Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder.

Von

F. Klein.

(Vorgelegt am 13. November 1876.)

In den Mittheilungen, welche ich mir erlaubte, der Societät über „binäre Formen mit linearen Transformationen in sich" vorzulegen (Juli, December 1874, Juli 1875) sowie in einer bez. grösseren Arbeit, die im 9ten Bande der Mathematischen Annalen veröffentlicht ist, habe ich verschiedentlich auf den Zusammenhang hingewiesen, der zwischen dem Ikosaeder nnd den Gleichungen fünften Grades besteht, und es gelang mir, indem ich die Theorie der letzteren benutzte, die Ikosaedergleichung in quadratische Factoren zu spalten und also zu lösen. Aber man kann die umgekehrte Frage aufstellen, ob nicht die Betrachtung des Ikosaeder's geeignet ist, die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zu fördern. Diess scheint in der That der Fall, wie das Nachfolgende und spätere Mittheilungen zeigen sollen. Ich habe dabei mit Dankbarkeit der mannigfachen Anregung und Unterstützung zu gedenken, welche mir Hr. Gordan in wiederholten Besprechungen über den Gegenstand zu Theil werden liess. Ich habe ferner anzufügen, dass mir Hr. Brioschi, dem ich die hauptsächlichen Resultate des Folgenden brieflich mitgetheilt hatte, die Correcturbogen eines demnächst in den Annali di Matematica erscheinenden Aufsatzes zusandte, dessen Inhalt mit dem weiterhin in §. 1, 2 Auseinandergesetzten mannigfache Beziehungen hat.

§. 1. Die Fundamentalgleichung vom sechzigsten Grade.

Es sei f die linke Seite einer in kanonischer Form gegebenen nicht homogen geschriebenen Ikosaedergleichung:

$$f = \eta\,(\eta^{10} + 11\,\eta^5 - 1),$$

H die zugehörige Herse'sche:

$$12^2.\ H = -(\eta^{20} + 1) + 228\,(\eta^{15} - \eta^5) - 494\,\eta^{10},$$

T die Functionaldeterminante von f und H:

$$12.\ T = (\eta^{30} + 1) + 522\,(\eta^{25} - \eta^5) - 10005\,(\eta^{20} + \eta^{10}),$$

welche mit f und H durch die Gleichung verknüpft ist:

$$(1) \qquad T^2 = 12\,f^5 - 12^4.\ H^3.$$

So betrachte ich die Gleichung sechzigsten Grades:

$$\mathrm{I.} \qquad \frac{1728\ H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = x,$$

in der η die Unbekannte, x einen Parameter bezeichnet. Sie hat eine Reihe ausgezeichneter Eigenschaften, welche sie geeignet machen, als Definition einer fundamentalen Irrationalität zu dienen, die ich weiterhin als η (x) bezeichne.

Zuvörderst: Bezeichnet man mit η_0 eine beliebige der 60 Wurzeln, mit ε eine primitive fünfte Wurzel der Einheit, so sind die übrigen 59 Wurzeln resp. Functionswerthe durch folgende lineare Ausdrücke vorgestellt:

$$\varepsilon^\nu \eta_0, \ (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{c} -\dfrac{\varepsilon^\nu}{\eta_0}, \\[2ex] \dfrac{(\varepsilon^\mu + \varepsilon^{\mu+1}) - \varepsilon^\nu \cdot \eta_0}{(\varepsilon^{-\mu} + \varepsilon^{-\mu-1})\,\varepsilon^\nu \eta_0 + 1}, \\[2ex] \dfrac{(\varepsilon^\mu + \varepsilon^{\mu-1})\,\eta_0 + \varepsilon^\nu}{-(\varepsilon^{-\mu} + \varepsilon^{-\mu-1})\,\varepsilon^\nu + \eta_0}, \end{array}\right\} (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

wie man leicht durch geometrische Betrachtung zeigt.

Sodann: Es hat Schwarz in seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal Bd. 75), wo er p. 330 eben die Gleichung I betrachtet, nachgewiesen, dass die conforme Abbildung, welche die Function η (x) vermittelt, einen sehr übersichtlichen Charakter besitzt. Wenn man x in der Ebene, η auf der Kugelfläche interpretirt, so wird die positive Halbebene x abgebildet auf eine der beiden Schaaren von 60 congruenten Dreiecken, die auf der Kugelfläche durch die Wurzelpuncte von f, H, T begränzt werden; der negativen Halbebene entsprechen die übrigen, symmetrisch gestalteten 60 Dreiecke. Die Ecken f, H, T sind die Bilder von $x = \infty$, $x = 0$, $x = 1$. Man kann also den Verlauf der Function $\eta(x)$ anschauungsmässig verfolgen.

