Bemerkung über parabolisch konvexe und konkave Ovale.

Von Otto Haupt in Erlangen.

1. In einer kürzlich erschienenen Note[1]) führt Herr T. Carleman den Begriff der *parabolischen Konvexität* einer ebenen, viermal differenzierbaren, konvexen, geschlossenen Kurve ein: er versteht darunter die Eigenschaft, daß die Kurve in der Umgebung ihrer Berührpunkte mit den Schmiegparábeln nicht außerhalb dieser Parabeln liegt. Herr Carleman zeigt nun (vgl. auch weiter unten, Nr. 2.), daß eine spezielle Art parabolisch konvexer Kurven von jeder Parabel in höchstens vier Punkten getroffen wird.

Es sei gestattet, im folgenden auf das Interesse hinzuweisen, welches dieser Untersuchung von Herrn Carleman zukommt. Einerseits nämlich enthält sie einen sehr einfachen und sogar wohl etwas weniger als üblich voraussetzenden[2]) Beweis für einen Hilfssatz, welcher beim Beweise des Böhmerschen Ovalsatzes benutzt zu werden pflegt (vgl. weiter unten, Nr. 3.). Andrerseits erweist sich der Begriff der parabolischen Konvexität (im Sinne von Herrn Carleman) als sehr brauchbar für die Gewinnung sowie beim Beweise einer direkt-geometrischen[3]) Fassung des Böhmer'schen Satzes und mit ihm

1) T. Carleman, Sur les courbes paraboliquement convexes, Vierteljahrsschrift d. naturforsch. Ges. in Zürich 85 (1940), Beiblatt Nr. 32 (Festschrift Rudolf Fueter), S. 61—63.

2) Soviel wir sehen können wird im allgemeinen viermal stetige Differenzierbarkeit (mindestens) vorausgesetzt.

3) Unter *direkter Infinitesimalgeometrie*, auch kurz *direkt-geometrisch*, verstehe man hier den Standpunkt, auf welchem — kurz gesagt — Differenzierbarkeitsbedingungen nur in Gestalt geometrischer Forderungen auftreten und auch nicht durch die Rücksicht auf die rechnerische Behandlung der betr. Frage bestimmt sind.

zusammenhängender Sätze. Entsprechendes leistet dann für den Mohrmann'schen Satz der Begriff der *parabolischen Konkavität* (vgl. weiter unten, Nr. 3.).

Diese Brauchbarkeit der parabolischen Konvexität und Konkavität ist unter anderem darin begründet, daß die parabolische Konvexität und Konkavität sich auf Sachverhalte beziehen, welche unmittelbar direkt-geometrisch erfaßbar sind. Man kann so mit ihrer Hilfe den sozusagen topologischen Kern des erwähnten Hilfssatzes und weiterhin der Sätze von Böhmer und Mohrmann herausschälen (vgl. weiter unten, Nr. 4.). Damit ergeben sich dann von selbst Verallgemeinerungen sowohl der Böhmer-Mohrmann'schen Sätze als der Sätze über parabolisch konvexe und konkave Ovale, in welch letzteren vielleicht auch die, schon von Herrn Carleman angedeuteten [4]) enthalten sind (vgl. weiter unten, Nr. 5.).

Eine, gleichfalls direkt-geometrische, sehr weittragende Verallgemeinerung des Böhmer'schen Satzes ist von Herrn J. Hjelmslev aufgestellt worden. (Vgl. Nr. 6.)

2. Wir geben zunächst in Kürze den Inhalt der Untersuchung von Herrn Carleman wieder. Zugrunde gelegt wird von ihm eine Jordan-Kurve $\mathfrak{J}_4$, darstellbar durch $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit periodischen, viermal nach t differenzierbaren x, y, wobei [5]) $x'^2 + y'^2 \neq 0$ und wobei die Krümmung von $\mathfrak{J}_4$ nirgends Null ist [6]). Unter diesen Voraussetzungen existiert in jedem Punkte Q von $\mathfrak{J}_4$ eindeutig eine nicht-ausgeartete (vierpunktig berührende) Schmiegparabel [7]) $\mathfrak{P}(Q)$ an $\mathfrak{J}_4$. Nunmehr wird $\mathfrak{J}_4$ als parabolisch konvex bezeichnet, wenn $\mathfrak{J}_4$ für jeden ihrer Punkte Q in einer Umgebung von Q fremd ist zum Äußern [8]) von $\mathfrak{P}(Q)$. Ist $\mathfrak{J}_4$ in der Umgebung von Q bezüglich eines geeigneten x, y-Systems dargestellt [9]) durch $y = f(x)$,

4) a. a. O. [1]), S. 63. („On peut trouver des résultats analogues pour d'autres systèmes de courbes qui dépendent d'un nombre pair de paramètres.")

