Über eine Abrundung ebener Bogen.

Von Otto Haupt in Erlangen.

1. Einleitung.

Eine Ecke oder Spitze auf einem *ebenen*, *einfachen*, stückweise glatten[1]) Bogen $\mathfrak{Z}_0$ kann in einfacher Weise stets geglättet werden im folgenden Sinne: In beliebig klein vorgeschriebener Umgebung $\mathfrak{U}$ der betrachteten Ecke bzw. Spitze Q kann man einen Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{Z}_0$, in dessen Innerem Q enthalten ist, ersetzen durch einen glatten Bogen $\mathfrak{F}$ derart, daß $\mathfrak{Z}'_0 = (\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{T}) + \mathfrak{F}$ auch in den Endpunkten von $\mathfrak{F}$ scharfe Tangente (also insbesondere keine Spitze, sondern höchstens Wendepunkte) besitzt.

Die Frage nach einer solchen Glättung ist nicht mehr so einfach, sobald zusätzlich gefordert wird, daß dabei eine irgendwie erklärte geometrische Ordnung[2]) ungeändert bleibt, genauer, daß die Ordnung von $\mathfrak{Z}_0$ sowie vom Durchschnitt $\mathfrak{U}\mathfrak{Z}_0$ gleich ist der von $\mathfrak{Z}'_0$ bzw. $\mathfrak{U}\mathfrak{Z}'_0$; wir sprechen dann von *ordnungsfester Glättung*, kürzer von Abrundung (bezüglich der in Rede stehenden Ordnung).

Der nächstliegende, hierhergehörige Fall ist der, daß $\mathfrak{Z}_0$ *elementar* ist bezüglich der betrachteten Ordnung, d. h. Summe aus endlich vielen ordnungshomogenen[3]) Bogen; alsdann wird man noch fordern, daß $\mathfrak{F}$ ebenfalls elementar ist. Derartige

1) d. h. Summe endlich vieler Bogen, deren jeder überall eine scharfe Tangente besitzt. Eine Tangente heißt *scharf*, wenn sie Limes aller Sekanten durch zwei beliebige benachbarte Bogenpunkte ist.

2) Vgl. Haupt, Geometrische Ordnungen, Jahresber. d. d. Math. Ver. **49** (1939), S. 191 ff.

3) d. h. alle Punkte des Bogens besitzen die gleiche Ordnung (den gleichen Ordnungswert).

Abrundungsprobleme treten bei verschiedenen Konstruktionen der geometrischen Ordnungstheorie auf [4]) [5]). Für den Fall der linearen [6]) Ordnung und eines linear-elementaren $\mathfrak{Z}_0$ läßt sich, wie bekannt [4]), eine Abrundung stets bewerkstelligen. Nun benötigt man bei gewissen Existenzbeweisen [5]) in der Ordnungstheorie auch *Abrundungen* bezüglich *zyklischer Ordnung* [6]) und zyklisch-*elementarer* $\mathfrak{Z}_0$ (genauere Formulierung in Nr. 2. 1. 1.). Die Möglichkeit derartiger Abrundungen erscheint, anders als im Falle der linearen Ordnung, weder ohne weiteres einleuchtend noch einfach zu beweisen. Da derartige Abrundungen, wie schon bemerkt, anderweitig benötigt sind, soll im Folgenden ein Beweis gegeben werden.

---

4) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, Kgl. Danske vidensk. Selsk. Skrifter, (7) **11** (1914), S. 113 ff., insbes. S. 123—125.

5) Haupt, Raumbogen mit Punkten von beliebig vorgegebenem linearen Ordnungswert, Journ. f. d. r. u angew. Math. **184** (1942).

6) Unter der linearen bzw. zyklischen (kurz: Z-) Ordnung eines ebenen Bogens $\mathfrak{Z}$ wird hier die maximale Mächtigkeit (falls vorhanden) des Durchschnittes $\mathfrak{Z}\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ verstanden, wo $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{K}$ alle Geraden bzw. alle Kreise durchläuft. Ein *Bogen* von beschränkter derartiger Ordnung enthält also *keine Strecken* bzw. *weder Strecken noch Kreisbogen.* Die einzigen linear bzw. zyklisch ordnungshomogenen (vgl. [3])) Bogen von (endlicher) linearer bzw. Z-Ordnung sind die Konvexbogen bzw. die Bogen von der Z-Ordnung Drei; letztere sind übrigens glatt uud Summen aus höchstens zwei Konvexbogen (vgl. Journ. f d. r. u. angew. Math. **178** (1937), S. 14 ff.; **180** (1939), S. 44 ff., sowie a. a. O. [12]) und [10])). Ein Bogen heiße zyklisch elementar, wenn er darstellbar ist als Summe endlich vieler zyklisch ordnungshomogener Bogen (je von endlicher Z-Ordnung). Beispiele von Konvexbogen der Z-Ordnung Drei liefern die Teilbogen von Ellipsenquadranten. Als Maximalsekante eines Bogens $\mathfrak{Z}$ von der Z-Ordnung r bezeichnen wir jeden Kreis, welcher mit $\mathfrak{Z}$ genau r (ev. auch zusammenfallende) Punkte gemeinsam hat; übrigens gibt es in beliebiger Nachbarschaft einer jeden Maximalsekante solche Maximalsekanten, welche r verschiedene Schnittpunkte mit $\mathfrak{Z}$ gemeinsam haben (vgl. Fußnote [19])). Unter einem (scharfen) Schmiegkreis im Punkte Q an $\mathfrak{Z}$ verstehen wir jeden Limes einer Folge von Kreisen, deren jeder mit $\mathfrak{Z}$ (mindestens) drei, gegen Q konvergierende Punkte gemeinsam hat. Der Bogen besitzt ***stetige, beschränkte, von Null verschiedene*** Krümmung, wenn in jedem seiner Punkte der Schmiegkreis eindeutig bestimmt ist, sich stetig ändert und wenn seine Durchmesserlänge eine positive untere und obere Schranke besitzt.

Die Abrundungskonstruktion für *einfache* Bogen $\mathfrak{Z}_0$ überträgt sich ohne weiteres auf elementare Bogen, welche nur endlich viele mehrfache Punkte, je von endlichem Vielfachheitsgrad [7]) enthalten. Ist dann nämlich Q selbst kein mehrfacher Punkt, so gilt unsere Abrundungskonstruktion unverändert, falls nur $\mathfrak{U}$ hinreichend klein gewählt wird. Ist hingegen Q ein mehrfacher Punkt, so hat man die Abrundungskonstruktion nach einander auf die einzelnen, in Q sich überkreuzenden einfachen Teilbogen von $\mathfrak{Z}_0$ anzuwenden. Man bemerke ferner, daß mit unserer Abrundung im Falle zyklischer Ordnung in der Ebene *auch die Abrundung für sphärische Bogen endlicher linearer Ordnung* [8]) *im* R_3 geleistet ist.

Auf die Frage nach der „Glättung" auch der Krümmung längs $\mathfrak{Z}_0$, falls dieser stückweise scharfe Schmiegkreise [6]) besitzt, gehen wir nicht ein [9]). Ebensowenig auf die naheliegende Frage nach einer Verallgemeinerung unseres Abrundungsverfahrens für die Fälle von K_3-Ordnungen [10]); indes dürfte unsere Konstruktion auf solche Fälle ausdehnbar sein, da versucht wurde, ihre Begründung möglichst allgemein zu halten (unter Verzicht auf manche, sonst mögliche Vereinfachung).

Die in Rede stehenden ordnungsfesten Glättungen sind Spezialfälle einer allgemeineren, nämlich der Aufgabe, einen vorgegebenen Bogen (im R_n) beliebig genau (in jeweils zu erklärendem Sinne) anzunähern durch Bogen der gleichen Ordnung, welch letztere überdies von einer bestimmten, jeweils festzulegenden Beschaffenheit [11]) sein sollen.

2. Konstruktion der Abrundung.

2. 1. Die zu betrachtenden Bogen. Es sei $\mathfrak{Z}_0$ Summe von endlich vielen Bogen der (homogenen) Z-Ordnung Drei in

---

7) Ist $x = f(t)$, $y = g(t)$ eine Darstellung des betrachteten Bogens als eindeutiges, stetiges Streckenbild, so heißt der mehrfache Punkt von endlichem Vielfachheitsgrad, wenn er nur endlich viele Urbilder t besitzt.

8) Vgl. a. a. O. [5]).

9) Die Stetigkeit der Krümmung beim ebenen Bogen entspricht der Stetigkeit der Schmiegebene beim sphärischen.

10) Vgl. H. Haller, Über die K_3-Schmieggebilde der ebenen Bogen usw., Sitz.-Ber d. physikal.-med. Sozietät Erlangen, **69** (1937), 215 ff.

11) Vgl. Haupt, Über ordnungsfeste Annäherung ebener Bogen, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1934, 7. Abh.

der Ebene; insbesondere soll also $\mathfrak{Z}_0$ *keine Kreisbogen* und *keine Strecken* als Teilbogen enthalten. Ferner soll $\mathfrak{Z}_0$ *frei von mehrfachen Punkten sein.* Nun ist [12]) jeder Bogen der Z-Ordnung Drei Summe aus endlich vielen, glatten *Konvex*bogen; wir können daher $\mathfrak{Z}_0$ als Summe endlich vieler, glatter Konvexbogen $\mathfrak{R}$ je von der Z-Ordnung Drei darstellen. In jedem Punkte von $\mathfrak{R}$ existiert [12]) überdies eindeutig ein rechtsseitiger und ein linksseitiger scharfer Schmiegkreis; diese Schmiegkreise sind [12]) längs $\mathfrak{R}$ paarweise fremd bis auf gemeinsame Berührpunkte sowie ineinandergeschachtelt. Mithin sind die beiden Endpunkte, R', R'' eines $\mathfrak{R}$ dadurch voneinander unterscheidbar, daß im einen, etwa in R' bzw. in R'' der Radius des Schmiegkreises $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{K}''$ am kleinsten bzw. am größten ist und daß $\mathfrak{K}'$ im Innern von $\mathfrak{K}''$ liegt: zur Abkürzung bezeichnen wir R' als den kleineren und R'' als den größeren Endpunkt. Die Schmiegkreise von $\mathfrak{R}$ besitzen *endlichen* bzw. *von Null verschiedenen* Radius, abgesehen höchstens vom größeren bzw. vom kleineren Endpunkt. In jedem Falle aber liegt R' im Innern oder auf der Begrenzung, ferner R'' im Äußern oder auf der Begrenzung eines jeden Schmiegkreises von $\mathfrak{R}$.

2. 1. 1. Abrundung. Es handelt sich jetzt um die Abrundung von $\mathfrak{Z}_0$ in beliebig (klein) vorgegebener zweidimensionaler Umgebung $\mathfrak{U}$ je eines der (endlich vielen) Punkte Q von $\mathfrak{Z}_0$, in welchen (je) zwei der oben (Nr. 2. 1.) erwähnten konvexen Teilbogen $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{Z}_0$, die wir mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wollen, eine Ecke oder Spitze bilden. Diese Abrundung in Q besteht in der Ersetzung von $\mathfrak{U}\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{U}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ durch einen einfachen, glatten Bogen $\mathfrak{C}'$, welcher Summe ist aus drei Konvexbogen $\mathfrak{R}$, etwa $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{F}$, wobei $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{B}'$ Teilbogen von $\mathfrak{U}\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ ist, welchem Q nicht angehört, und wobei $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}') + (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')$ ersetzt wird durch $\mathfrak{F}$. Dabei soll überdies $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{Z}'_0 = (\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{U}\mathfrak{Z}_0) + \mathfrak{C}'$ die gleiche Z-Ordnung besitzen

---

12) J. Hjelmslev, Die graphische Geometrie, Forhandl. Åttonde skandinav. Mat.-Kongr. Stokholm 1934, sowie: Introduction à la théorie des suites monotones, Overs. over d. kgl. Danske Vidensk. Selskab Forhandl. 1914, Nr. 1. Vgl. auch Haller, a. a. O. [10]).

wie $\mathfrak{U}\mathfrak{Z}_0$ bzw. wie $\mathfrak{Z}_0$. Wir bezeichnen $\mathfrak{F}$ als Abrundungsbogen.