Endlich: Aus der genannten Schwarz'schen Arbeit ergibt sich, dass $\eta(x)$ in einfacher Weise mit Hülfe hypergeometrischer Reihen berechnet werden kann: es ist $\eta(x)$ der Quotient zweier, noch zu bestimmender, Particularlösungen y_1, y_2 der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$(3) \quad 0 = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x}{x\,(1-x)} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\,\beta}{x\,(1-x)}\,y$$

in der

$$(1-\gamma)^2 = \tfrac{1}{9},\ (\alpha-\beta)^2 = \tfrac{1}{25},\ (\gamma - \alpha - \beta)^2 = \tfrac{1}{4}$$

zu nehmen ist und also gesetzt werden kann:

$$\alpha = \tfrac{11}{60},\ \beta = -\tfrac{1}{60},\ \gamma = \tfrac{2}{3}.$$

Die Integrationsconstanten berechne ich folgendermassen. Es hat (3) die beiden Particularintegrale:

$$(4) \quad \begin{aligned} F_1 &= F\left(\tfrac{11}{60}, -\tfrac{1}{60}, \tfrac{2}{3}, x\right) \\ F_2 &= F\left(\tfrac{11}{60}, -\tfrac{1}{60}, \tfrac{1}{2}, 1-x\right), \end{aligned}$$

die in dem Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ (unter Einschluss der Gränzen) beide convergiren und an den Gränzen bez. die Werthe annehmen:

$$\begin{aligned} F_1 \ldots\ldots\ & 1,\ \varrho, \\ F_2 \ldots\ldots\ & \sigma,\ 1, \end{aligned}$$

wo

$$(5) \quad \begin{aligned} \varrho &= \frac{\Pi(-\frac{1}{3}) \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{31}{60}) \cdot \Pi(-\frac{19}{60})} = 0{,}98814\ldots \\ \sigma &= \frac{\Pi(-\frac{1}{2}) \cdot \Pi(-\frac{2}{3})}{\Pi(-\frac{41}{60}) \cdot \Pi(-\frac{28}{60})} = 0{,}97853\ldots \end{aligned}$$

Aus F_1, F_2 bilde ich die Combinationen:

$$(6) \quad \begin{aligned} \chi &= \frac{\sigma\,F_1 - F_2}{\varrho\,\sigma - 1}, \\ \vartheta &= \frac{-F_1 + \varrho\,F_2}{\varrho\,\sigma - 1} \end{aligned}$$

und setze nun:

$$(7) \quad \eta(x) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{\varkappa_1\,\chi + \lambda_1\,\vartheta}{\varkappa_2\,\chi + \lambda_2\,\vartheta}$$

wo die $\varkappa$, λ für einen der 60 Functionszweige zu berechnen sind.

Für $x = o$ reducirt sich die Gleichung I auf $H(\eta) = o$; die Wurzeln η rücken in die Ecken des Pentagondodekaeder's. Ich will nun etwa diejenige Ecke auswählen, welche den grössten reellen positiven Werth von η aufweist. Sie ist (vergl. Annalen IX. p. 206 Note) die positive Wurzel von:

$$\eta^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \eta - 1 = o$$

und mag mit η' bezeichnet sein:

$$\eta' = 2{,}9563 \tag{8}$$

Andererseits kommt für $x = 1$ aus I: $T(\eta) = o$. Drei der 30 Ecken von T sind der ausgewählten Ecke von H benachbart. Ich wähle diejenige, deren η reell ist. Sie ist (Annalen IX. p. 205) die positive Wurzel von

$$\eta^2 + (1 - \sqrt{5})\, \eta - 1 = o,$$

und soll η'' heissen

$$\eta'' = 1{,}7936. \tag{9}$$

Aber für $x = o$, $x = 1$ gibt die Formel (7) bez.

$$\eta = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}, \qquad \eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

und also kommt für den gewählten Functionszweig:

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \eta', \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \eta''. \tag{10}$$