5) Dabei ist gesetzt: $x' = \frac{dx}{dt}$ u. s. w.

6) a. a. O. [1]), S. 61. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $\mathfrak{J}_4$ konvex (im gewöhnlichen Sinne) ist.

7) Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II.: Affine Differentialgeometrie, bearbeitet von K. Reidemeister, Berlin 1923, S. 27.

8) d. h. zum Äußern der konvexen Hülle von $\mathfrak{P}(Q)$.

9) Wegen $x'^2 + y'^2 \neq 0$ ist eine solche Darstellung stets möglich.

$a \leq x \leq b$, mit eindeutigem, viermal differenzierbarem $f(x)$ und mit $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} > 0$, d. h. mit nirgends verschwindender Krümmung, so wird $\mathfrak{J}_4$ als parabolisch konvex im engeren Sinne (i. e. S.) bezeichnet, wenn $\Phi''_{xx}(f'') < 0$ für $a \leq x \leq b$, wobei $\Phi(f'') = (f'')^{-2/3}$ gesetzt ist; und zwar soll dies für alle Q gelten. Es wird dann gezeigt, daß aus der parabolischen Konvexität i. e. S. die parabolische Konvexität (schlechthin) folgt, daß auch die parabolische Konvexität i. e. S. ein bewegungsinvarianter Begriff ist und daß gilt:

I. a. Eine i. e. S. parabolisch konvexe $\mathfrak{J}_4$ hat mit jeder ihrer Schmiegparabeln nur je den Berührpunkt gemeinsam. — I. Eine i. e. S. parabolisch konvexe $\mathfrak{J}_4$ hat mit jeder Parabel höchstens vier (ev. zusammenfallende) Punkte gemeinsam.

Anmerkung. Der Vollständigkeit wegen sei noch der Beweis von I. a. und I. im Anschluß an Herrn Carleman angegeben [10]. Ist $\mathfrak{P}$ eine Parabel, welche mit $\mathfrak{J}_4$ mindestens fünf Punkte gemeinsam hat, also mindestens sechs verschiedene oder (teilweise [11])) zusammenfallende Punkte, so wähle man die y-Achse parallel zur Parabelachse; dann ist $\mathfrak{P}$ darstellbar durch $y = A + Bx + Cx^2 = F(x)$, worin $C < 0$ bei geeigneter Orientierung der y-Achse. Durch seine beiden, zur y-Achse parallelen Tangenten wird $\mathfrak{J}_4$ zerlegt in zwei Konvexbogen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ mit den Darstellungen $y = f_1(x)$ bzw. $y = f_2(x)$, $a \leq x \leq b$, wobei f_1 und f_2 eindeutig sowie stetig in [12] $[a, b]$ sind, ferner viermal differenzierbar in (a, b). Es gilt z. B. $f_1(x) < f_2(x)$, also $f_1'' > 0$, $f_2'' < 0$ in (a, b). Wegen $f_1'' > 0$, $F'' < 0$ können $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}_1$ höchstens zwei Punkte gemeinsam haben. Und im Falle zweier gemeinsamer Punkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}_1$ liegen die Endpunkte von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nicht innerhalb $\mathfrak{P}$. Daher besitzt die Ableitung von $F(x) - f_2(x)$ in jedem Falle mehr als drei, ev. (teilweise) zusammenfallende Nullstellen in (a, b). Folglich haben $\Phi(f_2'')$ und $\Phi(F'')$ für

---

10) Vgl. a. a. O. [1]). Es wird dort Ia. durch Anwendung des Rolle'schen Satzes sehr einfach erledigt (vgl. auch den nachstehend im Text ausgeführten Beweis) und bezüglich I. angegeben, daß man diesen Satz durch eine nur wenig kompliziertere Überlegung beweisen kann.

