ansehen der Milch besass, beim Stehen eine Rahmschicht abschied, und neben Serumalbumin auch Paralbumin und wahrscheinlich auch Pseudoglutin enthielt.

Der Vortragende behält sich ausführlichere Mittheilung dieser Arbeiten vor. Derselbe zeigte zum Schlusse eine Reihe im Laboratorium angefertigter seltener organischer Präparate vor.

Herr Prof. **Selenka**

theilte hierauf die Ergebnisse seiner Untersuchungen über die eigenthümlichen Anhänge am Schwanzende von Echiurus mit, welche mit den von Greeff kürzlich veröffentlichten Resultaten völlig übereinstimmen.

Darnach sprach

Herr Professor Dr. **Hilger** über

1) Selenigsaure Magnesia.

Zur Ergänzung einer früheren Mittheilung über den Nachweis der Selenigen-Säure mittelst Magnesiasalzen und Ammon sind die Verhältnisse dieser Fällung von Herrn Dr. v. Gerichten näher studirt worden.

Der beim Vermischen von Lösungen Seleniger-Säure mit Ammon und Magnesiasalzen bei Gegenwart von überschüssigem Chlorammonium entstehende Niederschlag stimmt in seiner Krystallform vollständig mit der phosphorsauren Ammonmagnesia überein. Seine Zusammensetzung gestaltet sich folgendermassen:

	Gefunden:		Berechnet:
	I.	II.	auf SeO_3Mg+7H_2O
SeO_2 =	40,60 ..	40,76	40,28
MgO =	13,91 ..	14,41	14,38
$(NH_4)_2O$ =	— ..	0,46	—
H_2O	—	—	45,32.

Beide Analysen sprechen entschieden für die Formel:

$$SeO_3Mg, 7H_2O.$$

Im ersten Falle wurde die Selenige Säure als Se bestimmt, im 2. Falle als SeS_2. Auffallend ist es, dass der Niederschlag stets Spuren von Ammoniak enthält, auch wenn derselbe reichlich ausgewaschen war. Trotzdem kann aber nach den Resultaten das Ammon nicht zur Constitution gehörig betrachtet werden. Diese, hier vorliegende Verbindung ist in Wasser wenig löslich, dagegen leicht löslich in verdünnten Mineralsäuren, sowie Essigsäure.

Beim Glühen lässt sich das Selen nicht vollständig beseitigen; es bleibt stets eine Selenige und Selensäure enthaltende Magnesiaverbindung zurück. (19,5% Selenige-Säure haltige Magnesia wurden gefunden). Beim Glühen in Glasgefässen wird das Glas sehr energisch angegriffen. Berzelius hat früher schon eine Selenigsaure Magnesia durch Neutralisation von Seleniger Säure mit Kohlensaurer Magnesia beschrieben von der Formel:

$$MgSeO_3, 3H_2O;$$

auch diese Verbindung verhält sich nach Berzelius' Angaben beim Glühen in der hier mitgetheilten Weise.

Für die quantitative Bestimmung der Selenigen-Säure ist diese Verbindung werthlos.

Später Ausführlicheres über Tellurigsaure Magnesia.

2) Die Anwendung des Spectroskopes bei der Prüfung der Arzneistoffe sowie der Nahrungs- und Genussmittel.

Redner theilte mit, dass eine ausgedehnte Versuchsreihe in dieser Richtung theils zum Abschlusse gekommen ist, theils noch in Untersuchung sich befindet und demonstrirt an vorgelegten Objekten die Prüfung der Reinheit fetter Oele mit Hilfe des Spectroskopes, gegründet auf die Absorptionserscheinung des Chlorophyllfarbstoffes. Auch bezüglich der Erkennung von Fuchsin in Rothweinen, officinellen Fruchtsäften etc. werden Versuche vorgeführt. Ausführliches hierüber erfolgt nach vollständigem Abschlusse der Versuche.

Hierauf sprach

Herr Prof. **Rosenthal**

Ueber galvanoskopische Erscheinungen bei der Bewegung der Blattstiele von Mimosa pudica.

Eine ausführliche Mittheilung behielt sich der Vortragende für eine spätere Sitzung vor.