Eine letzte Gleichung für die $\varkappa$, λ erhält man durch Betrachtung der Primformen im Sinne von Fuchs (Borchardt's Journal t. 81). Ich entnehme der Fuchs'schen Arbeit, dass im vorlie-Falle $y_2^{12}.\, f(\eta) = f(y_1, y_2)$ Wurzel einer rationalen Function von x sein muss. Dieselbe berechnet sich folgendermassen. Nach einem bekannten Satze ist:

$$y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx} = C.\, x^{-\gamma} . (1-x)^{\gamma - \alpha - \beta - 1}$$
$$= C.\, x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

Andererseits ergibt die Differentiation der Gleichung I:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}}{y_2^2} = \frac{f(\eta)^6}{12.45.\, H^2(\eta).\, T(\eta)}$$

Hieraus:

$$y_2^2 \cdot \sqrt[6]{f(\eta)} = \sqrt[6]{f(y_1, y_2}$$

$$= C_1 . x^{-\frac{1}{2}} . (1-x)^{-\frac{2}{3}} . \frac{H^2(\eta) \cdot T(\eta)}{\sqrt[6]{f^{35}(\eta)}}$$

Ordnet man hier auf der rechten Seite die Factoren und ersetzt dieselben durch ihre Ausdrücke in x, so heben sich die Glieder mit x gegenseitig fort. Die Primform $f(y_1, y_2)$ ist also eine Constante.

Nun wird für $x = o$:

$$f(y_1, y_2) = f(\varkappa_1, \varkappa_2),$$

für $x = 1$:

$$f(y_1, y_2) = f(\lambda_1, \lambda_2);$$

es ist also

$$f(\varkappa_1, \varkappa_2) = f(\lambda_1, \lambda_2).$$

Nehmen wir sie der Einheit gleich, so kommt, vermöge (10):

(11)
$$\varkappa_1 = \frac{\eta'}{\sqrt[12]{f(\eta')}}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{\sqrt[12]{f(\eta')}},$$

$$\lambda_1 = \frac{\eta''}{\sqrt[12]{f(\eta'')}}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt[12]{f(\eta'')}};$$

für die zwölfte Wurzel nehme man beidemale dieselbe, etwa die reelle positive. So findet man, nach Ausführung der numerischen Rechnung:

(12)
$$\eta(x) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{-1{,}785\ldots F_1 + 2{,}858\ldots F_2}{6{,}101\ldots F_1 - 5{,}658\ldots F_2}$$

wo F_1, F_2 die unter (4) angegebene Bedeutung haben und

$$f(y_1, y_2) = 1$$

ist. Die 59 anderen Werthe von $\eta(x)$ ergeben sich aus den Formeln (2).

§. 2. Die Resolventen sechsten Grades.

Es hat bekanntlich zuerst Kronecker und weiterhin besonders Brioschi allgemein solche Gleichungen sechsten Grades studirt, deren Wurzeln z_∞, z_0, . . . z_4 sich in der folgenden Weise durch drei Grössen A_0, A_1, A_2 ausdrücken lassen:

$$(13)\quad \sqrt{z_\infty} = A_0 \sqrt{5}$$

$$\sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^{\nu}.\, A_1 + \varepsilon^{-\nu}.\, A_2 \quad (\nu = o, \ldots.\, 4)$$

Die Geichung sechsten Grades selbst wird die folgende*):

$$\text{II.}\quad (z-A)^6 - 4\,A\,(z-A)^5 + 10\,B\,(z-A)^3 - C\,(z-A) + 5\,B^2 - AC = o$$

wo A, B, C die Ausdrücke bezeichnen:

$$(14)\quad A = A_0^2 + A_1A_2$$
$$B = 8A_0^4A_1A_2 - 2A_0^2A_1^2A_2^2 + A_1^3A_2^3 - A_0\,(A_1^5 + A_2^5)$$
$$C = 320A_0^6A_1^2A_2^2 - 160A_0^4A_1^3A_2^3 + 20A_0^2A_1^4A_2^4 + 6A_1^5A_2^5 - 4A_0\,(32A_0^4 - 20A_0^2A_1A_2 + 5A_1^2A_2^2)\,(A_1^5 + A_2^5) + A_1^{10} + A_2^{10}.$$

Ich werde eine solche Gleichung wegen der Rolle, die sie bei der Auflösung der Gleichungen fünften Grades spielt, schlechthin als Resolvente sechsten Grades bezeichnen; ist insbesondere $A = o$, hat also die Gleichung die einfache Gestalt:

$$\text{III}\qquad z^6 + 10\,Bz^3 - Cz + 5\,B^2 = o,$$

so soll sie eine specielle Resolvente heissen.

