

# Über die Auflösung mehrfacher Nullstellen bei reellen Funktionen von einer Veränderlichen und ihren Zusammenhang mit Fragen der lokalen Ordnung, insbesondere mit einer Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix.

Von Walter Buckel in Erlangen.

Der aus der Lehre von den Polynomen bekannte Begriff der mehrfachen Wurzel kann auf sehr viel allgemeinere Funktionen von einer Veränderlichen ausgedehnt werden, wobei dann von mehrfachen Nullstellen dieser Funktionen gesprochen werden soll. In der vorliegenden Mitteilung wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine solche mehrfache Nullstelle einer reellen Funktion, wobei die Funktion noch von irgendwelchen Parametern abhängt, durch eine geeignete, beliebig kleine Änderung dieser Parameter in die entsprechende Anzahl verschiedener Nullstellen aufgelöst werden kann. Das hier nur angedeutete Beweisverfahren wurde in seinen wesentlichen Elementen vom Verfasser schon zur Gewinnung von hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen gewisser lokaler Ordnungswerte in Hyperflächenpunkten im  $R_n$  benützt<sup>1)</sup>. Diese Ergebnisse sollen hier ebenfalls mitgeteilt werden. In diesen Fällen lag jedoch jeweils eine ganz bestimmte Abhängigkeit von gewissen Parametern vor, während bei den nun betrachteten Funktionen die Abhängigkeit von den Parametern lediglich gewissen einfachen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen genügen soll.

## § 1. Auflösung mehrfacher Nullstellen bei reellen Funktionen einer Veränderlichen.

### 1. 1. *Auflösung mehrfacher Nullstellen bei Polynomen.*

---

1) W. Buckel, Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix. Erscheint im Journ. f. d. r. u. angew. Math.

Es sei  $1 \leq m \leq n$ ;  $m, n$  ganz. Dann und nur dann ist  $x_0$  eine genau  $m$ -fache Nullstelle des Polynoms höchstens  $n$ -ten Grades  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , wenn gilt:

$$p(x_0) = 0, p'(x_0) = 0, \dots, p^{m-1}(x_0) = 0; p^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Hat ein Polynom höchstens  $n$ -ten Grades  $p(x)$  eine mindestens  $m$ -fache Nullstelle  $x_0$ , so folgt aus der Zerlegung von  $p(x)$  in Linearfaktoren sofort:

Man kann zu  $p(x)$  ein Polynom höchstens  $n$ -ten Grades  $\bar{p}(x)$  angeben, das folgende Eigenschaften hat:

1.  $\bar{p}(x)$  hat statt der mindestens  $m$ -fachen Nullstelle  $x_0$  von  $p(x)$  (mindestens)  $m$  verschiedene Nullstellen  $x_1, \dots, x_m$ , die in beliebiger Nähe von  $x_0$  liegen.
2. Die Koeffizienten von  $\bar{p}(x)$  liegen in beliebiger Nähe der entsprechenden Koeffizienten von  $p(x)$ .

Wir wollen diesen Sachverhalt dadurch bezeichnen, daß wir sagen, eine mindestens  $m$ -fache Nullstelle eines Polynoms höchstens  $n$ -ten Grades lasse sich in  $m$  verschiedene Nullstellen auflösen.

Man kann sich die Frage vorlegen, inwieweit die Auflösbarkeit erhalten bleibt, wenn man die zusätzliche Forderung stellt, daß beim Übergang von  $p(x)$  zu  $\bar{p}(x)$  gewisse Koeffizienten konstant gehalten werden sollen. Daß man in dieser Richtung nicht beliebig weit gehen kann, folgt schon daraus, daß die Auflösung unmöglich wird, wenn alle Koeffizienten konstant gehalten werden sollen. Man kann diese Frage untersuchen, indem man die zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln eines Polynoms bestehenden Beziehungen betrachtet. Wir wollen hier jedoch einen anderen Weg einschlagen und eine für die Auflösbarkeit hinreichende Bedingung kennen lernen, die für eine sehr viel allgemeinere, die Polynome als Spezialfälle enthaltende, Funktionenklasse gilt.

