Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. II.

Von

F. Klein.

(Vorgelegt am 15. Januar 1877.)

In der Mittheilung vom 13. November 1876 hatte ich zum Schlusse eine einfache Lösungsmethode angedeutet, welche bei denjenigen Gleichungen fünften Grades am Platze ist, in denen das zweite und das dritte Glied fehlt. Indem ich mir heute erlaube, diese Methode ausführlicher darzulegen[1]), füge ich den Beweis hinzu, dass eine gleich einfache Methode bei den allgemeinen Gleichungen fünften Grades nicht statthaft ist. Es gibt im Allgemeinen keine rationale Function der fünf Wurzeln, welche von einer Ikosaedergleichung abhängt. Von diesem Satze ausgehend beweise ich namentlich auch das umfassendere Theorem, welches Kronecker in seinem zweiten Aufsatze „Ueber die Gleichungen fünften Grades" aufgestellt hat (vergl. Borchardt's Journal t. 59 p. 308) und für welches bis jetzt, so viel ich weiss, kein Beweis veröffentlicht ist.

§. 1. Geometrische Deutung der Gleichungen fünften Grades.

Zwischen den fünf Wurzeln

$$y_0, y_1, \dots y_4$$

einer Gleichung fünften Grades mag die Relation bestehen:

$$\Sigma y = o.$$

Dann lassen sich die y ihrem Verhältnisse nach als die Pentaeder-Coordinaten eines Raumpunctes deuten; es ist

$$o = y_0 \, y_1 \, y_2 \, y_3 \, y_4$$

die Gleichung des betr. Pentaeder's. Aendert man die Reihenfolge der y beliebig ab, so nimmt der Punct (y), allgemein zu

1) Vergl. auch eine Mittheilung, welche Hr. Brioschi der R. Accademia dei Lincei am 5. December 1876 gemacht hat.

reden, 120 verschiedene Lagen an, deren Zahl sich auf 60 reducirt, wenn man nur solche Vertauschungen der y zulässt, welche das Differenzenproduct der y ungeändert lassen. Nur von solchen Vertauschungen soll weiterhin, auch wenn nicht ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht ist, die Rede sein. Diesen 60 Vertauschungen der y gebe ich dann — und hierin liegt die Analogie mit der in §. 3 der vorigen Note entwickelten Betrachtung — die Bedeutung von 60 Collineationen [1]; nur ist der dreifach ausgedehnte Raum, nicht mehr die Ebene, Träger dieser Collineationen.

Der Kern der Ueberlegung war nun damals dieser: ich bemerkte, dass durch die 60 Collineationen der Ebene ein bestimmter Kegelschnitt in sich übergeführt wurde. Da die Puncte des Kegelschnitts rational von einem Parameter η abhängen, der sich bei den gemeinten Collineationen selbst linear transformiren muss, so folgte unmittelbar, dass die Bestimmung eines Kegelschnittpunctes von einer Ikosaedergleichung abhängig war (die nur noch durch geschickte Wahl von η in die kanonische Form gebracht werden musste). Derselbe Schluss wäre am Platze gewesen, wenn man nicht einen Kegelschnitt, sondern überhaupt eine rationale Curve [2]) gehabt hätte, noch allgemeiner: eine rationale Mannigfaltigkeit der ersten Dimension, die bei Anwendung der 60 Collineationen in sich übergeführt wird. Eine solche Curve ist z. B. die l. c. betrachtete Curve zehnter Ordnung $C = o$; sie hat den Punct $A_1 = o$, $A_2 = o$ und die fünf mit ihm zusammengehörigen Puncte zu vierfachen Puncten; sie wird also von Curven fünfter Ordnung, welche die genannten 6 Puncte zu Doppelpuncten haben und überdiess einen (beliebig anzunehmenden) festen Punct von $C = o$ enthalten, in nur noch einem beweglichen Puncte geschnitten. Man könnte mithin auf die Betrachtung der $C = o$ in demselben Sinne eine Auflösungsmethode der Resolventen sechsten Grades gründen, wie auf die Betrachtung des Kegelschnittes $A = o$; es kann diess übrigens auch aus einer Bemerkung Brioschi's gefolgert werden (Annali di Matematica, ser. 2, t. I. p. 223).