2. 1. 2. Einteilung der Singularitäten.

2. 1. 2. 1. Die Halbtangenten h_a^0 und h_b^0 von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ in Q bilden nach Voraussetzung zusammen keine Gerade (weil andernfalls $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ auch in Q glatt wäre). Daher bestimmen h_a^0, h_b^0 eindeutig einen abgeschlossenen Winkelraum $\mathfrak{w}$, in welchem keine Gerade ganz enthalten ist; der offene Kern von $\mathfrak{w}$ kann auch leer sein (Spitze). Den von h_a^0 mit h_b^0 in Q gebildeten Winkel $\measuredangle(h_a^0, h_b^0) = \omega$ (Winkel von $\mathfrak{w}$) messen wir durch die mit Vorzeichen versehene absolut kleinste Drehung, durch welche h_a^0 in h_b^0 übergeführt wird; es ist $-\pi < \omega < +\pi$.

Im Folgenden bezeichne $\mathfrak{k}_0$ eine abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius r_0 mit Q als Mittelpunkt derart, daß für $\mathfrak{k}_0$ und für alle zu $\mathfrak{k}_0$ konzentrischen Kreisscheiben $\mathfrak{k}$ von kleinerem Radius r folgende Eigenschaft (k) erfüllt ist:

I. Es gibt eine Maximalsekante [6]) von $\mathfrak{Z}_0$, welche im Äußern von $\mathfrak{k}_0$ verläuft. (Diese Maximalsekante ist auch Maximalsekante von $(\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{k}_0)$).

II. Die Durchschnitte $\mathfrak{k}_0\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{k}_0\mathfrak{B}$ sind einfache Bogen $\widehat{QA}$ und $\widehat{QB}$, welche fremd sind bis auf Q.

III. Es gibt Durchmesser von $\mathfrak{k}_0$, welche mit $\mathfrak{k}_0(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$ nur den Punkt Q gemeinsam haben.

IV. Die zu den Halbtangenten an $\mathfrak{k}_0\mathfrak{A}$ in A und an $\mathfrak{k}_0\mathfrak{B}$ in B komplementären (offenen) Halbgeraden verlaufen außerhalb $\mathfrak{k}_0$.

V. Es seien P_a bzw. P_b beliebige, von Q verschiedene Punkte von $\mathfrak{k}_0\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{k}_0\mathfrak{B}$, ferner seien h_a bzw. h_b die Halbtangenten in P_a bzw. in P_b an $\widehat{P_aQ}$ bzw. an $\widehat{P_bQ}$. Dann unterscheidet sich der absolut kleinste, von h_a und h_b gebildete, entsprechend wie ω (mit Vorzeichen) gemessene Winkel $\measuredangle(h_a, h_b)$, von ω um absolut weniger als $\eta = \vartheta \cdot \mathrm{Min}\,(|\omega|;\ \pi - |\omega|)$ falls $\omega \neq 0$ bzw. als $\eta = \vartheta \cdot \pi$ falls $\omega = 0$ und zwar für alle P_a, P_b; dabei soll ϑ beliebig vorgegeben sein mit $0 < \vartheta \leq 2^{-4}$ (vgl. die Festsetzungen über ϑ zu Nr. 2. 4. 1., Ib; 2. 4. 2., Ib; 2. 4. 3., Ib). Weiter soll der entsprechend gemessene, von irgend zwei verschiedenen der h_a bzw. der h_b gebildete Winkel $\sphericalangle(h_a, h'_a)$ bzw. $\sphericalangle(h_b, h'_b)$ absolut kleiner sein als $\Theta \cdot \pi$, wo Θ beliebig vorgegeben ist mit $0 < \Theta \leq 2^{-4}$ (vgl. die Festsetzungen über Θ zu Nr. 2. 4. 1., Ib; 2. 4. 2., Ib; 2. 4. 3., Ib).

VI. Im Falle eines Hutes (vgl. unten) in Q besitzt $\mathfrak{k}_0(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$ keine zu einander parallelen Stützgeraden; dabei wird in den Endpunkten A und B nur die Tangente an $\mathfrak{A}$ bzw. an $\mathfrak{B}$ als Stützgerade gerechnet.

Daß bei gegebenen ϑ und Θ *für* alle *hinreichend kleinen r die Eigenschaft* (k) *erfüllt* ist, ergibt sich aus der Konvexität und der Stetigkeit der Tangente von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. (Wegen II. und IV. vgl. Nr. 3. 6.).

2. 1. 2. 2. Als den von $\mathfrak{k}_0\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{k}_0\mathfrak{B}$ in Q gebildeten Sektor $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; \mathfrak{k}_0)$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle desjenigen, innerhalb $\mathfrak{k}_0$ gelegenen, von $\mathfrak{k}_0\mathfrak{A}$, $\mathfrak{k}_0\mathfrak{B}$ und einem Kreisbogen des Randes von $\mathfrak{k}_0$ begrenzten, einfach zusammenhängenden Teilgebietes von $\mathfrak{k}_0$, in welchem kein Durchmesser von $\mathfrak{k}_0$ enthalten ist. Wegen Eigenschaft ($\mathfrak{k}$), II. und III., existiert $\mathfrak{S}$ und ist eindeutig bestimmt. Je nachdem $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{w}$ oder $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{S}$ oder weder $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{w}$ noch $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{S}$ ist für *alle* hinreichend kleinen r_0, bezeichnen wir die durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in Q gebildete Singularität als Hut bzw. als Dorn bzw. als Schnabel; für $\omega = 0$ liegt speziell eine Dorn- oder eine Schnabelspitze vor. Diese drei Typen sind definitionsgemäß unabhängig von $\mathfrak{k}_0$.

Die Z-Ordnung von Q ist in jedem Falle mindestens Vier und höchstens Sechs [13]).

2. 1. 3. Festsetzungen. Zur Abkürzung setzen wir weiterhin: $\mathfrak{A} = \widehat{AQ} = \mathfrak{k}_0\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} = \widehat{BQ} = \mathfrak{k}_0\mathfrak{B}$, ferner $\mathfrak{A}' = \widehat{AA'}$, $\mathfrak{B}' = \widehat{BB'}$ (vgl. Nr. 2. 1. 1.), sowie $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' = \widehat{A'Q}$ und $\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}' = \widehat{B'Q}$.

---

13) Die oben im Text gegebene Einteilung der Singularitäten entspricht der *linearen* Ordnung. Bei einer Einteilung entsprechend der zyklischen Ordnung müßten auch die beiderseitigen Schmiegkreise herangezogen werden. Vgl. die (den Spezialfall der sphärischen Bogen umfassende) Einteilung bei Denk-Haupt, Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **183** (1941), S. 69ff.

Mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir überdies, soweit kein Hut vorliegt, einen solchen unter den Bogen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dessen konvexe *Seite*[14]) *dem Innern von $\mathfrak{S}$ angehört.* Im Falle eines *Schnabels* wird daher A' bzw. B' auf dem abgerundeten Bogen $\mathfrak{C}'$ (vgl. Nr. 2. 1. 1.) ein *Konvex-* bzw. ein *Wende*punkt sein. Hingegen werden im Falle eines *Dornes* sowohl A' als B' Wendepunkte, während im Falle eines *Hutes* A' und B' sowie $\mathfrak{C}'$ selbst konvex sind (vgl. Nr. 2. 6. 5. 3., IV.).

Schließlich wird mit $\mathfrak{k}_j$, $j = 1, 2$, eine, zu $\mathfrak{k}_0$ konzentrische abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius $r_j = 2^{-3j} \cdot r_0$ bezeichnet und es wird gesetzt: $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{k}_j\mathfrak{A} = \widehat{A_jQ}$ und $\mathfrak{B}_j = \mathfrak{k}_j\mathfrak{B} = \widehat{B_jQ}$ (vgl. dazu Nr. 2. 1. 2. 1., Schluß).

2. 2. Wir stellen nunmehr sogleich die bei unserer Konstruktion benötigten Eigenschaften des Abrundungsbogens $\mathfrak{F} = \widehat{A'B'}$ (vgl. Nr. 2. 1. 1.) zusammen.

A. *Betr. Gestalt und Größe von $\mathfrak{F}$.*

1. Es soll $\mathfrak{F} = \widehat{A'B'}$ Teilbogen von $\mathfrak{F}' = \widehat{A'B''}$ und es soll $\mathfrak{F}'$ Teilbogen von $\mathfrak{F}_0 = \widehat{A_0B_0}$ sein; dabei seien A', B', B'', A_0, B_0 sämtlich verschieden. Weiter sei $\mathfrak{F}_0$ von der Z-Ordnung Drei, konvex, mit scharfer Tangente sowie mit stetiger, beschränkter und von Null verschiedener Krümmung versehen.

2. Mit B' bzw. B'' bzw. B_0 sei der größere Endpunkt von $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}'$ bzw. $\mathfrak{F}_0$ bezeichnet.

3. Außerdem sollen $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}'$ den folgenden Forderungen genügen[15]): Ist h_{A_0} bzw. h_P die Halbtangente in A_0 bzw. in $P \varepsilon \mathfrak{F}_0$ an den Teilbogen $\widehat{A_0P}$ von $\mathfrak{F}_0$, so soll der im Sinne der Festsetzung von Nr. 2. 1. 2. 1., V. gemessene $\measuredangle\ (h_{A_0}, h_P)$ bei monoton von B_0 nach A_0 laufendem P von $-\alpha$ bis π oder von α bis $-\pi$ laufen, wobei $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$ (der Winkel ändert sich dabei monoton (und stetig) wegen der Konvexität von $\mathfrak{F}_0$).

---

14) Unter der konvexen bzw. der konkaven Seite eines Konvexbogens $\mathfrak{H}$ verstehe man den Durchschnitt einer zweidimensionalen Umgebung von $\mathfrak{H}$ mit dem Äußeren bzw. dem Inneren der konvexen Hülle von $\mathfrak{H}$.

15) Auf diese Forderung gründen sich die Schlüsse zu Nr. 2. 4. 1., V. usw Zwecks Vereinfachung dieser Schlüsse ist α größer als $\frac{\pi}{2}$ gewählt.

Ferner soll die Drehung von h_P zwischen B'' und A' absolut gleich $\frac{3}{2}\pi$ sein

4. Der Durchmesser von $\mathfrak{J}_0$ (also erst recht der von $\mathfrak{J}$) soll kleiner sein einerseits als r_2 (vgl. Nr. 2. 1. 3.), andererseits als der Abstand a_2 des Bogens $\mathfrak{B}$ vom Punkte A_2 auf $\mathfrak{A}$ (vgl. Nr. 2. 1. 3.); übrigens ist $a_2 \leq r_2$.

5. Es sollen kleiner als r_2 sein die Durchmesser

5. 1. aller Maximalsekanten von $\mathfrak{J}_0$ und

5. 2. aller Kreise, die durch je zwei, ev. zusammenfallende, innere Punkte des Bogens $\mathfrak{J}'$ und der Sehne $\overline{A_0B_0}$ gehen.

B. *Betr. Lage von* $\mathfrak{J}$.

1. Es soll **a)** die abgeschlossene konvexe Hülle $K(\mathfrak{J}_0)$ von $\mathfrak{J}_0$ innerhalb $\mathfrak{k}_1$ liegen, und **b)** die abgeschlossene konvexe Hülle $K(\mathfrak{J})$ von $\mathfrak{J}$ im Innern von $\mathfrak{k}_1\mathfrak{S}$ (vgl. Nr. 2. 1. 2. 2.; 2. 1. 3.) liegen, abgesehen nur von den Endpunkten A', B' von $\mathfrak{J}$ (vgl. auch B. 3.).

