Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

Von

P. Gordan.

(Vorgetragen am 9. Juli 1877.)

Die folgenden Entwickelungen schliessen sich an den Aufsatz an, welchen Hr. Klein im Januar dieses Jahres der Societät vorgelegt hat*). Es ist dort gezeigt worden, dass diejenigen Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln, und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, in sehr einfacher Weise mit der Ikosaedergleichung zusammenhängen. Ich entnehme Dem den folgenden Grundgedanken. Sei, wie ich immer schreibe, die vorgelegte Gleichung fünften Grades:

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = o$$

mit den Wurzeln $\chi_0 \ldots \chi_4$. So bilde man die Ausdrücke:

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}$$

$$p_1 = \chi_0 + \varepsilon^{1}\chi_1 + \varepsilon^{21}\chi_2 + \varepsilon^{31}\chi_3 +$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$$

Sie haben die Eigenschaft, bei geraden Vertauschungen der χ sich linear zu transformiren; doch sind die Transformationen von $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ nicht identisch.

Nun setze ich

$$p_1 = -5x_1y_1\ ,\ p_2 = 5x_2y_1\ ,\quad p_3 = -5x_1y_2\ ,\ p_2 = -5x_2y_2$$

und also

$$5\chi_\nu = \varepsilon^{4\nu}p_1 + \varepsilon^{3\nu}p_2 + \varepsilon^{2\nu}p_3 + \varepsilon^{\nu}p_4$$

$$\chi_\nu = -\varepsilon^{4\nu}x_1y_1 + \varepsilon^{3\nu}x_2y_1 - \varepsilon^{2\nu}x_1y_2 - \varepsilon^{\nu}x_2y_2\ .$$

So werden die Coëfficienten der Gleichung fünften Grades:

---

*) Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder II.

$$f = x_1^3y_1^2y_2 + x_1^2x_2y_2^3 + x_1x_2^2y_1^3 - x_2^3y_1y_2^2$$
$$\varphi = x_1^4y_1y_2^3 - x_1^3x_2y_1^4 - 3x_1^2x_2^2y_1^2y_2^2 + x_1x_2^3y_2^4 - x_2^4y_1^3y_2$$
$$\psi = x_1^5(y_1^5+y_2^5) - 10x_1^4x_2y_1^3y_2^2 + 10x_1^3x_2^2y_1y_2^4 + 10x_1^2x_2^3y_1^4y_2 + 10x_1x_2^4y_1^2y_2^3 + x_2^5(-y_1^5 + y_2^5).$$

Hier nun betrachte ich x_1, x_2 und y_1, y_2 als zwei Reihen binärer Veränderlicher, die unabhängig von einander linearen Transformationen unterworfen werden können, und bilde diejenigen Formen, welche in dem so angegebenen Sinne Covarianten von f, φ, ψ sind.

Vor Allem bemerke man, dass φ, ψ selbst Covarianten von f sind, so dass es sich also nur darum handelt, für die eine Grundform f alle Formenbildungen, d. h. das vollständige System aufzuschreiben. Durch die beiden einer Ueberschiebung beigesetzten Indices deute ich an, wie oft in Bezug auf x_1, x_2 oder in Bezug auf y_1, y_2 übergeschoben wird. Dann ist einfach:

$$(f, f)_{1,1} = \frac{4}{9}\cdot\varphi, \qquad (f, \varphi)_{1,1} = \frac{1}{12}\cdot\psi,$$

wodurch das Gesagte bestätigt wird. Ich füge gleich hinzu, wie sich $\triangle$, die Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung fünften Grades, ausdrückt. Setzt man:

$$(f, f)_{2,0} = -\frac{2}{9}\,\tau, \quad (f, f)_{0,2} = -\frac{2}{9}\,t,$$

$$(\varphi, \varphi)_{2,0} = -\frac{1}{8}\,\Pi, \quad (\varphi, \varphi)_{0,2} = -\frac{1}{8}\,P,$$

