A hanglejtők rendszere.[1]

(Tonleitern-System.)

Irta **Antolik Károly**, áll. főreál. igazgató.

> „Anima igitur, etsi se numerare non sentiat, sentit tamen hujus numerationis insensibilis effectum, seu voluptatem in consonantiis, molestiam in dissonantiis inde resultantem.“ (Leibnitz. Epist. ad divers. tom. I. epist. 154.)

Nincsen bonyolódottabb fejezet a physikában, mint a hanglejtő szerkezete. A sok zürzavar pedig onnan ered, hogy az intervallok keresésével *törteket* használtak. E tárgygyal foglalkozó szakmunkák tele vannak oly megjegyzésekkel és panaszokkal, melyekből határozottan következtethetjük, hogy a jelenlegi állapottal sem a zenészek, sem pedig a tudósok nincsenek megelégedve. Állításom támogatására szolgáljon mindenekelőtt néhány idézet oly szakmunkákból, melyekben a hanglejtő legbehatóbban tárgyalva van. Győry Sándor, hazánkfia, csak az intervallok kiszámításáról két (94 és 66 lapra terjedő) munkát írt[2], s mégis mindkettőben a következő megjegyzésekkel találkozunk: „De hogy ezen hangolás tökéletes legyen, azon viszonyokat mathematikai pontossággal el kellene találnunk, ami ha egy részről természeti akadályok miatt *lehetetlen* is, más részről mégis némely elővigyázatok mellett a kivántató szabatosságot *kielégítőleg* (!) megközelíthetjük.“[3] Ugyanezen munka 88-dik lapján a magy. tud. Akadémia „bizottmányi jelentése“ pedig így hangzik: „A hétszeri felemelés ($7 \times 7 = 49$) és hétszeri lenyomás ($7 \times 7 = 49$) a természeti zengékkel együtt már 105 és az octávának hozzászámításával 106 zengét fog eredményezni (mint fentebb is érintve volt) és mégis sehol két zenge össze nem esett. És további fel-

---

[1] Előadva a pozsonyi orvos-természettudományi társulat 1894 febr. 5-iki szakülésén.

[2] *Győry* Sándor: „A hangrendszer kiszámításáról“. Pest. 1858. és „A hangrendszerről és zongorák hangolásáról“. Pest. 1854.

[3] Az 1858-dik évi munka 46. lapján.

emelések és lenyomásokkal sem fogna összeütni, *mert itt valóságos quadratura circuli létezik, ha tökéletes viszonyokat akarunk előállítani.* Azért itt minden szabadkozás a gyakorlatbani mérsékléstől hasztalan erőlködés."

Győry az 1864-ben megjelent munkájában, mindjárt a bevezetésben, megint így szól: „Hangrendszerünk úgynevezett hét főhangjainak számviszonyai már Pythagoras († 500. Kr. e.) óta, tehát több mint 2000 év óta ismeretesek, s noha a még kívántató öt hang (miért épen öt?!) csak annak kiegészítése volna, hogy rendszerré legyen, *mégis azoknak viszonyait senki még eddig meg nem tudta állapítani.* Honnét nyilván van, hogy ezen megállapítások nélkül sem az összhangzatok osztályozása nem történhetik kellő szabatossággal, sem a más meg más alaphangon kezdődő hangléptékek menetéről, sem a hangnemek jellemeiről, tehát ezeknek művészi hatásokról sem tudunk annyit, a mennyit bizonyosan lehetne és kellene". Továbbá a 22-dik lapon: „Nagyon feltünő lévén azonban, hogy soha mindeddig senki, sem a hangrendszer törvényeinek, sem az úgynevezett közbeiktatott öt hang számviszonyainak megállapításával — némely sikertelen kisérleteket ide nem számítván — sem a mérséklés valódi okainak felkeresésével, s annál fogva a mérséklés megszüntetésének lehetőségével vagy lehetetlenségével nem foglalkozott, hanem ezen kérdések mintegy közmegegyezéssel olyanoknak lévén elismerve, *melyekhez elméleti úton még csak közelíteni sem lehet* Csak annyit látunk, hogy a mathematikusok és harmonisták a zongora hangolókkal, — *a tudósok és nem tudósok nincsenek egy értelemben* egymással". — Ugyanott a 47-dik lapon: „*Némelyek azt mondják, 12 hangnak kell lenni; mások azt, hogy 21-nek, 35-nek, 63-nak stb. Igazak-e ezek? Hogy 21-re, 35-re, 63-ra stb. semmiképen sem igazolható föltevésre alapul*". „Különben, mivel ezek soha tökéletesen öszve nem esnek, a hangok számának *végtelenül* (!) kellene szaporodni. De mivel már ezt a 65. és 66. lapon körülményesen előadtam, szükségesebbnek látom az ugyanott megemlített *308 hangú rendszer* (!) további kiszámítását folytatólag megvilágosítani".

Muncke, ki az összes idevágó anyagot szorgalmasan összegyüjtötte és kritikailag tárgyalta [1], akként nyilatkozik: „Wie viele

---

[1] *Muncke.* Gehler phys. Wörtb. VIII. pg. 330, 340.