2. Das Komplement des offenen Kernes $\underline{\mathfrak{k}}_0$ von $\mathfrak{k}_0$, insbesondere also $\mathfrak{Z}_0 - \mathfrak{Z}_0\mathfrak{k}_0$, sowie die Endpunkte A und B von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ liegen im Äußeren:

2. 1. einer jeden Maximalsekante von $\mathfrak{J}$, sowie

2. 2. eines jeden Kreises, der durch zwei innere Punkte des Bogens $\mathfrak{J}$ geht und fremd ist zu $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}''$ (vgl. Nr. 2. 1 3.)

3. Der Endpunkt A' bzw. B' von $\mathfrak{J}$ soll auf $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_1$ liegen. Und im übrigen soll $\mathfrak{J}$ fremd sein zu $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.

4. 1. Im Falle *entweder* in Q ein Dorn vorliegt *oder* die Durchmesserlängen der Maximalsekanten von $\mathfrak{A}$ eine positive untere Schranke besitzen, sollen die Halbtangenten in A' an $\mathfrak{A}''$ und an $\mathfrak{J}$ identisch sein. Überdies soll dann die konvexe Hülle $K(\mathfrak{J}_0)$ von $\mathfrak{J}_0$ ganz innerhalb $\mathfrak{k}_1\mathfrak{S}$ liegen, abgesehen höchstens von Punkten von $\mathfrak{J}_0$.

4. 2. Liegt keiner der Fälle 4. 1. vor (liegt also insbesondere $\mathfrak{S}$ auf der konkaven Seite von $\mathfrak{A}$ (vgl. dazu die Festsetzung über $\mathfrak{B}$ in Nr. 2. 1. 3.)), so soll die Halbtangente an $\mathfrak{J}$ in A' zusammenfallen mit der von A' ausgehenden, Q enthaltenden Halbgeraden. Ferner soll $\mathfrak{J}$ auf der entgegengesetzten Seite der Trägergeraden von $\overline{A'Q}$ liegen wie $\mathfrak{A}''$. (Dabei bedeutet $\overline{A'Q}$ die Verbindungsstrecke (Sehne) von A' mit Q.)

5. Die Halbtangente an $\mathfrak{F}$ in B' soll zusammenfallen mit der Halbtangente an $\mathfrak{B}''$ in B'; und es soll $\mathfrak{B}$ in B' (von der konvexen Hülle $K(\mathfrak{F}_0)$) von $\mathfrak{F}_0$ *gestützt* werden.

2. 3. Der Konstruktion des Abrundungsbogens $\mathfrak{F}$ schicken wir einige *Bemerkungen über die in Nr. 2. 2. geforderten Eigenschaften von* $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}$ voraus.

I. Die Eigenschaften A. 1. - 5. bleiben bei beliebiger ähnlicher Verkleinerung von $\mathfrak{F}_0$ erhalten.

II. Die Forderungen A. 1.—5. sind erfüllbar. Man wähle nämlich einen $\mathfrak{F}_0$, welcher die in A. 1.—3. gestellten Forderungen befriedigt, wobei α im Rahmen der in A. 3. geforderten Ungleichung $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$ beliebig gewählt werden kann; zufolge Nr. 3. 7. gibt es solche $\mathfrak{F}_0$. Auf diesem $\mathfrak{F}_0$ lege man sodann einen die Forderungen A. 1.—3. erfüllenden $\mathfrak{F}'$ fest, was zufolge $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$ immer möglich ist. Die in A. 5. genannten Kreise haben dann nach oben beschränkte Durchmesserlängen, wie aus Nr. 3. 1. und Nr. 3. 4. folgt. Zufolge I. kann daher $\mathfrak{F}_0$ ähnlich so verkleinert werden, daß bei gegebenem r_2 auch A. 4. und A. 5. erfüllt sind.

III. Aus A. 1. folgt: In dem für B. 4. 2. in Betracht kommenden Falle besitzt $\mathfrak{A}' + \mathfrak{F}$ in A' einen Hut. (Dabei ist $\mathfrak{A}' = \widehat{AA'}$ gesetzt.)

Bew.: Wegen der Konvexität von $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''$ bilden $\mathfrak{A}'$ und $\overline{A'Q}$ in A' einen Hut. Wegen A. 1. ist $\mathfrak{F}$ konvex; wegen B. 4. 2. gehört $\overline{A'Q}$ der Halbtangente an $\mathfrak{F}$ in A' an und $\mathfrak{F}$ liegt auf der entgegengesetzten Seite des Trägers von $\overline{A'Q}$ wie $\mathfrak{A}''$.

IV. Aus B. 1. b) und B. 3. folgt: Es ist $\mathfrak{A}' + \mathfrak{F} + \mathfrak{B}'$ ein einfacher Bogen; ferner ist $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{F} + \mathfrak{B}''$ eine einfache geschlossene Kurve. (Dabei ist gesetzt: $\mathfrak{A}' = \widehat{AA'}$, $\mathfrak{B}' = \widehat{BB'}$, $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}'$.) Es liegt $\mathfrak{A}' + \mathfrak{F} + \mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{k}_0\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{F} + \mathfrak{B}''$ in $\mathfrak{k}_1\mathfrak{S}$.

V. Aus B. 1. b) und B. 3. folgt: Es ist $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'' + \overline{A'B'}$ eine einfache, geschlossene, innerhalb $\mathfrak{k}_1$, sogar in $\mathfrak{k}_1\overline{\mathfrak{S}}$ gelegene Kurve. Ferner ist $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \overline{A'B'}$ ein einfacher Bogen, der bis auf A und B innerhalb $\mathfrak{k}_0$ liegt.

VI. Aus A. 1., B. 1. b), B. 3. und B. 4. folgt: $\mathfrak{F}$ liegt (bis auf A' und B') im Innern (des) von $\mathfrak{c} = \mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'' + \overline{A'B'}$ (begrenzten beschränkten Gebietes, welches eine Umgebung von Q auf $\mathfrak{S}$ enthält). Ferner liegen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ außerhalb dieses Gebietes (bis auf A', B').

Bew.: Wegen A. 1., B. 1. b) und B. 3 ist $\mathfrak{F}$ bis auf A' und B' fremd zu $\mathfrak{c}$. Ferner verläuft $\mathfrak{F}$ wegen B. 4. 1. bzw. 4. 2. in der Nähe von A' in einem, von $\mathfrak{A}''$ und von $\overline{A'B'}$ begrenzten, offenen „Sektor", welcher zu $\mathfrak{S}\mathfrak{k}_1$ und sogar zu dem in der Beh. genannten Gebiete gehört. Schließlich ist z. B. $\mathfrak{A}'$ fremd zu $\mathfrak{c}$ bis auf A' und der Endpunkt A von $\mathfrak{A}'$ liegt (wegen V.) außerhalb $\mathfrak{c}$; daher liegt $\mathfrak{A}'$ bis auf A' außerhalb $\mathfrak{c}$.

VII. Aus A. 1., A. 5., B. 1., B. 3. und B. 4. folgt: Die Durchmesser derjenigen Kreise $\mathfrak{K}$, welche fremd sind zu $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}''$ und welche durch zwei innere (ev. zusammenfallende) Punkte von $\mathfrak{F}$ gehen, sind kleiner als $2 r_1$.

Bew.: Wegen A. 1. ist $\mathfrak{F}$ Teilbogen von $\mathfrak{F}_0$. Hat daher $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{F}_0$ drei Punkte gemeinsam, so folgt die Beh. aus A. 5. 1. wegen $r_2 < r_1$. Hat $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{F}_0$ nur zwei Punkte gemeinsam, die also nach Vor. beide zu $\mathfrak{F}$ gehören und ist $\mathfrak{K}$ fremd zur Strecke $\mathfrak{t} = \overline{A_0 B_0}$, so liegt $\mathfrak{K}$ in der Summe der, von $\mathfrak{F}_0 + \mathfrak{t}$ und von $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{F}$ begrenzten, beschränkten Gebiete, die wegen B. 1. a) beide in $\mathfrak{k}_1$ liegen, woraus die Beh. folgt. Hat schließlich $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{F}$ genau zwei (innere) Punkte gemeinsam und mit $\mathfrak{t}$ mindestens einen, also genau zwei (ev. zusammenfallende), so folgt die Beh. aus A. 5. 2.

VIII. Sind die Forderungen A. 4. erfüllt und liegt (mindestens) ein Punkt der konvexen Hülle $K(\mathfrak{F}_0)$ von $\mathfrak{F}_0$ in $\mathfrak{k}_2$, so ist die Forderung B. 1. a) von selbst erfüllt. Gelten außerdem A. 1., A. 5, B. 1. b), B. 3., B. 4, so ist überdies B. 2. erfüllt.

Bew.: Wegen $r_2 = 2^{-3} \cdot r_1$ folgt B. 1. a) aus A. 4. — Ferner folgt wegen $r_1 = 2^{-3} \cdot r_0$ aus A. 5. 1. bzw. aus VII. (sofern die Vor. für VII. erfüllt sind), daß B. 2. gilt.

2. 4. Konstruktion eines Abrundungsbogens $\mathfrak{F}$.

Es sei also $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ vorgelegt. Entsprechend zu Nr. 2. 2., B. 4. unterscheiden wir die folgenden Fälle:

2. 4. 1. In Q liegt ein Dorn vor.

2. 4. 2. In Q liegt kein Dorn vor, aber es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von Q auf $\mathfrak{A}$, in welcher die Durchmesserlängen der Maximalsekanten von $\mathfrak{A}$ eine positive untere Schranke q besitzen.

2. 4. 3. Es liegt weder Fall 2. 4. 1. noch Fall 2. 4. 2 vor.

Zu 2. 4. 1. *I.* **a)** Wir konstruieren $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{J}'$ wie in Nr. 2. 3., II. angegeben. — **b)** Wir wählen den in Nr. 2. 1. 2. 1. genannten Radius r_0 derart (was immer möglich ist), daß für $\vartheta = \Theta = 2^{-4}$ die Eigenschaft (k), I.—VI. (Nr. 2. 1. 2. 1.) erfüllt ist. Gemäß Nr. 2. 3., I. kann (und soll) dann der in a) konstruierte $\mathfrak{J}_0$ so verkleinert werden, daß A. 1.—A. 5. auch erfüllt sind für das so verkleinerte r_0. — **c)** Nunmehr werde $\mathfrak{J}_0$ (in der Ebene von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$) in eine solche Lage gebracht: c_1) daß A' mit A_2 auf $\mathfrak{A}_2$ zusammenfällt (vgl. Nr. 2. 1. 3.); c_2) daß in A_2 die Halbtangenten h_a und h'_a an $\mathfrak{A}_2$ bzw. an $\mathfrak{J}'$ zusammenfallen; c_3) daß $\mathfrak{J}_0$ auf der entgegengesetzten Seite der Tangente in A_2 an $\mathfrak{A}$ liegt wie $\mathfrak{A}$.

II. Zufolge Ziff. I. liegt die konvexe Hülle $K_0 = K(\mathfrak{J}_0)$ von $\mathfrak{J}_0$ ganz innerhalb $\mathfrak{k}_1\mathfrak{S}$, abgesehen nur von A_2; dies folgt aus Nr. 2. 2., A. 4. und aus der Voraussetzung, daß im betrachteten Falle ein Dorn vorliegt, sodaß also $\mathfrak{S}$ und K_0 auf der konvexen Seite von $\mathfrak{A}$ gelegen ist. Somit ist Nr. 2. 2., B. 1. erfüllt. Ferner ist zufolge Nr. 2. 3., VIII. auch Nr. 2. 2., B. 2. erfüllt, sobald B. 3. und B. 4. sichergestellt sind, was durch die nachstehende Konstruktion erreicht wird.