### 1. 2. *Auflösung mehrfacher Nullstellen bei allgemeineren Funktionen.*

1. 2. 1. *Allgemeine Annahmen.* Wir betrachten eine (eindeutige) reelle Funktion der reellen Veränderlichen  $x$ , die noch von den  $n+1$  reellen Parametern  $a_0, a_1, \dots, a_n$  abhängen soll. Wir bezeichnen diese Funktion mit  $f(x; a_0, \dots, a_n)$ .

Einen Punkt  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  des Parameterraumes bezeichnen wir mit  $A$ . Deshalb schreiben wir statt  $f(x; a_0, a_1, \dots, a_n)$  auch  $f_A(x)$ . Im Parameterraum der Punkte  $A$  sei durch  $A^* = (a_\nu^*)$  und

$$|a_\nu - a_\nu^*| < d, \quad d > 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

ein  $(n + 1)$ -dimensionaler offener Würfel  $\mathfrak{B}$  gegeben. Die Funktion  $f_A(x)$  habe im Bezug auf diesen Würfel  $\mathfrak{B}$  folgende Eigenschaften:

- 1.) Es gebe ein  $r < 0$  derart, daß für jeden Punkt  $A$  aus  $\mathfrak{B}$  die Funktion  $f_A(x)$  im Intervall  $J$ , gegeben durch  $|x - x_0| < r$ , erklärt, stetig und  $(n + 1)$ -mal stetig nach  $x$  differenzierbar ist. Diese Ableitungen sollen mit  $f'_A(x), \dots, f_A^{(n+1)}(x)$  bezeichnet werden.
- 2.) Die  $n + 1$  Funktionen  $f_A^{(\kappa)}(x), \kappa = 0, 1, \dots, n$ , seien in dem durch  $|x - x_0| < r; |a_\nu - a_\nu^*| < d, \nu = 0, 1, \dots, n$ , im Raume der Punkte  $(x, a_0, \dots, a_n)$  gegebenen  $(n + 2)$ -dimensionalen Quader stetig und einmal stetig nach jedem der Parameter  $a_0, \dots, a_n$  differenzierbar. Diese Ableitungen sollen mit  $\frac{\partial f^{(\kappa)}}{\partial a_\nu}$  bezeichnet werden,  $\kappa, \nu = 0, 1, \dots, n$ .

1. 2. 2. Wir sagen, an der Stelle  $x_0$  liege eine mindestens  $m$ -fache Nullstelle der Funktion  $f_A(x)$  vor, wenn  $f_A^{(\kappa)}(x_0) = 0$  für  $\kappa = 0, 1, \dots, m - 1$ . Wir sagen, an der Stelle  $x_0$  liege eine genau  $m$ -fache Nullstelle von  $f_A(x)$  vor, wenn außerdem  $f_A^{(m)}(x_0) \neq 0$ .

1. 2. 3. Wir sagen, die Nullstelle  $x_0$  der Funktion  $f_{A^*}(x)$  lasse sich in mindestens  $m$  verschiedene Nullstellen auflösen, wenn es zu jedem Zahlenpaar  $(\varepsilon, \varrho)$  mit  $0 < \varepsilon, 0 < \varrho < r$  (Def. von  $r$  siehe Nr. 1. 2. 1., 1.) einen Punkt  $\bar{A} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  des Parameterraumes gibt, für den gilt:

- 1.)  $\bar{A}$  ist ein Punkt aus  $\mathfrak{B}$ ;
- 2.)  $|\bar{a}_\nu - a_\nu^*| < \varepsilon, \nu = 0, 1, \dots, n$ ;
- 3.) Die in  $|x - x_0| < r$  erklärte Funktion  $f_{\bar{A}}(x)$  hat im Intervall  $|x - x_0| < \varrho$  mindestens  $m$  verschiedene Nullstellen.

Man kann leicht zeigen, daß jede Nullstelle von  $f_{A^*}(x)$ , die sich in  $m$  verschiedene Nullstellen auflösen läßt, notwendig

eine mindestens  $m$ -fache Nullstelle sein muß. Um für die Auflösbarkeit auch eine hinreichende Bedingung zu bekommen, benötigen wir den Begriff der Auflösungsmatrix.