Töne zwischen diesen beiden (c—c') gelegt werden sollen, darüber ist aus der Natur der Sache *keine feste Regel* zu entnehmen", és megint: *„Inzwischen ist man keineswegs über die absolute Genauigkeit der Intervalle überall einverstanden".*

Maga Helmholtz a „Tonempfindungen" czimű munkája végén így szól[1]: *„Die complicirteren Intervalle der Tonleiter haben keine directe und leicht verständliche Verwandtschaft mehr".* „Ich schliesse hiermit meine Arbeit"

Chladni, a nagy mester, a következőket mondja[2]: die Verhältnisse der Zahlen sind meistens so beschaffen, dass, *wenn man gewisse Intervalle ganz rein ausüben will, andere dadurch desto unreiner werden".*

Sauver[3], hogy az igazságot *lehetőleg* megközelítse, az octávát 43 méridesre, minden méridest 7 heptaméridesre és minden heptaméridest 10 decaméridesre osztotta, mi által egy octávában *3010* (!) egyenlő *intervall,* illetőleg zönge megkülömböztetendő volna. (1 $\sqrt[3010]{2^1}$ $\sqrt[3010]{2^2}$ $\sqrt[3010]{2^3}$ stb.)

A legnagyobb zeneértők és tudósok a következő octávákat hozták javaslatba: Mercator 53 zöngét, Gonzaga 31, Doni 38, Mersenne 26, Hänfling 50, Sabattini 38, Berlin 36, Vicentino 31, Nigetti 30, Huygens 31, Zarlino 18, Smith 24, Rameau 28, Fayton 32, Luython 31, Oettingen 36, Barb, White 53, Thompson 65, Tanaka 26, Appunn 36, Drobisch 74, Bosanquet 53, Mach 720, Helmholtz 24 stb. stb. És mindamellett szükséges volt — már a legrégibb időktől kezdve — a correctiók miatt használni az „Apotome"-t (emelést) 1·067871, a „Limma"-t (lenyomást) 1·053498, a pythagorasi vagyis diatonikus kommát 1·0136, a syntonikus kommát 1·0123, a „schisma"-t 1·0011, a „diaschisma"-t 1·0113, a kis „diesis"-t 1·0235 és a nagy „diesis"-t 1·0368.

Még csak Zellner két kötetes munkájára akarok hivatkozni, mivel ez a legujabb időben (1892-ben) jelent meg.[4]

„Wie nun entstanden die Tonleitern?" (II. kt. pg. 124.) „Terpander fügte den Quinten des Orpheus nach oben noch drei weitere an: das **d, a** und **e;** dass er nicht noch um eine Quinte weiterging, um den zur Vervollständigung der diatonischen Scala

---

[1] *Helmholtz:* Tonempfindungen (1865) pg. 560; (1877) pg. 596.

[2] *Chladni:* Die Akustik. Leipzig. 1830. pg. 30.

[3] *Sauver:* Mèm. de l'Acad. de Paris. 1701.

[4] *L. A. Zellner:* Vorträge über Akustik. 2 Bde. 1892.

einzig noch fehlenden Ton, das **h**, zu erlangen, that er offenbar nur aus Artigkeit gegen seinen 120 Jahre jüngeren Nachfolger Pythagoras, dem er dieses Verdienst überliess". (pg. 125.)

„Gehen wir nun an die nähere Betrachtung des *natürlichen* Tonsystems. Bestrickt von der Gesetzlichkeit, mit welcher der Wohlklang der Intervalle mit der Einfachheit der ihnen zum Ausdrucke dienenden Zahlenverhältnisse gleichen Schritt hält (weshalb man es auch das System der einfachsten Zahlenverhältnisse zu nennen pflegt), erachtete man diese von der Natur selbst dargebotene Tonreihe für geeignet, eine ebenso unverrückbare Basis für die Bildung eines Tonsystems abzugeben, wie es die Stellung des Erdmeridians zur Sonnenhöhe für die Zeitbestimmung ist. Allein die Freude über die Gesetzlichkeit reicht nicht sehr weit, denn mit den drei verschiedenen ersten Tönen: $\overset{4}{c}$, $\overset{5}{e}$, $\overset{6}{g}$, (die als Octaven mit 4 und 6 identischen Töne, 1, 2 und 3 bleiben ausser Betracht), die man aus der Hand der Natur empfangen hatte, war sie — die Freude nämlich — bereits zu Ende. Der vierte neue Ton (der siebente in der Reihe) wollte mit keinem seiner Vorgänger stimmen. Auch machte man die fatale Entdeckung, dass die nach der Octave und Quinte reinste Consonanz: die Quarte als Quarte des Grundtones, in der Reihe gar nicht vorkommt, andere zur Bildung selbst nur der diatonischen Tonleiter erforderliche Töne sich aber erst in Regionen vorfinden, *in welchen von einer Einfachheit der Verhältnisse keine Rede mehr ist.*" (pg. 139—140.) „Wir stehen hier vielfach vor der Wahl zweier *verschiedener Werthausdrücke für ein und dasselbe Intervall*". (pg. 143.) *„Rein also ist dieses System nicht und ebensowenig ist es consequent"*. (pg. 148.). „Dass hiernach das natürliche Tongefühl diesem Systeme den Titel eines natürlichen nicht wohl zuerkennen kann, bedarf kaum einer weiteren Ausführung". (pg. 150.) „Trotz dieser *vielfachen Abweichungen* von der gepriesenen Reinheit des *reinen Systems* erschien zuletzt doch der **„Wolf"**, *der nirgends fernzuhalten ist.*" (pg. 215.) „die weiter entlegenen Tonarten sind Domänen des „Wolfes"". (pg. 216.) „Und so darf, wenn es überhaupt eines Beweises bedurfte, als erwiesen angesehen werden, dass es keine ungleichschwebende Temperatur geben kann, *die der Grundbedingung absolut gleicher Intervallverhältnisse* in allen Tonarten zu entsprechen vermag". (pg. 217.)