Man lege sich also auch bei dem neuen geometrischen Bilde

---

1) Vergl. auch einen älteren Aufsatz im vierten Bande der Math. Annalen (p. 353).

2) Es ist nicht schwer, alle solche Curven anzugeben.

die Frage vor: kennt man rationale Mannigfaltigkeiten erster Dimension, welche durch die 60 linearen Transformationen des Raumes in sich übergeführt werden [1])?

Diess ist in der That der Fall. Man erhält z. B. [2]) zwei rationale Raumcurven der Art, wenn man die Fläche dritter Ordnung

$$(1) \qquad \Sigma y^3 = o$$

(die von Clebsch so genannte Diagonalfläche) mit der Fläche vierter Ordnung schneidet:

$$(2) \qquad \Sigma y^4 - \tfrac{1}{5} (\Sigma y^2)^2 = o.$$

Man beweist diess am einfachsten, wenn man die Diagonalfläche eindeutig auf die Ebene abbildet, was durch folgende Formeln geschehen kann, die, in anderer Bedeutung von Brioschi aufgestellt, bei den Untersuchungen über Gleichungen fünften Grades eine bekannte Rolle spielen:

$$(3) \qquad \varrho y_\nu = \varepsilon^{\nu} \cdot C_0 + \varepsilon^{2\nu} \cdot C_1 + \varepsilon^{3\nu} \cdot C_2 + \varepsilon^{4\nu} \cdot C_3,$$

wo

$$(4) \qquad \begin{aligned} C_0 &= - A_1 (4 A_0^2 - A_1 A_2) \\ C_1 &= 2 A_0 A_1^2 - A_2^3 \\ C_2 &= - 2 A_0 A_2^2 + A_1^3 \\ C_4 &= A_2 (4 A_0^2 - A_1 A_2). \end{aligned}$$

Die A_0, A_1, A_2 sind die Coordinaten der Bildebene. Die fraglichen Raumcurven bilden sich ab als

$$(5) \qquad A \,.\, C = o,$$

wo A, C die in Glch. (14) der vorigen Note angegebene Bedeutung haben. Hierin liegt der Beweis; zugleich sieht man, dass die Betrachtung der hier genannten Raumcurven auf die Resolventen sechsten Grades der vorigen Note zurückführt, so dass ich im Augenblicke nicht weiter darauf eingehe.

Die rationalen Mannigfaltigkeiten erster Dimension, deren Betrachtung zu der neuen, hier auseinanderzusetzenden Methode

1) Rationale Mannigfaltigkeiten einer Dimension, die durch alle 120 Vertauschungen der y in sich transformirt werden, gibt es nicht. Denn es gibt keine analog aufgebaute Gruppe von 120 linearen Transformationen einer Veränderlichen.

2) Man kann alle rationalen Raumcurven der betr. Eigenschaft anschreiben; die im Texte genannten haben die niedrigste Ordnung.

der Lösung hinleitet, sind diese: es sind die beiden Systeme geradliniger Erzeugender, welche die Fläche zweiten Grades:

(6) $$\Psi = \Sigma y^2 = o$$

trägt. In der That überzeugt man sich, dass bei den 60 hier in Betracht kommenden linearen Transformationen jedes dieser Erzeugenden-Systeme, für sich genommen, ungeändert bleibt.

Handelt es sich also darum, einen Punct der Fläche Ψ zu finden, anders ausgedrückt: Ist eine Gleichung fünften Grades zu lösen:

(7) $$y^5 + ay^2 + by + c = o,$$

bei der neben Σy auch Σy^2 verschwindet, so suche man von allen Dingen die Parameter — η_1 und η_2 mögen sie heissen — derjenigen beiden Erzeugenden, die durch ihn hindurchlaufen; ihre Bestimmung hängt je von einer Ikosaedergleichung ab. Die Aufstellung dieser Ikosaedergleichungen werde ich jetzt auseinandersetzen; dagegen erläutere ich noch nicht, wie man mit deren Hülfe die Wurzeln y der Gleichung (7) am einfachsten berechnet. Desgleichen gehe ich noch nicht auf die Frage ein, wie man am zweckmässigsten die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades mit der Auflösung der besonderen Gleichungen (7) in Verbindung setzt.