1. 2. 4. Unter der  $m$ -zeiligen Auflösungsmatrix von  $f_A(x)$  an der Stelle  $x$  verstehen wir die Matrix

$$\mathfrak{M}_m(x, f_A) = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial a_0} & \frac{\partial f}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_n} \\ \frac{\partial f'}{\partial a_0} & \frac{\partial f'}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f'}{\partial a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^{(m-1)}}{\partial a_0} & \frac{\partial f^{(m-1)}}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f^{(m-1)}}{\partial a_n} \end{array} \right\} x, A$$

1. 2. 5. 1. Mit Hilfe dieser Auflösungsmatrix gewinnen wir die folgende hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit einer mindestens  $m$ -fachen Nullstelle: *Es sei  $2 \leq m \leq n$ . Hinreichend für die Auflösbarkeit einer mindestens  $m$ -fachen Nullstelle  $x_0$  der Funktion  $f_{A^*}(x)$  in  $m$  verschiedene Nullstellen ist, daß der Rang der  $m$ -zeiligen Auflösungsmatrix  $\mathfrak{M}_m(x_0, f_{A^*})$  gleich ihrer Zeilenzahl  $m$  sei.*

Es ist zweckmäßig, den Beweis für eine etwas weitergehende Behauptung zu liefern, die man bekommt, wenn man die im Begriff der Auflösung angegebene Bedingung 3.) folgendermaßen verschärft: Es gibt ein  $\varrho' > 0$  derart, daß  $f_{A^*}(x)$  in  $|x - x_0| < \varrho'$  konstant und gleich Null ist, oder  $f_{\bar{A}}(x)$  hat im Intervall  $|x - x_0| < \varrho$  mindestens  $m$  genau einfache Nullstellen.

1. 2. 5. 2. Wesentlich für den Beweis ist der Hilfssatz, daß eine genau einfache Nullstelle durch eine hinreichend kleine, sonst aber beliebige Änderung der Parameter nicht zerstört wird.

Der Gang des Beweises soll hier nur angedeutet werden. Wir nehmen an, ein  $\varrho' > 0$  mit  $f_{A^*}(x) = 0$  in  $|x - x_0| < \varrho'$  gebe es nicht. Es sei  $0 \leq \mu \leq m - 1$ . Die Gesamtheit aller Punkte  $A$  des Parameterraumes, für welche gilt:  $f_A(x_0) = 0, f'_A(x) = 0, \dots, f_A^{(\mu)}(x_0) = 0$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{D}_\mu$ . Die Teilmenge von  $\mathfrak{D}_\mu$ , für welche gilt:  $f_A^{(\mu+1)}(x_0) > 0$ , bezeichnen wir mit  $\mathfrak{D}_{\mu+1}^+$ . Entsprechend definieren wir  $\mathfrak{D}_{\mu+1}^-$ . Aus der Rangbedingung für  $\mathfrak{M}_m(x_0, f_{A^*})$  folgt: Zu jedem Punkt  $A$  von  $\mathfrak{D}_\mu$  mit  $\mu \geq 1$  gibt

es in beliebiger Nähe stets wenigstens einen Punkt  $A^+$  von  $\mathfrak{D}_\mu^+$  und wenigstens einen Punkt  $A^-$  von  $\mathfrak{D}_\mu^-$ .

Nun wenden wir vollständige Induktion an.