Számtalan hasonló kifakadást tudnék még idézni, de legyen ez elég, — a tanulság mindenesetre az, hogy úgy a zenészek, valamint a tudósok is ingadozó talajon állanak, és hogy a hanglejtő összeállításánál, vagyis az intervallok keresésénél *hamis alapból* ($2 \times 7 = 12$!) *indultak ki.*

Régebben már, de különösen midőn a rezgő hártyák törvényeivel foglalkoztam, arra a meggyőződésre jutottam, hogy az igazi hanglejtő nem lehet oly bonyolódott és ingadozó természetű, mint azt az éppen idézett sorokban is jeleztem. Ujra és ujra áttanulmányoztam az ismeretesebb adatok egész halmazát, egymás mellé csoportosítottam az eredményeket, összehasonlítottam a legkiválóbb zenészek és tudósok nézeteit, míg végre rájöttem, hogy itt épp úgy, mint a természet minden törvényénél fenséges rend és egyszerűség uralkodik. Nem kell vaskos köteteket nagy bajjal áttanulmányozni és azokat a munka végén megelégedetlenül félredobni, mert a zene talapzata — a hanglejtők törvénye — a következő rövid szavakban foglalható össze:

Bontassék fel az 1—2 határok közötti távköz n tagú, $\frac{1}{n}$ differencziával biró arithmetikai sorra és kerestessék meg minden taghoz oly geometriai intervall, mely a $\sqrt[n]{2\cdots}$ kifejezésnek 1—n-dik hatványából ered. (Ezen hanglejtőket, hogy a többitől könnyen megkülömböztethessük, egyszerűen *„mathematikai hanglejtők“*-nek nevezhetjük.)

Ha ezen rendkivül egyszerű és mathematikai pontossággal biró rendszert szem előtt tartjuk, csakhamar rájövünk, hogy hol a hiba. *A számok azt bizonyítják, hogy a mai úgynevezett „chromatikus, egyenletesen temperált skála“, mely tudvalevőleg a zenei követelményeknek minden tekintetben megfelel és a mathematikai hanglejtővel tökéletesen összevág, nem a 7 tagú, diatonikus vagy Pythagoras-féléből, hanem a 6 tagú hanglejtőből eredt, s hogy így a chromatikus skálát ez utóbbiból kellett volna fejleszteni; — vagy, ha már a Pythagoras-féléből indultak ki, nem kellett volna a 12, hanem a 14 tagú* ($\sqrt[14]{2\cdots}$) *hanglejtőnél megállani.* Igy aztán a sok zürzavar egy csapással meg lett volna szüntetve.

De lássuk a dolgot közelebbről. Ha a 12 tagú, chromatikus hanglejtőt szemügyre veszszük, csakhamar meggyőződünk, hogy abban **hét** hang (u. m. c, d, e, fis, gis, b, c’) a hattagú ($\sqrt[6]{2\cdots}$), **három** hang (dis, fis, a) a nyolcztagú ($\sqrt[8]{2\cdots}$) hanglejtőből eredt, és hogy benne csak **négy** uj hang (cis, f, g, h) foglaltatik.

A következő táblázatban (I.) megtaláljuk a kellő összehasonlítást és a mondottaknak legjobb bizonyítékát. Az A. alatti rovatban látjuk az úgynevezett „tiszta hangolás"-t[1], a B. alattiban azon mathematikai hanglejtőknek intervalljait, a melyekből a „tiszta hangolás" levezethető, a C. alattiban az intervallok csekély eltéréseit és a D. alattiban a rezgési számok külömbségeit, ha c' = 256 rezgéssel kezdődik.

[Mit der Bestimmung der Intervalle unserer musikalischen Tonleiter sind weder Musiker, noch Theoretiker zufrieden und jeder Fachmann weiss es, dass er sich hier auf unsicherem Boden bewegt. Die Ursache dessen liegt darin, dass man zur Bestimmung der Intervalle die Brüche benützte. Niemand kann mit Sicherheit sagen: wie viele Töne der sogenannten Octave in Wirklichkeit entsprechen. In Gehler's phys. Wörtb. (VIII. 330, 340) finden wir von Muncke folgende Bemerkung angeführt: „Wie viele Töne zwischen diesen beiden (c—c') gelegt werden sollen, darüber ist aus der Natur der Sache *keine feste Regel* zu entnehmen" *Inzwischen ist man keineswegs über die absolute Genauigkeit der Intervalle überall einverstanden.* — Chladni sagt: „Die Verhältnisse der Zahlen sind meistens so beschaffen, dass wenn man gewisse Intervalle ganz rein ausüben will, andere dadurch *desto unreiner* werden." (Akustik 1830. pag. 30.) — Selbst Helmholtz schliesst seine „Tonempfindungen" (pag. 596.) mit folgenden Worten: „Die complicirteren Intervalle der Tonleiter haben *keine directe* und leicht verständliche Verwandtschaft mehr."

Man wollte die Octave in 53, 36, 74, 308, 720 u. s. w. Theile theilen, — Sauver wollte sogar 3010 (!) gleiche Intervalle haben. (Mém. de l'Akad. de Paris 1701.). — L. A. Zellner sagt in seinem lehrreichen Werke (Vorträge über Akustik. 1892. II. Bd. pg. 148): *„Rein also ist dieses System nicht und ebensowenig ist es consequent."* Zellner weist darauf hin, und zwar mit vollem Rechte, „dass das 12-stufige, gleichschwebend temperirte Tonsystem nicht nur das einzige, für die musikalische Ausführung praktisch geeignete, sondern zugleich auch das Ohr vollkommen befriedigende ist." (II. Bd. pg. 231.)

In vorliegender Arbeit will ich auf mathematischem Wege

---

[1] Müller-Pouillet's Phys. 1886. pg. 709.

zeigen, wie das Gesetz der Töne in Wirklichkeit abzuleiten ist; wie die feinen Unterschiede, welche das Ohr und die Mathematik bietet, zu beseitigen sind; wie die Intervalle zu suchen und musikalisch richtig anzuwenden sind; wie die Temperatur ganz zu beseitigen ist; und endlich wie die Vervollkommnung der Tonleiter und also auch der Musik auf rationellem Wege zu entwickeln und auf die mathematische Tonleiter $\sqrt[24]{2 \cdots}$ zu gründen ist.

