Über die Krümmung ebener Bogen endlicher Ordnung.

Von Otto Haupt in Erlangen.

1. Bekanntlich besitzt jede (stetig differenzierbare) konvexe Funktion $f(x)$ fast überall eine endliche zweite Ableitung[1]). Für ein kartesisches Bild $\mathfrak{B}$ von $y=f(x)$ bedeutet dies (da $\mathfrak{B}$ rektifizierbar ist[2]): Überall auf $\mathfrak{B}$ mit Ausnahme einer Punktmenge der Länge Null ist eine endliche Krümmung vorhanden. Dabei sei die Krümmung erklärt mit Hilfe des Schnittpunktes „unendlich benachbarter" Normalen[3]). Da jeder Bogen (zweiter

1) Dies gilt (bei geeigneter Definition der zweiten Ableitung) sogar ohne die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit. (Eine differenzierbare konvexe Funktion ist übrigens von selbst stetig differenzierbar.) Vgl. z. B. Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung, Berlin 1938, Bd. 2, S. 95.

2) Unter der *Länge* einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ auf dem rektifizierbaren Bogen $\mathfrak{A}$ wird das mittelst der Bogenlänge auf $\mathfrak{A}$ definierte Lebesguesche Maß von $\mathfrak{M}$ verstanden. Jeder Bogen $\mathfrak{C}$ von beschränkter (linearer) Ordnung[4]) ist rektifizierbar. A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), S. 67 ff. Einen Beweis dieses Marchaudschen Satzes findet man auch in G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932, S. 194. Vgl. auch W. Maak, Integralgeometrie 27: Über stetige Kurven. Abh. math. Seminar Hansische Univ. 12 (1938), S. 163 ff.

3) Die Existenz dieser Krümmung ist gleichbedeutend mit der Existenz der zweiten Ableitung. Übrigens ist für *konvexe* Funktionen die Existenz der zweiten (rechten bzw. linken) Ableitung gleichbedeutend sogar mit der (eindeutigen) Existenz des (rechten bzw. linken) Tangentialschmiegkreises (vgl. oben im Text, Seite 220, Zusatz); vgl. H. Busemann und W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta math. 66 (1936), S. 7 und die dort zitierte Arbeit von B. Jessen, Om konvekse Kurvers Krumning, Mat. Tidskr. B, 1929. Ich benütze die Gelegenheit um ein Versehen zu berichtigen, das sich in den Text von Haupt-Aumann, a. a. O.[1]), Bd. 2, S. 67 eingeschlichen hat und das ich leider erst vor kurzem bemerkte. Es wird nämlich dort (im ersten Satze) fälschlicherweise behauptet, daß die Existenz eines (eindeutig bestimmten) Tangentialschmiegkreises (siehe oben

und) dritter (linearer) Ordnung[4]) (in der euklidischen Ebene) stückweise konvex ist[5]), so gilt allgemeiner:

Jeder ebene Bogen von höchstens dritter linearer Ordnung (welcher überall mit einer stetigen Tangente versehen ist) besitzt mit Ausnahme einer Punktmenge der Länge Null überall eine endliche Krümmung.

Es erhebt sich so die von den Herren Busemann und Feller in einem anderen Zusammenhange[6]) aufgeworfene Frage, ob etwas entsprechendes auch für ebene Bogen höherer, also mindestens vierter linearer Ordnung gilt. Zur Beantwortung dieser Frage konstruieren wir nachstehend einen ebenen Bogen *vierter* Ordnung (mit stetiger Tangente), welcher in einer Menge von positiver[7]) Länge *keine* Krümmung im oben erklärten Sinne besitzt.