so ist:

$$\triangle = t\Pi - \tau P.$$

Ich bezeichne f, φ, ψ, $\triangle$ als die bekannten Grössen. Das Problem, die Gleichung fünften Grades zu lösen, hat jetzt diese Form angenommen: Es sind die Werthe bekannt, welche die Grundform f und ihre Covarianten φ, ψ, $\triangle$ für gewisse Werthe von x_1, x_2 und y_1, y_2 annehmen; man soll den lineo-linearen Ausdruck:

$$\chi_\nu = -\varepsilon^{4\nu}x_1y_1 + \varepsilon^{3\nu}x_2y_1 - \varepsilon^{2\nu}x_1y_2 + \varepsilon^{\nu}x_2y_2$$

berechnen.

Ich habe mich nun vorzüglich damit beschäftigt, das vollständige System der Form f aufzustellen, wobei ich die Methoden benutzte, die ich in meiner Programmschrift (Leipzig 1875) auseinandergesetzt habe. Ein Hauptsatz bei dieser Untersuchung ist, dass solche Covarianten, welche in x und y gleichen Grad besitzen, ganze Functionen von f, φ ψ, $\triangle$ sind. Das System umfasst im Ganzen 35 Formen. Unter denselben finden sich drei, welche in den x, und ebenso natürlich drei, welche in den y nullter Dimension, d. h. mit Rücksicht auf diese eine Reihe von Variablen Invarianten sind. Es finden sich vier in Bezug auf die x und ebenso vier in Bezug auf die y lineare Covarianten etc. — Diese Invarianten benutze ich, um die y_1, y_2 oder x_1, x_2 aus f, φ, ψ, $\triangle$ zu eliminiren und also eine Gleichung zur Bestimmung von $\frac{x_1}{x_2}$ oder $\frac{y_1}{y_2}$ zu erhalten. Die linearen Covarianten geben sodann das Mittel, um aus dem Werthe von $\frac{x_1}{x_2}$ oder $\frac{y_1}{y_2}$ die Wurzel χ der Gleichung fünften Grades zu berechnen.

Die drei Invarianten nullter Dimension in x sind diese:

$$(\tau, \tau)_{2,\,0} = -\,6\gamma_1,$$
$$(\gamma_1, \gamma_1)_{0,\,2} = -\,\frac{1}{72}\,\gamma_2,$$
$$(\gamma_1, \gamma_2)_{0,\,1} = -\,\frac{1}{12}\,\gamma_3.$$

Ausgerechnet geben sie die beim Ikosaeder wohlbekannten Formen:

$$\gamma_1 = y_1^{11}y_2 + 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11}$$
$$\gamma_2 = y_1^{20} - 228y_1^{15}y_2^5 + 494y_1^{10}y_2^{10} + 228y_1^5y_2^{15} + y_2^{20}$$
$$\gamma_3 = y_1^{30} + 522y_1^{25}y_2^5 - 10005y_1^{20}y_2^{10} - 10005y_1^{10}y_2^{20} - 522y_1^5y_2^{25} + y_2^{30}.$$

Aus ihnen setzt sich die absolute Invariante

$$\frac{\gamma_1^5}{\gamma_2^3}$$

zusammen, und diese ist, da sie in den x und y wieder von demselben (nullten) Grade ist, eine rationale Function von f, φ, ψ, $\triangle$. Ich will hier folgende Bezeichnungen einführen, die ich auch weiter unten noch gebrauche:

$c_1 = 4\varphi^2 - 3f\psi$, $c_2 = \psi^2 + 3f^2\varphi$, $c_3 = 9f^4 + 16\varphi^3 - 8f\varphi\psi$ *),
$c_4 = f^4 + \varphi^3 - f\varphi\psi$, $2c_5 = -11f^2\varphi^3 + 9f^3\varphi\psi - \varphi^2\psi^2 + f\psi^3 + \triangle(\varphi^2 - f\psi)$
$2c_6 = 11f^3\varphi \;\; 2\varphi^2\psi + f\psi^2 - f\triangle$, $2c_7 = 11f^2\varphi^2 + 2f^3\psi - \varphi\psi^2 - \varphi\triangle$,

---

*) Man hat $\triangle^2 = c_2^2 - 4c_1c_3$.