Auf Tabelle I. finden wir unter **A.** die jetzt gebräuchlichen Intervalle (relative Schwingungszahlen) der sogenannten „reinen Stimmung“; unter **B.** die sehr annähernden Werthe, welche aus verschiedenen Tonleitern des vorliegenden Systems abgeleitet werden können; unter **C.** die $\pm$ Differenzen beiderlei Intervalle, und unter **D.** die $\pm$ Differenzen der Schwingungszahlen derselben.

Aus diesen Werthen geht klar hervor, dass die sogenannte „diatonische“ Tonleiter, obgleich sie das Gehör befriedigt, doch eigentlich keinem mathematischen Gesetze unterworfen ist, und ferner, dass die „reine Stimmung“, wenn man sie durchaus behalten will, nicht nach Brüchen, sondern nach entsprechenden Wurzelwerthen zu bestimmen sei.

Auf Tabelle II. finden wir unter **A.**, wie die 7-gliederige Scala aus der 12-stufigen „gleichschwebend temperirten Tonleiter“ herausgehoben werden kann, ohne dass dieselbe mit der diatonischen oder einer anderen *identisch* wäre; unter **B.** befinden sich die Formeln und Werthe der Intervalle, wie sie in Wirklichkeit abgeleitet werden müssen, und unter **C.** die Differenzen $= 0$.

Betrachten wir auf der Tabelle III. die bekannteren 7-gliedrigen Dur-Scalen (1. Pythagoräische; 2. Natürliche; 3. Chladnische; 4. Kirnberger’sche; 5. die aus der $\sqrt[12]{2 \cdots}$ herausgehobene; 6. die aus den entsprechenden Wurzelwerthen (Tab. I. B.) entstandene und endlich 7. die einfache mathematische, die als solche musikalisch nicht verwendbar ist; so finden wir, dass die echt musikalische (Nr. 5.) mit keiner anderen übereinstimmt. — Vergleichen wir diese Scalen mittelst zweier 12—12-saitigen Polychorde (Fig. 1.), so bemerken wir bedeutende Unterschiede, besonders wenn wir die einzelnen Töne mit einander vergleichen. Obgleich die Scalen (Nr. 1—6), jede für sich, sehr angenehm klingt und somit jede einzelne musikalische Berechtigung hat, so kann doch nur eine einzige ganz richtig sein — und diese ist Nr. 5., da dieselbe zugleich mathematisch berechtigt ist und in das allgemeine Gesetz aller möglichen mathematischen Tonleitern eingereiht werden kann. — Ganz dasselbe beweist uns auch die für die Moll-Scalen hier beigefügte Tab. IV. (1. Reine Stimmung; 2. Nach den Wurzelwerthen der Tab. I. B. berechnet; 3. Aus der Tonleiter $\sqrt[12]{2\cdots}$, resp. $\sqrt[24]{2\cdots}$, herausgehobene.)

Das allgemeine Gesetz lautet: *Will man irgend eine Tonleiter erhalten, so muss man den Bereich zwischen den Grenzen 1—2 in* **n** *Glieder mit der Differenz* $\frac{1}{n}$ *zu einer arithmetischen Reihe zerlegen und muss zu jedem dieser Glieder ein solches geometrisches Intervall suchen, welches aus den respectiven Potenzen* **1—n** *des Ausdruckes* $\sqrt[n]{2\cdots}$ *herstammt.*

Die Tabelle V. zeigt uns das ganze System in kurzer Übersicht; die weiteren Tabellen aber die Entwickelung aller mathematisch möglichen Tonleitern, ferner die Entstehung der gebräuchlichen musikalischen Töne und wie die letzteren in der Tonleiter $\sqrt[12]{2\cdots}$ (resp. $\sqrt[24]{2\cdots}$) zu einem Complex verschmelzen.

Wir sehen aus der mathematischen Entwickelung zugleich, dass die Tonleitern $\sqrt[5]{2\cdots}$, $\sqrt[7]{2\cdots}$, $\sqrt[11]{2\cdots}$ u. s. w. einen durchaus fremden Charakter haben und auch, dass in den Tonleitern $\sqrt[8]{2\cdots}$, $\sqrt[9]{2\cdots}$, $\sqrt[10]{2\cdots}$ u. s. w. nur einzelne Töne vorkommen, welche in der 12-gliedrigen (resp. $\sqrt[24]{2\cdots}$) sich wiederfinden.

Ferner sei es bemerkt, dass man, ausser den schon erwähnten 6 Scalen (Tab. III.), 7-gliedrige, sehr angenehm musikalisch klingende Scalen aus den reicheren mathematischen Tonleitern (13—24 u. s. w.) leicht herausheben und also eine ganze Menge willkührlicher Scalen bilden kann.

Nun will ich noch im kurzen andeuten, wie ein Polychord einfach und schnell gestimmt werden kann. Alle 12 Saiten werden mittelst einer Stimmgabel z. B. auf den Ton c' (256 Schwingungen) gestimmt und zwar mittelst Aluminium-Ringelchen, welche sich auf den Saiten befinden und auf eine beliebige Stelle geschoben werden können.