I. Wir beweisen den Satz für  $m = 2$ . Da  $x_0$  eine mindestens zweifache Nullstelle von  $f_{A^*}(x)$  ist, so ist  $A^*$  ein Punkt von  $\mathfrak{D}_1$ . In beliebiger Nähe von  $A^*$  gibt es daher einen Punkt  $A'$ , der entweder  $\mathfrak{D}_1^+$  oder  $\mathfrak{D}_1^-$  angehört. Dann ist  $x_0$  eine genau einfache Nullstelle von  $f_{A'}(x)$ . Nun wird behauptet, daß es unter diesen Punkten  $A'$  in beliebiger Nähe von  $A^*$  stets wenigstens einen gibt, für welchen  $f_{A'}(x)$  in vorgeschriebener Nähe von  $x_0$  noch eine zweite Nullstelle  $x_1$  hat. Der Beweis dafür soll unten angedeutet werden. Wir schließen hier zunächst weiter. Ist  $x_1$  eine genau einfache Nullstelle von  $f_{A'}(x)$ , so ist die Behauptung bewiesen; ist  $x_1$  eine mindestens zweifache Nullstelle von  $f_{A'}(x)$ , so gibt es in beliebiger Nähe von  $A'$  einen Punkt  $\bar{A}$ , sodaß  $x_1$  eine genau einfache Nullstelle von  $f_{\bar{A}}(x)$  ist. Wegen der Stetigkeit der Elemente von  $\mathfrak{M}_m(x, f_A)$  im Punkte  $(x_0, A^*)$  gilt nämlich die Rangbedingung auch für  $\mathfrak{M}_m(x_1, A')$ , wenn nur  $(x_1, A')$  genügend nahe bei  $(x_0, A^*)$  liegt. Bleibt man außerdem mit  $\bar{A}$  genügend nahe bei  $A'$ , so wird die genau einfache Nullstelle, welche für  $f_{A'}(x)$  bei  $x_0$  liegt, nicht zerstört, es hat also  $f_{\bar{A}}(x)$  in beliebiger Nähe von  $x_0$  mindestens zwei genau einfache Nullstellen.

Das Kernstück dieses Beweises ist die Existenz eines  $A'$  aus  $\mathfrak{D}_1^+$  oder  $\mathfrak{D}_1^-$  in beliebiger Nähe von  $A^*$ , mit einer zweiten Nullstelle  $x_1$  von  $f_{A'}(x)$  in vorgeschriebener Umgebung von  $x_0$ . Diese Existenz beweist man folgendermaßen: Der Differenzenquotient<sup>2)</sup>  $q_A(x) = [x_0, x]f_A$  ist, wenn  $A$  hinreichend nahe bei  $A^*$  liegt, überall in  $|x - x_0| < r$  (auch in  $x_0$ ) erklärt und stetig. Ist  $A$  ein Punkt von  $\mathfrak{D}_0$ , also  $f_A(x_0) = 0$ , so ist  $q_A(x) = 0$  für  $x \neq x_0$  gleichbedeutend mit  $f_A(x) = 0$ , für  $x = x_0$  gleichbedeutend mit  $f'_A(x_0) = 0$ . Daraus folgt, daß für  $A' \in \mathfrak{D}_1^+$  und  $A' \in \mathfrak{D}_1^-$  gilt  $q_{A'}(x_0) \neq 0$ . Weiter folgt daraus, daß, falls es nicht in beliebiger Nähe von  $A^*$  ein  $A'$  aus  $\mathfrak{D}_1^+$  oder  $\mathfrak{D}_1^-$  mit einer zweiten Nullstelle  $x_1$  von  $f_{A'}(x)$  in einer vorgeschriebenen Umgebung von  $x_0$  gibt,  $q_{A'}(x)$  in dieser Umgebung von  $x_0$  keine Nullstelle hat für

2) Über Differenzenquotienten vgl. Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung, Berlin 1938, Bd. 2, S. 70 ff.

jedes  $A'$  aus  $\mathfrak{D}_1^+$  oder  $\mathfrak{D}_1^-$ , das nur genügend nahe bei  $A^*$  liegt. Aus der Stetigkeit von  $q_{A'}(x)$  folgt dann, daß  $q_{A'}(x)$  in dieser Umgebung von  $x_0$  entweder durchweg positiv oder durchweg negativ sein muß. Man kann zeigen, daß in diesem Falle beides tatsächlich vorkommt und zwar für Punkte  $A'$ , die in beliebiger Nähe von  $A^*$  liegen. Es folgt dies aus der Existenz sowohl eines  $A^+ \varepsilon \mathfrak{D}_1^+$  als auch eines  $A^- \varepsilon \mathfrak{D}_1^-$  in beliebiger Nähe von  $A^*$ ; hier ist diejenige Stelle des Beweises, an welcher wesentlich von der für die Auflösungsmatrix geforderten Rangbedingung Gebrauch gemacht wird. Daraus läßt sich dann schließen, daß  $q_{A^*}(x)$  in dieser Umgebung von  $x_0$  durchweg verschwinden muß, das heißt in einer Umgebung von  $x_0$  ist  $f_{A^*}(x)$  durchweg gleich Null. Dieser Fall wurde aber bereits ausdrücklich ausgeschlossen. Damit ist ein Widerspruch hergeleitet aus der Annahme, daß es in beliebiger Nähe von  $A^*$  kein  $A'$  aus  $\mathfrak{D}_1^+$  oder  $\mathfrak{D}_1^-$  mit einer zweiten Nullstelle  $x_1$  von  $f_{A'}(x)$  in einer vorgeschriebenen Umgebung von  $x_0$  gebe.