III. Um B. 3. bis B. 5. sicherzustellen, bewegen wir jetzt $\mathfrak{J}_0$ stetig derart, daß der Punkt A' von $\mathfrak{J}_0$, als Punkt A'_2 von $\mathfrak{A}_2$ betrachtet, monoton auf $\mathfrak{A}_2$ von A_2 aus gegen Q wandert und daß dabei stets Ziff. I., c_1)—c_3) erfüllt bleiben, genauer: Daß in A'_2 die Halbtangenten an $\mathfrak{J}_0$ und an den Teilbogen $\widehat{A'_2 Q}$ von $\mathfrak{A}_2$ stets zusammenfallen, ferner daß K_0 stets auf der konvexen Seite von $\mathfrak{A}$ bleibt.

IV. Im Verlaufe der in Ziff. III. festgelegten Bewegung stellt sich eine „erste Lage" von A'_2 bzw. von $\mathfrak{J}_0$ ein, bei welcher K_0 einen Punkt mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat. Diese *„erste", mit A' bezeichnete Lage* von A'_2 muß (nicht nur von A_2, sondern auch) von Q verschieden sein; denn der (entgegen dem Uhrzeigersinn gemessene) Winkel in A'_2 zwischen den Halbtangenten an den Teilbogen $\widehat{A'_2 B_0}$ von $\mathfrak{F}_0$ und an den Teilbogen $\widehat{A'_2 A}$ von $\mathfrak{A}$ ist (gemäß Ziff. I., c_2)) stets gleich π, also größer als $|\omega|$. Immer liegt in der „ersten Lage" noch K_0 in $\mathfrak{k}_1\mathfrak{S}$.

Es wird also K_0 von $\mathfrak{B}$ gestützt und zwar in (mindestens) einem Punkte, der von Q und von B verschieden, also innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist [16]). Bezüglich dieser Stützpunkte unterscheiden wir die folgenden beiden Möglichkeiten [17]): *Erstens:* Mindestens ein Stützpunkt liegt im Innern des Teilbogens $\mathfrak{F}'$; *zweitens:* Alle Stützpunkte liegen in dem zu $\mathfrak{F}'$ fremden Teile $\mathfrak{R}$ der Begrenzung von $\mathfrak{K}_0$, d. h. auf dem abgeschlossenen Bogen $\widehat{B'' B_0}$ oder auf der Strecke $\overline{B_0 A_0}$ oder auf dem Bogen $\widehat{A_0 A'}$ ausschließlich A'.

V. Es kann „Zweitens" von Ziff. IV. nicht eintreten. Ist nämlich C einer der in Betracht kommenden Stützpunkte, also $C \varepsilon \mathfrak{R}$, so gilt gemäß der in Ziff. I., a) getroffenen Wahl von A' auf $\mathfrak{F}_0$ folgendes: Die zur Halbtangente h'_a an $\mathfrak{A}''$ (und $\mathfrak{F}'$) in A' parallele und gleichgerichtete, von C ausgehende Halbgerade verläuft in der Nähe von C im Innern von K_0 und damit im Innern von $\mathfrak{S}$. Ferner ist C Stützpunkt von K_0 im Innern von $\mathfrak{B}$. Daher muß K_0, soweit K_0 gemäß Ziff. III. bewegt wird, für alle, zu A' hinreichend benachbarten Lagen von A'_2 auf $\mathfrak{A}_2$ zwischen A_2 und A' Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam haben (die beliebig nahe bei C liegen). Dann aber könnte A' nicht die „erste Lage" von K_0 liefern.

VI. Es liege also „Erstens" der Ziff. IV. vor. Dabei sei mit A' (wieder) die „erste Lage" von A'_2 auf $\mathfrak{A}_2$ bezeichnet und mit B' der sicher vorhandene, auf $\mathfrak{F}_0$ *an A' nächstgelegene*, im Innern von $\mathfrak{F}'$ gelegene Punkt, welcher zu $\mathfrak{B}$ gehört. Da $\mathfrak{B}$ in B' von K_0 gestützt wird, fallen gewiß in B' die Tangenten an $\mathfrak{B}$ und an $\mathfrak{F}_0$ zusammen.

---

16) Sogar innerer Punkt von $\mathfrak{B}_1$.

17) Die Fallunterscheidung ist so gewählt, dass die Einführung neuer Hilfspunkte vermieden wird. An sich könnte nämlich an Stelle von B'' auch derjenige Punkt von $\widehat{A' B_0}$ verwendet werden, welcher von A' verschieden und in welchem die Tangente an $\mathfrak{F}_0$ parallel ist zur Tangente an $\mathfrak{F}_0$ in A'.

Es fallen aber in B' sogar die *Halb*tangenten h_f und h_b an $\mathfrak{F} = \widehat{B'A'}$ bzw. an $\mathfrak{B}'' = \widehat{B'Q}$ zusammen. In der Tat: Jedenfalls ist jetzt Nr. 2. 2., B. 1., B. 3. und B. 4. für $\mathfrak{F}_0$ bzw. für $\mathfrak{F}$ erfüllt; zufolge Nr. 2. 3., VI. liegt daher $\mathfrak{F}$ im Innern von $\mathfrak{c} = \mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'' + \overline{A'B'}$. Würden nun h_f und h_b nicht zusammenfallen, so würde h_f mit der Halbtangente h_b^* in B' an $\mathfrak{B}' = \widehat{B'B}$ zusammenfallen und es müßte daher der Teilbogen $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ in der Nähe von B' im Innern von $\mathfrak{c}$ verlaufen, im Widerspruch mit Nr. 2. 3., VI. Es ist also Nr. 2. 2., B. 5. und (gemäß Ziff. II.) auch Nr. 2. 2., B. 2. erfüllt, womit für $\mathfrak{F}$ die Forderungen Nr. 2. 2., B. 1.—5. sämtlich sichergestellt sind.

Zu 2. 4. 2. *I.* **a)** Wie in Nr. 2. 4. 1., I. a). — **b)** Wieder setzen wir $\vartheta = \Theta = 2^{-4}$, wählen aber r_0 von vorneherein so klein, daß $\mathfrak{A}$ selbst eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von Q auf $\mathfrak{A}$ von der in Nr. 2. 4. 2 genannten Art ist und daß gleichzeitig die Eigenschaft (k) der Nr. 2. 1. 2. 1. erfüllt ist. Sodann verkleinern wir $\mathfrak{F}_0$ ähnlich so, daß sowohl Nr. 2. 2., A. 1.—5. erfüllt sind, als auch *die Durchmesserlängen aller Maximalsekanten von* $\mathfrak{F}_0$ *kleiner sind als* $2^{-1}q$. (Auch diese letztere Eigenschaft bleibt bei etwaiger weiterer ähnlicher Verkleinerung erhalten). — **c)** Wir verfahren wie in Nr. 2. 4. 1., I. c), wobei nur $\mathfrak{c}_3$) ersetzt wird durch folgende Forderung: Es soll $\mathfrak{F}_0$ auf der gleichen Seite der Tangente in A' an $\mathfrak{A}$ liegen wie $\mathfrak{A}$ selbst.

II. Entsprechend zu Nr. 2. 4. 1., II. zeigen wir, daß Nr. 2. 2., B. 1. erfüllt ist. Der Beweis verläuft hier so: Es genügt (vgl. Nr. 2. 3., VIII.) zu zeigen, daß $\mathfrak{F}_0$ ganz auf der konkaven Seite von $\mathfrak{A}$ verläuft. Um letzteres einzusehen, bemerke man: Da der Krümmungsradius von $\mathfrak{F}_0$ in $A_2 = A'$ kleiner ist als der von $\mathfrak{A}$ in A_2 (gemäß Ziff. I. b)), so muß $\mathfrak{F}_0$ jedenfalls in einer Umgebung von A_2 auf der konkaven Seite von $\mathfrak{A}$ liegen. Es kann aber $\mathfrak{F}_0$ mit $\mathfrak{A}$ keinen von A_2 verschiedenen Punkt P gemeinsam haben; denn sonst wäre derjenige Kreis durch P, welcher in A_2 den $\mathfrak{A}$ und zugleich den $\mathfrak{F}_0$ berührt, eine gemeinsame Maximalsekante von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}_0$, was nach der in Ziff. I. b) über $\mathfrak{F}_0$ gemachten Annahme unmöglich ist. Zufolge Nr. 2. 3., VIII. ist wieder Nr. 2. 2., B. 2. erfüllt, falls B. 3. und B. 4. sichergestellt sind.

III.—VI. Die entsprechenden Überlegungen von Nr. 2. 4. 1., III.—VI. übertragen sich ohne weiteres auf den vorliegenden Fall. Man hat nur zu beachten, daß im Verlaufe der gemäß III. vorgenommenen Bewegung die konvexe Hülle $K(\mathfrak{F}_0)$ ganz auf der konkaven Seite von $\mathfrak{A}$ gehalten werden kann, da die Schlüsse der Ziff. II. entsprechend Giltigkeit behalten.

Zu 2. 4. 3. *I.* **a)** Wie in Nr. 2. 4. 1., I. a). — **b)** Wir wählen Θ mit $0 < \Theta < 2^{-4}$ so klein, daß folgendes gilt: Es sei h eine von A' ausgehende Halbgerade, welche außerhalb $K(\mathfrak{F}_0)$ verläuft (abgesehen von A') und welche mit der Halbtangente h'_a in A' an $\mathfrak{F}'$ einen von Null verschiedenen Winkel bildet, der absolut nicht größer als $2\pi\Theta$ ist. Die zu h komplementäre Halbgerade h^* hat dann mit der Begrenzung von $K(\mathfrak{F}_0)$ einen von A' verschiedenen Punkt A'' gemeinsam und *dieser soll auf dem Teilbogen* $\widehat{A_0A'}$ *von* $\mathfrak{F}_0$ *liegen,* also fremd sein zu $\widehat{A'B_0}$ und zur Strecke $\overline{A_0B_0}$. Diese Eigenschaft von Θ ist gegenüber ähnlicher Verkleinerung von $\mathfrak{F}_0$ unempfindlich. — Wir setzen jetzt noch $\vartheta = \Theta$ und verfahren im übrigen wie in Nr. 2. 4. 1., I. b). — **c)** Nunmehr werde $\mathfrak{F}_0$ in eine solche Lage gebracht: c_1) daß A' mit A_2 auf $\mathfrak{A}_2$ zusammenfällt; c_2) daß die Halbtangente h'_a an $\mathfrak{F}'$ in A' zusammenfällt mit derjenigen Halbgeraden h''_a, welche A_2 als Anfangspunkt besitzt und welche Q enthält; c_3) daß $K(\mathfrak{F}_0)$ auf der entgegengesetzten Seite der Trägergeraden v von h''_a liegt wie der (zunächst mit $\mathfrak{A}_2$ identische) Teilbogen $\widehat{A'Q}$ von $\mathfrak{A}_2$.

II. Wegen I. b) und I. c_1) ist Nr. 2. 2., B. 1. a) erfüllt, wie aus Nr. 2. 3., VIII. folgt. (Die Erfüllung der Forderungen B. 1. b), sowie B. 3.—B. 5. wird durch die nachstehende Konstruktion von $\mathfrak{F}$ sichergestellt und damit wegen Nr. 2. 3., VIII. auch B. 2.). Wegen der Wahl von Θ in I. b) folgt weiter (aus I. c_2) und Nr. 2. 2., B. 1. a)), daß der Teilbogen $\widehat{A_2A}$ von $\mathfrak{A}$ die Begrenzung von $K_0 = K(\mathfrak{F}_0)$ nur in Punkten von $\widehat{A_0A'}$ trifft (abgesehen von A'). Denn zunächst gilt: Jede von $A' = A_2$ ausgehende und einen Punkt T von $\widehat{A_2A}$ enthaltende Halbgerade (einschließlich der Halbtangente h_2 an $\widehat{A_2A}$ in A_2) bildet mit der zu h'_a komplementären Halbgeraden $\tilde{h}_a$ einen Winkel absolut kleiner als $\pi\Theta$; es gibt nämlich zu $\tilde{h}_a$ und zu jeder der Halbgeraden $\overrightarrow{A_2T}$ eine zu ihr parallele und gleichgerichtete Halbtangente an $\mathfrak{A}$, und es ist für r_0, Θ die Forderung Nr. 2. 1. 2. 1., V. erfüllt. Mithin liegt $\overset{\frown}{A_2A}$ ganz in demjenigen Winkelraum von der Größe (absolut genommen) $2\pi\Theta$, welcher von $\tilde{h}_a$ begrenzt wird und in welchem h_2 enthalten ist. In Rücksicht auf die in Ziff. I. b) getroffene Wahl von Θ folgt, daß die auf der Begrenzung von K_0 gelegenen Punkte von $\overset{\frown}{A_2A}$ zu $\overset{\frown}{A_0A'}$ gehören.