11) Mehr als vier Punkte können nicht zusammenfallen, wie aus der parabolischen Konvexität i. e. S. folgt. Vgl. Blaschke, a. a. O. [7]), S. 27.

12) Es bezeichne $[a, b]$ bzw. (a, b) das abgeschlossene bzw. das offene Intervall.

mindestens drei x aus (a, b) gleiche Werte, wobei zwei dieser x auch zusammenfallen können. Daher besitzen $\Phi''_{xx}(f''_2)$ und $\Phi''_{xx}(F'')$ für mindestens ein x aus (a, b) gleichen Wert, was mit $\Phi''_{xx}(f''_2) < 0$ (nach Vor.) und [13]) $\Phi''_{xx}(F'') = 0$ unvereinbar ist.

3. In der affinen Differentialgeometrie [14]) wird $-\frac{1}{2}\Phi''_{xx}(f'')$ als Affinkrümmung von $y = f(x)$ bzw. von $\mathfrak{F}_4$ bezeichnet. Die i. e. S. parabolisch konvexen Kurven sind daher identisch mit denjenigen positiver Affinkrümmung oder also [15]) mit den überall elliptisch gekrümmten (konvexen) Kurven. Somit stimmt der Satz in Nr. 2., I. überein (abgesehen von etwaigen Verschiedenheiten hinsichtlich der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen [2])) mit dem eingangs (Nr. 1) erwähnten Hilfssatz, welchen man [16]) beim Beweise des Böhmer'schen Satzes heranzieht. Ein ganz entsprechender, beim Beweise des Mohrmann'schen Satzes [16]) benutzter Hilfssatz gilt für hyperbolisch gekrümmte [15]) Konvexbogen. Letztere haben aber die Eigenschaft der, wie wir sagen wollen, parabolischen Konkavität i. e. S., d. h. sie besitzen negative Affinkrümmung und liegen daher in der Umgebung der Berührpunkte nicht innerhalb ihrer Schmiegparabeln. Also:

II. Jeder i. e. S. parabolisch konkave Konvexbogen hat mit jeder Parabel höchstens vier Punkte gemeinsam [17]).

4. 1. Es erhebt sich nun vor allem die Frage, ob die Sätze Nr. 2., I. und Nr. 3., II. nur für den Fall der parabolischen Konvexität bzw. Konkavität *im engeren Sinne* gelten oder ob sie auch bei Zugrundelegung der (direkt-geometrisch erklärbaren) parabolischen Konvexität und Konkavität schlechthin (vgl. weiter unten) Geltung besitzen. Eine nähere Unter-

---

13) Vgl. a. a. O. [7]), S. 18. — Die Parabeln bzw. die Ellipsen bzw. die Hyperbeln sind gekennzeichnet durch konstante verschwindende bzw. positive bzw. negative Affinkrümmung. (Vgl. Fußnote 14.)

14) Blaschke, a. a. O. [7]), S. 12 ff. — Wir schließen uns in den Bezeichnungen an dieses Werk an. Die Gruppe der affinen Differentialgeometrie ist die der inhaltstreuen affinen Abbildungen.

15) Vgl. a. a. O. [7]), S. 27.

16) Vgl. a. a. O. [7]), S. 47/49.

17) Man beachte, daß es sich im Falle parabolischer Konkavität nicht mehr um geschlossene (konvexe) Kurven handelt, sondern um (konvexe) *Bogen*. Der betr. Konvexbogen soll keine parallelen Tangenten besitzen.

