

Bemerkung zu einem Satz von Herrn G. Van der Lyn.

Von Otto Haupt in Erlangen.

1. Es sei V ein im euklidischen R^3 gelegenes, topologisches Bild einer abgeschlossenen Vollkugel des R^3 ; ferner sei f ein System topologischer Bilder F einer abgeschlossenen Kreisscheibe derart, daß F in V enthalten ist, wobei die *Berandnung* von F , d. h. das Bild des Kreisscheibenrandes auf der *Berandnung* von V , d. h. auf dem Bild der Kugeloberfläche liegt, und daß jeder Punkt P von V genau einer F angehört. Dann liefert, wie Herr Van der Lyn gezeigt hat¹⁾, das System f eine stetige Zerlegung von V , d. h.²⁾ zu jeder Umgebung U eines beliebigen F gibt es eine Umgebung U' von F derart, daß jede (andere) F ganz in U liegt, wenn sie (mindestens) einen Punkt mit U' gemeinsam hat.

Dieser Satz dürfte ein recht nützlichcs Hilfsmittel darstellen, wie die mit seiner Hilfe von Herrn Van der Lyn a. a. O. vorgenommene Bestimmung der Baireschen Klasse der Koeffizienten gewisser totaler Differentialgleichungen zeigt. Es mag daher die nachfolgende, auf ihn bezügliche Bemerkung gerechtfertigt erscheinen.

2. Beim Beweise des in Nr. 1 angegebenen Satzes stützt sich Herr Van der Lyn unter anderem auf den Satz von

1) G. Van der Lyn, Un théorème topologique sur les champs de surfaces, *Mathesis* (Bruxelles) 50 (1936), 21—24. — Der Satz ist hier etwas anders, als von uns oben im Text, formuliert.

2) Als Umgebung einer Menge M wird jede offene, M enthaltende Menge bezeichnet, ferner als Kompaktum jeder kompakte, metrische Raum. Unter einer Zerlegung des Kompaktums K wird verstanden jede Darstellung von K als Summe fremder, in K abgeschlossener Teilmengen (von K) (vgl. P. Alexandroff - H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935, S. 61); die fraglichen Teilmengen heißen Elemente der Zerlegung, sie sind eindeutige Funktionen der Punkte von K . Die Bezeichnung „stetige Zerlegung“ wie bei Alexandroff-Hopf, a. a. O., S. 67.

Sierpinski, demzufolge ein Kontinuum nicht in abzählbar viele, fremde, abgeschlossene Mengen zerlegt werden kann³⁾. Zum Zwecke der Anwendung des Sierpinski'schen Satzes macht er weiter⁴⁾ (ohne Angabe des Beweises) die Feststellung: Es ist $V-F$ (vgl. Nr. 1.) für jedes F Summe zweier (relativ) offener, fremder Teile, ferner ist für zwei verschiedene F , etwa F_1, F_2 , einer dieser (beiden) von F_1 bestimmten Teile, einschließlich F_1 selbst, ganz in einem der (beiden) von F_2 bestimmten Teile enthalten. Aus dieser Feststellung allein, also ohne Heranziehung des Sierpinski'schen Satzes, folgt aber schon der in Rede stehende Satz (der Nr. 1.), nämlich als Spezialfall des im folgenden (Nr. 3.) formulierten und bewiesenen allgemeinen Satzes über die Stetigkeit der von uns als „geordnet“ bezeichneten Zerlegungen. Hinsichtlich des Beweises der Feststellung selbst bemerken wir, daß die Feststellung unmittelbar aus dem Jordanschen Satz (für den R^3) sich ergibt (vgl. Nr. 5.), jedenfalls dann, wenn den an die F gestellten Forderungen (vgl. Nr. 1.) noch hinzugefügt wird, daß in der Berandung von V entweder nur die Berandung von F oder jeder Punkt von F enthalten ist. Die Frage nach dem Beweise der Feststellung auch ohne diese zusätzliche Forderung an die F soll hier nicht erörtert werden⁵⁾. Der Übersichtlichkeit wegen werde die so sich ergebende, etwas eingeschränkere, Fassung des in Nr. 1. angegebenen Satzes hier noch vermerkt, und zwar gleich für den n -dimensionalen Fall, für welchen wörtlich der gleiche Beweis gilt.

Durch ein System topologischer Bilder V^{n-1} einer abgeschlossenen, $(n-1)$ -dimensionalen (euklidischen) Vollkugel wird eine stetige Zerlegung des topologischen Bildes V^n einer abgeschlossenen, n -dimensionalen ($n \geq 3$) (euklidischen) Vollkugel geliefert, wenn jedes V^{n-1} in V^n enthalten ist derart, daß in der Berandung (vgl. Nr. 1.) von V^n entweder nur die Berandung

3) Vgl. a. a. O.¹⁾, S. 22, Zeile 6 von unten.

4) Vgl. a. a. O.¹⁾, S. 23, Zeile 5 ff. von oben; ferner Zeile 17 ff. von oben. (Daß die fraglichen Teile von $V-F$ fremd sind, wird zwar nicht ausdrücklich gesagt, aber, soweit wir sehen können, alsbald benutzt.)

5) Zumal besagte Zusatzforderung keine für die Anwendung des fraglichen Satzes hinderliche Einschränkung darstellen dürfte.

von V^{n-1} oder ganz V^{n-1} enthalten ist, und daß jeder Punkt von V^n in genau einer V^{n-1} liegt.