Hat man eine Saite gut gestimmt, so lassen sich die anderen, — ohne dass man das Gehör zur Hilfe nimmt, — schnell und leicht stimmen, wenn man die betreffende Saite so lange anzieht, bis das Aluminium-Ringelchen auf der schon gestimmten Saite in heftige Bewegung geräth. Da nun jede Saite genau 1000 Millimeter lang ist und alle Tabellen die Saitenlängen direct in Millimetern angeben, so braucht man weiter hin nur die Satteln auf die entsprechenden Stellen schieben und sie dort befestigen. Die so gestimmten Saiten werden alsdann an der Kopfseite der Polychorde mittelst eines prismatisch gestalteten Korkhammers (etwa in $\frac{1}{11}$ Saitenlänge der c' Saite) angeschlagen.

Die Beschreibung des Polychordes wäre ganz überflüssig, da die beiliegende Figur jede Einzelnheit deutlich veranschaulicht.

Meine zwei Polychorde, die in den Werkstätten für Präzisionsmechanik des Herrn Max Kohl in Chemnitz sehr geschickt construirt wurden, kosten zusammen 520 Mk. und entsprechen jeder Anforderung.]

I.

A.			B.	C.	D.
c'	$^{1}/_{1}$	1·00000	$\sqrt[n]{2^{0}} = 1·00000$	0·00000	0·0000
cis'		1·04166	$\sqrt[7]{2^{1}} = 1·04161$	0·00005	0·0113
des'		1·08000	$\sqrt[9]{2^{1}} = 1·08005$	0·00005	0·0153
d'	$^{9}/_{8}$	1·12500	$\sqrt[6]{2^{1}} = 1·12246$	0·00254	0·6500
dis'		1·17187	$\sqrt[22]{2^{5}} = 1·17062$	0·00125	0·3203
es'		1·20000	$\sqrt[19]{2^{5}} = 1·20010$	0·00010	0·0263
e'	$^{5}/_{4}$	1·25000	$\sqrt[22]{2^{7}} = 1·24675$	0·00325	0·8300
fes'		1·28000	$\sqrt[14]{2^{5}} = 1·28088$	0·00088	0·2270
eis'		1·30208	$\sqrt[21]{2^{8}} = 1·30220$	0·00087	0·0311
f'	$^{4}/_{2}$	1·33333	$\sqrt[12]{2^{5}} = 1·33484$	0·00151	0·3877
fis'		1.38889	$\sqrt[19]{2^{9}} = 1·38865$	0·00024	0·0611
ges'		1·44000	$\sqrt[19]{2^{10}} = 1·44024$	0·00024	0·0631
g'	$^{3}/_{2}$	1·50000	$\sqrt[12]{2^{7}} = 1·49830$	0·00170	0·4336
gis'		1·56250	$\sqrt[14]{2^{9}} = 1·56142$	0·00108	0·2768
as'		1·60000	$\sqrt[22]{2^{15}} = 1·60416$	0·00416	1·0639
a'	$^{5}/_{3}$	1·66667	$\sqrt[19]{2^{14}} = 1·66653$	0·00014	0·0348
ais'		1·73611	$\sqrt[15]{2^{12}} = 1·74110$	0·00500	1·2765
b'		1·80000	$\sqrt[20]{2^{17}} = 1·80250$	0·00150	0·6403
h'	$^{15}/_{8}$	1.87500	$\sqrt[32]{2^{29}} = 1·87416$	0·00083	0·2130
ces'		1·92000	$\sqrt[17]{2^{16}} = 1·92009$	0·00009	0·0240
his'		1·95313	$\sqrt[32]{2^{31}} = 1·95714$	0·00401	1·0279
c''	$^{2}/_{1}$	2·00000	$\sqrt[n]{2^{n}} = 2·00000$	0·00000	0·0000

Ezekből világosan kiderül, hogy a „tiszta hangolás“ levezetési módja semmi törvényszerű jogosultsággal nem bír, ha azt mathematikai alapra fektetjük; ha pedig a hallás utáni szerkezetét birálgatjuk, akkor a kiválasztott hangok eredetéről egészen uj fogalmat nyerünk. Már ezen a helyen is megjegyezhetem, miszerint a diatonikus hanglejtő, daczára annak, hogy skálája kellemesen hangzik, *hamis,* holott a 12 tagú mathematikai hanglejtő, daczára annak, hogy nem jól hangzik, *kifogástalan.*

Most lássuk, hogy miből keletkezett a mai 12 tagú, egyenletesen temperált (chromatikus) hanglejtő. A II-ik táblázatban az A. alatt fel vannak sorolva az egyes hangok és azok tényleges intervalljai; a B. alatt azon képletek, illetőleg intervallok, a melyekből az előbbiek tényleg levezethetők és a C. alatt a kettő közötti külömbségek = 0.

II.

	A.	B.		C.
c’	1·00000	$\sqrt[n]{2^{0}}$, $\sqrt[6]{2^{0}}$,	$\sqrt[12]{2^{0}}$ = 1·00000	0·00000
cis’	1·05946	— — —	$\sqrt[12]{2^{1}}$ = 1·05946	
d’	1·12246	$\sqrt[6]{2^{1}}$,	$\sqrt[12]{2^{2}}$ = 1·12246	
dis’	1·18921	$\sqrt[4]{2^{1}}$, $\sqrt[8]{2^{2}}$,	$\sqrt[12]{2^{3}}$ = 1·18921	
e’	1·25992	$\sqrt[3]{2^{1}}$, $\sqrt[6]{2^{2}}$,	$\sqrt[12]{2^{4}}$ = 1·25992	
f’	1·33484	— — —	$\sqrt[12]{2^{5}}$ = 1·33484	
fis’	1·41421	$\sqrt[2]{2^{1}}$, $\sqrt[4]{2^{2}}$, $\sqrt[6]{2^{3}}$, $\sqrt[8]{2^{4}}$, $\sqrt[10]{2^{5}}$,	$\sqrt[12]{2^{6}}$ = 1·41421	
g’	1·49831	— — —	$\sqrt[12]{2^{7}}$ = 1·49831	
gis’	1·58740	$\sqrt[3]{2^{2}}$, $\sqrt[6]{2^{4}}$,	$\sqrt[12]{2^{8}}$ = 1·58740	
a’	1·68179	$\sqrt[4]{2^{3}}$, $\sqrt[8]{2^{6}}$,	$\sqrt[12]{2^{9}}$ = 1·68179	
b’	1·78180	$\sqrt[6]{2^{5}}$,	$\sqrt[12]{2^{10}}$ = 1·78180	
h’	1·88775	— — —	$\sqrt[12]{2^{11}}$ = 1·88775	
c’’	2·00000	$\sqrt[n]{2^{n}}$, $\sqrt[6]{2^{6}}$,	$\sqrt[12]{2^{12}}$ = 2·00000	