suchung zeigt, daß letzteres in der Tat der Fall ist. Entsprechend dem direkt-geometrischen Charakter der Fragestellung erklärt man dabei als Schmiegparabel an einen Bogen $\mathfrak{B}$ im Punkte Q jeden Limes von Parabeln durch vier gegen Q konvergierende Punkte von $\mathfrak{B}$. Ferner erklärt man $\mathfrak{B}$ in Q als parabolisch konvex bzw. als parabolisch konkav, wenn — kurz gesagt — eine feste Umgebung $\mathfrak{U}$ von Q auf $\mathfrak{B}$ existiert, welche von jeder (ausgearteten oder nicht-ausgearteten) Schmiegparabel in Q gestützt wird und speziell von jeder nicht-ausgearteten Schmiegparabel so, daß keine Punkte von $\mathfrak{U}$ außerhalb bzw. innerhalb der (konvexen Hülle der) Parabel liegen; dabei heiße eine ausgeartete Schmiegparabel stützend, wenn die Trägergerade ihrer eigentlichen Punkte Stützgerade (an $\mathfrak{U}$ in Q) ist. Für den Fall, daß $\mathfrak{B}$ eine streckenfreie Jordankurve $\mathfrak{C}$ ist, folgt aus der parabolischen Konvexität in jedem Punkte von $\mathfrak{C}$ die Konvexität von $\mathfrak{C}$ im gewöhnlichen Sinne sowie die Existenz (und Stetigkeit) der Tangente an $\mathfrak{C}$. Es wird jetzt noch folgende *Annahme A* gemacht: Es besitze $\mathfrak{C}$ in jedem Punkt (mindestens) eine nicht-ausgeartete Schmiegparabel; ferner soll eine ausgeartete Schmiegparabel nur in der Weise entstehen können, daß — grob gesprochen — Parabeln, die durch vier benachbarte, auf einen Punkt Q sich zusammenziehende Kurvenpunkte gehen, gegen eine *doppeltzählende* Gerade oder Halbgerade konvergieren. Es gilt nun:

Unter der Annahme A besitzt jede, im (eben erklärten) direkt-geometrischen Sinne parabolisch konvexe Kurve $\mathfrak{C}$ die Parabelordnung Vier (d. h. jede Parabel hat mit der Kurve höchstens vier Punkte gemeinsam). Ebenso besitzt unter der Annahme A jeder parabolisch konkave Konvexbogen die Parabelordnung Vier.

Anmerkung. 1. In der Annahme A wird insbesondere *nicht* die Eindeutigkeit der nicht-ausgearteten Schmiegparabeln gefordert. 2. Die Annahme A ist unter den von Herrn Carleman gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen stets erfüllt. Umgekehrt kann man die Annahme A als eine Differenzierbarkeitsvoraussetzung im Sinne der direkten Infinitesimalgeometrie auffassen.

4. 2. Auch die in Nr. 3. erwähnte *Identität von überall parabolisch konvexen und überall elliptisch gekrümmten Kurven $\mathfrak{C}$ gilt allgemein,* d. h. unter Zugrundelegung der in Nr. 4. 1. ge-

gebenen Definition der parabolischen Konvexität, *sofern* $\mathfrak{C}$ *der Annahme* A *genügt.* Dabei bezeichnen wir hier $\mathfrak{C}$ als elliptisch gekrümmt im Punkte Q, wenn jeder Schmiegkegelschnitt an $\mathfrak{C}$ in Q eine nicht-ausgeartete Ellipse ist; unter einem Schmiegkegelschnitt wird dabei jeder Limes von Kegelschnitten durch fünf, gegen Q konvergierende Punkte von $\mathfrak{C}$ verstanden. (Es wird also hier insbesondere *nicht* die Eindeutigkeit der Schmiegkegelschnitte gefordert.)

Entsprechend *sind identisch die überall parabolisch konkaven mit den überall hyperbolisch gekrümmten Konvexbogen,* wobei wieder die Annahme A gemacht ist.

Als Anwendung der vorstehend genannten Sätze ergeben sich schließlich *Verallgemeinerungen des Böhmer'schen und des Mohrmann'schen Satzes* im Sinne der direkten Infinitesimalgeometrie.