Da in Q kein Dorn vorliegen soll, also $\mathfrak{S}$ auf der konkaven Seite von $\mathfrak{A}$ liegt, so folgt aus dem soeben über $\overset{\frown}{A_2A}$ Bewiesenen zusammen mit Ziff. I. c_3): Es ist $K_0\mathfrak{S}$ ein konvexer Körper K^*, in dessen Begrenzung jedenfalls $\overset{\frown}{A'B_0} + \overline{B_0A_0}$ als Teilbogen enthalten ist. K^* liegt zugleich innerhalb k_1.

III. Wir bewegen nun $\mathfrak{J}_0$ stetig derart, daß der Punkt A' von $\mathfrak{J}_0$ monoton auf $\mathfrak{A}_2$ von A_2 aus gegen Q wandert und daß dabei stets Ziff. I. c_2) und c_3) entsprechend erfüllt bleibt.

IV. Wie in Nr. 2. 4. 1., IV. mit folgenden Abänderungen. Die „erste Lage“ von A' auf $\mathfrak{A}_2$ muß (wieder) von Q verschieden sein aus folgendem Grunde: Im vorliegenden Falle 2. 4. 3. ist der Winkel in A' zwischen den Halbtangenten an den Teilbogen $\overset{\frown}{A'B_0}$ bzw. $\overset{\frown}{A'A}$ von $\mathfrak{J}_0$ bzw. $\mathfrak{A}$ absolut größer als ω, wenigstens für alle A' in hinreichender Nähe von Q auf $\mathfrak{A}$. Ferner ist K_0 durch K^* zu ersetzen; also: In der „ersten Lage“ wird K^* von $\mathfrak{B}$ in inneren Punkten von $\mathfrak{B}$ gestützt.

V. Auch hier kann „Zweitens“ (vgl. Nr. 2. 4. 1., IV.) nicht eintreten. Fällt nämlich der fragliche Stützpunkt C nach B'' oder in den (zu $\mathfrak{J}'$ fremden) Teil der Begrenzung von K^*, so weist zunächst die zu h'_a parallele und gleichgerichtete, von C ausgehende Halbgerade $\overrightarrow{CU}$ ins Innere von K^*, also auch von $K(\mathfrak{J}_0)$. Das gleiche gilt aber auch für die zur Halbtangente $\tilde{h}_2$ an $\overset{\frown}{A'Q}$ in A' parallele und gleichgerichtete Halbgerade durch C, weil diese in dem von $\overrightarrow{CU}$ und $\overrightarrow{CA'}$ gebildeten (spitzen) Winkel liegt, welcher in der Umgebung von C zu K^* gehört.

VI. Nun übertragen sich die Überlegungen von Nr. 2. 4. 1., VI. ohne weiteres, sobald man überall K_0 durch K^* ersetzt. Es ist übrigens auch Nr. 2. 2., B. 1. b) erfüllt.

2. 5. In den folgenden Nummern wird gezeigt:

Die in Nr. 2. 4. konstruierte Abrundung ist ordnungsfest;

d. h.: Aus dem Erfülltsein der Forderungen Nr. 2. 2. folgt, daß
$\mathfrak{E}' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{J} + \mathfrak{B}' = \mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}'_o$ bzw. $\mathfrak{Z}'_o = (\mathfrak{Z}_o - \mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}_o) + \mathfrak{E}'$ die gleiche Z-Ordnung besitzen wie $\mathfrak{E} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}_o$ bzw. $\mathfrak{Z}_o$; dabei ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = \mathfrak{k}_o\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' = \mathfrak{k}_o\mathfrak{B}$.

Dem Beweise schicken wir folgende Bemerkungen voraus:

I. Wegen Nr. 2. 1. 2. 1., I. ist die Z-Ordnung von $\mathfrak{Z}'_o$, sobald nur $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{k}_o$ liegt, mindestens so groß wie die von $\mathfrak{Z}_o$. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß[18]) $M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}'_o) \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}_o)$ für jeden Kreis $\mathfrak{K}$.

II. Falls $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{k}_o$ liegt, genügt sogar der Nachweis, daß $M(\mathfrak{K}\mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}'_o) \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}_o)$ für *jeden* Kreis $\mathfrak{K}$; denn alsdann ist $M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}'_o) \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}_o)$ wegen $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{Z}'_o - \mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}'_o)) = M(\mathfrak{K}(\mathfrak{Z}_o - \mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}_o))$. Dabei darf aber *abgesehen* werden *von solchen Kreisen* $\mathfrak{K}$, für welche

IIIa. sowohl $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{Z}_o - \mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}_o)) = M(\mathfrak{K}(\mathfrak{Z}'_o - \mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}'_o)) = 0$ als auch $M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}'_o) \leq 4$. Denn die Z-Ordnung im Punkte Q ist, weil Q Ecke oder Spitze, mindestens Vier, also hier $M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}'_o)$ höchstens gleich der Z-Ordnung von $\mathfrak{Z}_o$

IIIb. für welche $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'')) \geq 3$. Denn daraus folgt $M(\mathfrak{K}\mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}'_o) \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}_o)$, weil $\mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}_o = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{k}_o\mathfrak{Z}'_o = \mathfrak{A}' + \mathfrak{J} + \mathfrak{B}'$ und $M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) \leq 3$.

2. 6. Wir haben für die Lage eines Kreises $\mathfrak{K}$ folgende, alle Möglichkeiten erschöpfenden Fälle[19]):

2\. 6. 1. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) = 0$.
2\. 6. 2. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) = 1$.
2\. 6. 3. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) = 2$; $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}'') + M(\mathfrak{K}\ .\ '') \geq 1$.
2\. 6. 4. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) = 2$; $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}'') + M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}'') = 0$.
2\. 6. 5. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) = 3$.

Zu 2. 6. 1. Ohne weiteres folgt $M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}'_o) \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{Z}_o)$.

---

18) Mit $M(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ wird im Folgenden die *Mächtigkeit des Durchschnittes* $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$ bezeichnet Ferner wird weiter unten im Text mit $\overline{\mathfrak{H}}$ bzw. $\underline{\mathfrak{H}}$ die abgeschlossene Hülle bzw. der offene Kern der Menge $\mathfrak{H}$ bezeichnet. — Man beachte noch, daß $\mathfrak{k}_0$ gemäß Nr 2. 1. 2. 1. abgeschlossen ist.

Zu 2. 6. 2. Da $\mathfrak{A}''+\mathfrak{B}''+\mathfrak{F}$ einfache, geschlossene Kurve ist (Nr. 2. 3.; IV.), folgt $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}'')+M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}'')\geq 1$, also $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')\leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{C})$. Somit ist Nr. 2. 5., II. anwendbar.

Zu 2. 6. 3. Wegen $M(\mathfrak{K}\mathfrak{F})=2$ muß $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}''+\mathfrak{B}''))\geq 2$ sein (vgl. zu 2. 6. 2.), sodaß wieder $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')\leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{C})$ folgt und Nr. 2. 5., II. anwendbar ist.

Zu 2. 6. 4. Gemäß Nr. 2. 2., B. 2. 2., liegt $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{k}_0$, sodaß $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{Z}'_0-\mathfrak{k}_0\mathfrak{Z}'_0))=0$. Gilt noch $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')+M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')\leq 2$, so ist $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')\leq 4$ und daher Nr. 2. 5., IIIa. anwendbar. — Es sei also $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')+M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')\geq 3$. Da jedenfalls *$A'$ sowie B' außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen* [19]) (Nr. 3. 5.), und *ebenso A und B* (Nr. 2. 2., B. 2. 2.), so gilt: $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')\equiv M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')\equiv 0 \pmod 2$. Wegen $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')\leq 3$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')\leq 3$ und $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')+M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')\geq 3$ kann daher nur $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')=M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')=2$ sein. Für den Augenblick seien nun $F_1, F_2, A_1, A_2, B_1, B_2$ die Punkte von $\mathfrak{K}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{K}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{K}\mathfrak{B}'$, wobei A_1 bzw. B_2 auf $\mathfrak{C}'$ benachbart sein soll zu F_1 bzw. F_2. Da $(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}')$ fremd ist zu dem durch $(\mathfrak{A}''+\mathfrak{B}''+\mathfrak{F})$ begrenzten, beschränkten Gebiet (Nr. 2. 3., VI.) und da wegen $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}''+\mathfrak{B}''))=0$ einer der durch F_1, F_2 begrenzten, etwa mit $\mathfrak{K}''$ zu bezeichnenden Bogen auf $\mathfrak{K}$ ganz in diesem Gebiete liegt, so ist $\mathfrak{K}''$ fremd zu $(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}')$. Somit liegen A_1, A_2, B_1, B_2 auf $\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}-\mathfrak{K}''$.

2. 6. 4. 1. Wir behaupten jetzt: A_2, A_1, F_1, F_2 und ebenso F_1, F_2, B_2, B_1 liegen auf $\mathfrak{K}'$ und auf $\mathfrak{C}'$ in der gleichen Reihenfolge.

Bew.: Zunächst ist die Beh. richtig für A_2, A_1, F_1, F_2. Andernfalls nämlich müßte man beim Durchlaufen von $\mathfrak{K}'$ von F_1 aus zunächst auf A_2 stoßen. Da A' außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt, müssen die Teilbogen $\widehat{F_1A_1}$ und $\widehat{A_2A}$ von $\mathfrak{C}'$ (bis auf die Endpunkte) außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen. Es würde also der Endpunkt A

19) O. B. d. A. können wir annehmen, daß für den Ausgangskreis $\mathfrak{K}$ die Punkte von $\mathfrak{K}\mathfrak{C}$ usw. sämtlich Schnittpunkte sind; denn etwa vorhandene Stützpunkte können stets im Schnittpunkte „aufgelöst" werden, ohne daß dabei $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C})$ usw. verkleinert wird. (Vgl. Haupt, Zur Theorie der Realitätsordnungen, Monatshefte f. Math. u. Physik **40** (1933), S. 18 (Reduktionssatz)). Ferner können und wollen wir o. B. d. A. annehmen, daß A' und B' nicht auf $\mathfrak{K}$ liegen; denn andernfalls könnten wir dies ohne Verminderung von $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')$ durch beliebig kleine (stetige) Abänderung von $\mathfrak{K}$ gemäß des Reduktionssatzes stets erreichen.

von $\mathfrak{A}'$ im Innern desjenigen beschränkten Gebietes liegen, welches durch die zwischen F_1 und A_1 gelegenen Teilbogen $\mathfrak{K}'_a$ bzw. $\mathfrak{C}'_a$ von $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{C}'$ begrenzt wird. Folglich würde die in $\mathfrak{f}_0$ gelegene, einfache, geschlossene Kurve $\mathfrak{K}'_a + \mathfrak{C}'_a$ von der zur Halbtangente in A an $\mathfrak{A}$ komplementären Halbgeraden getroffen. Dies widerspricht aber der Vor. über $\mathfrak{f}_0$ (vgl. Nr. 2. 1. 2. 1., Eigenschaft (k), IV.). — Ebenso folgt die Beh. für F_1, F_2, B_2, B_1.