E szerint a táblázat kétségtelenül bizonyítja, hogy a mai chromatikus, 12 tagú hanglejtőnek 9 tagja a 2, 3, 4, 8 és 10 tagú hanglejtőkből is hibátlanul levezethető, **holott benne a 7 tagúból** (legyen az pythagorasi vagy diatonikus, úgynevezett természetes vagy tiszta, vagy pedig mathematikai) **egyetlenegy tag sem foglaltatik.** (Összehasonlító III. táblázat a 140-dik lapon.)

Ezek alapján tehát határozottan kijelenthetem, hogy a szóban forgó hanglejtőnek a 7 tagból való kierőszakolása merő képtelenség, és *hogy az intervallok* (illetőleg a relativ rezgési számok) *eddigi keresési módja teljesen* ***téves*** *alapon nyugszik.* A 7 tagú skálából törvényszerűleg csak a 14 tagú $(\sqrt[14]{2}\cdots)$ hanglejtő eredhet. Igy aztán a hangtani „quadratura circuli“ [1] is minden nehézség nélkül megoldható. Az egészből még az is következik, hogy az úgynevezett „egyenletes temperálás“-nak nincsen semmi értelme, mert az egyszerűen csak azt jelenti, *hogy a hanglejtő mathematikai alapra fektetendő.*

Mielőtt tovább mennénk, legyen szabad a chromatikus hanglejtőnek jogosultságát egy-két idézettel indokolni. Chladni azt mondja: „Indem kein Grund vorhanden ist ein Intervall oder eine Tonart reiner oder unreiner als die andere auszuüben, so folgt, dass die gleichschwebende Temperatur der Natur am gemässesten ist“.[2]

Zellner [3]: „Das bisher Ausgeführte dürfte wohl genügen, um zur vollen Erkenntniss zu leiten, dass das zwölfstufige gleichschwebend temperirte Tonsystem nicht nur das einzige, für die musikalische Ausführung praktisch geeignete, sondern zugleich auch das Ohr vollkommen befriedigende ist, und dass es durch andere Systeme, gleichviel welcher Art (rein, natürlich), in keiner Richtung übertroffen werden kann“.

---

[1] A magy. tud. Akad. bizottmányi jelentése; l. Győry Sándor: „A hangrendszer kiszámításáról“. 1858. 88-dik lapon.

[2] Chladni's Akustik. 1830. 36-dik lapon.

[3] Zellner: Vorträge über Akustik. 1892. II. Bd. pg. 231.

III.

Az ismeretesebb 7-tagú skálák húrhosszainak összehasonlítása:

c'	d'	e'	f'	g'	a'	h'	c''
1·0000	0·8889	0·7901	0·7500	0·6667	0·5925	0·5267	0·5000 [1]
1·0000	0·8889	0·8000	0·7500	0·6667	0·6000	0·5333	0·5000 [2]
1·0000	0·9000	0·8000	0·7500	0·6666	0·6000	0·5333	0·5000 [3]
1·0000	0·8889	0·8000	0·7500	0·6666	0·5963	0·5333	0·5000 4)
1·0000	0·8909	0·7936	0·7492	0·6674	0·5946	0·5297	0·5000 [5]
1·0000	0·8909	0·8021	0·7492	0·6674	0·6001	0·5336	0·5000 [6]
1·0000	0·9057	0·8202	0·7430	0·6729	0·6095	0·5520	0·5000 [7]

[1] pythagorási; [2] természetes, tiszta; [3] Chladni-féle; [4] Kirnberger-féle; [5] az egyenl. temperált ($\sqrt[12]{2\cdots}$-ből kiválasztott); [6] a megfelelő gyökértékekből (l. táb. B.) összeállított; [7] mathematikai a $\left(\sqrt[7]{2\cdots}\right)$-ből eredő.

Az eltérések látszólag igen kicsinyek, de ha azokat a polychordokon hasonlítjuk össze, elég feltünők, különösen, ha az egyes hangokat hasonlítjuk össze. (A polychordok leirása és rajza a munka végén keresendő.)

IV.

c'	d'	es'	f'	g'	as'	b'	c''
1·0000	0·8889	0·8333	0·7500	0·6667	0·6250	0·5555	0·5000 [1]
1·0000	0·8909	0·8333	0·7492	0·6674	0·6248	0·5548	0·5000 [2]
1·0000	0·8909	0·8409	0.7492	0·6674	0·6299	0·5612	0·5000 [3]

Megjegyzés: Moll-skálák. — [1] A tiszta hangolásból eredő. [2] A megfelelő gyökértékekből (I. táb. B.) összeállított. [3] A $\sqrt[12]{2\cdots}$-, illetőleg $\sqrt[24]{2\cdots}$ hanglejtőből kiválasztott.

S most lássuk az egész mathematikai hangrendszert és annak rationális fejlődését.