Zusatz: Übrigens kann unser Beispiel so eingerichtet werden, daß mindestens in den Punkten einer abzählbaren Menge auch keine Krümmung im Sinne der Existenz des

---

im Text, Seite 220, Zusatz) in einem Punkte $P_0 = (x = x_0,\ y_0 = f(x_0))$ des Bildes $\mathfrak{C}$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ gleichbedeutend sei mit der Existenz von $f''(x_0)$. Daß dies falsch ist, liegt auf der Hand (Gegenbeispiel: $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$) und war mir auch bei Abfassung unseres Buches aus den vorgenannten Arbeiten bekannt. Wegen des, vor allem von J. Hjelmslev geklärten Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Krümmungsdefinitionen verweisen wir auf die oben genannte Arbeit von Jessen.

4) Ein ebener Bogen ist von endlicher linearer Ordnung bzw. von der beschränkten (linearen) Ordnung k, wenn jede Gerade den Bogen in nur endlich vielen bzw. in maximal k Punkten trifft.

5) Haupt, Zur Juel'schen Theorie der reellen, ebenen Kurven 4. Ordnung, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad d. Wiss. math.-naturwiss. Abt. Jahrg., 1925, insbes. S. 2; vgl. auch Haupt, Über ebene Bogen und Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne, Sitz.-Ber. d. bayr. Akad. d. Wiss. math.-naturw. Abt., Jahrg 1935, S. 37 ff., sowie vorher: Bemerkung über Elementarkurven 3. Ordnung, Math. Ann. 92 (1924), 88 ff., ferner die Angabe in: Zur Theorie der Realitätsordnungen, Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933) Seite 3, Fußnote 15.

6) H. Busemann und W. Feller, On surfaces of finite class, Bull. Amer. math. Soc. 1939.

7) Genauer in einer perfekten, nirgends dichten Menge, deren Länge beliebig wenig von der Länge des ganzen Bogens verschieden sein kann.

Tangentialschmiegkreises, d. h. des Limes der Kreise durch einen festen Bogenpunkt mit fester Tangente und durch einen unendlich benachbarten Bogenpunkt, vorhanden ist; ob dies auch in den Punkten einer Menge von positiver Länge möglich ist, ist noch nicht geklärt.

Anmerkung: Das nachstehend angegebene Verfahren gestattet übrigens, wie in anderem Zusammenhange gezeigt werden soll, die Konstruktion von ebenen Bogen beliebig vorgegebener linearer Ordnung k, mit einer Menge positiver Länge von Punkten der gleichen Ordnung k.

2. Es genügt, eine stetig differenzierbare (eindeutige, reelle) Funktion $f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, anzugeben, welche in einer Teilmenge $\mathfrak{Q}$ positiven Maßes von $[a, b]$ keine zweite Ableitung besitzt und deren kartesisches Bild von vierter Ordnung ist. Die Teilmenge $\mathfrak{Q}$ von $[a, b]$ soll übrigens perfekt und nirgends dicht, also Komplement einer Summe abzählbar vieler offener Intervalle sein und in bekannter Art schrittweise erzeugt werden, indem man etwa aus jedem abgeschlossenen, Punkte von $\mathfrak{Q}$ enthaltenden, Intervall, welches beim betrachteten Schritte vorhanden ist, sogen. *Rest*intervall, ein offenes (etwa mit dem Restintervall konzentrisches) Intervall, sogen. *Lücken*intervall, herausnimmt. (Beim nullten Schritte ist $[a, b]$ einziges Restintervall.)