3. Der in Nr. 2. erwähnte allgemeine Satz lautet:

Jede geordnete Zerlegung eines Kompaktums ist stetig.

Dabei wird die Zerlegung $K = \Sigma F$ des Kompaktums K als geordnet bezeichnet, wenn folgendes gilt: I. Für jedes Element F der Zerlegung ist $(K - F)$ Summe zweier fremder, (in K) offener Mengen F^+ , F^- , von denen höchstens eine leer ist. — II. Sind F_1 , F_2 zwei voneinander verschiedene Zerlegungselemente, so ist ⁶⁾ entweder $F_1^- \subset F_2^-$ mit $F_1 \subset F_2$ oder $F_2^- \subset F_1^-$ mit $F_2 \subset F_1$.

Diesem Satze ordnen sich viele Beispiele stetiger Zerlegungen unter. Sein Beweis ist sehr einfach. Er sei noch angedeutet.

4. Die Zerlegungselemente (kurz ZE) lassen sich linear ordnen: Schreibt man nämlich $F_1 < F_2$ bzw. $F_1 < F_3 < F_2$, wenn ⁷⁾ $F_1^- \subset F_2^-$ bzw. wenn $F_1^- \subset F_3^- \subset F_2^-$, so sind für $<$ die Postulate der linearen Ordnung erfüllt. Damit ist dann auch der Begriff der monotonen Folge von ZE gegeben.

4. 1. Ist $F_1 < F_2$, so besitzen die Abstände des F_1 von allen ZE F mit $F_2 \leq F$ eine positive untere Schranke. (Folgt aus der Kompaktheit des K bzw. der F und aus Ziff. II. der Definition in Nr. 3.).

4. 2. Wäre der Stetigkeitssatz in Nr. 3. nicht richtig, so existierte bei gegebenem F' zu mindestens einer Umgebung $U' = U(F')$ von F' bezüglich K eine auf F' sich zusammenziehende, nicht steigende Folge von Umgebungen $U_\nu = U_\nu(F')$ von F' und dazu eine Folge $((F_\nu))$ von lauter ZE F_ν derart, daß F_ν einerseits mit U_ν Punkte gemeinsam hätte und andererseits nicht in U' enthalten wäre. Wegen der vorausgesetzten Kompaktheit ließen sich aus $((U_\nu))$ und $((F_\nu))$ Teilfolgen auswählen (die wir der Einfachheit wegen wieder mit $((U_\nu))$ usw. bezeichnen) und dazu zwei Folgen $((P_\nu))$, $((Q_\nu))$ von Punkten mit $P_\nu \in F_\nu$, $Q_\nu \in U_\nu$ derart, daß $((P_\nu))$ gegen einen Punkt P'

6) Das Zeichen \subset soll nicht die Gleichheit der beiden betrachteten Mengen beinhalten.

7) F_1 und F_2 sollen verschieden sein. Vgl. auch ⁶⁾.

von F' konvergierte und $((Q_\nu))$ gegen einen nicht in F' enthaltenen Punkt Q .

Da die F_ν alle unter einander verschieden sein sollten, so könnte $((F_\nu))$ o. B. d. A. als monoton angenommen werden derart, daß $F_\nu < F_{\nu+1} < F'$ für jedes ν . Dann wäre aber andererseits $F_\nu < F(Q)$ für alle ν . Wegen $F(Q) < F'$ besäßen daher die Abstände des F' von $F(Q)$ und allen F_ν eine positive untere Schranke (Nr. 4. 1.). Dies widerspricht der Konvergenz von $((P_\nu))$ gegen $P' \in F'$ wegen der Voraussetzung $P_\nu \in F_\nu$.

Zusatz: Jede monotone Folge $((F_\nu))$ von ZE „konvergiert“ gegen ein ZE F^* im folgenden Sinne: Es existiert ein F^* , in dessen beliebig vorgegebener Umgebung schließlich alle F_ν enthalten sind.

5. Es ist noch festzustellen, daß, unter den Voraussetzungen des in Nr. 2. ausgesprochenen Satzes, durch die V^{n-1} eine geordnete Zerlegung von V^n geliefert wird. Diese Feststellung ergibt sich, wie schon in Nr. 2. erwähnt, aus dem Jordanschen Satze, der ja als ein naturgemäßes Werkzeug bei Untersuchungen im R^n gelten darf. In Betracht kommt hierbei wesentlich der sogenannte spezielle Jordan-Brouwersche Satz⁸⁾: Durch ein auf der n -dimensionalen Sphäre S^n gelegenes topologisches Bild einer $(n - 1)$ -dimensionalen Sphäre wird die S^n in genau zwei Gebiete zerlegt. Aus diesem Satze folgt nämlich (etwa durch Identifizierung der Punkte der Berandung (vgl. Nr. 1) von V^n), daß V^n zusammen mit den V^{n-1} ein System von Mengen K, F im Sinne der Nr. 3. bilden.

8) Vgl. Alexandroff-Hopf, a. a. O.²⁾, S. 450 ff.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1939

Band/Volume: [71](#)

Autor(en)/Author(s): Haupt Otto

Artikel/Article: [Bemerkung zu einem Satz von Herrn G. Van der Lyn. 349-352](#)