V. A hangrendszer rövid áttekintése. (Kurze Übersicht des ganzen Systems.)

A hangsorok beosztása	A hanglejtő alapintervallja	Az intervall-quotiensek[1]
Eintheilung der Tonreihen	Grund-Intervalle	Intervall-Quotienten
$\frac{1}{1}, \frac{2}{1},$ c'—c''	$\sqrt[1]{2} = 2·000000$	0·500000
$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$	$\sqrt[2]{2} = 1·414213$	0·707109
$\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$	$\sqrt[3]{2} = 1·259920$	0·793629
$\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}$	$\sqrt[4]{2} = 1·189207$	0·840896
$\frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{10}{5}$	$\sqrt[5]{2} = 1·148701$	0 870549
$\frac{6}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, \frac{12}{6}$	$\sqrt[6]{2} = 1\ 122462$	0·890798
$\frac{7}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \frac{11}{7}, \frac{12}{7}, \frac{13}{7}, \frac{14}{7}$	$\sqrt[7]{2} = 1·104089$	0·905724
$\frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{11}{8}, \frac{12}{8}, \frac{13}{8}, \frac{14}{8}, \frac{15}{8}, \frac{16}{8}$	$\sqrt[8]{2} = 1·090508$	0 917004
$\frac{9}{9}, \frac{10}{9}, \frac{11}{9} \quad \frac{18}{9}$	$\sqrt[9]{2} = 1·080059$	0·925875
$\frac{10}{10}, \frac{11}{10}, \frac{12}{10} \quad \frac{20}{10}$	$\sqrt[10]{2} = 1\ 071773$	0·932819
$\frac{11}{11}, \frac{12}{11}, \frac{13}{11} \quad \frac{22}{11}$	$\sqrt[11]{2} = 1·065041$	0·938931
$\frac{12}{12}, \frac{13}{12}, \frac{14}{12} \quad \frac{24}{12}$	$\sqrt[12]{2} = 1·059463$	0·943874
$\frac{13}{13}, \frac{14}{13}, \frac{15}{13} \quad \frac{26}{13}$	$\sqrt[13]{2} = 1·054766$	0·948077
$\frac{14}{14}, \frac{15}{14}, \frac{16}{14} \quad \frac{28}{14}$	$\sqrt[14]{2} = 1·050756$	0·951695
$\frac{15}{15}, \frac{16}{15}, \frac{17}{15} \quad \frac{30}{15}$	$\sqrt[15]{2} = 1·047294$	0·954842
$\frac{16}{16}, \frac{17}{16}, \frac{18}{16} \quad \frac{32}{16}$	$\sqrt[16]{2} = 1·044273$	0·957603
⋮ ⋮ ⋮		
$\frac{24}{24}, \frac{25}{24}, \frac{26}{24} \quad \frac{48}{24}$	$\sqrt[24]{2} = 1·029302$	0·971532
⋮ ⋮ ⋮		
$\frac{32}{32}, \frac{33}{32}, \frac{34}{32} \quad \frac{64}{32}$	$\sqrt[32]{2} = 1·021897$	0·978572
⋮ ⋮		
$\frac{80}{80}, \frac{81}{80}, \frac{82}{80} \quad \frac{160}{80}$	$\sqrt[80]{2} = 1·008700$	0·991375
⋮ ⋮ ⋮		
$\frac{100}{100}, \frac{101}{100}, \frac{102}{100} \quad \frac{200}{100}$	$\sqrt[100]{2} = 1·006858$	0·993188
stb.		

---

[1] Az intervallquotiens (Iq) lényege és fontossága a munka végén található

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[1]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
1 1	c’	$\sqrt{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	
2 1	c’’	$\sqrt[1]{2^1}$	2·000000	0·500000	512·0000	
Hanglejtő $\sqrt[2]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
2 2	c’	$\sqrt[2]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$ hanglejtő.
3 2	fis’	$\sqrt[2]{2^1}$	1·414213	0·707109	362·0387	
4 2	c’’	$\sqrt[2]{2^2}$	2·000000	0·500000	512 0000	
Hanglejtő $\sqrt[3]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
3 3	c’	$\sqrt[3]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	Orpheus hanglejtője. (?) (c’, f’, g’, c’’)
4 3	e’	$\sqrt[3]{2^1}$	1·259920	0·793629	322·5396	
5 3	gis’	$\sqrt[3]{2^2}$	1·587400	0·629909	406·3748	
6 3	c’’	$\sqrt[3]{2^3}$	2·000000	0·500000	512·0000	
Hanglejtő $\sqrt[4]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
4 4	c’	$\sqrt[4]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	benne van $\sqrt[2]{2\cdots}$ hanglejtő. — Aegypt. (?)
5 4	dis’	$\sqrt[4]{2^1}$	1·189207	0·840896	304·4370	
6 4	fis’	$\sqrt[4]{2^2}$	1·414213	0·707107	362·0387	
7 4	a’	$\sqrt[4]{2^3}$	1·681790	0·594605	430·5900	
8 4	c’’	$\sqrt[4]{2^4}$	2·000000	0·500000	512·0000	
Hanglejtő $\sqrt[5]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
5 5	c’	$\sqrt[5]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	A chinaiak, irek és skótok az 5 tagú hanglejtőt használják: c’, d’, f’, g’, b’, c’’.
6 5	—	$\sqrt[5]{2^1}$	1·148701	0·870549	294·0675	
7 5	—	$\sqrt[5]{2^2}$	1·319510	0·757857	337·7940	
8 5	—	$\sqrt[5]{2^3}$	1·515720	0·659752	388·0235	
9 5	—	$\sqrt[5]{2^4}$	1·741100	0·574350	445·7300	
10 5	c’’	$\sqrt[5]{2^5}$	2·000000	2·000000	512·0000	

