# Zur Eliminationstheorie.

Von

**M. Noether.**

(Vorgetragen am 4. December 1876.)

Die wichtige Frage nach der Anzahl der Schnittpunkte einer Raumcurve mit einer Fläche lässt sich leicht dadurch erledigen, dass man dieselbe, etwa durch Projection der Raumcurve auf eine Ebene, zurückführt auf die Frage nach dem Schnitt einer ebenen Curve C mit einer zu einer Schaar gehörigen ebenen Curve; denn es ist nach den bekannten Principien direct möglich, die in singuläre Punkte von C fallende Anzahl von festen Schnittpunkten der Schaar mit C zu bestimmen.*)

Der Beweis des allgemeineren Satzes von dem Grade des Schnittes zweier Gebilde bei beliebig vielen Variabeln, der auf dem vorstehenden Wege nicht mehr erledigt werden kann, ist zuerst von H. Halphen in einem Aufsatze: „Recherches de géométrie à n dimensions", Bull. d. l. Soc. mathém. de France, t. II. p. 34, versucht worden. Die Idee ist die, durch Zufügung weiterer Variabeln und einer Reihe von linearen Gleichungen die Eliminationsaufgabe auf eine solche von einer Variabeln aus zwei Gleichungen zurückzubringen. Aber der Beweis muss dann in einer anderen strengeren Gestalt geführt werden**), die übrigens zugleich einfacher ist, und die ich im Folgenden mittheile.

Ein System von irgend einer Anzahl von Gleichungen

$$(1) \qquad \pi_1 = 0, \ \pi_2 = 0, \ \ldots .$$

---

*) Ein solcher Beweis ist in dem von H. Lindemann bearbeiteten Werke: „Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch" auf pag. 399 versucht. Aber derselbe ist in dieser Form nicht zulässig, da das angenommene Absondern eines Factors nicht stattfindet.

**) Der Halphen'sche Beweis wird schon ungültig, wenn daselbst $-2i \quad 2 > n$ wird.

zwischen den homogen eingehenden Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots x_r$$

enthält ein Gebilde $\Gamma_m$ von m Dimensionen, wenn man, bei allgemein gewähltem Coordinatensystem, durch die Elimination von

$$x_{m+3}, \quad x_{m+4}, \quad \ldots \quad x_r$$

auf ein Gleichungssystem geführt werden kann:

(2) $\ldots f(x_1, x_2, \ldots x_{m+2}) = o, \ \varphi x_{m+3} = \psi_{m+3}, \ \ldots . \ \varphi x_r = \psi_r,$

wo f eine Gleichung $\mu^{ter}$ Ordnung in den Variabeln $x_1, \ldots x_{m+2}$, die $\psi$ Functionen $\varrho^{ter}$ Ordnung, $\varphi$ von der $(\varrho - 1)^{ten}$ Ordnung in denselben Variabeln sind. Das System (2) definirt auch das Gebilde $\Gamma_m$, wenn man nur solche m- oder mehrfach unendlich viele Werthsysteme, für welche etwa f, $\varphi$ und alle $\psi$ verschwinden, weglässt. Dagegen können die Gleichungen (1), ausser dem durch (2) definirten Gebilde $\Gamma_m$, noch weitere m- oder mehrfach unendlich viele Werthsysteme gemein haben. Auch ist der Fall eingeschlossen, dass f, d. h. $\Gamma_m$ selbst, reducibel ist.

Der Grad des Gebildes $\Gamma_m$ ist gleich der Anzahl der Lösungen des Systems (2) und irgend m linearer Gleichungen, also gleich der Zahl der gemeinsamen Lösungen von

$$f(x_1, \ldots x_{m+2}) = o$$

mit m Gleichungen der Form

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{m+2} x_{m+2}) \cdot \varphi + \alpha_{m+3} \psi_{m+3} + \ldots + \alpha_r \psi_r = o,$$

wenn man die von den $\alpha$ unabhängigen festen Lösungen ausnimmt. Wir können annehmen, dass die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{m+2} = o$$

für kein Werthsystem des Gebildes $\Gamma_m$ zugleich bestehen. Dann aber gibt f = o, verbunden mit m Gleichungen der Form

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{m+2} x_{m+2} = o$$

ebenfalls schon den Grad des Gebildes $\Gamma_m$ an, da diese linearen Gleichungen in Bezug auf $\Gamma_m$ als willkürlich gewählte betrachtet werden können; dieser Grad ist also dem Grad $\mu$ von f gleich.

Zugleich folgt, dass dann auch sämmtliche $\psi_i$ für alle Werthsysteme, für welche f = o, $\varphi$ = o ist, verschwinden, so zwar, dass das Gebilde $\mu(\varrho - 1)^{ten}$ Grades, für welches f = o, $\varphi$ = o ist, von eben demselben Grade im gemeinsamen Werthsystem von f = o, $\psi_i$ = o zählt.

Wir betrachten nun ein zweites Gebilde $\Gamma_n$, von n Dimensionen und vom Grade $\nu$, analog definirt durch ein System

$$(3)\qquad \begin{cases} f'(x_1, x_2, \ldots x_{n+2}) = o \\ \varphi' x_{n+3} = \psi'_{n+3}, \ldots \varphi' x_r = \psi'_r, \end{cases}$$

wo $f'$ eine Function $\nu^{ter}$ Ordnung von $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$ ist. Man hat dann den Satz:

„dass die Gleichungen (2) und (3) zusammen ein Gebilde von $m + n - r + 1$ Dimensionen und vom Grade $\mu \cdot \nu$ definiren, vorausgesetzt: dass $m + n \geqq r - 1$ ist und dass die beiden Systeme nicht ein Gebilde von wenigstens $m + n - r + 2$ Dimensionen gemein haben."