§. 2. Nähere Betrachtung der Fläche $\Psi = o$.

Die Parameter der auf $\Psi = o$ verlaufenden Erzeugenden erster Art sollen, wie schon gesagt, η_1, die der Erzeugenden zweiter Art η_2 genannt werden. Durch die 60 Collineationen des Raumes werden die Erzeugenden erster Art, wie auch die der zweiten Art, in Gruppen von je 60 zusammengefasst. Unter diesen Gruppen gibt es jedesmal eine — sie soll bez. f_1 und f_2 heissen — die nur aus 12 verschiedenen Linien besteht; es gibt eine zweite — H_1 oder H_2 —, die nur 20, und eine dritte — T_1 oder T_2 —, die nur 30 verschiedene Linien umfasst. Ich werde hier zuvörderst diese ausgezeichneten Gruppen analytisch bestimmen.

Zu dem Zwecke bemerke man, dass man auf $\Psi = o$ von Vorneherein eine Anzahl von Gruppen zusammengehöriger Puncte kennt.

I. Die 24 Puncte, deren Coordinaten, abgesehen von der Reihenfolge, sind:

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4 \text{ resp. } 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon,\ \varepsilon^3$$

(unter ε eine primitive fünfte Einheitswurzel verstanden), bilden zwei Gruppen von je 12, durch die 60 Collineationen in einander übergehender Puncte.

II. Die 20 Puncte, deren Coordinaten bei geeigneter Anordnung sind:

$$o,\ o,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,$$

wo α eine primitive dritte Einheitswurzel, bilden eine solche Gruppe.

III. Dasselbe ist der Fall mit den 30 Puncten, deren Coordinaten, abgesehen von der Reihenfolge, gegeben sind durch

$$o,\ 1,\ \beta,\ \beta^2,\ \beta^3$$

(β eine primitive vierte Einheitswurzel.)

Das Gleiche, was von den Puncten gilt, ist richtig für ihre Tangentialebenen und für die Erzeugenden erster oder zweiter Art, welche diese ausschneiden. Die Tangentialebene ein Punctes (y'), der Ψ angehört, lautet:

$$y'_0\, y_0 + y'_1\, y_1 + \ldots .\ y'_4\, y_4 = o.$$

Es entsprechen also den Puncten I, II, III folgende Tangentialebenen (wo jedesmal in der einen hingeschriebenen Gleichung die Indices der y auf beliebige Weise zu vertauschen sind):

$$(8)\ \left\{\begin{array}{ll} \text{I.} \left\{\begin{array}{l} y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4 = o \\ y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4 = o \end{array}\right. \\ \text{II.} \ldots\ldots\ldots\ y_2 + \alpha y_3 + \alpha^2 y_4 = o \\ \text{III.} \ldots\ y_1 + \beta y_2 + \beta^2 y_3 + \beta^3 y_4 = o \end{array}\right.$$

Dabei bemerke man, dass die Erzeugenden, welche die 2. 12 Ebenen I ausschneiden, paarweise identisch sind. Man kann nämlich die 2. 12 Ebenen in 6 Gruppen von 4 zusammenfassen, wie:

$$(9)\ \left\{\begin{array}{l} p_1 = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4, \\ p_2 = y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4, \\ p_3 = y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4, \\ p_4 = y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4, \end{array}\right.$$

wo also p_2, p_3, p_4 ans p_1 hervorgehen, indem man statt ε bezüglich schreibt, ε^2, ε^3, ε^4. Dann hat man, vermöge $\Sigma y = o$:

$$(10)\qquad \Psi = \Sigma y^2 = p_1\, p_4 + p_2\, p_3$$

und die beiden Erzeugenden von $\Psi = o$ also, die etwa durch

$p_1 = o$ ausgeschnitten werden, sind auch bez. enthalten in $p_2 = o$, $p_3 = o$.