3. Wir gehen aus von der Funktion $y = F(x) = \left|\sqrt{1 - x^2}\right|$, $a \leqq x \leqq b$ mit $-a = b = 2^{-1}$, bzw. von ihrem kartesischen Bild, dem Kreisbogen $\mathfrak{K}$; der Menge $\mathfrak{Q}$ bzw. den Rest- und Lückenintervallen von $\mathfrak{Q}$ entsprechen dann eine auf $\mathfrak{K}$ nirgends dichte perfekte Menge $\mathfrak{P}$ von positiver Länge bzw. Rest- und Lückenbogen auf $\mathfrak{K}$. Es sei nun $\mathfrak{R}$ ein nach dem n-ten Schritte vorhandener Restbogen und $\mathfrak{L}$ der beim $(n+1)$-ten Schritte aus $\mathfrak{R}$ zu entfernende Lückenbogen. Die Endpunkte von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{L}$ seien A', B' bzw. A, B und zwar *geordnet im Sinne wachsender* x. Wir ersetzen $\mathfrak{L}$ durch einen Bogen $\mathfrak{N}$, welcher folgendermaßen konstruiert wird. Es sei $\mathfrak{S}$ das beschränkte, von der Sehne $\overline{AB}$ und von $\mathfrak{L}$ begrenzte, konvexe Gebiet. Wir bezeichnen $\mathfrak{S}$, oder auch $\overline{\mathfrak{S}}$, kurz als (das zu $\mathfrak{L}$ gehörige) *Lückensegment*. Durch den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ werde die Parallele $\mathfrak{p}$ zur Tangente $\mathfrak{t}'_b$ an $\mathfrak{K}$ in B' gelegt; der

Schnittpunkt von $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{L}$ sei S. Die Verbindungsgerade von A mit dem Mittelpunkt M' der Strecke $\overline{MS}$ treffe $\mathfrak{L}$ in S'. Die Summe der Teilbogen $\widehat{AS}$ und $\widehat{S'B}$ von $\mathfrak{K}$ zusammen mit den Strecken $\overline{SM'}$, $\overline{M'S'}$ liefert nach passender („hinreichend kleiner") Abrundung[8]) der (konvexen) Ecken in S, M' und S' einen abgeschlossenen Bogen $\mathfrak{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

3. 1. Es enthält $\mathfrak{N}$ keine Teilstrecken und ist ein einfacher Bogen.

3. 2. Es besitzt $\mathfrak{N}$ stetige Tangente.

3. 3. Die Richtungen der Tangenten von $\mathfrak{N}$ durchlaufen genau diejenigen der Tangenten an den (dem Restbogen $\mathfrak{R}$ eindeutig zugeordneten) Kreisbogen $\mathfrak{R}^* = \widehat{AB'}$, der also nach vorne[9]) hin über $\mathfrak{L}$ hinausgreift.

3. 4. Es ist $\mathfrak{N}$ relativ einfach bezüglich eines jeden Punktes des hinter[9]) $\mathfrak{L}$ liegenden Kreisbogens (dessen [vorderer] Endpunkt also A ist).

Bew.: Jeder hinter A liegende Punkt C von $\mathfrak{K}$ liegt im Innern desjenigen, von den Trägergeraden der Strecken $\overline{M'S}$ und $\overline{M'S'}$ gebildeten Winkelraumes, in dessen Begrenzung weder $\overline{M'S}$ noch $\overline{M'S'}$ enthalten ist. Von jedem C aus erscheinen ferner (wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$) die Teilbogen sowohl $\widehat{AS}$ als $\widehat{S'B}$ von $\mathfrak{K}$ einfach. Da auch die Summe $\widehat{AS} + \overline{SM'} + \overline{M'S'} + \widehat{S'B}$ in keinem ihrer Punkte T von der Geraden CT gestützt wird, ist sie ebenfalls relativ einfach bezüglich C; und dies gilt auch für den durch hinreichend kleine Abrundung daraus entstehenden Bogen $\mathfrak{N}$, der übrigens sogar als einfach bezüglich A gewählt werden kann. — Der Kürze halber wollen wir $\mathfrak{N}$ den *zu $\mathfrak{L}$ gehörigen* Normbogen nennen. Man beachte, daß $\mathfrak{N}$ ganz im Lückensegment $\overline{\mathfrak{S}}$ verläuft.

---

8) Vgl. C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og math. Afd., 7. R., XI. 2 (1914), S. 123 und 129; auch Haupt, Über ordnungsfeste Annäherung ebener Bogen, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, Jahrg. 1934, 7. Abh.