II. Wir nehmen an, der Satz sei bewiesen für  $m = \mu$ . Für  $\mu + 1$  beweisen wir ihn, indem wir zeigen, daß es unter den Punkten  $A'$ , für welche  $f_{A'}(x)$  nach Induktionsannahme mindestens  $\mu$  genau einfache Nullstellen  $x_1, \dots, x_\mu$  hat, in beliebiger Nähe von  $A^*$  wenigstens einen gibt, für den  $f_{A'}(x)$  in vorgeschriebener Umgebung von  $x_0$  noch eine  $(\mu + 1)$ -te Nullstelle hat. Wir zeigen dies mit Benützung der Differenzenquotienten  $[x_1, \dots, x_\mu, x]f_A$  auf einem Wege, der dem schon unter I. eingeschlagenen entspricht. Ist  $x_{\mu+1}$  eine genau einfache Nullstelle von  $f_{A'}(x)$ , so ist der Beweis geliefert. Ist  $x_{\mu+1}$  eine mindestens zweifache Nullstelle von  $f_{A'}(x)$ , so kann man sie durch Übergang zu einem geeignet gewählten, hinreichend benachbarten  $\bar{A}$  in eine genau einfache Nullstelle verwandeln, ohne daß die  $\mu$  bereits vorhandenen, genau einfachen Nullstellen zerstört werden.

1. 2. 6. Wir wollen die gewonnene hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit einer mehrfachen Nullstelle noch auf den *Spezialfall der Polynome* anwenden.

Es sei  $n \geq 2$ . Dürfen bei der Auflösung alle Koeffizienten geändert werden, so lautet die  $m$ -zeilige Auflösungsmatrix eines Polynoms höchstens  $n$ -ten Grades:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x^0]^{(m-1)} & [x^1]^{(m-1)} & \dots & \dots & [x^n]^{(m-1)} \end{array} \right\}$$

Ist  $m - 1 \leq n$ , so gibt es  $m$ -reihige Determinanten dieser Matrix. Eine solche  $m$ -reihige Determinante hat die Gestalt:

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{vmatrix} [x^{\lambda_1}]^{(0)} & \dots & [x^{\lambda_m}]^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ [x^{\lambda_1}]^{(m-1)} & \dots & [x^{\lambda_m}]^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

Dabei sind die  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  zu je zweien verschiedene der Zahlen  $0, 1, \dots, n$ .

Es ist  $D(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = c \cdot x^{\lambda_1 + \dots + \lambda_m - \binom{m}{2}}$ , wobei  $c$  eine von Null verschiedene ganze Zahl ist.

Daraus folgt: Ist  $2 \leq m \leq n$  und  $x_0$  eine von Null verschiedene, mindestens  $m$ -fache Nullstelle eines Polynoms höchstens  $n$ -ten Grades, so kann diese  $m$ -fache Nullstelle in  $m$  verschiedene Nullstellen aufgelöst werden, wenn mindestens  $m$  ganz beliebige der Koeffizienten des Polynoms dabei geändert werden dürfen. Die übrigen Koeffizienten können konstant gehalten werden.

Die  $m$ -zeilige Auflösungsmatrix des Polynoms nach den zur Veränderung zugelassenen Koeffizienten ist nämlich quadratisch und ihre Determinante hat die Gestalt  $c \cdot x_0^q$ , wobei  $q$  eine nicht negative ganze Zahl ist und  $c$  sowie  $x_0$  von Null verschieden sind; diese Determinante verschwindet also nicht, die  $m$ -zeilige Auflösungsmatrix hat damit den Rang  $m$ , die hinreichende Bedingung ist erfüllt.