Mit diesen speciellen Resolventen hängt die Fundamentalgleichung I unmittelbar zusammen, wie aus meinen früheren Mittheilungen hervorgeht. Setzt man nämlich (Annalen IX. p. 203. ff.):

$$(14)\qquad z' = \frac{5\varphi^2}{\sqrt[3]{-f}},$$

wo die φ die folgenden sechs quadratischen Factoren von f bezeichnen:

$$(15)\qquad \varphi_\infty = \eta$$
$$\varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\varepsilon^{-\nu}.\,\eta^2 + \eta - \varepsilon^{\nu})$$

so genügt z′ der Gleichung:

$$\text{III}'\qquad z'^6 + 10z'^3 - 12\,\sqrt[3]{x}\cdot z' + 5 = o.$$

unter x eben die Grösse verstanden, welche durch Gleichung I definirt wird. Diese Gleichung III′ ist ein besonderer Fall von III ($B = 1$, $C = \sqrt[3]{x}$); aber jede Gleichung III lässt sich ohne

*) Vergl. z. B. Kronecker in Crelle's Journal Bd. 59. p. 308. Brioschi in den Annali di Matematica ser. 2. t. I. p. 222.

Weiteres auf ihn zurückführen, wenn man $z = z' \sqrt[3]{B}$ setzt, wo denn $x = \frac{C^3}{1728\ B^5}$ wird.

Die speciellen Resolventen lassen sich also immer durch hypergeometrische Reihen lösen. Bezeichnen y_1, y_2, wie oben, Zähler und Nenner von η (x) in Formel (12), so ist, da

$$f(y_1, y_2) = 1$$

einfach:

$$(16) \qquad \sqrt{z'_\infty} = \sqrt{-5} \cdot y_1, y_2,$$

$$\sqrt{z'_\nu} = \varepsilon^{-\nu} \cdot y_1^2 + y_1 y_2 - \varepsilon^\nu \cdot y_2^2.$$

Aber auch umgekehrt kann I durch III′ gelöst werden. Denn die sechs Grössen

$$\sqrt{z'_\infty}, \quad \sqrt{z'_0}, \quad \ldots\ldots \sqrt{z'_4}$$

setzen sich aus den drei Ausdrücken:

$$\frac{\eta^2}{\sqrt[6]{-f(\eta)}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt[6]{-f(\eta)}}, \quad \frac{-1}{\sqrt[6]{-f(\eta)}}$$

linear zusammen; man kann also letztere berechnen und aus ihnen ergibt sich η durch Division.

Diese drei Ausdrücke sind eben nichts anderes als die Grösse A_0, A_1, A_2, in der Reihenfolge: A_2, A_0, A_1. Oder umgekehrt: es ist:

$$\eta = \frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}.$$

Man hat also auch folgenden Satz, den ich gleich für alle Gleichungen III ausspreche, da die Quotienten $A_0 : A_1 : A_2$ sich nicht ändern, wenn man, um zu III′ überzugehen, z mit einem constanten Factor multiplicirt:

Bei einer Gleichung III erhält man alle Werthe, deren der Quotient $\frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}$ fähig ist, aus einem beliebigen derselben durch die Substitutionen (2).

Man beweist diess, ohne auf meine früheren Betrachtungen zurückzugehen, am einfachsten, indem man aus der Gleichung

$$\frac{C^3}{1728\ B^5} = x,$$

wo B, C die Werthe (14) haben, vermöge

$$A = A_0^2 + A_1 A_2 = 0$$

entweder A_1 oder A_2 eliminirt. Es wird dann B, C bis auf Factoren geradezu mit $f\left(\frac{A_2}{A_0}\right)$, $H\left(\frac{A_2}{A_0}\right)$ bez. $f\left(-\frac{A_0}{A_1}\right)$, $H\left(-\frac{A_0}{A_1}\right)$ identisch; man findet nämlich:

$$\frac{1728\, H^3\left(\frac{A_2}{A_0}\right)}{f^5\left(\frac{A_2}{A_0}\right)} = \frac{1728\, H^3\left(-\frac{A_0}{A_1}\right)}{f^5\left(-\frac{A_0}{A_1}\right)} = x,$$

und hat also für $\frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}$ in der That eine Gleichung I.

