

Zur Eliminationstheorie.

Von

M. Noether.

(Vorgetragen am 4. December 1876.)

Die wichtige Frage nach der Anzahl der Schnittpunkte einer Raumcurve mit einer Fläche lässt sich leicht dadurch erledigen, dass man dieselbe, etwa durch Projection der Raumcurve auf eine Ebene, zurückführt auf die Frage nach dem Schnitt einer ebenen Curve C mit einer zu einer Schaar gehörigen ebenen Curve; denn es ist nach den bekannten Principien direct möglich, die in singuläre Punkte von C fallende Anzahl von festen Schnittpunkten der Schaar mit C zu bestimmen. *)

Der Beweis des allgemeineren Satzes von dem Grade des Schnittes zweier Gebilde bei beliebig vielen Variablen, der auf dem vorstehenden Wege nicht mehr erledigt werden kann, ist zuerst von H. Halphen in einem Aufsätze: „Recherches de géométrie à n dimensions“, Bull. d. l. Soc. mathém. de France, t. II. p. 34, versucht worden. Die Idee ist die, durch Zufügung weiterer Variablen und einer Reihe von linearen Gleichungen die Eliminationsaufgabe auf eine solche von einer Variablen aus zwei Gleichungen zurückzubringen. Aber der Beweis muss dann in einer anderen strengeren Gestalt geführt werden**), die übrigens zugleich einfacher ist, und die ich im Folgenden mittheile.

Ein System von irgend einer Anzahl von Gleichungen

$$(1) \quad \pi_1 = 0, \pi_2 = 0, \dots$$

*) Ein solcher Beweis ist in dem von H. Lindemann bearbeiteten Werke: „Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch“ auf pag. 399 versucht. Aber derselbe ist in dieser Form nicht zulässig, da das angenommene Absondern eines Factors nicht stattfindet.

**) Der Halphen'sche Beweis wird schon ungültig, wenn daselbst $-2i \ 2 > n$ wird.

zwischen den homogen eingehenden Variablen

$$x_1, x_2, \dots x_r$$

enthält ein Gebilde Γ_m von m Dimensionen, wenn man, bei allgemein gewähltem Coordinatensystem, durch die Elimination von

$$x_{m+3}, x_{m+4}, \dots x_r$$

auf ein Gleichungssystem geführt werden kann:

$$(2) \dots f(x_1, x_2, \dots x_{m+2}) = 0, \varphi x_{m+3} = \psi_{m+3}, \dots \varphi x_r = \psi_r,$$

wo f eine Gleichung μ^{ter} Ordnung in den Variablen $x_1, \dots x_{m+2}$, die ψ Functionen ϱ^{ter} Ordnung, φ von der $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung in denselben Variablen sind. Das System (2) definirt auch das Gebilde Γ_m , wenn man nur solche m - oder mehrfach unendlich viele Werthsysteme, für welche etwa f , φ und alle ψ verschwinden, weglässt. Dagegen können die Gleichungen (1), ausser dem durch (2) definirten Gebilde Γ_m , noch weitere m - oder mehrfach unendlich viele Werthsysteme gemein haben. Auch ist der Fall eingeschlossen, dass f , d. h. Γ_m selbst, reducibel ist.

Der Grad des Gebildes Γ_m ist gleich der Anzahl der Lösungen des Systems (2) und irgend m linearer Gleichungen, also gleich der Zahl der gemeinsamen Lösungen von

$$f(x_1, \dots x_{m+2}) = 0$$

mit m Gleichungen der Form

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{m+2} x_{m+2}) \cdot \varphi + \alpha_{m+3} \psi_{m+3} + \dots + \alpha_r \psi_r = 0,$$

wenn man die von den α unabhängigen festen Lösungen annimmt. Wir können annehmen, dass die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{m+2} = 0$$

für kein Werthsystem des Gebildes Γ_m zugleich bestehen. Dann aber gibt $f = 0$, verbunden mit m Gleichungen der Form

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{m+2} x_{m+2} = 0$$

ebenfalls schon den Grad des Gebildes Γ_m an, da diese linearen Gleichungen in Bezug auf Γ_m als willkürlich gewählte betrachtet werden können; dieser Grad ist also dem Grad μ von f gleich.

Zugleich folgt, dass dann auch sämmtliche ψ_i für alle Werthsysteme, für welche $f = 0$, $\varphi = 0$ ist, verschwinden, so zwar, dass das Gebilde $\mu(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades, für welches $f = 0$, $\varphi = 0$ ist, von eben demselben Grade im gemeinsamen Werthsystem von $f = 0$, $\psi_i = 0$ zählt.