9) „Vor" bzw. „hinter" einem Punkte $P_0 = (x_0, F(x_0))$ auf $\mathfrak{K}$ liegen diejenigen Punkte (von $\mathfrak{K}$), deren zugehörige x größer bzw. kleiner sind als x_0.

3. 5. Schließlich ist $\mathfrak{N}$ von der linearen Ordnung Vier, (d. h. bezüglich aller Geraden) und zwar haben höchstens solche Geraden vier Punkte mit $\mathfrak{N}$ gemeinsam, welche $\overline{\mathfrak{L}}$ in zwei Punkten treffen, also insbesondere keine Punkte mit irgend einem anderen Lückensegmente oder mit $(\mathfrak{K}-\overline{\mathfrak{L}})$ gemeinsam haben.

Bew.: 1. Jede $\mathfrak{N}$ treffende Gerade $\mathfrak{g}$ muß Punkte mit $\overline{\mathfrak{S}}$ und mit $\overline{\mathfrak{L}}$ gemeinsam haben. Die Anzahl der gemeinsamen Punkte (Stützpunkte doppelt, Wendepunkte dreifach gezählt) von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{N}$ ist gerade oder ungerade, je nachdem die Anzahl der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{g}$ mit $\overline{\mathfrak{L}}$ gerade oder ungerade ist. Ist $\mathfrak{g}$ fremd zu $\overline{\mathfrak{L}}$, so auch zu $\overline{\mathfrak{S}}$ und zu $\mathfrak{N}$. Daraus folgt der zweite Teil der Beh.

2. Zu zeigen ist noch, daß $\mathfrak{N}$ mit keiner Geraden mehr als vier Punkte gemeinsam hat und mit mindestens einer Geraden auch genau vier Punkte. Nun ist dies jedenfalls richtig für $\widehat{AS} + \overline{SM'} + \overline{M'S'} + \widehat{S'B}$ (wenn man von den Trägergeraden von $\overline{SM'}$ und $\overline{M'S'}$ absieht). Da durch die von uns vorgenommene Abrundung die Ordnung nicht geändert wird[8]), folgt die Beh.

4. Wir konstruieren jetzt im Verlaufe der Bildung von $\mathfrak{P}$ zu jedem der auftretenden Lückenbogen der Reihe nach den zugehörigen Normbogen. Die abgeschlossene Hülle der Summe der so zu erhaltenden, abzählbar vielen Normbogen ist ein *einfacher Bogen* $\mathfrak{B}$, *in welchem jedenfalls* $\mathfrak{P}$ *enthalten ist.* Der auf $\mathfrak{K}$ gewählten (wachsenden x entsprechenden) Orientierung entspricht genau eine Orientierung von $\mathfrak{B}$ derart, daß auf $\mathfrak{K}$ die Punkte von $\mathfrak{P}$ und die Lückenbogen die gleiche Anordnung besitzen wie auf $\mathfrak{B}$ die Punkte von $\mathfrak{P}$ und die (entsprechenden) Normbogen. Jeder vorderen bzw. hinteren Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes P von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{B}$ entspricht, falls $(\mathfrak{U}-P)\,\mathfrak{P}$ nicht leer ist, eindeutig diejenige vordere bzw. hintere Umgebung von P auf $\mathfrak{K}$, welche besteht aus den vor bzw. hinter P gelegenen inneren Punkten des größten, P enthaltenden und von einem Punkt von $\overline{\mathfrak{U}}\,\mathfrak{P}$ begrenzten, Restbogens $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\,(\mathfrak{U})$.