$24c_8 = \varphi\psi^3 + 2f^3\psi^2 + 37f^2\varphi^2\psi - 12f^5\varphi - 56f\varphi^4 + \triangle(\varphi\psi - 4f^3)$,
$c_9 = c_6^2 - 3c_4c_7$.

Dann ergeben meine Rechnungen:

$$\frac{\gamma_1^5}{\gamma_2^3} = \frac{c_4^5 c_5}{c_9^3}$$

und diess ist also eine Ikosaedergleichung zur Bestimmung der $\frac{y_1}{y_2}$.

Um jetzt durch Benutzung der linearen Covarianten zu dem Werthe von χ zu gelangen, berechne ich diese Covarianten, indem ich sie durch Multiplication mit Invarianten von gleicher Ordnung in x und y mache; sie sind dann, wie erwähnt, in f, φ, ψ, $\triangle$ rational. Die beiden linearen Covarianten, die ich benutze, sind diese *):

$$\Theta = 4(\varphi, f)_{3,0} \quad , \quad H = (\tau, \Theta)_{1,0};$$

ausgerechnet:

$$\Theta = x_1(y_1^7 - 7y_1^2y_2^5) + x_2(y_2^7 + 7y_1^5y_2^2)$$
$$H = x_1(y_2^{13} + 39y_2^8y_1^5 - 26y_2^3y_1^{10}) + x_2(-y_1^{13} + 39y_1^8y_2^5 + 26y_1^3y_2^{10}).$$

Ich berechne für sie folgende Werthe:

$$\Theta = \frac{24c_1c_4^2c_6 - 12c_8c_9}{c_1c_4^3} \cdot \frac{\gamma_1^3}{\gamma_3}, \quad H = \frac{c_6}{c_4} \cdot \gamma_1$$

Nun ist:

$$\chi \cdot (\Theta, H)_{1,0} = \Theta \cdot (H, \chi)_{1,0} - H \cdot (\Theta, \chi)_{1,0}$$

und

$$(\Theta, H)_{1,0} = -\gamma_2,$$

$$\begin{aligned}(\Theta,\chi)_{1,0} = A &= (\varepsilon^{4\nu}y_1 + \varepsilon^{2\nu}y_2)(y_2^7 + 7y_1^5y_2^2) \\ &\quad + (\varepsilon^{3\nu}y_1 - \varepsilon^{\nu}y_2)(y_1^7 - 7y_1^2y_2^5) \\ (H,\chi)_{1,0} = B &= (\varepsilon^{4\nu}y_1 + \varepsilon^{2\nu}y_2)(-y_1^{13} + 39y_1^8y_2^5 + 26y_1^3y_2^{10}) \\ &\quad + (\varepsilon^{3\nu} - \varepsilon^{\nu}y_2)(y_2^{13} + 39y_2^8y_1^5 - 26y_2^3y_1^{10})\end{aligned}$$

und also

$$\chi = \frac{24c_1c_4^2c_6 - 12c_8c_9}{c_1c_4^3} \cdot \frac{B\gamma_1^3}{\gamma_2\gamma_3} - \frac{c_6}{c_1} \cdot \frac{A\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Hiermit sind die χ rational durch $\frac{y_1}{y_2}$ und die f, φ, ψ, $\triangle$ dargestellt und die Gleichung fünften Grades ist durch die Ikosaedergleichung für $\frac{y_1}{y_2}$ gelöst.

*) Vergl. die Bemerkung des Hrn. Klein in der hier vorangehenden Note: Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. III.