§. 3. Eine geometrische Betrachtung. Zurückführung der allgemeinen Resolvente auf die specielle.

Das Resultat, dass, im Falle der Gleichungen III, alle Werthe von $\frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}$ aus einem durch die linearen Transformationen (2) hervorgehen, kann man durch folgende Betrachtung, die ich in ein geometrisches Gewand kleide, a priori einsehen.

Indem ich auf die absoluten Werthe der A_0, A_1, A_2 im Augenblicke kein Gewicht lege, betrachte ich $A_0 : A_1 : A_2$ als die trimetrischen Coordinaten eines Punctes in der Ebene. Dieser Punct nimmt, wenn A_0, A_1, A_2 auf alle Weisen, den sechs Wurzeln der Gleichung II entsprechend, bestimmt wird, im Ganzen 60 Lagen an. Da nämlich $A_0 = \sqrt{\frac{z}{5}}$, so ist A_0 sechs verschiedener Werthe fähig (sein Vorzeichen ist, da es nur auf die Verhältnisse der $A_0 : A_1 : A_2$ ankommt, irrelevant.) Zu dem einzelnen A_0 gehören aber noch $2 \cdot 5$ Werthsysteme von A_1, A_2. Denn es wird nur die Anordnung der fünf anderen Wurzeln z geändert, wenn man statt A_1, A_2 schreibt: $\varepsilon^{-\nu} A_1$, $\varepsilon^{\nu} A_2$ $(\nu = 0, \ldots 4)$, oder wenn man A_1 mit A_2 vertauscht. Das Wichtige ist nun, dass alle diese Werthe von A_0, A_1, A_2 sich vermöge der Gleichungen (13) als **lineare** Combinationen der ursprünglichen A_0, A_1, A_2 berechnen lassen. **Die 60 Puncte $A_0 : A_1 : A_2$ gehen also aus einem beliebigen dersel-**

ben durch ein geschlossenes System von 60 Collineationen der Ebene hervor.

Dabei behält

$$A^2_0 + A_1 A_2 = A$$

als Coëfficient der Gleichung II unverändert seinen Werth. Die gemeinten Collineationen führen also den Kegelschnitt

$$A_0^2 + A_1 A_2 = o$$

in sich über. Nun denke man sich den einzelnen Punct des Kegelschnittes rational von einem Parameter η abhängig (für den man insbesondere $\frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}$ wählen kann). Den linearen Transformationen, die den Kegelschnitt in sich überführen, entsprechen bekanntlich lineare Transformationen des Parameter's η. Aber alle endlichen Gruppen, die sich aus linearen Transformationen einer Grösse zusammensetzen lassen, sind bekannt (Annalen IX, p. 187 ff.). Soll die Gruppe 60 Transformationen umfassen, so ist sie immer (von trivialen Fällen abgesehen, die hier nicht in Betracht kommen) in dem dort erläuterten Sinne durch die 60 Bewegungen vorgestellt, welche ein Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen. Also lassen sich 60 zusammengehörige Puncte immer durch eine Gleichung vom Typus I darstellen. Nur das mag man durch directe Rechnung verificiren (nach Art der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen), dass diese Gleichung I, sobald man

$$\eta = \frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}$$

wählt, von Vorneherein in kanonischer Form erscheint. —

Diese geometrische Betrachtung lässt nun aber ohne Weiteres auch den Charakter der allgemeinen Gleichungen II übersehen und zeigt, dass man ihre Auflösung in mannigfacher Weise auf die Auflösung specieller Gleichungen, III, zurückführen kann. Es handelt sich bei einer Gleichung II um Auffindung eines Punctes $A_0 : A_1 : A_2$, resp. von 60 solchen Puncten, die nicht dem Kegelschnitte angehören. Aber es bleibt unbenommen, einem solchen Puncte in einer Weise, die durch lineare Transformationen ungeändert bleibt, einen Punct des Kegelschnittes zuzuordnen und diesen aufzusuchen. Dessen Bestimmung hängt dann von einer Gleichung III ab; denn versetzt man den ursprünglichen Punct

$A_0 : A_1 : A_2$ durch die 60 gegebenen Collineationen, so nimmt der zugeordnete Punct, nach der über die Zuordnung gemachten Voraussetzung, seine 60 Lagen vermöge derselben Collineationen an. — Hernach wird man den Punct $A_0 : A_1 : A_2$ (allgemein zu reden) durch rationale Processe finden.