4. 1. Auf $\mathfrak{K}$ sowohl wie auf $\mathfrak{B}$ gilt ferner für die Punkte von $\mathfrak{P}$ die folgende Klassifikation: I. Klasse: *Extrempunkte,*

d. i. alle diejenigen Punkte P von $\mathfrak{P}$, welche eine zu $(\mathfrak{P}-P)$ fremde einseitige Umgebung auf $\mathfrak{B}$ oder, was das gleiche, auf $\mathfrak{K}$ besitzen; diese (abzählbar vielen) Extrempunkte, und nur sie sind die Endpuukte der in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Normbogen, sowie *einseitige* Häufungspunkte von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{B}$ bzw. auf $\mathfrak{K}$. II. Klasse: Die übrigen Punkte von $\mathfrak{P}$. Sie und nur sie sind beiderseitige Häufungspunkte von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{B}$ bzw. auf $\mathfrak{K}$. Des Näheren gibt es zu jedem solchen Punkte Q eine auf Q sich zusammenziehende Folge von Umgebungen $\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{U}_\nu(Q)$ auf $\mathfrak{B}$, wobei jedem der $\mathfrak{U}_\nu$ ein Restbogen $\mathfrak{R}_\nu$ auf $\mathfrak{K}$ entspricht und wobei Q Häufungspunkt ist *von* (unendlich vielen, paarweise fremden) *Normbogen* $\mathfrak{N}_\nu$, die sämtlich *hinter* Q liegen und folgende Eigenschaft haben: $\mathfrak{N}_\nu$ wird erhalten durch Ersetzung (gemäß Nr. 3) desjenigen, in $\mathfrak{R}_\nu$ enthaltenen (eindeutig bestimmten) Lückenbogens, welcher bei dem unmittelbar auf das Auftreten von $\mathfrak{R}_\nu$ erfolgenden Schritte in der Konstruktion von $\mathfrak{P}$ auftritt. Daher durchlaufen die Tangentenrichtungen an $\mathfrak{N}_\nu$ alle Tangentenrichtungen an dem, dem $\mathfrak{N}_\nu$ zugeordneten $\mathfrak{N}_\nu^*$ (vgl. 3. 3.). Da nun Q, weil auf $\mathfrak{K}\mathfrak{U}_\nu$ gelegen, in $\mathfrak{R}_\nu$ enthalten ist und da Q *vor* $\mathfrak{N}_\nu$ liegt, so gibt es im Innern eines jeden $\mathfrak{N}_\nu$ einen Punkt, in welchem die Tangente an $\mathfrak{N}_\nu$ parallel ist zur Kreistangente in Q.*

4. 2. *Es ist $\mathfrak{B}$ von vierter Ordnung bezüglich aller Geraden der Ebene.*

Bew.: Da $\mathfrak{K}$ konvex ist und folglich jede Gerade höchstens zwei der (paarweise fremden) Lückensegmente trifft, da ferner jeder in $\mathfrak{B}$ enthaltene Normbogen ganz in einem Lückensegment verläuft und da $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{K}$ liegt, so bestehen für jede Gerade $\mathfrak{g}$ nur folgende drei Möglichkeiten: I. Es enthält $\mathfrak{g}$ *keine* Punkte von $\mathfrak{P}$, trifft also $\mathfrak{B}$ nur in inneren Punkten höchstens zweier Normbogen. II. Es enthält $\mathfrak{g}$ genau *einen* Punkt von $\mathfrak{P}$ und trifft daher $\mathfrak{B}$ außerdem nur in inneren Punkten höchstens eines Normbogens. III. Es enthält $\mathfrak{g}$ genau *zwei* Punkte von $\mathfrak{P}$, also keine inneren Punkte von Normbogen. — Im Falle III. hat $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{B}$ genau zwei Punkte gemeinsam. Im Falle II. und falls $\mathfrak{g}$ wirklich einen Normbogen trifft, hat $\mathfrak{g}$ mit demjenigen Lückenbogen, welcher dem fraglichen Normbogen entspricht, genau einen Punkt gemeinsam, trifft also (Nr. 3. 5.) den Normbogen in höchstens drei Punkten und folglich $\mathfrak{B}$ in höchstens vier. Im Falle I. schließlich braucht man, da jeder Normbogen von vierter Ordnung ist (vgl. Nr. 3. 5.) nur noch die Möglichkeit näher zu betrachten, daß $\mathfrak{g}$ genau zwei Normbogen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ trifft. Liegt dabei $\mathfrak{N}_1$ auf $\mathfrak{B}$ *hinter* $\mathfrak{N}_2$, so wird $\mathfrak{N}_2$ von $\mathfrak{g}$ in nur einem Punkte getroffen (Nr. 3. 4.), weil $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{K}$ einen, hinter dem zu $\mathfrak{N}_2$ gehörigen Lückenbogen liegenden Punkt gemeinsam hat, nämlich einen Punkt des dem $\mathfrak{N}_1$ entsprechenden Lückenbogens. Da andererseits $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{N}_1$ höchstens drei Punkte gemeinsam hat, sind auch nur höchstens vier Schnittpunkte vorhanden.