Wir betrachten nun ein zweites Gebilde Γ_n , von n Dimensionen und vom Grade ν , analog definirt durch ein System

$$(3) \quad \begin{cases} f'(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) = 0 \\ \varphi'_{x_{n+3}} = \psi'_{n+3}, \dots, \varphi'_{x_r} = \psi'_r, \end{cases}$$

wo f' eine Function ν^{ter} Ordnung von x_1, x_2, \dots, x_{n+2} ist. Man hat dann den Satz:

„dass die Gleichungen (2) und (3) zusammen ein Gebilde von $m + n - r + 1$ Dimensionen und vom Grade $\mu \cdot \nu$ definiren, vorausgesetzt: dass $m + n \geq r - 1$ ist und dass die beiden Systeme nicht ein Gebilde von wenigstens $m + n - r + 2$ Dimensionen gemein haben.“

Zum Beweise betrachten wir an Stelle von (2) und (3) die Systeme

$$(4) \quad \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_{m+2}) = 0, \varphi y_{m+3} = \psi_{m+3}, \dots, \varphi y_r = \psi_r, \\ f'(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) = 0, \varphi'_{z_{n+3}} = \psi'_{n+3}, \dots, \varphi'_{z_r} = \psi'_r. \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} y_{m+3} - x_{m+3} = 0, \dots, y_r - x_r = 0, \\ z_{n+3} - x_{n+3} = 0, \dots, z_r - x_r = 0, \end{cases}$$

welche zusammen alle Lösungen von (2), (3) liefern, wobei nur wieder die etwa von den festen Werthsystemen $f = 0, \varphi = 0, \psi^i = 0$, sowie $f' = 0, \varphi' = 0, \psi'_i = 0$ herrührenden in (2), (3) sowohl, als in (4), (5) wegzulassen sind. Aber die Elimination in (4) ergibt sich nun einfach dadurch, dass man eine in $f = 0$ und $f' = 0$ gemeinsam vorkommende Variable x_1 aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, was zu einer Gleichung $F = 0$ führen möge, und sodann den hierbei berechneten Werth von x_1 in die übrigen Gleichungen (4) einsetzt. So ergibt sich aus (4) das System (für $n \geq m$)

$$(6) \quad \begin{cases} F(x_2, x_3, \dots, x_{n+2}) = 0, \quad \Phi x_1 = \Psi, \\ \Phi y_{m+3} = \Psi'_{m+3}, \quad \dots \quad \Phi y_r = \Psi'_r, \\ \Phi z_{n+3} = \Psi'_{n+3}, \quad \dots \quad \Phi z_r = \Psi'_r, \end{cases}$$

in welchem $F = 0$ eine Function $\mu \cdot \nu^{\text{ten}}$ Grades in x_2, x_3, \dots, x_{n+2} ist, da sie durch Elimination aus $f = 0, f' = 0$ hervorgegangen ist, und die Φ, Ψ, Ψ' Functionen derselben Variablen sind.

Dieses System von Gleichungen (6) betrachten wir nun als ein homogenes in den Variablen

$$x_1, x_2, \dots, x_r, y_{m+3}, \dots, y_r, z_{n+3}, \dots, z_r,$$

wobei F in den $r-1$ Variablen x_2, x_3, \dots, x_{r-1} homogen wird. Alsdann stellt (6) ein Gebilde Γ von $r-3$ Dimensionen dar. Der Grad desselben wird aber der von $F, \mu \cdot \nu$, weil die Gleichungen $x_2 = x_3 = \dots = x_r = 0$, für welche weder f noch f' verschwindet, auch für kein Werthsystem von Γ bestehen können.

Dabei treten nun die etwa von den festen Werthsystemen $f = 0$, $\varphi = 0$ herrührenden Werthsysteme in Γ nicht mehr so auf, dass sie den Grad von Γ afficiren. Denn schon die 3 Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $f' = 0$ zusammen liefern nur ∞^{r-4} Verhältnisse der Grössen $x_2 : x_3 \dots : x_r$, während für Γ ∞^{r-3} solcher Verhältnisse zu setzen sind. Ebenso bei $f' = 0$, $\varphi' = 0$.

Nimmt man nun noch zu (6) das System linearer Gleichungen (5) hinzu, so erhält man aus Γ ein Gebilde von

$$(r-3) - (2r-m-n-4) = m+n-r+1$$

Dimensionen, vom Grade $\mu \cdot \nu$. Dieses ganze Gebilde stellt aber gemeinsame Lösungen von (2), (3) dar, da die speciellen von $f = 0$, $\varphi = 0$ (bez. $f' = 0$, $\varphi' = 0$) herrührenden Werthsysteme in Γ , bei Hinzunahme von (5), zu einem Gebilde von höchstens $m+n-r$ Dimensionen führen können. In Verbindung mit weiteren $m+n-r+1$ beliebigen linearen Gleichungen zwischen den gegebenen Variablen

$$x_1, x_2, \dots, x_r$$

erhält man $\mu \cdot \nu$ mit den Coefficienten dieser Gleichungen variable Lösungen, weil $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ zu keinem Werthsystem von Γ gehört.

Eine Ausnahme kann nur dadurch eintreten, dass das lineare System (5) durch mehr als $\infty^{m+n-r+1}$ Werthsysteme des Systems (6) identisch befriedigt wird. Dann wird man erst durch Zufügung von wenigstens $m+n-r+2$ linearen Gleichungen zwischen x_1, x_2, \dots, x_r eine endliche Zahl von Lösungen erhalten können, die im Allgemeinen nicht mehr $= \mu \cdot \nu$ sein wird. — Damit ist der Satz vollständig bewiesen.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen](#)

Jahr/Year: 1875-1878

Band/Volume: [9](#)

Autor(en)/Author(s): Noether Max

Artikel/Article: [Zur Eliminationstheorie. 66-69](#)