5. Die genauere Formulierung sowie der Beweis der in Nr. 4. 1. und 4. 2. angedeuteten Tatsachen muß einer gesonderten Darstellung vorbehalten bleiben. Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf Stetigkeitsbetrachtungen (nämlich auf den allgemeinen Kontraktionssatz [18])). Dem allgemeinen (topologischen) Charakter dieser Betrachtungen entsprechend bleiben unsere Beweise und damit die Sätze von Nr. 4. 1. und 4. 2. in Geltung, wenn *an Stelle des Systems der Kegelschnitte* allgemeiner ein passend gewähltes System von (beschränkten und unbeschränkten) *Konvexkurven* zugrunde gelegt wird, deren jede durch fünf Punkte bestimmt und unter denen ein, die Parabeln verallgemeinerndes Teilsystem ausgezeichnet ist. Schließlich wird der Ausdehnung der in Rede stehenden Sätze auf geeignete Systeme von Kurven, deren jede durch $(2k+1)$ Punkte bestimmt ist, nichts im Wege stehen. Auch auf diese Verallgemeinerungen wird in der in Aussicht genommenen, gesonderten Darstellung einzugehen sein.

5. 1. Analoge Stetigkeitsbetrachtungen führen zu einer andersartigen Verallgemeinerung des Böhmer'schen Satzes in

18) Vgl. Haupt, Zur Theorie der Realitätsordnungen, Monatshefte f. Math. u. Physik 40 (1933), Nr. 4. 4. Für die in Rede stehenden Anwendungen sind noch gewisse Verschärfungen des Kontraktionssatzes erforderlich.

der von S. Mukhopadhyaya[19]) eingeschlagenen Richtung. Diese Verallgemeinerung besagt andeutungsweise, daß *im Satze von Mukhopadhyaya das System der Ellipsen ersetzt werden kann durch das (im allgemeinen umfassendere) System aller Kegelschnitte, deren numerische Exzentrizität kleiner ist als eine vorgegebene Zahl* $e \geq 1$.

6. In diesem Zusammenhang sind schließlich einschlägige, noch nicht veröffentlichte Untersuchungen von Herrn Hjelmslev hervorzuheben, deren Kenntnis ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Hjelmslev verdanke. Herr Hjelmslev bemerkt zunächst, daß der Böhmer'sche Satz eine Folge des nachstehenden ist: *Satz A.* Es sei $\mathfrak{k}$ ein System von Kegelschnitten in der projektiven Ebene R_2, welche sämtlich einen festen Punkt O gemeinsam haben. Ist nun jeder Punkt eines Ovals $\mathfrak{K}$ in R_2 von der Ordnung Vier bezüglich $\mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{K}$ selbst (im Großen) von der Ordnung Vier bezüglich $\mathfrak{k}$. — In der Tat folgt der Böhmer'sche Satz aus dem Satze A, wenn man O die (zu $\mathfrak{K}$ fremde) uneigentliche Gerade durchlaufen läßt.

Der Satz A ist aber seinerseits eine Folge aus dem allgemeinen, von Herrn Hjelmslev entdeckten (und mir schon vor Jahren als Vermutung mitgeteilten) *Satz B. Vor.* Es sei $\mathfrak{C}$ eine geschlossene Kurve im projektiven R_n. Keine n Punkte von $\mathfrak{C}$ sollen auf einer $(n-2)$-dimensionalen Ebene des R_n liegen. Ferner soll jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ die Ordnung n bezüglich des Systems aller $(n-1)$-dimensionalen Ebenen (Hyperebenen) des R_n besitzen. *Beh.* Es hat $\mathfrak{C}$ selbst (im Großen) die Ordnung n bezüglich des Systems aller Hyperebenen.

Ferner teilt mir Herr Hjelmslev noch mit, daß der Satz von den parabolisch konvexen oder konkaven Ovalen sich (mittels Dualität) aus seinem Satz A ableiten läßt und daß sich also die Mohrmann'schen Sätze auch in einfache Verbindung mit seinem Raumkurvensatz bringen lassen. Schließlich macht Herr Hjelmslev darauf aufmerksam, daß der zum Satz von Mukhopadhyaya dualistische Satz sich sehr anschaulich formulieren und beweisen läßt.

---

19) S. Mukhopadhyaya, Generalized form of Böhmer's theorem for an elliptically curled non-analytic oval, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 560—571, sowie Collected geometrical papers, Part I, Calcutta (1929), S. 33 ff.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen

Jahr/Year: 1940-1941

Band/Volume: 72

Autor(en)/Author(s): Haupt Otto

Artikel/Article: Bemerkung über parabolisch konvexe und konkave Ovale. 216-222