## § 2. Anwendung des Beweisverfahrens in der Differentialgeometrie.

Die Auflösung einer mehrfachen Nullstelle läßt sich geometrisch folgendermaßen beschreiben: Man hat in der  $x, y$ -Ebene eine Schar von Kurvenstücken gegeben durch Gleichungen  $y = f_A(x)$ , wobei jedem Punkt  $A$  des offenen Würfels  $\mathfrak{B}$  ein solches Kurvenstück entspricht. Weiter hat man die feste Gerade  $y = 0$ , die von dem speziellen Kurvenstück  $y = f_{A^*}(x)$  im Punkte  $x_0$  mehrfach berührt wird. Die Auflösung dieses

mehrfachen Berührungspunktes in die entsprechende Anzahl von Schnittpunkten erfolgt durch Übergang zu einem beliebig benachbarten, geeignet gewählten Kurvenstück der Schar. Ein ähnlicher Sachverhalt liegt vor, wenn zwischen einem festen geometrischen Gebilde (z. B. einem Hyperflächenstück) und einem speziellen Element aus einem zur Untersuchung dieses festen Gebildes benutzten Ordnungscharakteristikensystem (z. B. dem System aller Geraden) eine mehrfache Berührung besteht und sich die Frage nach der Auflösbarkeit des Berührungspunktes in die entsprechende Anzahl von Schnittpunkten durch Übergang zu einer beliebig benachbarten, geeignet gewählten Ordnungscharakteristik erhebt. Auch hier kann die Definition einer geeigneten Auflösungsmatrix und das in Nr. 1. 2. 5. 2. angegebene Beweisverfahren zur Gewinnung einer hinreichenden Bedingung dienen. Hier soll das Ergebnis mitgeteilt werden für den Fall, daß das zu untersuchende Gebilde ein hinreichend differenzierbares Hyperflächenstück, das Ordnungscharakteristikensystem das System aller Geraden des betrachteten Raumes ist.

2. 1. 1. Die Gerade  $g$ , gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \dots, x_k = x_k^{(0)} + \alpha_k t, y = y^{(0)} + \beta t,$$

wobei  $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 = 1$ ,

sei im Punkte  $(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, y^{(0)})$  Tangente an die Hyperfläche  $\mathfrak{F}$ , gegeben durch

$$y = f(x_1, \dots, x_k).$$

Wir sagen, der Berührungsgrad von  $g$  sei mindestens gleich  $m \geq 2$ , wenn gilt:

$$h_2(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha_k \right)^{(2)} f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}) = 0$$

.....

$$h_m(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha_k \right)^{(m)} f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}) = 0$$

Man kann zeigen, daß der Berührungsgrad notwendig mindestens gleich  $m$  sein muß, falls der Berührungspunkt sich in mindestens  $m + 1$  Schnittpunkte auflösen lassen soll.

2. 1. 2. Unter der  $m$ -ten Auflösungsmatrix der Tangente  $g$  verstehen wir die Matrix



2. 2. Auf ähnliche Weise läßt sich auch eine hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Berührungspunktes gewinnen, wenn man als Charakteristikensystem das System aller Bogen benutzt, die einem gegebenen, hinreichend oft differenzierbaren, sonst aber beliebigen Bogen kongruent sind.

Der Zusammenhang der Dupinschen Indikatrix mit der linearen Ordnung legt es nahe, zugleich mit der Verallgemeinerung der Ordnungscharakteristiken eine Verallgemeinerung des Indikatrixbegriffes zu versuchen.