Zum Beweise betrachten wir an Stelle von (2) und (3) die Systeme

$$(4)\ldots \begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots x_{m+2}) = o, \ \varphi y_{m+3} = \psi_{m+3}, \ldots \varphi y_r = \psi_r, \\ f'(x_1, x_2, \ldots x_{n+2}) = o, \ \varphi' z_{n+3} = \psi'_{n+3}, \ldots \varphi' z_r = \psi'_r. \end{cases}$$

$$(5)\ldots \begin{cases} y_{m+3} - x_{m+3} = o, \ \ldots \ y_r - x_r = o, \\ z_{n+3} - x_{n+3} = o, \ \ldots \ z_r - x_r = o, \end{cases}$$

welche zusammen alle Lösungen von (2), (3) liefern, wobei nur wieder die etwa von den festen Werthsystemen $f = o$, $\varphi = o$, $\psi_i = o$, sowie $f' = o$, $\varphi' = o$, $\psi'_i = o$ herrührenden in (2), (3) sowohl, als in (4), (5) wegzulassen sind. Aber die Elimination in (4) ergibt sich nun einfach dadurch, dass man eine in $f = o$ und $f' = o$ gemeinsam vorkommende Variable $x_1$ aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, was zu einer Gleichung $F = o$ führen möge, und sodann den hierbei berechneten Werth von $x_1$ in die übrigen Gleichungen (4) einsetzt. So ergibt sich aus (4) das System (für $n \geqq m$)

$$(6)\qquad \cdot \begin{cases} F(x_2, x_3, \ldots x_{n+2}) = o, \ \Phi x_1 = \Psi, \\ \Phi y_{m+3} = \Psi_{m+3}, \quad \ldots \quad \Phi y_r = \Psi_r, \\ \Phi z_{n+3} = \Psi'_{n+3}, \quad \ldots \quad \Phi z_r = \Psi'_r, \end{cases}$$

in welchem $F = o$ eine Function $\mu \cdot \nu^{ten}$ Grades in $x_2, x_3, \ldots x_{n+2}$ ist, da sie durch Elimination aus $f = o$, $f' = o$ hervorgegangen ist, und die $\Phi$, $\Psi$, $\Psi'$ Functionen derselben Variabeln sind.

Dieses System von Gleichungen (6) betrachten wir nun als ein homogenes in den Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots x_r, \ y_{m+3}, \ldots y_r, \ z_{n+3}, \ldots z_r,$$

wobei $F$ in den $r-1$ Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_{r-1}$ homogen wird. Alsdann stellt (6) ein Gebilde $\Gamma$ von $r-3$ Dimensionen dar. Der G r a d desselben wird aber der von $F$, $\mu \cdot \nu$, weil die Gleichungen $x_2 = x_3 = \ldots = x_r = o$, für welche weder $f$ noch $f'$ verschwindet, auch für kein Werthsystem von $\Gamma$ bestehen können.

Dabei treten nun die etwa von den festen Werthsystemen $f = o$, $\varphi = o$ herrührenden Werthsysteme in $\Gamma$ nicht mehr so auf, dass sie den Grad von $\Gamma$ afficiren. Denn schon die 3 Gleichungen $f = o$, $\varphi = o$, $f' = o$ zusammen liefern nur $\infty^{r-4}$ Verhältnisse der Grössen $x_2 : x_3 \ldots : x_r$, während für $\Gamma$ $\infty^{r-3}$ solcher Verhältnisse zu setzen sind. Ebenso bei $f' = o$, $\varphi' = o$.

Nimmt man nun noch zu (6) das System linearer Gleichungen (5) hinzu, so erhält man aus $\Gamma$ ein Gebilde von

$$(r-3) - (2r-m-n-4) = m+n-r+1$$

Dimensionen, vom Grade $\mu \cdot \nu$. Dieses ganze Gebilde stellt aber gemeinsame Lösungen von (2), (3) dar, da die speciellen von $f = o$, $\varphi = o$ (bez. $f' = o$, $\varphi' = o$) herrührenden Werthsysteme in $\Gamma$, bei Hinzunahme von (5), zu einem Gebilde von höchstens $m+n-r$ Dimensionen führen können. In Verbindung mit weiteren $m+n-r+1$ beliebigen linearen Gleichungen zwischen den gegebenen Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots x_r$$

erhält man $\mu \cdot \nu$ mit den Coefficienten dieser Gleichungen variable Lösungen, weil $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = o$ zu keinem Werthsystem von $\Gamma$ gehört.

Eine Ausnahme kann nur dadurch eintreten, dass das lineare System (5) durch mehr als $\infty^{m+n-r+1}$ Werthsysteme des Systems (6) identisch befriedigt wird. Dann wird man erst durch Zufügung von wenigstens $m+n-r+2$ linearen Gleichungen zwischen $x_1, x_2, \ldots x_r$ eine endliche Zahl von Lösungen erhalten können, die im Allgemeinen nicht mehr $= \mu \cdot \nu$ sein wird. — Damit ist der Satz vollständig bewiesen.