Die einfachste Art, diesen allgemeinen Gedankengang zu realisiren, scheint zu sein, von dem Puncte $A_0 : A_1 : A_2$ die beiden Tangenten an den Kegelschnitt $A = o$ zu legen, und den einen oder anderen Berührungspunct aufzusuchen. Dieses also ist die Methode zur Auflösung der Gleichungen II, welche ich vorschlage. Die Parameter der gemeinten Berührungspuncte sind:

$$(17)\quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{A_2}{A_0 + \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}} = \dfrac{A_0 - \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{-A_1} \\ \eta_2 = \dfrac{A_2}{A_0 - \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}} = \dfrac{A_0 + \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{-A_1} \end{cases}$$

Sie hängen von je einer Gleichung I ab, bei der die auf der rechten Seite stehende Constante, welche ich x_1 bez. x_2 nennen will, Functionen der Grössen A, B, C sind, die ich sogleich berechnen werde. Nimmt man zwei zusammengehörige Werthe von η_1 und η_2, so gibt $\eta_1 + \eta_2$ das $\frac{A_0}{A_1}$, $\eta_1 \eta_2$ das $-\frac{A_2}{A_1}$, endlich der Vergleich mit dem Coëfficienten A die absoluten Werthe von A_0, A_1, A_2. — Abgesehen von einzelnen Fällen, die leicht zu charakterisiren sind, drückt sich dabei das η_2, welches zu einem η_1 gehört, rational durch dieses und bekannte Grössen aus; man hat nur die Coëfficientenaggregate .

$$\frac{B}{A^3}, \quad \frac{C}{A^5}$$

als rationale Functionen von $(\eta_1 + \eta_2)$ und $\eta_1 \eta_2$ darzustellen. Alle anderen zusammengehörigen Paare η_1, η_2 ergeben sich weiterhin aus dem erstgefundenen durch die Substitutionen (2).

§. 4. Berechnung von x_1 und x_2.

Es ist jetzt unsere Aufgabe, die Grössen:

$$(18)\quad x_1 = 1728 \frac{H^3(\eta_1)}{f^5(\eta_1)},\ x_2 = 1728 \frac{H^3(\eta_2)}{f^5(\eta_2)}$$

resp. dem Verhältnisse nach die Coëfficienten der folgenden quadratischen Gleichung:

$$f^5(\eta_1).\, f^5(\eta_2).\, x^2 - 1728\,[H^3(\eta_1).\, f^5(\eta_2) + H^3(\eta_2)\, f^5(\eta_1)].\, x$$
$$+ 1728^2 \cdot H^3(\eta_1) \cdot H^3(\eta_2) = o$$

durch A, B, C auszudrücken. Zu dem Zwecke setze ich:

$$(19) \qquad \begin{aligned} 12^{\frac{2}{5}} \cdot f(\eta_1) \cdot f(\eta_2) \cdot A_1^{12} &= l, \\ 12^{\frac{8}{5}} \cdot H(\eta_1) \cdot H(\eta_2) \cdot A_1^{20} &= m, \\ T(\eta_1) \cdot T(\eta_2) \cdot A_1^{30} &= n, \end{aligned}$$

wo geeignete Potenzen von A_1 als Factoren zugefügt sind, damit l, m, n ganze Functionen von A_0, A_1, A_2 werden. Vermöge der Relation (1), die T^2 durch f^5 und H^3 ausdrückt, berechnen sich aus l, m, n die Verhältnisse der Coëfficienten der quadratischen Gleichung, und man findet die Wurzeln:

$$(20) \quad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{l^5 + m^3 - n^2 \pm \sqrt{(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4\, l^5\, m^3}}{2\, l^5}$$

Diese Ausdrücke l, m, n, gleich Null gesetzt, haben eine einfache geometrische Bedeutung. Sie verschwinden bez., wenn η_1 oder η_2 in einen der Puncte des Kegelschnittes $A = o$ rückt, für welche

$$f(\eta) = o, \text{ resp. } H(\eta) = o, \text{ oder } T(\eta) = o, \left(\eta = \frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}\right)$$

sie stellen daher das Aggregat der 12, 20, 30 Tangenten dar, welche in diesen Puncten an den Kegelschnitt gezogen werden können. Man schreibt die Gleichungen dieser Tangentenaggregate ohne Weiteres in Function von A_0, A_1, A_2 an, da man die Wurzelpuncte von f, H, T kennt; es gilt, sie durch A, B, C auszudrücken. Zu dem Zwecke beweise ich, dass sie ganze rationale Functionen von A, B, C sind.