Man erhält also nur 24 Erzeugende I, dagegen 40 Erzeugende II, 60 Erzeugende III, die sich bez. auf 12, 20, 30 Erzeugende der ersten Art und ebensoviele der zweiten Art vertheilen. Nun gibt es aber unter den Linien erster oder zweiter Art keine andere Gruppe von 12, 20, 30 zusammengehörigen, als f_1, H_1, T_1 bez. f_2, H_2, T_2. Daher also werden auf $\Psi = o$ die 24 Geraden $f_1 \cdot f_2$, die 40 Geraden $H_1 \cdot H_2$, die 60 Geraden $T_1 \cdot T_2$ bez. ausgeschnitten durch folgende Aggregate von Tangentialebenen:

1) die Geraden f_1 f_2 durch die 12 Ebenen:

$$(11) \qquad \prod_{12} (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4) = o$$

oder auch durch die 12 Ebenen:

$$(12) \qquad \prod_{12} (y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4) = o;$$

2) die Geraden H_1 H_2 durch die 20 Ebenen:

$$(13) \qquad \prod_{20} (y_2 + \alpha y_3 + \alpha^2 y_4) = o;$$

3) die Geraden T_1 T_2 durch die 30 Ebenen:

$$(14) \qquad \prod_{30} (y_1 + \beta y_2 + \beta^2 y_3 + \beta^3 y_4) = o.$$

Man drücke jetzt die linken Seiten von (11), (12), (13), (14) durch die Coëfficienten der Gleichung fünften Grades

$$(7) \qquad y^5 + ay^2 + by + c = o$$

aus, deren Wurzeln die $y_0 \ldots y_4$ sind. So findet man (bis auf Zahlenfactoren) aus (10) und (11) übereinstimmend den Ausdruck:

$$(15) \qquad L = a^4 - 5\,b^3 + 25\,abc,$$

aus (13):

$$(16) \quad M = 5^5 \cdot c^4 + 10^3 \cdot a^2bc^2 - 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot ab^3c - 3 \cdot 2^6 \cdot a^5c - 2^4 \cdot 3^2 \cdot b^5 + 2^7 \cdot a^4b^2$$

und aus (14) einen Ausdruck

$$(17) \qquad N,$$

der die Resultante ist von (7) und der folgenden Gleichung dritten Grades:

$$-5\,a\,y^3 + 15\,b\,y^2 - 25\,c\,y - 8\,a^2.$$

Ich schreibe ihn nicht explicite hin, sondern bemerke nur, dass er ein Glied mit c^6 enthält; der Zahlencoëfficient dieses Gliedes, den ich später benutze, ist 5^{10}.

§. 3. Die Gleichungen für η_1 und η_2.

Die Parameter η_1, η_2, von denen die Erzeugenden der Fläche Ψ abhängen, genügen jedenfalls einer Ikosaedergleichung; sollen auf diese aber die Entwickelungen des §. 1 der vorigen Note Anwendung finden, so hat man η_1 und η_2 in der Weise auszusuchen, dass die Ikosaedergleichung in der dort zu Grunde gelegten kanonischen Form erscheint. Es war

$$f = \eta\,(\eta^{10} + 11\,\eta^5 - 1):$$

es hatte also $f = o$ die Wurzeln:

$$(8) \qquad o, \infty;\ (\varepsilon + \varepsilon^4)\,\varepsilon^\nu;\ (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\,\varepsilon^\nu.$$

Durch ihre Werthe ist das kanonische Coordinatensystem mehr als hinreichend charakterisirt, eben diese Werthe sind also den 12 Erzeugenden erster Art der Gruppe f_1 und den 12 Erzeugenden zweiter Art der Gruppe f_2 beizulegen. Man erreicht diess, indem man etwa setzt:

$$(19) \quad \begin{cases} \eta_1 = -\dfrac{p_1}{p_2} = +\dfrac{p_3}{p_2}, \\[2ex] \eta_2 = +\dfrac{p_1}{p_3} = -\dfrac{p_2}{p_4}. \end{cases}$$

In der That

$$p_1 = -\,Cp_2, \qquad\qquad p_1 = Cp_3$$

stellt die Gleichungen zweier Ebenenbüschel dar, deren Axe der Fläche Ψ angehört; es ist also $-\dfrac{p_1}{p_2}$ ein Parameter für die Linien der einen Art, welche die erste heisen soll, $\dfrac{p_1}{p_3}$ ein Parameter für die Linien anderer Art. Trägt man sodann in $-\dfrac{p_1}{p_2}$ oder $+\dfrac{p_1}{p_3}$ die Coordinaten der zweierlei Puncte der Gruppen I ein, so entstehen genau die Werthe (18). Durch diese Puncte verlaufen aber die 12 Linien f_1 und die 12 Linien f_2, deren Parameter die vorgeschriebenen Werthe annehmen sollten.