2. 6. 4. 2. Aus der in Nr. 2. 6. 4. 1. bewiesenen Beh. folgt: Hält man F_1 *und* F_2 *fest,* läßt man ferner A_1 *gegen* F_1 auf $\mathfrak{C}'$ sich *bewegen*[20]), so rückt A_2 gegen A, ferner B_2 gegen F_2 und B_1 gegen B[20]). Wir behaupten, daß man bei Fortsetzung dieser stetigen Änderung von $\mathfrak{K}$ zu einem Kreise $\mathfrak{K}^*$ gelangt, welcher einem Grenzfall von 2. 6. 5. 2. entspricht und für welchen $M(\mathfrak{K}^*\mathfrak{C}') \geq M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')$ ist, wenn $\mathfrak{K}$ den bei 2. 6. 4. ursprünglich zu Grunde gelegten Kreis bezeichnet. Nun wird später gezeigt, daß in besagtem Grenzfall die Z-Ordnung von $\mathfrak{C}$ nicht kleiner ist als $M(\mathfrak{K}^*\mathfrak{C}')$. Folglich ist durch unsere Zurückführung von 2. 6. 4. auf 2. 6. 5. 2. auch 2. 6. 4. erledigt.

Bew.: „Zunächst", d. h. bevor Gewinne oder Verluste durch Herein- oder Herausrücken[20a]) über die Endpunkte A, B, A', B' von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{J}$ stattgefunden haben, können *innerhalb* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{J}$ keine Verluste und keine Gewinne stattfinden: Keine Verluste wegen der Art der Bewegung von A_1, A_2 usw.; keine Gewinne deswegen, weil innerhalb $\mathfrak{A}$ usw. immer nur eine gerade Anzahl Punkte gewonnen werden kann und weil „zunächst" $2 \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}) \leq 3$, $2 \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) \leq 3$, $2 \leq M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}) \leq 3$. Ferner können wir davon absehen, daß „zunächst" in A' oder in B' Punkte gewonnen werden in der Weise, daß z. B. in A' zwei Punkte neu entstehen, von denen der eine nach $\mathfrak{A}'$ dem A_1 entgegen, der andere nach $\mathfrak{J}$ dem F_1 entgegenrückt; denn es würde dann unter Erhöhung von $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')$ um zwei einer der Fälle 2. 6. 5. sich einstellen, die entweder als unmöglich oder

---

20) Bei stetiger Überführung des Kreises $\mathfrak{K}$ in andere (durch F_1, F_2 gehende) Kreise. Vgl. a. a. O.[19]), S. 24, auch Journ. f. d. r. u. angew. Math. **180** (1939), Nr. 1. 4. (S. 48 ff.).

20a) Von (Schnitt-)Punkten von $\mathfrak{K}\mathfrak{C}'$.

als mit der Ordnungsfestigkeit der Abrundung verträglich nachgewiesen werden. Würde schließlich „zunächst“ $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}''+\mathfrak{B}''))>0$ werden, so gelangten wir ohne Änderung von $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')$ zu einem Falle 2. 6. 3. mit $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')=M(\mathfrak{K}\mathfrak{C})$. Solange aber $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}'')=M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}'')=0$ ist, bleiben A und B außerhalb $\mathfrak{K}$ (Nr. 2. 2., B. 2. 2.). O. B. d. A. können wir also annehmen: Bevor A_1 mit A' oder B_2 mit B' zusammengerückt ist, kann A_2 nicht nach A und B_1 nicht nach B rücken, und ebensowenig können Punkte durch Hereinrücken über A oder B gewonnen werden.

Somit sind, unter dieser Annahme, bei $M(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}''+\mathfrak{B}''))=0$, Gewinne und Verluste ausgeschlossen, es sei denn, daß $A_1=A'$ oder $B_2=B'$ oder daß beides gleichzeitig eintritt. Letzteres ist indes unmöglich, da sonst $M(\mathfrak{K}\mathfrak{F})>4$ würde. Ferner kann nicht $B_2=B'$ werden, bevor $A_1=A'$ eintritt. Denn A' ist der kleinere Endpunkt von $\mathfrak{F}$ (vgl. Nr. 2. 2., A. 2.), sodaß A' im Innern einer Maximalsekante von $\mathfrak{F}$ oder auf ihr liegt (Nr. 3. 2.); andererseits würde aus $B_2=B'$, $A_1 \neq A'$ folgen, daß $\mathfrak{K}$ Maximalsekante von $\mathfrak{F}$ ist, in deren Äußerem A' liegt.

Es muß also bei fortgesetzter Bewegung von A_1 gegen F_1 hin einmal $A_1=A'$ werden, bevor $B_2=B'$ eintritt. ($\mathfrak{K}$ bleibt während des ganzen Prozesses innerhalb $\mathfrak{k}_0$). Dann aber liegt ein Grenzfall vom 2. 6. 5. 2. vor, nämlich von $M(\mathfrak{K}\mathfrak{F})=3$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')=1$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')=2$ (vgl. 2. 6. 5. 2., Zusatz). Und bei dieser Zurückführung von 2. 6. 4. auf 2. 6. 5. 2. ist $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')$ nicht vermindert worden.

Zu 2. 6. 5. Hier soll also $M(\mathfrak{K}\mathfrak{F})=3$ sein. Zufolge Forderung Nr. 2. 2., B. 2. 1. liegt $\mathfrak{K}$ jedenfalls innerhalb $\mathfrak{k}_0$, also A sowie B im Äußern von $\mathfrak{K}$. Ferner[19]) liegt B' im Äußern von $\mathfrak{K}$ und A' im Innern, da B' der größere Endpunkt von $\mathfrak{F}$ ist (Nr. 2. 2., A. 2. und Nr. 3. 2.). Mithin muß $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')\equiv 1$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')\equiv 0 \pmod 2$ sein. Es kommen also nur folgende vier Fälle in Betracht:

2. 6. 5. 1. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')=1$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')=0$;
2. 6. 5. 2. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')=1$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')=2$;
2. 6. 5. 3. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')=3$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')=0$;
2. 6. 5. 4. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}')=3$, $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')=2$.

In den Fällen 2. 6. 5. 2. und 2. 6. 5. 4. muß in B' ein Konvexpunkt von $\mathfrak{C}'$ vorliegen, da andernfalls $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}')=0$ wäre (wegen

Nr. 3. 3.). Es seien A_3, A_2, A_1, F_1, F_2, F_3, B_3, B_2 die Punkte von $\mathfrak{K}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{K}\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}\mathfrak{B}'$ und zwar in ihrer Reihenfolge beim Durchlaufen von $\mathfrak{C}'$; wenn $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}') = 1$ bzw. $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}') = 0$, fallen A_1 und A_2 bzw. B_3 und B_2 weg.

Zu 2. 6. 5. 1. Erledigt sich durch Nr. 2. 5., IIa.

Zu 2. 6. 5. 2. a) Weil B und B' außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen, ergibt sich zunächst wie in 2. 6. 4. 1., daß F_1, F_2, F_3, B_3, B_2 in dieser gleichen Reihenfolge auch auf $\mathfrak{K}$ liegen. Daher gilt für $\mathfrak{K}(\mathfrak{J} + \mathfrak{B}')$ der gewöhnliche Monotoniesatz[20]), wenn wir F_1 *und* F_2 *festhalten und* F_3 *gegen* B' *bewegen.* Dann bewegt sich B_3 gegen B' und B_2 gegen B; dabei kann B_2 über B oder A_1 über A weg jedenfalls solange nicht verloren gehen, als $\mathfrak{K}$ innerhalb $\mathfrak{k}_0$ liegt, mithin solange $M(\mathfrak{K}\mathfrak{J}) = 3$ ist. Ferner können durch Herein- bzw. Herausrücken über A' keine Gewinne oder Verluste in $\mathfrak{J}$ stattfinden, solange F_3 nicht über B' aus $\mathfrak{J}$ herausrückt; denn es ist $\mathfrak{J}_0$ bzw. $\mathfrak{J}$ von der Z-Ordnung Drei. Eben deshalb kann auch nicht zuerst B_3 über B' nach $\mathfrak{J}$ hereinrücken. Ferner sind innerhalb $\mathfrak{B}'$ Gewinne und Verluste ausgeschlossen, solange keine Verluste und Gewinne über B oder B' erfolgen. Und schließlich können wir o. B. d. A. davon absehen, daß innerhalb $\mathfrak{A}'$ zwei Punkte gewonnen werden, bevor Verluste bzw. Gewinne über A, A', B oder B' erfolgt sind; denn sonst läge Fall 2. 6. 5. 4. vor, welcher später als unmöglich nachgewiesen wird. — **b)** Es bleibt somit nur der Fall zu betrachten, daß F_3 (ev. gleichzeitig mit B_3) nach B' rückt. Nun ist $\mathfrak{K}$ Maximalsekante von $\mathfrak{J}$, ferner B_0 der größere Endpunkt von $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{J}$ Teilbogen von $\mathfrak{J}_0$. Daher liegt der, F_1 nicht enthaltende, Teilbogen $\mathfrak{T} = \widehat{F_2F_3}$ von $\mathfrak{K}$ in der Nähe von F_3 und von F_2 außerhalb $K(\mathfrak{J}_0)$; überdies ist F_3 Schnittpunkt von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{J}_0$. Da nun $\mathfrak{J}_0$ (zufolge Nr. 2. 2., B. 5.) von $\mathfrak{B}$ in B' gestützt wird und da beide Bogen glatt sind, so liegt, falls $F_3 = B'$ wird, $\mathfrak{T}$ in der Nähe von F_3 außerhalb des, von $(\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{J})$ begrenzten, in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Gebietes $\mathfrak{G}$; und ferner kann (weil B' Schnittpunkt des jetzt erhaltenen Kreises $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{B}$) *insbesondere* B_3 *nicht gleichzeitig mit* F_3 *nach* B' *rücken.* Weil $\mathfrak{T}$ in der Nähe von F_2 innerhalb $\mathfrak{G}$ liegt und weil $\mathfrak{T}$ fremd ist zu $\mathfrak{J}$ bis auf F_2 und F_3, so enthält $\mathfrak{T}$ im

Innern einen, von A' und B' verschiedenen Punkt R von $(\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'')$. — **c)** Es kann R nicht auf $\mathfrak{B}''$ liegen, weil sonst $\mathfrak{K}'\mathfrak{B}$ vier Punkte enthielte, nämlich B_2, B_3, B', R. Weil schließlich A und B außerhalb $\mathfrak{K}'$ liegen, ist $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{C}) \equiv 0 \pmod 2$ und daher ist in $\mathfrak{K}'\mathfrak{C}$ außer den fünf Punkten B_2, B_3, B', R, A_1 noch ein sechster Punkt enthalten. Folglich ist $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{C}) = 6$ und die Z-Ordnung von $\mathfrak{C}$ also Sechs, mithin nicht kleiner als $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}') = M(\mathfrak{K}'\mathfrak{C}')$, w. z. z. w.

Zusatz: Der Grenzfall von 2. 6. 5. 2., in welchem ursprünglich $F_1 = A'$ ist, wird durch Zurückführung auf 2. 6. 5. 2. erledigt, indem man $\mathfrak{K}$ ohne Verminderung von $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}')$ beliebig wenig so abändert, daß F_1 ins Innere von $\mathfrak{F}$ zu liegen kommt. (Vgl. [19]).

