Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. III.

Von

F. Klein.

(Vorgelegt am 9. Juli 1877.)

In der Note, welche ich der Societät im Januar dieses Jahres vorlegte, habe ich gezeigt, dass bei einer Gleichung fünften Grades, in der die beiden ersten Coëfficienten fehlen, die beiden Ausdrücke

$$\eta = \eta' = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{p_3}{p_4} \qquad \eta'' = -\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_2}{p_4}$$

$$(p_i = y_0 + \varepsilon^{4i}y_1 + \varepsilon^{3i}y_2 + \varepsilon^{2i}y_3 + \varepsilon^{i}y_2)$$

je von einer Ikosaedergleichung abhängen, deren Parameter in α, β, γ, $\sqrt{\triangle}$ rational ist ($\triangle$ die Discriminante der Gleichung fünften Grades). Ich habe mich nun damit beschäftigt, umgekehrt die y durch η auszudrücken und möchte heute über den Gang meiner Untersuchung Bericht erstatten, ohne freilich die zum Theil sehr langwierigen Zwischenrechnungen alle anzugeben.

Die fünf Wurzeln $\eta_0 \ldots \eta_4$ wurden damals aufgefasst als Pentaedercoordinaten eines Raumpunctes, der sich auf der Fläche zweiter Ordnung $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ befand. Durch diesen Punct verlaufen zwei geradlinige Erzeugende der Fläche, und η', η'' sind die beiden Parameter dieser Erzeugenden. Ich werde nun zunächst zweierlei fünfwerthige Functionen z_ν und z'_ν von η' angeben, welche als Pentaedercoordinaten gedeutet Puncte darstellen, die auf der betr. Erzeugenden liegen. Dann hat man jedenfalls:

$$y_\nu = \lambda z_\nu + \lambda' z'_\nu, \tag{1}$$

wo λ, λ' rationale Functionen von α, β, γ, $\sqrt{\triangle}$ sind, und es handelt sich nur noch darum, diese λ, λ' zu bestimmen.

Derartige Functionen z, z' erhalte ich nun folgendermassen. Sei $\eta' = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so hat man die von mir wiederholt benutzte fünfwerthige Function:

(2) $t_\nu = - \varepsilon_\nu \cdot 5\eta_1^2\eta_2^4 + \varepsilon^{2\nu} \cdot (\eta_1^6 - 2\eta_1\eta_2^5) + \varepsilon^{3\nu}(\eta_2^6 + 2\eta_1^5\eta_2)$
$- \varepsilon^{4\nu} \cdot 5\eta_1^4\eta_2^2.$

Man bilde jetzt deren Hesse'sche. So kommt bis auf Zahlenfactoren:

(3) $$W_\nu = (\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)(+\eta_1^7 + 7\eta_1^2\eta_2^5) + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)(-7\eta_1^5\eta_2^2 - \eta_2^7).$$

Dass $\Sigma W = o$, $\Sigma W^2 = o$, sieht man sofort. Man berechne ferner die Ausdrücke:

$$P_i = W_0 + \varepsilon^{4i} W_1 + \varepsilon^{3i} W_2 + \varepsilon^{2i} W_3 + \varepsilon^i W_4,$$

so wird $\frac{P_1}{P_2}$ offenbar gleich $\frac{p_1}{p_2}$. Der Raumpunct W gehört also der durch y hindurchgehenden und durch η' bezeichneten Erzeugenden an. Demnach werde ich homogen machend setzen:

(4) $$z_\nu = \frac{W_\nu f}{144H}.$$

Ich berechne ferner:

(5) $$\sigma_\nu = 24 f^2 - 7ft_\nu^2 + t_\nu^4$$

und finde:

(6) $$\sigma_\nu =$$
$$(\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)(-46\eta_1^{20}\eta_2^3 + 1173\eta_1^{15}\eta_2^8 + 391\eta_1^{10}\eta_2^{13} + 207\eta_1^5\eta_2^{18} - \eta_2^{23})$$
$$+ (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)(\eta_1^{23} + 207\eta_1^{18}\eta_2^5 - 391\eta_1^{13}\eta_2^{10} + 1173\eta_1^8\eta_2^{15} + 46\eta_1^3\eta_2^{20}).$$

An diese Formel knüpft sich dieselbe Bemerkung, wie an (3). Ich setze daher, homogen machend:

(7) $$z'_\nu = \frac{\sigma_\nu}{f^2}.$$

und kann nun zur Bestimmung des λ, λ' übergehen *).

---

*) Dass die Ausdrücke W_ν, σ_ν die gewünschte Eigenschaft besitzen, fand ich weniger durch consequente Ueberlegung als durch glücklichen Ansatz. In den Entwickelungen, welche Gordan hier anschliesst, ist er seinerseits durch systematische Formenbildung eben zu diesen Ausdrücken und ihren Eigenschaften gekommen. In der That entsprechen meine W_ν, σ_ν zweien der vier in der einen Reihe der von ihm betrachteten Veränderlichen linearen Covarianten. Die beiden anderen sind, wie man leicht nachweist, $t_\nu W_\nu$ und $t_\nu (f - 7t_\nu^2)$. Gordan benutzt W_ν und $t_\nu W_\nu$.