4. 3. Es besitzt $\mathfrak{B}$ in jedem Punkte eine stetige Tangente (und keine Spitzen).

Bew.: Für die inneren Punkte der Normbogen ist die Beh. richtig, sodaß wir nur die Punkte von $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{B}$ zu betrachten brauchen. Da $\mathfrak{B}$ von endlicher (genau vierter) Ordnung ist, existieren in jedem seiner Punkte eindeutig die vordere und hintere Halbtangente. Weil diese für jeden Punkt von $\mathfrak{P}$ mit den entsprechenden Halbtangenten an $\mathfrak{K}$ zusammenfallen müssen, so besitzt $\mathfrak{B}$ in allen Punkten von $\mathfrak{P}$ die gleiche Tangente wie $\mathfrak{K}$ (und keine Spitzen). Wir beweisen noch die Stetigkeit der Tangente. Ist P ein Punkt I. Klasse (vgl. Nr. 4. 1.), so herrscht gewiss einseitige Stetigkeit von der Seite des anstoßenden Normbogens her. Für die andere Seite sowie für die Punkte II. Klasse ergibt sich die Stetigkeit so: Jeder Punkt P von $\mathfrak{P}$ ist Durchschnitt einer Folge von, auf P sich zusammenziehenden (abgeschlossenen) Restbogen $\mathfrak{R}_\nu$ (von $\mathfrak{K}$) bzw. Teilbogen $\mathfrak{B}_\nu$ von $\mathfrak{B}$, wobei $\mathfrak{B}_\nu$ mit $\mathfrak{R}_\nu$ die Endpunkte gemeinsam hat. Nun ist aber bei gegebenem ν für schließlich alle μ jede Tangente an $\mathfrak{B}_\mu$ parallel zu einer solchen von $\mathfrak{R}_\nu$; denn jeder Punkt von $\mathfrak{B}_\mu$ gehört, falls er nicht selbst auf $\mathfrak{K}$ liegt, zu einem Normbogen, dessen zugehöriger Lückenbogen (vgl. Nr. 3. 4.) ganz in einem, in $\mathfrak{R}_\nu$ enthaltenen Restbogen liegt. Aus der Stetigkeit der Kreistangente in P folgt daher die Behauptung.

4. 4. Es gibt rechtwinklige kartesische Koordinatensysteme, bezüglich deren $\mathfrak{B}$ kartesisches Bild einer eindeutigen und stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist.

Bew.: Die Beh. ist richtig für $\mathfrak{K}$ als kartesisches Bild von $y = F(x)$, wobei $F'(x)$ (weil stetig) beschränkt ist in $[a, b]$. Beim Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{B}$ wird aber der Wertevorrat von $F'(x)$ (zufolge Konstruktion Nr. 3.) nicht geändert, d. h. $\mathfrak{B}$ projiziert sich ebenfalls schlicht auf die zugrundegelegte x-Achse, woraus die Beh. folgt.

4. 5. Es besitzt $f(x)$ (vgl. Nr. 4. 4.) in den Punkten von $\mathfrak{Q}$ keine zweite Ableitung, abgesehen höchstens von der (abzählbaren) Nullmenge der Extrempunkte.