Es ist auch nicht schwer, durch Rechnung zu verificiren, dass sich die Grössen η_1 und η_2 bei den 60 Vertauschungen der

η eben durch die Formeln linear transformiren, die in Glch. (2) der vorigen Note angegeben sind. Man braucht bei der Rechnung nur immer die Relationen $\Sigma y = o$, $\Sigma y^2 = o$ anzuwenden. Es ist aber wohl zu bemerken, dass die linearen Transformationen, welche η_1 und η_2 bei den Vertauschungen der y erfahren, zwar in ihrer Gesammtheit aber durchaus nicht im Einzelnen identisch sind. Die Transformation des η_2 ergibt sich aus derjenigen, der η_1 unterworfen wird, indem man ε durch ε^2 ersetzt. Das war bei den Grössen η_1, η_2 der vorigen Note anders; sie wurden gleichzeitig durch dieselben linearen Transformationen umgeformt. Uebrigens verläuft die Rechnung, die ich nun anstellen werde, ganz ähnlich wie in §. 4 der vorigen Note.

Um die Ikosaedergleichungen zu finden, denen η_1 und η_2 genügen:

$$(20)\quad 1728\,\frac{H^3(\eta_1)}{f^5(\eta_1)} = x_1, \qquad 1728\,\frac{H^3(\eta_2)}{f^5(\eta_2)} = x_2,$$

das heisst also, um x_1 und x_2 zu berechnen, betrachte man zunächst die Ausdrücke:

$$f(\eta_1)\cdot f(\eta_2), \qquad H(\eta_1)\cdot H(\eta_2), \qquad T(\eta_1)\cdot T(\eta_2)$$

oder vielmehr die Gleichungen, welche durch ihr Verschwinden dargestellt sind. Die Gleichung

$$f(\eta_1)\cdot f(\eta_2) = o,$$

die, nach Wegwerfen der Nenner auch so geschrieben werden kann:

$$p_2^{12}\cdot p_3^{12}\cdot f(\eta_1)\cdot f(\eta_2) = f(-p_1, p_2)\cdot f(+p_1, p_3) = o$$

stellt in dieser Form ein Aggregat von 24 Ebenen dar, von denen 12 durch die Axe $p_1 = o$, $p_2 = o$ hindurchgehen und übrigens durch die 12 Erzeugenden erster Art der Gruppe f_1, während die anderen 12 durch die Axe $p_1 = o$, $p_3 = o$ hindurchgelegt sind und die 12 Erzeugenden zweiter Art, f_2, ausschneiden. Aber dieselben Erzeugenden werden in gleicher Multiplicität auf $\Psi = o$ ausgeschnitten durch die Fläche

$$p_1^{12}\cdot L = o,$$

wo L den Ausdruck (15) bedeutet, dessen Verschwinden mit (11) oder (12) gleichbedeutend ist. Daher kann man setzen, unter λ einen numerischen Factor verstanden:

$$(21)\qquad f(\eta_1)\cdot f(\eta_2) = \lambda\cdot\frac{p_1^{12}}{p_2^{12}\cdot p_3^{12}}\,L,$$

Dieselbe Ueberlegung gibt vermöge (13) und (14). resp. (16) und (17) für $H(\eta_1) \cdot H(\eta_2)$ und $T(\eta_1) \cdot T(\eta_2)$ folgende Werthe:

(22) $$H(\eta_1) \cdot H(\eta_2) = \mu \cdot \frac{p_1^{20}}{p_2^{20} \cdot p_3^{20}} \cdot M,$$

(23) $$T(\eta_1) \cdot T(\eta_2) = \nu \cdot \frac{p_1^{30}}{p_2^{30} \cdot p_3^{30}} \cdot N,$$

wo μ, ν Zahlenfactoren. Ich finde durch Betrachtung besondere Werthe:

(24) $$\lambda = 5^8, \ \mu = \frac{5^{15}}{144^2}, \quad \nu = \frac{5^{20}}{144}.$$

Die schliessliche Berechnung von x_1, x_2 geschieht, wie in §. 4 der vorigen Note. Die dabei auftretende Quadratwurzel zerfällt in die Quadratwurzel aus der Discriminante der vorgelegten Gleichung fünften Grades (7) und einen rationalen Factor [1]).