Es haben l, m, n die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man statt A_0, A_1, A_2 die 59 anderen Werthsysteme setzt, welche aus A_0, A_1, A_2 durch die Vertauschungen der Wurzeln hervorgehen. Stellen wir die Aufgabe, alle ganzen rationalen Functionen von A_0, A_1, A_2 zu finden, welche diese Eigenschaft besitzen. Man kennt von Vorneherein drei solche Functionen bez. vom 2ten, 6ten, 10ten Grade, nämlich A, B, C, und ich werde im folgenden Paragraphen (24) noch eine vom 15ten Grade aufstellen, die D heissen mag. Der Kegelschnitt $A = o$ wird von den Curven $B = o$, $C = o$, $D = o$ bezüglich in den Puncten

$$f(\eta) = o, \ H(\eta) = o, \ T(\eta) = o$$

geschnitten. Sei nun

$$G\,(A_0,\ A_1,\ A_2)$$

eine beliebige andere Function, welche die gewünschte Eigenschaft hat. So betrachte man das Schnittpunctsystem:

$$G = o,\ A = o.$$

Dasselbe wird bei den 60 Collineationen ungeändert bleiben. Es ist also, nach den früher von mir bewiesenen Sätzen (Annalen IX. p. 195), darstellbar durch das Nullsetzen einer rationalen ganzen Function von $f(\eta)$, $H(\eta)$, $T(\eta)$. Es ist also auch G, abgesehen von Termen, die den Factor A enthalten, eine ganze rationale Function von B, C, D. Aber die Terme, welche den Factor A enthalten, haben selbst wieder dieselbe Eigenschaft, wie G; sie sind also in derselben Weise darstellbar etc. So vorwärts schliessend erhält man, mit Rücksicht auf die zwischen f^5, H^3, T^2 bestehende lineare Relation, den Satz, der die auf l, m, n bezügliche Behauptung als Corollar einschliesst: Eine Function $G\,(A_0,\ A_1,\ A_2)$ der geforderten Eigenschaft ist, wenn gerade, eine ganze rationale Function von A, B, C, wenn ungerade, so hat sie den Factor D und besteht übrigens wieder aus einer ganzen rationalen Function von A, B, C.

Man setze jetzt also l, m, n gleich ganzen rationalen Functionen von A, B, C von der zwölften, zwanzigsten, dreissigsten Ordnung in A_0, A_1, A_2. Die zugehörigen numerischen Coëfficienten bestimme man, ihrem Verhältnisse nach, durch Vergleich mit den betr. in A_0, A_1, A_2 von Vorneherein hergestellten Tangentenproducten. Die absoluten Werthe der Coëfficienten gewinnt man sodann, indem man A_0, A_1, A_2 auf den Kegelschnitt $A = o$ rücken lässt, so dass η_1 und η_2 zusammenfallen. Auf diese Weise findet man:

$$(21)\quad \begin{cases} l = 12^{\frac{2}{5}}\,(B^2 - AC + 128\,A^3\,B) \\[2mm] m = \dfrac{1}{12^{\frac{12}{5}}}\Big(C^2 + 2^6\cdot 75\ AB^3 + 2^6\cdot 35\,A^2BC + 2^{11}\,125\,A^4\,B^2 \\ \qquad - 2^{12}\cdot 13\cdot A^5C - 2^{17}\cdot 5\cdot A^7B + 2^{20}\cdot A^{10}\Big) \\[2mm] n = \dfrac{1}{144}\begin{vmatrix} 12B+7488A^3 & 300AB+43200A^4 & -C+1220A^2B \\ & & -1216A^5 \\ 240AB+ & -C+1280A^2B & 12B^2+5AC+1376. \\ 5760A^4 & +36224A^5 & A^3B-1408A^6 \\ -C+1220A^2. & 12B^2+7476A^3B & 240AB^2+5A^2C- \\ B-1216A^5 & -7488A^6 & 580A^4B+11840A^7 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke für l, m, n in (20) ein, so hat man die Werthe von x_1 und x_2 und berechnet aus ihnen, nach (12) und (2), η_1 und η_2. Aus η_1 und η_2 aber setzen sich A_0, A_1, A_2 zusammen, wie oben angegeben.