Bew.: Ist $Q = (x_0, f(x_0))$ ein Punkt von $\mathfrak{P}$ und nicht Extrempunkt, so gibt es eine (von hinten) gegen Q konvergierende Folge von Punkten $Q_\nu = (x_\nu, f(x_\nu))$, also $Q_\nu \varepsilon \mathfrak{B}$, sodaß die Tagenten in Q_ν und Q parallel sind. Mithin ist $f'(x_\nu) = f'(x_0)$ und $[f'(x_\nu) - f'(x_0)] : [x_\nu - x_0] \to 0$ für $x_\nu \to x_0$. Andererseits ist aber Q auch Häufungspunkt von Punkten $Q'_\nu = (x'_\nu, f(x'_\nu))$ *aus* $\mathfrak{P}$. Da nun die Q'_ν sämtlich auf $\mathfrak{K}$ liegen und folglich $f'(x'_\nu) = F'(x'_\nu)$, so gilt: $[f'(x'_\nu) - f'(x_0)] : [x'_\nu - x_0] \to F''(x_0) \neq 0$. Somit ist in $x = x_0$ keine zweite Ableitung von $f(x)$ vorhanden, w. z. z. w.

5. Schließlich ist noch die Beh. des Zusatzes zu Nr. 1. zu erhärten. Zu dem Zwecke braucht man nur jeden Normbogen so abzuändern, daß er z. B. in seinen (beiden) Endpunkten keinen Tangentialschmiegkreis besitzt, während im übrigen alle seine Eigenschaften (Nr. 3. 1. — 3. 5.) erhalten bleiben, mit Hilfe deren die gewünschten Eigenschaften von $\mathfrak{B}$ sich ergeben. Man erreicht die erforderliche Abänderung z. B., indem man bei der Konstruktion von $\mathfrak{N}$ in Nr. 3. den Kreisbogen $\overset{\frown}{AS}$ bzw. $\overset{\frown}{S'B}$ durch einen (zu ihm beliebig benachbarten), im Lückensegmente $\overline{\mathfrak{S}}$ gelegenen Konvexbogen der folgenden Art ersetzt: Man betrachte einen, den $\mathfrak{K}$ in A von innen berührenden (hinsichtlich des Halbmessers beliebig wenig von $\mathfrak{K}$ verschiedenen) Kreis $\mathfrak{K}'$. Sodann ziehe man von S aus diejenige Tangente an $\mathfrak{K}'$, welche den $\mathfrak{K}$ zwischen A und S, etwa in S_1 trifft, lege von S_1 aus wieder die Tangente an $\mathfrak{K}'$ mit dem Schnittpunkte S_2 mit $\mathfrak{K}$ zwischen A und S_1 usw. Die Summe aus A und allen Strecken $\overline{SS_1}$, $\overline{S_1S_2}, \ldots$ liefert nach passender Abrundung der sämtlichen Ecken einen, ganz in $\overline{\mathfrak{S}}$

verlaufenden, zu $\widehat{AS}$ beliebig benachbarten, stetig differenzierbaren Konvexbogen $\mathfrak{S}$, welcher in A keinen Tangentialschmiegkreis besitzt und dessen Tangentenrichtungen unter denen von $\widehat{AS}$ vorkommen. Ganz entsprechend verfährt man mit $\widehat{S'B}$. Da $\mathfrak{S}$ als zu $\widehat{AS}$ beliebig benachbart gewählt werden kann, so läßt sich wirklich erreichen, daß die in Nr. 3. 1.—3. 5. aufgezählten Eigenschaften sämtlich erhalten bleiben. — Übrigens würde es auch genügen, wenn wir z. B. eine geeignete Umgebung eines Wendepunktes W auf $\mathfrak{N}$ ersetzten durch die Summe zweier, die Wendetangente in W auf entgegengesetzten Seiten berührender, hinreichend flacher Kreisbogen. (Bemerkung von Herrn G. Aumann.)