Sur quelques formes binaires.

Par

M. F. Brioschi.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Klein, vorgelegt am 13. November 1876.)

1°. Les formes binaires $f(\xi_1, \xi_2)$ du troisième ordre et d'ordre n pair pour lesquelles on a $\frac{1}{2}(ff)^4 = o$ identiquement, sont de deux catégories. Pour la première en posant:

$$\tfrac{1}{2}(ff)^2 = h, \qquad 2(fh) = \Theta$$

on a la rélation:

$$(1) \qquad \alpha f_k + 4h^3 + \Theta^2 = o$$

α étant un invariant de f, et k un nombre entier. Evidemment les ordres de h, Θ étant $2(n-2)$, $3(n-2)$ on doit avoir:

$$nk = 6(n-2)$$

par conséquent

$$k = 2,\ 3,\ 4,\ 5$$
$$\text{pour} \quad n = 3,\ 4,\ 6,\ 12.$$

Pour les formes de la seconde catégorie corréspondantes aux autres valeurs de n on a:

$$(2) \qquad 4h^3 + \Theta^2 = o.$$

Soient pour $n = 3$, δ le discriminant de la forme cubique; pour $n = 4$, g_3 l'invariant cubique de la forme biquadratique; pour $n = 6, 12$, A l'invariant quadratique: la rélation (1) devient dans ces cas:

$$\delta f^2 + 4h^3 + \Theta^2 = o, \qquad g_3 f^3 + 4h^3 + \Theta^2 = o$$
$$\tfrac{1}{18} A f^4 + 4h^3 + \Theta^2 = o, \qquad \tfrac{7}{6} A f^{10} = 3^4 . 4^2 . 5^2 (4h^3 + \Theta^2)^2$$

et pour les cas de la seconde catégorie on a l'invariant quadratique $A = \frac{1}{2}(ff)^n = o$ *).

2°. Supposons dans la rélation (1) $z = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, en posant:

---

*) J'ai obtenu ces résultats par la théorie des formes associées, mais on peut aussi les déduire des formules données par Mr. Wedekind dans ses — Studien im binären Werthgebiet — Carlsruhe — 1876.

$$(3) \qquad x = -\frac{4h^3}{f^k}$$

on aura:

$$(4) \qquad \frac{\Theta^2}{f^k} = x - \alpha.$$

Or l'équation (3) nous donne:

$$x' = 4\,\frac{h^2}{f^{k+1}}\,(khf' - 3fh')$$

étant $x' = \frac{dx}{dz}$, $f' = \frac{df}{dz}\ldots$; ou en considérant qu'on a pour Θ:

$$\Theta = 2(fh) = \frac{1}{n(n-2)}\,[2(n-2)\,hf' - nfh']$$

on aura pour la valeur supérieure de k:

$$x' = 12(n-2)\,\frac{h^2\Theta}{f^{k+1}};$$

ou à cause des rélations (3) (4):

$$x' = 6(n-2)\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\,\frac{\sqrt{x-\alpha}}{f^{\frac{2}{n}}}.$$

On a donc pour les formes de la première catégorie qu' à la rélation rationnelle

$$xf^k + 4h^3 = 0$$

corrésponde l'équation différentielle:

$$(5) \qquad \frac{dz}{dx} = C\,\frac{f^{\frac{2}{n}}}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x-\alpha}} \quad \text{étant} \quad C = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 3(n-2)}$$

et l'on a pour les intégrales de la forme:

$$n = \int\frac{dz}{f^{\frac{2}{n}}}$$

la propriété indiquée par Mr. Schwarz.

Or en posant avec vous:

$$\frac{2\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d^3z}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = [z]_x$$

on déduit de la supérieure (5):

$$[z]_x = \frac{2}{n^2}\,\frac{1}{f^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 [n f f'' - (n-1) f'^2] + \frac{4}{9x^2} + \frac{3}{8(\alpha - x)^2} + \frac{1}{3x(\alpha - x)}$$

mais on a:

$$h = \tfrac{1}{2}(f f)^2 = \frac{1}{n^2(n-1)}[n f f'' - (n-1) f'^2]$$

et:

$$\frac{h}{f^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{36(n-2)^2} \cdot \frac{1}{x(\alpha - x)}$$

par conséquent:

$$[z]_x = \frac{4}{9x^2} + \frac{3}{8(\alpha - x)^2} + \frac{6(n-2)^2 + n - 1}{18(n-2)^2} \cdot \frac{1}{x(\alpha - x)}$$

ou:

$$(6) \qquad [z]_x = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(\alpha - x)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2x(\alpha - x)}$$