§. 5. Das Formensystem eines Ikosaeder's und einer quadratischen Form.

Die Betrachtungen und Rechnungen der §. 3, 4 sind einer Formulirung fähig, die ich bei der diessmaligen Darstellung vermied, die ich aber hier zum Schlusse noch auseinander setzen will, da durch dieselben das Bildungsgesetz der benutzten Ausdrücke deutlich wird. Man übertrage nämlich, nach einem bekannten Principe, die Ueberlegungen von der ternären Ebene auf das binäre Gebiet (η), dessen Träger der Kegelschnitt $A = o$ ist. So wird der Punct A_0, A_1, A_2 ersetzt durch eine quadratische Form

$$\psi = A_1 \, \eta^2 + 2 \, A_0 \, \eta - A_2 \tag{22}$$

(die, gleich Null gesetzt, eben η_1 und η_2 zu Wurzeln ergibt). Die Wurzeln der allgemeinen Resolvente sechsten Grades, II, haben dann, wie die Gleichungen (13) zeigen, folgende Bedeutung: sie sind die Quadrate der simultanen Invarianten, die sich auf ψ und resp. die sechs quadratischen Factoren φ (15) von f beziehen. Daher sind auch die A, B, C Invarianten von ψ und f. In der That, A ist die Determinante von ψ, und man findet durch Ausrechnung:

$$(23)\begin{cases} B = -(f, \psi^6)_{12} + \frac{16}{21} \cdot A^3 \\ C = -(H, \psi^{10})_{20} + \dfrac{1024 \; A^5}{11.21} - \dfrac{160}{17} \cdot A^2 \cdot (f, \psi^6)_{12}. \end{cases}$$

Dass hier die Invarianten $(f, \psi^6)_{12}$ und $(H, \psi^{10})_{20}$ als Ausdrücke erscheinen, die sich nicht ändern bei den 60 Substitutionen, denen A_0, A_1, A_2 unterworfen werden, liess sich von Vorneherein einsehen. Denn die 60 quadratischen Formen, welche bei diesen Substitutionen an Stelle von ψ treten, sind eben diejenigen, welche aus ψ hervorgehen, wenn man die Bewegungen ausführt, die das Ikosaeder f mit sich zur Deckung bringen. Aber dabei können sich die rationalen Invarianten von ψ und f nicht ändern; also haben alle solche Invarianten die Eigenschaft, zu den im vorigen Paragraphen studirten

Functionen G zu gehören. Hierdurch gewinnt man umgekehrt die bereits verwerthete Function fünfzehnten Grades:

$$(24) \qquad D = (T, \psi^{15})_{30},$$

ausserdem aber den Satz, dass sich die rationalen, ganzen Invarianten von p und f geradezu mit den Functionen G decken, insbesondere also: dass alle solche Invarianten (f immer in kanonischer Form gedacht), eventuell nach Abtrennung eines Factor's D, rationale ganze Functionen von A, B, C sind. — Endlich die Ausdrücke l, m, n sind nichts Anderes, als die Resultanten von ψ bez. mit f, H, T, deren Zusammensetzbarkeit aus niederen Bildungen bekannt ist. —

Im Vorstehenden habe ich nur erst die Resolventen sechsten Grades betrachtet, deren Zusammenhang mit der Ikosaedergleichung durch meine früheren Arbeiten angedeutet war. Ich werde bei der nächsten Gelegenheit eine analoge sehr einfache Methode vorlegen, um eine beliebige Gleichung fünften Grades zu lösen. Sind $x_0, x_1, \ldots x_4$ die Wurzeln der Gleichung fünften Grades und ist $\Sigma x = 0$, $\Sigma x^2 = 0$, so wird

$$\frac{x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4}{x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^4 x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^3 x_4}$$

durch eine Ikosaedergleichung bestimmt, deren Parameter, von einer Quadratwurzel abgesehen, rational ist.