Zu dem Zwecke bemerke ich, dass alle fünfwerthigen Functionen nullter Ordnung von η_1, η_2 rationale Functionen der einen

(8) $$= \xi_\nu \frac{t_\nu^2}{f}$$

sind. In der That kommt:

(9) $$z_\nu = \frac{1}{\xi_\nu - 3}, \quad z'_\nu = \xi_\nu^2 - 7\xi_\nu + 24.$$

Ich werde nun ξ_ν explicite als rationale Functionen des entsprechenden y_ν berechnen. Hernach trage ich diesen Werth in (4) und (8) ein und finde dann λ, λ' aus (1) durch Coëfficientenvergleichung.

Der kürzeren Schreibweise wegen will ich fortan die aus η' oder aus η'' auf analoge Weise gebildeten Functionen durch die Indices 1 und 2 unterscheiden und übrigens den Index ν unterdrücken. So ist ξ_1 und ξ_2 Wurzel der folgenden in dem zugehörigen y rationalen Gleichung zweiten Grades:

(10) $$f_1 f_2 \cdot \xi^2 - (t_1^2 f_2 + t_2^2 f_1)\, \xi + t_1^2 t_2^2 = o.$$

Aber man hat

$$\frac{12^2 H}{W} = t^2 - 3f$$

und also, wenn man will:

(11) $$(f_1 f_2)\, \xi^2 - \left(t_1^2 t_2^2 + 9 f_1 f_2 - 12^4 \frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}\right) \xi + t_1^2 t_2^2 = o.$$

Um die Coëfficienten der Gleichung zu finden, hat man also die Producte $f_1 f_2$, $t_1 t_2$, $\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}$ auszuwerthen.

Durch einen geometrischen Ansatz, demjenigen ganz ähnlich, den ich in §. 3 der vorigen Note angewandt hatte, finde ich für sie:

(12) $$\left\{\begin{aligned} f_1 f_2 &= \frac{5^{12} p_1^{12}}{p_2^{12} p_3^{12}} (\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3) \quad \text{(das alte Resultat)} \\ t_1 t_2 &= \frac{5^6 p_1^6}{p_2^6 p_3^6} (-\alpha y^3 + 3\beta y^2 - \gamma y - 8\alpha^2). \\ \frac{12^2 H_1 H_2}{W_1 W_2} &= \frac{5^{12} p_1^{12}}{p_2^{12} p_3^{12}} \big(-(\alpha\gamma - 3\beta^2) y^4 + (8\alpha^3 - 3\beta\gamma) y^3 \\ &\qquad - (8\alpha^2\beta - \gamma^2) y^3 + (3\alpha^2\gamma - 9\alpha\beta^2) y \\ &\qquad + (40\,\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma - 9\beta^3)\big) \end{aligned}\right.$$

und also

$$(13) \qquad 2(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)\,\xi =$$
$$(\alpha\gamma + 2\beta^2)y^4 + (\alpha^3 - \beta\gamma)y^3 - \alpha^2\beta y^2 + (4\alpha^2\gamma + 513\alpha\beta^2)y$$
$$+ (11\alpha^4 + 9\alpha\beta\gamma)$$
$$\pm (\alpha y^3 + \beta y^2 + \alpha^2)\sqrt{\triangle'}$$

Hier bedeutet $\sqrt{\triangle'}$ das Differenzenproduct der vier von den gewählten Wurzel y unterschiedenen Wurzeln, getheilt durch $\sqrt{125}$. Man kann es in bekannter Weise durch $\sqrt{\triangle}$ und rationale Functionen von y ersetzen.

Trägt man jetzt diesen Werth von ξ in (9) ein, so entstehen für z und z′ sehr lange Ausdrücke, welche nach ganzen Potenzen von y geordnet die Eigenschaft haben, bei y^4, y^3, y^2, y^0 proportionirte Coëfficienten ergeben. Man kann sie daher mit solchen Multiplicatoren λ, λ' zusammenfügen, dass in der That

$$\lambda z_\nu + \lambda' z'_\nu = y_\nu,$$

wie es (1) verlangt. Die ausgeführte Rechnung ergibt für die Jerrard'sche Formel ($\alpha = 0$):

$$y\gamma \cdot 4\beta^2\gamma\varrho^2 (-93312\beta^{10} + 504\beta^5\gamma^4 + \gamma^8)$$
$$= (165888\beta^{11} + 648\beta^6\gamma^4 + \varrho \cdot \beta\gamma^2 (792\beta^5 + 2\gamma^4))\, z_\nu$$
$$+ (331776\beta^{10} - 1008\beta^5\gamma^4 - 9\gamma^8 - \varrho \cdot \gamma^2 (1008\beta^5 - 7\gamma^4))\, z'_\nu$$

wo

$$\varrho^2 = \frac{\triangle}{5^5} = 256\beta^5 + \gamma^4.$$