Dies gelingt in folgender Weise. In einem Raum  $\mathfrak{R}$  mit geeigneten Eigenschaften liege eine Punktmenge  $\mathfrak{M}$  und eine Punktmenge  $\mathfrak{B}$ . Es sei  $P$  ein Punkt von  $\mathfrak{M}$  und  $Q$  ein Punkt von  $\mathfrak{B}$ . Ein System  $\mathfrak{R}$  von Abbildungen  $T$  der Menge  $\mathfrak{B}$  mit passenden Eigenschaften liefert in  $\mathfrak{R}$  die neuen Mengen  $T(\mathfrak{B})$ . Durch  $T$  gehe  $Q$  über in  $T(Q)$ . Die Gesamtheit der Mengen  $T(\mathfrak{B})$  nennen wir unser Charakteristikensystem,  $\mathfrak{B}$  seine Basis,  $\mathfrak{R}$  sein erzeugendes Abbildungssystem. Dann läßt sich der Begriff der Ordnung des Punktes  $P \varepsilon \mathfrak{M}$  in Bezug auf den Punkt  $Q \varepsilon \mathfrak{B}$  erklären. Unter einer Grenzabbildung von der Mindestordnung  $m$  von  $Q \varepsilon \mathfrak{B}$  in Bezug auf  $P \varepsilon \mathfrak{M}$  verstehen wir eine Abbildung  $T$  aus  $\mathfrak{R}$  mit folgender Eigenschaft:

In beliebig vorgeschriebener Nähe von  $T$  gibt es eine Abbildung  $T'$  aus  $\mathfrak{R}$  derart, daß  $T'(Q)$  in beliebig vorgeschriebener Umgebung von  $P$  liegt, ferner daß  $T'(\mathfrak{B})$  und  $\mathfrak{M}$  in dieser Umgebung von  $P$  mindestens  $m$  verschiedene Punkte gemeinsam haben.

Die Menge aller Grenzabbildungen der Mindestordnung  $m$  von  $Q \varepsilon \mathfrak{B}$  im Bezug auf  $P \varepsilon \mathfrak{M}$  bezeichnen wir mit  $M_m$ . Die endliche oder unendliche Folge

$$M_0, M_1, M_2, \dots$$

nennen wir die ordnungsgeometrische Indikatrix von  $P \varepsilon \mathfrak{M}$  im Bezug auf  $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ .

Wir schreiben  $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}) = (M_0, M_1, M_2, \dots)$ .

Ist die Folge  $M_m$  endlich, so nennen wir den Index des letzten Elementes die Länge der Indikatrix, ist sie unendlich, so sagen wir, die Länge der Indikatrix sei unendlich.

Es gilt dann bei geeigneten, sehr allgemeinen Eigenschaften von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{B}$  der

Satz: Die Länge der Indikatrix  $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R})$  ist gleich der Ordnung des Punktes  $P \in \mathfrak{M}$  im Bezug auf den Punkt  $Q \in \mathfrak{B}$ .

Man sieht, daß sich der in Nr. 2. 1. 4. angegebene Indikatrixbegriff im allgemeinen dem hier entwickelten allgemeinen Indikatrixbegriff einordnet, wenn man die in Nr. 2. 1. 4. betrachteten Gleichungen und die ineinandergeschachtelten Systeme der reellen, gemeinsamen, nichttrivialen Lösungen der ersten  $\mu$  dieser Gleichungen ( $\mu = 1, \dots, k-1$ ), ersetzt durch die ineinandergeschachtelten Mengen der diesen Lösungen entsprechenden Tangenten und diese wieder durch die Bewegungstransformationen, durch welche sie aus einer festen Geraden hervorgehen, wobei die Mehrdeutigkeit dieses Vorgangs zu berücksichtigen ist.

Unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen kann man versuchen, die ordnungsgeometrische Indikatrix der Berechnung zugänglich zu machen. Wie wir gesehen haben, stellt dabei das durch den Begriff der Auflösungsmatrix gekennzeichnete Verfahren ein brauchbares Hilfsmittel dar.

Nachtrag: Während des Druckes dieser Note erschien die interessante Arbeit von Herrn H. Kneser: Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Math. Zeitschr. Bd. 48 (1942) S. 101 ff., auf deren Bedeutung für die Theorie der Nullstellen eines Polynoms auch an dieser Stelle hingewiesen werden muß.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1942

Band/Volume: [73](#)

Autor(en)/Author(s): Buckel Walter

Artikel/Article: [Über die Auflösung mehrfacher Nullstellen bei reellen Funktionen von einer Veränderlichen und ihren Zusammenhang mit Fragen der lokalen Ordnung, insbesondere miteinander Verallgemeinerung der Dupinschen](#)

Indikatrix. 14-24