§. 4. Unmöglichkeit, die allgemeine Gleichung fünften Grades in analoger Weise zu lösen.

In dem besonderen Falle, wo $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ hatten die rationalen Ausdrücke (19) die Eigenschaft, von einer Ikosaedergleichung abzuhängen. Nehmen wir an, bei einer beliebigen Gleichung fünften Grades sei ein Ausdruck derselben Eigenschaft der folgende:

(25) $$\frac{\Psi_1 \ (y_0, \ldots y_4, p)}{\Psi_2 \ (y_0, \ldots y_4, p)},$$

wo Ψ_1, Ψ_2 ganze homogene Functionen von $y_0 \ldots y_4$, p sind und das p nur der Homogeneität und der dadurch erleichterten Ausdrucksweise wegen zugefügt ist. Es soll $\frac{\Psi_1}{\Psi_2}$ sich vermöge der

1) Hr. Gordan theilt mir folgende Zerlegung der betr. Quadratwurzel mit:

$$f^5(-p_1, p_2) \cdot H^3(p_1, p_3) - f^5(p_1, p_3) \cdot H^3(-p_1, p_2)$$
$$= C \cdot p_1^{60} \cdot \Pi (y_i - y_k) \prod_{20} (y_i \cos \frac{2\pi}{5} - y_k \cos \frac{4\pi}{5})$$
$$\prod_{30} (y_0 + \cos \frac{2\pi}{5} (y_1 + y_2) + \cos \frac{4\pi}{5} (y_3 + y_4)),$$

wo C numerisch.

Formeln (2) der vorigen Note linear transformiren, wenn man die y (immer nur in den 60 hier gestatteten Weisen) permutirt.

Es folgt hieraus zunächst: Wenn Ψ_1 und Ψ_2 beide für gewisse Werthe von $y_0 \ldots y_4$, p verschwinden, so thun sie es auch nach Permutation der y. Denn Zähler und Nenner des permutirten Ausdruck's sind ganze lineare Functionen der anfänglichen Ψ_1, Ψ_2.

Sodann schicke ich, um die spätere Betrachtung nicht zu unterbrechen, eine Reihe von Sätzen über das Ikosaeder voraus, die grösstentheils in meinen früheren Untersuchungen bereits enthalten sind.

1) Wendet man die 60 hier in Betracht kommenden linearen Transformationen (Formel (2) der vorigen Note) an auf eine beliebige Grösse, die ich der Homogeneität wegen $\frac{\eta}{\zeta}$ nenne, so erhält man im Allgemeinen 60 verschiedene Werthe; im besonderen Falle sind es 30 oder 20 oder 12. Immer aber ist die Anzahl gerade.

2) Man kann solche ganze Functionen χ_1, χ_2 von η, ζ suchen, dass

$$(26) \qquad \frac{\chi_1(\eta, \zeta)}{\chi_2(\eta, \zeta)}$$

bei linearer Transformation des $\frac{\eta}{\zeta}$ eben dieselben 60 linearen Transformationen erfährt. Solche Functionen χ_1, χ_2 haben jedenfalls ungerade Ordnung. Denn sucht man diejenigen Werthe von $\frac{\eta}{\zeta}$, welche mit den Werthen von $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ übereinstimmen, so muss sich, nach Satz 1), eine gerade Zahl ergeben.

3) Aus η, ζ setzen sich fünf Ausdrücke sechsten Grades zusammen, die ich t_ν nenne (vergl. Math. Annalen IX. p. 206):

$$(27) \qquad t_\nu = \varepsilon^{2\nu}(\eta^6 - 2\eta\zeta^5) + \varepsilon^{-2\nu}(\zeta^6 + 2\eta^5\zeta) - 5\,\varepsilon^\nu\,\eta^2\,\zeta^4 - 5\,\varepsilon^{-\nu}\,\eta^4\,\zeta^2$$

Man hat für sie:

$$-10\,\Sigma t_\nu^2 = f = \eta\zeta\,(\eta^{10} + 11\,\eta^5\zeta^5 - \zeta^{10}).$$

Jetzt bilde man die fünf Functionen:

$$(28) \qquad \tau_\nu = \frac{t_\nu^2}{f}.$$

Wenn man $\frac{\eta}{\zeta}$ durch die 60 linearen Transformationen umwandelt, so werden diese fünf Ausdrücke in 60 Weisen permutirt.