Zu 2. 6. 5. 3. *I. Dieser Fall kann höchstens dann eintreten, wenn in Q ein Hut vorliegt.* In der Tat: Andernfalls müssen $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{B}$ auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinsamen Tangente in B' liegen; dies folgt aus der in Nr. 2. 1. 3. getroffenen Festsetzung betr. $\mathfrak{B}$. Daher muß dann $\mathfrak{A}''$ von derjenigen Halbgeraden $\mathfrak{h}$ mit dem Anfangspunkte F_1 getroffen werden, welche auf der Verbindungsgeraden von F_3 und F_1 liegt, aber F_3 nicht enthält. Nun verläuft derjenige von F_1 und F_3 begrenzte Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{K}$, in welchem F_2 nicht enthalten ist, in der Nähe von F_1 „zwischen" $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{h}$, d. h. in einem beschränkten Teilgebiet von $\mathfrak{S}$, welches von $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{F}$ begrenzt ist; denn A' liegt im Innern von $\mathfrak{K}$. Da ferner $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{h}$ und mit $\overset{\frown}{F_1 A'}$ (auf $\mathfrak{F}$) nur F_1 gemeinsam hat, so muß $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{A}''$ getroffen werden und zwar in demjenigen Teilbogen von $\mathfrak{T}$, welcher von F_1 und A_1 begrenzt ist und in welchem A_2 nicht enthalten ist. Somit hätte $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{A}$ mindestens vier Punkte gemeinsam, wenn $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}') = 3$ wie im vorliegenden Falle 2.6.5.3.

II. Da in Q ein Hut vorliegt, so kann Fall 2. 6. 5. 3. nur eintreten, wenn die Voraussetzung von Nr. 2. 2., B. 4. 2. erfüllt ist. Denn ein Dorn gemäß B. 4. 1. liegt alsdann nicht vor und im Falle der zweiten in B. 4. 1. zugelassenen Möglichkeit könnte $\mathfrak{K}$ nicht gemeinsame Maximalsekante von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{A}'$ sein (wegen Nr. 2. 4. 2., I. b). Es liegt also insbesondere *in A' ein Hut auf $\mathfrak{C}'$ vor* (Nr. 2. 3., III.).

III. Wegen $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}') = 3$ und $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}) \leq 3$ ist $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}'') = 0$. Weil A' im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, muß daher auch Q im Innern von $\mathfrak{K}$ liegen. Da B' außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt, folgt $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}'') \equiv 1 \pmod 2$.

IV. Ferner *ist* $\mathfrak{C}'$ *ein Konvexbogen.* Zunächst nämlich ist $\mathfrak{F} + \mathfrak{A}'$ konvex in A' (vgl. Ziff. II) und $\mathfrak{F} + \mathfrak{B}'$ in B', letzteres wegen Nr. 2. 2., B. 5. und weil in Q ein Hut vorliegt (vgl. Ziff. I.). Sodann besitzt $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{F} + \mathfrak{B}'$ keine parallelen Stützgeraden, wenn als Stützgeraden in A und in B nur die Tangenten gezählt werden. In der Tat: Wegen Nr. 2. 1. 2. 1., VI. besitzt $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ keine parallelen Stützgeraden. Da aber $\mathfrak{C}'$ mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Umgebungen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ der Endpunkte A bzw. B gemeinsam hat und da $\mathfrak{C}'$ in jedem seiner Punkte konvex ist (die Stützgeraden sich also bei Durchlaufung von $\mathfrak{C}'$ monoton drehen), kann es keine parallelen Stützgeraden an $\mathfrak{C}'$ geben.

V. Da $\mathfrak{C}'$ konvex ist, können wir auf die Punkte von $\mathfrak{K}\mathfrak{C}'$ den gewöhnlichen Monotoniesatz anwenden[20]), wenn wir F_2 *sowie* A_2 *fest*halten und A_1 *gegen* A' *sich bewegen lassen.* Dann wandert A_3 gegen A, ferner F_1 gegen A' und F_3 gegen B'. Solange $M(\mathfrak{K}\mathfrak{F}) = 3$ ist, können auf $\mathfrak{A}'$ keine Gewinne und Verluste über A hinweg erfolgen, weil dann A stets außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt (Nr. 2. 2.; B. 2. 1.); und entsprechendes gilt für $\mathfrak{B}'$ und B. Ferner sind im Innern von $\mathfrak{A}'$ Gewinne und Verluste ausgeschlossen, wenigstens solange $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}') = 3$. Ebenso kann „zunächst", d. h. solange $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}') = M(\mathfrak{K}\mathfrak{F}) = 3$ ist, vom Fall eines Gewinnes im Innern von $\mathfrak{B}'$ abgesehen werden, da wir sonst den, als unmöglich nachzuweisenden Fall 2. 6. 5. 4. vor uns hätten. Weiter kann „zunächst" weder $A_1 = A'$ noch $F_1 = A'$ noch beides gleichzeitig eintreten. Denn $\mathfrak{A}'$ bezw. $\mathfrak{F}$ sind Teilbogen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{F}_0$, welch letztere die Z-Ordnung Drei besitzen, sich in A' schneiden (vgl. Ziff. II) und deren kleinere Endpunkte Q bezw. A_0 sind[20b]). (Es liegt A_0 innerhalb $\mathfrak{S}$). Daher müssen die Teilbogen $\mathfrak{F}^* = \widehat{A'A_0}$ und $\widehat{A'Q}$ von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{F}_0$ im Innern ihrer gemeinsamen Maximalsekante $\mathfrak{K}$ liegen. Daraus folgt: Weil nach Konstruktion $\mathfrak{F}^*$ einen inneren Punkt A^* von $\mathfrak{A}'$

20b) Wäre nämlich Q der größere Endpunkt von $\mathfrak{A}$, so gäbe es eine Umgebung von Q auf $\mathfrak{A}$, in welcher die Schmiegkreise und damit (Nr. 3. 1.) die Maximalsekanten von $\mathfrak{A}$ eine positive untere Durchmesserschranke besäßen (vgl. die Vor. in Nr. 2. 1.).

enthält (vgl. zu 2. 4. 3.; II.), kann A_1 auf $\mathfrak{A}'$ nicht über A^* hinweg gegen A' rücken, solange $M(\mathfrak{K}\mathfrak{F}_0) = 3$; würde andererseits F_1 (innerhalb $\mathfrak{S}$) auf $\mathfrak{F}$ beliebig nahe an A' heranrücken, so müßte $\mathfrak{K}$ einen (Stütz-)Punkt auf $\mathfrak{A}$ in A' gewinnen, was mit $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}') = 3$ unverträglich ist. Da schließlich auch innerhalb $\mathfrak{F}$ Gewinne und Verluste „zunächst“ nicht möglich sind, so bleibt nur der Fall übrig, daß zuerst einmal $F_3 = B'$ wird. Wir behaupten, daß für die diesbezügliche Lage $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ alsdann $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{B}'') = 3$ ist, wobei B' als Punkt von $\mathfrak{K}'\mathfrak{B}''$ mitgezählt wird. In der Tat: Zunächst folgt wie zu 2. 6. 5. 2., b), daß im Innern des, F_1 nicht enthaltenden Teilbogens $\mathfrak{T} = \widehat{F_2 F_3}$ von $\mathfrak{K}'$ mindestens ein Punkt von $(\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'')$ liegt, der von A' und von B' verschieden ist. Im vorliegenden Falle ist aber $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}'') = 0$ (vgl. Ziff. III.). Daher ist $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{B}'') \geq 2$, wobei $B' = F_3$ mitgezählt ist. Wegen Ziff. III. folgt jetzt sogar $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{B}'') = 3$, w. z. z. w.

Somit ist $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{C}) = 6$ (für $F_3 = B'$), wobei $\mathfrak{K}'$ ganz in $\mathfrak{k}_0$ verläuft; daher besitzt $\mathfrak{C} = \mathfrak{k}_0\mathfrak{z}_0$ die Z-Ordnung 6. Andererseits war $M(\mathfrak{K}\mathfrak{C}') = 6$ für den ursprünglich zugrunde gelegten, ebenfalls in $\mathfrak{k}_0$ verlaufenden Kreis $\mathfrak{K}$. Dies widerspricht also nicht der Ordnungsfestigkeit unserer Abrundung. Damit ist 2. 6. 5. 3. erledigt.

Zu 2. 6. 5. 4. Für diesen Fall gelten unverändert die Feststellungen zu 2. 6. 5. 3., I.—IV. Ferner können wir (da $\mathfrak{C}'$ wieder konvex ist), wie in Ziff. V., bei festen A_2 und F_2 den Monotoniesatz[20]) anwenden. Dabei entfernen sich B_3 und B_2 voneinander, gehen also höchstens dadurch verloren, daß B_2 über B oder B_3 über B' aus $\mathfrak{B}'$ hinausrückt; und ersteres kann erst dann eintreten, wenn $M(\mathfrak{K}\mathfrak{F}) < 3$ geworden ist. Auch können innerhalb $\mathfrak{B}'$ keine Gewinne stattfinden, bevor $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}') \leq 1$ geworden ist. Im übrigen bleiben die (auf $A_3, \ldots, F_3$ sich beziehenden) weiteren Betrachtungen in Geltung insoweit aus ihnen folgt: Zuerst muß $F_3 = B'$ werden; bis dahin muß $M(\mathfrak{K}\mathfrak{A}') = 3$ und $M(\mathfrak{K}\mathfrak{B}') = 2$ bleiben mit $B_3 \neq B'$ (vgl. auch zu 2. 6. 5. 2.; b)), ferner muß $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{B}'') = 3$ werden, wobei $B' = F_3$ eingerechnet ist. Somit wäre $M(\mathfrak{K}'\mathfrak{B}) = 5$. Daher ist 2. 6. 5. 4. unmöglich.

2. 7. In Nr. 2. 6. ist gezeigt, daß die gemäß Nr. 2. 4. bzw. Nr. 2. 2. konstruierte „Abrundung" von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}'$ ordnungsfest ist, gleichgiltig ob dabei in A' eine Ecke auftritt oder nicht. *Im Falle einer Ecke in A' können wir aber diese Ecke stets durch eine ordnungsfeste Abrundung (mit überall scharfer Tangente) beseitigen.* In der Tat: Da A' ein innerer Punkt von $\mathfrak{A}$ sein muß, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von A' auf $\mathfrak{A}$ derart, daß für $\mathfrak{U}$ die Schmiegkreis- und damit überhaupt die Maximalsekanten-Durchmesser (vgl. Nr. 3. 1.) eine positive obere und untere Schranke besitzen. Gleiches gilt für den zweiten von A' auf $\mathfrak{C}'$ ausgehenden Bogen, nämlich für $\mathfrak{F}$, wie aus der Konstruktion von $\mathfrak{F}_0$ (vgl. Nr. 2. 2., A. 1.) hervorgeht. Entsprechend Nr. 2. 2., B. 4. 1. ist daher stets eine ordnungsfeste Abrundung der in A' auftretenden Ecke möglich, derart, daß in *beiden* Endpunkten des Abrundungsbogens scharfe Tangenten an $\mathfrak{C}'$ vorhanden sind. Damit ist gezeigt, daß ausnahmslos eine zyklisch ordnungsfeste Abrundung der betrachteten Singularität in Q möglich ist.

3. Nachtrag: Hilfssätze.

3. 1. Es sei $\mathfrak{H}$ ein beschränkter, abgeschlossener Konvexbogen, unter dessen Schmiegkreisen (im scharfen Sinne [6])) keine Geraden und keine Nullkreise (Kreise vom Radius Null) vorkommen [21]). Dann besitzen die Durchmesserlängen aller Kreise, welche mit $\mathfrak{H}$ mindestens drei (ev. teilweise oder sämtlich „zusammenfallende") Punkte gemeinsam haben, eine positive untere und obere Schranke [22]).

Bew.: Anderenfalls gäbe es eine Folge von Kreisen $\mathfrak{K}_\nu$, welche für $\nu \longrightarrow \infty$ gegen eine Gerade oder gegen einen Nullkreis konvergieren und wobei jeder $\mathfrak{K}_\nu$ mit $\mathfrak{H}$ mindestens drei (verschiedene) Punkte gemeinsam hat. O. B. d. A. kann ange-

21) Dann kann $\mathfrak{H}$ keine Ecken oder Spitzen besitzen.