étant:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{k}, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

Soit x fonction d'une autre variable y, on a la formule de transformation:

$$(7) \qquad [z]_y = [x]_y + [z]_x \left(\frac{dx}{dy}\right)^2$$

en conséquence si $x = \alpha y$ on déduira de la (6) l'équation différentielle:

$$(8) \qquad [z]_y = \frac{1-\lambda^2}{2y^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-y)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2y(1-y)}$$

dont l'équation intégrale sera:

$$\alpha y f^k + 4h^3 = 0$$

étant:

$$k = 6\,\frac{n-2}{n}, \quad \lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{k}, \quad \nu = \frac{1}{2}$$

et $n = 3, 4, 6, 12$. C'est votre résultat sauf le cas $n = 3$.

Pour les autres valeur de n étant $\alpha = 0$ on déduit de l'équation (6):

$$[z]_x = \frac{k^2 - 1}{2k^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

équation différentielle dont l'intégrale:

$$xf^k + 4h^3 = o$$

est irrationelle. Mais si l'on suppose mk nombre entier, et l'on fait $x = y^{\frac{1}{m}}$ on aura pour la formule de transformation (7), l'équation différentielle:

$$[z]_y = \frac{m^2k^2-1}{2m^2k^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

ou l'équation (8) dans laquelle:

$$\lambda = \mu = \frac{1}{mk}, \quad \nu = 1$$

et l'équation intégrale deviendra:

$$yf^{mk} = (-1)^m \cdot 4^m \cdot k^{3m}$$

expression rationelle si 3m nombre entier.

3°. Soit $f(\xi_1, \xi_2)$ une forme biquadratique quelconque, et g_2 son invariant quadratique; on a comme il est connu:

$$\Theta^2 + 4h^3 - g_2f^2h + g_3f^3 = o.$$

En posant:

$$x = -\frac{h}{f}$$

et $z = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ on obtient:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{f(z)}}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \varphi(x) = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

En opérant comme ci-dessus on arrive à l'équation différentielle:

$$[z]_x = 2q - \tfrac{1}{2} p^2 - \frac{dp}{dx}$$

étant:

$$p = \tfrac{1}{2} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad q = -\tfrac{1}{32} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

et l'équation intégrale sera:

$$xf + h = o.$$

Or si $g_2 = o$ en posant:

$$y = \frac{4x^3}{g_3}$$

on rétombe sur l'equation (7) dans laquelle $\lambda = \mu = \frac{1}{3}, \nu = \frac{1}{2}$; et si $g_3 = o$ on obtient:

$$[z]_x = \tfrac{3}{8} \frac{g_2(12x^2+g_2)}{x^2(4x^2-g_2)^2}.$$

De cette équation en posant:

$$y = \frac{4x^2}{g_2}$$

on arrive après quelques réductions à l'équation differentielle (7) dans laquelle:

$$\lambda = \tfrac{1}{4},\ \mu = \nu = \tfrac{1}{2}$$

et dont l'équation intégrale sera:

$$g_2 f^2 y - 4h^2 = o.$$

En général pour les formes d'ordre pair pour lesquelles $(fh)^4 = o$ on a la rélation:

$$\alpha f^2 h^k = 4h^3 + \Theta^2$$

étant $k = 2\,\frac{n-3}{n-2}$ et $\alpha = A^{\frac{2}{n-2}}$. Pour $n = 6, 8 \ldots.$ on a:

$$A^{\frac{1}{2}} f^2 h^{\frac{3}{2}} = 4h^3 + \Theta^2,\quad A^{\frac{1}{3}} f^2 h^{\frac{5}{3}} = 4h^3 + \Theta^2.$$

Cela posé on démontre facilement que l'équation algébrique irrationnelle (sauf pour $n = 4$)

$$\alpha f^2 y - 4h^{\frac{n}{n-2}} = o$$

est l'intégrale de l'équation différentielle (8) où

$$\lambda = \frac{1}{n},\quad \mu = \nu = \frac{1}{2}.$$

Je pourrais ajouter d'autres exemples mais la méthode est assez éclaircie par les cas supérieurs.