4) Dieselbe Eigenschaft haben offenbar beliebige rationale Functionen der einzelnen τ_ν. Da die τ_ν einer Gleichung fünften Grades genügen (die ich bei früherer Gelegenheit aufstellte), so kann man eine solche Function in allgemeinster Weise anschreiben:

$$(29) \qquad \tau'_\nu = \alpha + \beta\tau_\nu + \gamma\tau_\nu^2 + \delta\tau_\nu^3 + \varepsilon\tau_\nu^4,$$

wo $\alpha \ldots \varepsilon$ beliebig. Die τ_ν sind im Allgemeinen verschieden; man kann es daher, besondere Werthe von $\frac{\eta}{\zeta}$ ausgenommen, durch geeignete Wahl von $\alpha \ldots \varepsilon$ erreichen, dass, bei gegebenem $\frac{\eta}{\zeta}$, die τ'_ν fünf vorgegebene Werthe annehmen.

5) Es ist leicht, $\frac{\eta}{\zeta}$ durch die Verhältnisse der t_ν rational auszudrücken. Substituirt man den betr. Werth in $\chi_1 : \chi_2$ (26), so entsteht

$$(30) \qquad \frac{\omega_1 (t_0 \ldots t_4)}{\omega_2 (t_0 \ldots t_4)},$$

wo ω_1, ω_2 ganze Functionen bedeuten sollen. Man kann umgekehrt fragen, wann ein solcher Ausdruck (30) auf einen Ausdruck (26) zurückkommt. Setzen wir in (30) für die t_ν ihre Werthe (27), so wird zunächst Zähler und Nenner eine gerade Function von η, ζ. Es muss sich also jedenfalls aus Zähler und Nenner ein Factor ungerader Ordnung wegheben.

Auf Grund dieser Sätze beweist sich nun die Unmöglichkeit einer Function (25):

$$\frac{\Psi_1 (y_0 \ldots y_4 , p)}{\Psi_2 (y_0 \ldots y_4 , p)}$$

folgendermassen.

Man setze $\frac{y_0}{p}, \ldots \frac{y_4}{p}$ gleich Functionen τ'_ν von η, ζ (29), so zwar, dass man vorab diese Functionen auf gemeinsamen Nenner bringt und dann $y_0, \dots y_4$ gleich setzt den betr. Zählern, p gleich dem Nenner. Wegen der Zuordnung der Indices ist dabei eine Bemerkung nöthig. So oft man die y permutirt, erfährt $\frac{\psi_1}{\psi_2}$ eine von den 60 linearen Transformationen. Wendet man die letztere auf $\frac{\eta}{\zeta}$ an, so permutiren sich ihrerseits die τ'_ν. Es sollen die y den Zählern der τ'_ν in der Reihenfolge gleich gesetzt werden, dass die zusammengehörigen y und τ'_ν dieselben Permutationen erfahren.

Ausserdem werde ich, was nach Satz 4) immer angeht, die τ'_ν so wählen, dass die Functionen ψ_1, ψ_2 nach Einsetzung der τ'_ν nicht identisch verschwinden.

Jetzt ersetze man die τ'_ν durch ihre Ausdrücke in t_ν. So wird:

$$(31) \qquad \frac{\psi_1\,(y_0 \dots y_4,\, p)}{\psi_2\,(y_0 \dots y_4,\, p)} = \frac{\omega_1\,(t_0 \dots t_4)}{\omega_2\,(t_0 \dots t_4)},$$

wo ω_1, ω_2 ganze homogene Functionen der t_ν, die ich ebenso bezeichne, wie die Functionen in (30), weil sie dieselbe Eigenschaft haben. Denn $\frac{\psi_1}{\psi_2}$ soll die 60 linearen Transformationen erfahren, wenn man die y permutirt, also auch $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, wenn man die t permutirt.