22) Für den Fall einer geschlossenen Konvexkurve $\mathfrak{C}$, deren Schmiegkreis sich längs $\mathfrak{C}$ stetig ändert, gilt, wie Herr T. Kubota gezeigt hat (Ein Satz über Eilinien, Tôhoku math. Journal 47 (1940), S. 96—98), sogar folgendes: Bezeichnet man mit r_A bzw. r_B den kleinsten bzw. größten Krümmungsradius von $\mathfrak{C}$ und ist r der Radius irgend eines Kreises, welcher mit $\mathfrak{C}$ mindestens drei Punkte gemeinsam hat, so ist $r_A \leq r \leq r_B$.

nommen werden, daß drei Punkte aus $\mathfrak{K}_v\mathfrak{H}$ mit $v \longrightarrow \infty$ je einen Limes besitzen. Von diesen Punkten können für $v \longrightarrow \infty$ nicht drei gegen den gleichen Punkt von $\mathfrak{H}$ konvergieren, weil sonst ein scharfer Schmiegkreis von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{L} = \lim \mathfrak{K}_v$, d. h. mit einer Geraden oder einem Nullkreis zusammenfiele. Konvergieren aber höchstens zwei dieser Punkte gegen den gleichen Punkt von $\mathfrak{H}$, so müßte $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$ entweder (mindestens) drei verschiedene Punkte oder aber (mindestens) einen Stützpunkt und noch einen weiteren Punkt enthalten, was beides mit der Konvexität und mit der (aus der Vor. folgenden) Teilstreckenfreiheit von $\mathfrak{H}$ unverträglich ist.

3. 2. Es sei $\mathfrak{G}$ ein beschränkter, abgeschlossener Konvexbogen der Z-Ordnung Drei, (welcher frei ist von Teilkreisbogen und) unter dessen Schmiegkreisen keine Geraden vorkommen. Dann liegt der größere bzw. der kleinere Endpunkt E_g bzw. E_k von $\mathfrak{G}$ im Äußeren bzw. im Inneren einer jeden Maximalsekante $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ oder auf $\mathfrak{K}$ selbst.

Bew.: Die Beh. ist richtig für jeden Schmiegkreis [23]). In einen solchen kann aber jede (von einem Schmiegkreis verschiedene) Maximalsekante $\mathfrak{K}$ stetig übergeführt werden, ohne daß im Laufe dieser Überführung $\mathfrak{K}$ eine Gerade wird oder E_g bzw. E_k auf $\mathfrak{K}$ zu liegen kommt, es sei denn, daß einer dieser Punkte von vorneherein auf $\mathfrak{K}$ lag.

3. 3. Es sei $\mathfrak{G}$ ein beschränkter, abgeschlossener Konvexbogen der Z-Ordnung Drei, welcher keine Geraden als Schmiegkreise besitzt. Ist B der größere Endpunkt von $\mathfrak{G}$ und ist $\mathfrak{b}$ die zur Halbtangente an $\mathfrak{G}$ in B komplementäre Halbgerade, so hat jede Maximalsekante $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ höchstens den Punkt B mit $\mathfrak{b}$ gemeinsam.

Bew.: E seien P_1, P_2, P_3 die drei Punkte von $\mathfrak{K}\mathfrak{G}$, wobei auch $P_1 = P_2 = P_3$ oder $P_1 = P_2$ usw. zulässig ist; ferner sei P_3 am nächsten bei B gelegen. I. Es sei zunächst $P_3 \neq B$. Da B der größere Endpunkt von $\mathfrak{G}$ ist, so liegt B im Äußeren von $\mathfrak{K}$ (gemäß Nr. 3. 2.). Daher hat $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{b}$ entweder (wie behauptet) keine oder zwei, ev. zusammenfallende (von B ver-

23) Vgl. a. a. O. [12]).

schiedene) Punkte Q_1, Q_2 gemeinsam. Da $(\mathfrak{G} + \mathfrak{b})$ ein konvexer Bogen ist, können wir (im Falle der Existenz von Q_1 und Q_2) auf die fünf Punkte P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 (auch wenn sie teilweise zusammenfallen) den Monotoniesatz [20]) anwenden, indem wir P_1 und P_2 festhalten, ferner P_3 stetig gegen B wandern lassen. Dann wandert Q_1 gegen B und Q_2 (auf $\mathfrak{b}$) von B weg, geht also nicht verloren. Es kann nicht $P_3 = B$ werden, bevor $Q_1 = B$ geworden ist bzw. umgekehrt, weil $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{G}$ die $\mathcal{Z}$-Ordnung Zwei bzw. Drei besitzt. Es kann aber auch nicht gleichzeitig $P_3 = B = Q_1$ werden, weil sonst $\mathfrak{b}$ Tangente an $\mathfrak{K}$ in B würde und diese Tangente mit $\mathfrak{K}$ noch den, von B verschiedenen, Punkt Q_2 gemeinsam hätte. Da andererseits im Laufe der monotonen Änderung einmal $P_3 = B$ eintreten muß, ergibt sich ein Widerspruch aus unserer Annahme $P_3 \neq B$. — II. Es sei nun $P_3 = B$, wobei auch $P_2 = P_3$ oder $P_1 = P_2 = P_3$ zugelassen wird. Ferner habe $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{b}$ noch einen, von B verschiedenen Punkt Q gemeinsam. Es wäre dann Q höchstens Schnittpunkt von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{b}$; daher könnte man $\mathfrak{K}$ durch eine beliebig kleine Änderung in einen Kreis der in I. besprochenen Art überführen, welcher überdies mit $\mathfrak{b}$ Punkte, verschieden von B, gemeinsam hätte; Widerspruch mit I.

3. 4. Es sei $\mathfrak{H}$ ein beschränkter, abgeschlossener Konvexbogen mit den Endpunkten A und B; in $\mathfrak{H}$ sollen keine Teilstrecken enthalten sein. Ferner sei $\mathfrak{H}'$ ein abgeschlossener Teilbogen von $\mathfrak{H}$ mit den von A und B verschiedenen Endpunkten A' und B'. Dann sind die Durchmesserlängen derjenigen Kreise $\mathfrak{K}$, welche sowohl den $\mathfrak{H}'$ als die Sehne $\overline{AB}$ je in (mindestens) zwei, ev. zusammenfallenden, Punkten treffen, nach oben beschränkt. (Übrigens liegen A und B im Äußern von $\mathfrak{K}$, falls sie nicht auf $\mathfrak{K}$ selbst liegen.)

Bew.: Andernfalls müßte es eine konvergente Folge solcher Kreise $\mathfrak{K}$ geben, deren Limes eine Gerade $\mathfrak{g}$ ist. Dabei müßte $\mathfrak{g}$ (mindestens) zwei, ev. zusammenfallende, Punkte je mit $\mathfrak{H}'$ und mit der abgeschlossenen Strecke $\overline{AB}$ gemeinsam haben, was nicht möglich ist.

3. 5. Es mögen $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{J} + \mathfrak{B}'$, sowie A', B' die in Nr. 2. 1. 3. bzw. Nr. 2. 2. angegebene Bedeutung besitzen.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis, welcher mit $\overline{\mathfrak{J}}$ genau zwei (ev. auch zusammenfallende) innere Punkte gemeinsam hat und welcher ferner fremd ist zu $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}'$, aber nicht fremd zu $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{B}'$. Dann liegen A' und B' außerhalb $\mathfrak{K}$. (Es hat $\mathfrak{K}$ mit der Strecke $\overline{A'B'}$ genau zwei innere Punkte gemeinsam).

Bew.: Sind die beiden Punkte F_1 und F_2 von $\mathfrak{K}\mathfrak{J}$ verschieden, so liegt einer der beiden, durch F_1 und F_2 begrenzten offenen Teilbogen von $\mathfrak{K}$ ganz in demjenigen beschränkten Gebiet, welches durch die einfache geschlossene Kurve $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{J} + \mathfrak{B}''$ begrenzt wird (vgl. Nr. 2. 3., IV.). Der andere, durch F_1 und F_2 begrenzte Teilbogen muß also z. B. F_1 mit Punkten von $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{B}'$ verbinden. Da aber F_1 innerhalb und $\mathfrak{A}'$ sowie $\mathfrak{B}'$ (abgesehen von A' bzw. B') außerhalb des von $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'' + \overline{A'B'}$ begrenzten beschränkten Gebietes liegen (vgl. Nr. 2. 3., VI.) und da $\mathfrak{K}$ fremd ist zu $\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}''$, folgt die Beh. Entsprechend schließt man im Falle $F_1 = F_2$.

3. 6. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei, bis auf Q fremde Konvexbogen der Z-Ordnung Drei (also mit scharfer Tangente versehen), welche in Q eine Ecke oder Spitze bilden (vgl. Nr. 2. 1. 2.). Ferner sei $\mathfrak{k}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe mit Q als Mittelpunkt und vom Radius r. Für alle hinreichend kleinen $r > 0$ gilt dann: Es sind $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{k}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{k}\mathfrak{B}$ einfache Bogen, d. h. $\mathfrak{A}$ sowohl als $\mathfrak{B}$ hat mit dem Rand $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{k}$ genau einen Punkt A^* bzw. B^* gemeinsam.

Bew.: Enthielte z. B. $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$ für beliebig kleines r mindestens zwei, von Q verschiedene, Punkte T_1 und T_2, so würden für hinreichend kleines r die von Q ausgehenden Halbgeraden $\mathfrak{t}_1$ bzw. $\mathfrak{t}_2$ durch T_1 bzw. T_2 sich beliebig wenig von der Halbtangente $\mathfrak{t}_a$ in Q an $\mathfrak{A}$ unterscheiden. Weil T_1 und T_2 gleichen Abstand von Q besitzen, würde daher der Winkel zwischen $\mathfrak{t}_a$ und der Verbindungsgeraden $\mathfrak{v}$ von T_1 mit T_2 beliebig nahe an $\frac{\pi}{2}$ liegen. Somit besäße $\mathfrak{A}$ in Q keine stetige (einseitige) Tangente.

3. 7. Konstruktion eines beschränkten abgeschlossenen Konvexbogens $\mathfrak{J}_0$ der Z-Ordnung Drei mit stetiger, beschränkter, von Null verschiedener Krümmung, für welchen der Winkel[24]), den die Halbtangente an $\mathfrak{J}_0$ in einem Endpunkte A_0 mit der Halbtangente in einem beliebigen Punkte P von $\mathfrak{J}_0$ an den Bogen $\widehat{A_0P}$ bildet, ein Intervall von vorgegebener Länge J mit $\frac{3}{2}\pi < J < 2\pi$ durchläuft.

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Ellipsenquadrant. Man betrachte einen abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{Q}$, welcher die Endpunkte von $\mathfrak{Q}$ nicht enthält und wobei die Halbtangenten in den Endpunkten von $\mathfrak{T}'$ einen Winkel vom absoluten Betrag $J - \pi$ bilden; der Schnittpunkt dieser Halbtangenten sei S. Man spiegele $\mathfrak{T}'$ an einem Kreise mit dem Mittelpunkt S, in dessen Inneren $\mathfrak{T}'$ liegt. Das Spiegelbild $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{T}'$ besitzt dann ebenfalls die Z-Ordnung Drei, sowie stetigen Schmiegkreis; und zwar ist keiner dieser Schmiegkreise ein Kreis vom Radius Null oder eine Gerade, weil andernfalls $\mathfrak{T}'$ einen Schmiegkreis besitzen müßte, der den Radius Null besitzt oder der durch S geht, was nicht der Fall ist[25]). Schließlich gehört zu $\mathfrak{T}$ die oben vorgeschriebene Intervallänge J.

---

24) Vgl. die Definition in Nr. 2. 1. 2. 1., insbes. V., sowie auch Nr. 2. 2., A. 3.

25) Jeder Schmiegkreis $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{T}'$ wird nämlich im Berührpunkt von der Tangente an $\mathfrak{T}'$ gestützt und es liegt S niemals auf der gleichen Seite dieser Tangente wie $\mathfrak{K}$.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1940-1941

Band/Volume: 72

Autor(en)/Author(s): Haupt Otto

Artikel/Article: Über eine Abrundung ebener Bogen. 161-188