Ersetzt man jetzt in ω_1, ω_2 (31) die t_ν durch ihre Ausdrücke in η, ζ, so muss sich, nach Satz 5), im Zähler und Nenner ein gemeinsamer Factor von ungerader Ordnung in η, ζ absondern lassen.

Diess aber führt zu einem Widerspruche; denn man kann zeigen, dass ein etwa vorhandener gemeinsamer Factor von gerader Ordnung sein muss. Hieraus folgt dann die Unmöglichkeit der Functionen $\frac{\psi_1}{\psi_2}$.

Enthält nämlich Zähler und Nenner etwa den linearen Factor

$$\mu\eta - \lambda\zeta,$$

so erhalten für $\frac{\eta}{\zeta} = \frac{\lambda}{\mu}$ die $\frac{y}{p}$ Werthe, für welche sowohl ψ_1 als ψ_2 verschwindet. Diess ändert sich nicht, nach der oben voraufgeschickten Bemerkung, wenn man die y permutirt. Daher müssen in dem grössten gemeinsamen Factor neben $\mu\eta - \lambda\zeta$ alle diejenigen linearen Factoren enthalten sein, welche aus $\mu\eta - \lambda\zeta$ durch die 60 linearen Transformationen entstehen. Aber nach Satz 1) ist die Anzahl dieser Ausdrücke immer gerade. Also besteht der grösste gemeinsame Factor aus Aggregaten von einer jedesmal geraden Anzahl linearer Factoren, ist also selbst gerade, wie behauptet wurde; also hat man Widerspruch.

§. 5. Der Kronecker'sche Satz.

Das im vorangehenden Paragraphen bewiesene Theorem subsumirt sich als specieller Fall unter den in der Einleitung erwähnten Kronecker'schen Satz. Umgekehrt werde ich den letzteren jetzt in der Art beweisen, dass ich ihn auf jenes Theorem zurückführe.

Man kann den Kronecker'schen Satz etwa so formuliren. Sei φ (y) eine rationale Function der y, welche bei den 60 Vertauschungen der y nicht ungeändert bleibt. Die verschiedenen bei diesen Vertauschungen entstehenden Werthe hängen von einer Resolvente ab. Es ist bei durchaus willkürlichen y unmöglich, φ so zu wählen, dass in der betr. Resolvente nur **ein** Parameter auftritt (wie z. B. in der Ikosaedergleichung).

Um den Beweis zu leisten, zeige ich: Wenn bei der allgemeinen Gleichung fünften Grades eine Resolvente mit nur einem Parameter existirte, so könnte man sie in eine Ikosaedergleichung verwandeln.

Die verschiedenen Werthe, die φ bei Permutation der y annimmt, seien in bestimmter Anordnung:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n.$$

Vertauscht man die y durch die 60 gestatteten Permutationen, so erscheinen die $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ in anderer Anordnung wieder, und ich betrachte die 60 Anordnungen der φ, welche auf diese Weise entstehen.

Da die φ von nur einem Parameter abhängen, so durchlaufen die Anordnungen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, wenn sich die y beliebig ändern, ein Werthgebiet von nur einer Dimension. Dieses Werthgebiet ist rational durch einen Parameter darstellbar.

Denn man kann die y jedenfalls solchen rationalen Functionen einer Grösse λ gleichsetzen, dass die φ nicht constant bleiben; dann durchlaufen die $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ als rationale Functionen von λ das ganze ihnen gestattete Werthgebiet. Statt λ kann man dann weiter einen anderen Parameter μ in der Weise einführen, dass die φ nicht nur rationale Functionen des μ sind, sondern auch μ eine rationale Function der φ und also der y. (Vergl. einen Aufsatz von Lüroth im 9. Bande der Math. Annalen p. 163.) Ich behaupte dann, dass eine geeignete lineare Function von μ

$$\eta = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}$$

von einer Ikosaedergleichung abhängt. Diess ist derselbe Schluss, den ich in §. 3 der vorigen Note und in §. 1 der diessmaligen Mittheilung in mehr speciellen Fällen anwandte; er kann also, wie an jenen Stellen, als bewiesen gelten; ich gehe auf seine Erörterung bei der gegenwärtigen Gelegenheit nicht weiter ein.