A hangsor beosztása Eintheilung		A hang neve Töne	Az intervall képlete Intervall-Formeln	Az intervall értéke Intervall-Werthe	A húr hossza Saitenlängen	A hang rezgési száma Schwingungszahlen	Megjegyzés Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[6]{2\cdots}$. (Tonleiter.)							
6	6	c’	$\sqrt[6]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[2]{2\cdots}$ és $\sqrt[3]{2\cdots}$ hanglejtő.
7	6	d’	$\sqrt[6]{2^1}$	1·122462	0·890897	287·3500	
8	6	e’	$\sqrt[6]{2^2}$	1·259921	0·793629	322·5398	
9	6	fis’	$\sqrt[6]{2^3}$	1·414214	0·707107	362·0387	—
10	6	gis’	$\sqrt[6]{2^4}$	1·587400	0·629909	406·3748	Terpander hanglejtője (670. Kr. e.) c’, d’, e’, f’, g’, a’, c”.
11	6	b’	$\sqrt[6]{2^5}$	1·781797	0·561231	456·1400	
12 :	6	c”	$\sqrt[6]{2^6}$	2·000000	0 500000	512·0000	
Hanglejtő $\sqrt[7]{2\cdots}$. (Tonleiter.) *							
7	7	c’	$\sqrt[7]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	Pythagoras-féle (550 Kr. e.), diatonikus, természetes, temperált, és mathematikai hanglejtők egymással összehasonlitva a 140-ik lapon keresendők.
8	7	—	$\sqrt[7]{2^1}$	1·104089	0·905724	282·6468	
9	7	—	$\sqrt[7]{2^2}$	1·219140	0·820250	312·0676	
10	7	—	$\sqrt[7]{2^3}$	1·345900	0·742997	344·5500	
11	7	—	$\sqrt[7]{2^4}$	1·485994	0·672950	380·4144	
12	7	—	$\sqrt[7]{2^5}$	1·640670	0·609507	420·0117	
13	7	—	$\sqrt[7]{2^6}$	1·811447	0·552049	463·7300	
14	7	c”	$\sqrt[7]{2^7}$	2·000000	0·500000	512·0000	

* Sauver-Chladni-féle dur-skála:

	C	D	E	F	G	A	H	c	
	64·0	72·0	80·0	85·3	96·0	106·6	120·0	128·0	rezgési számok.
$\sqrt[7]{2\cdots}$	64·0	70 7	78·0	86·1	95·1	105·0	116·0	128·0	

Hanglejtő $\sqrt[8]{2\cdots}$. (Tonleiter.)							
8	8	c’	$\sqrt[8]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[2]{2\cdots}$ és $\sqrt[4]{2\cdots}$ hanglejtő.
9	8	—	$\sqrt[8]{2^1}$	1·090508	0·917004	279·1700	
10	8	dis’	$\sqrt[8]{2^2}$	1·189207	0·840896	304·4370	
11	8	—	$\sqrt[8]{2^3}$	1·296840	0·771105	331·9911	
12	8	fis’	$\sqrt[8]{2^4}$	1·414213	0·707107	362·0385	—
13	8	—	$\sqrt[8]{2^5}$	1·542210	0·648420	394·8058	c’, dis’, fis’, a’, c” hangok a $\sqrt[12]{2\cdots}$-ben fordulnak elő.
14	8	a’	$\sqrt[8]{2^6}$	1·681790	0·594605	430.5387	
15	8	—	$\sqrt[8]{2^7}$	1·834010	0·545253	469·5066	
16	8	c”	$\sqrt[8]{2^8}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[9]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
9 9	c'	$\sqrt[9]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$ és $\sqrt[3]{2\cdots}$ hanglejtő. — e', gis' a $\sqrt[12]{2\cdots}$-ben fordulnak elő.
10 9	—	$\sqrt[9]{2^1}$	1·080059	0·925875	276·4953	
11 9	—	$\sqrt[9]{2^2}$	1·166530	0·857243	298·6314	
12 9	e'	$\sqrt[9]{2^3}$	1·259920	0·793701	322·5396	
13 9	—	$\sqrt[9]{2^4}$	1·360790	0·734864	348·3620	
14 9	—	$\sqrt[9]{2^5}$	1·469735	0·680395	376·2517	
15 9	gis'	$\sqrt[9]{2^6}$	1·587400	0·629909	406·3743	
16 9	—	$\sqrt[9]{2^7}$	1·714488	0·583265	438·9084	
17 9	—	$\sqrt[9]{2^8}$	1·851750	0·540030	474 0472	
18 : 9	c''	$\sqrt{2^9}$	2·000000	0·500000	512·0000	
Hanglejtő $\sqrt[10]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
10 10	c'	$\sqrt[10]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$ és $\sqrt[5]{2\cdots}$ hanglejtő. — fis' a $\sqrt[12]{\cdots}$-ben fordul elő.
11 10	—	$\sqrt[10]{2^1}$	1·071773	0·932819	274·3740	
12 10	—	$\sqrt[10]{2^2}$	1·148701	0·870549	294·0668	
13 10	—	$\sqrt[10]{2^3}$	1·231144	0·812253	315·1730	
14 10	—	$\sqrt[10]{2^4}$	1·319510	0·757857	337·7940	
15 10	fis'	$\sqrt[10]{2^5}$	1·414214	0·707107	362·0387	
16 10	—	$\sqrt[10]{2^6}$	1·515720	0·659752	388·0235	
17 10	—	$\sqrt[10]{2^7}$	1·624500	0·615574	415·8733	
18 10	—	$\sqrt[10]{2^8}$	1·741100	0·574350	445·7220	
19 10	—	$\sqrt[10]{2^9}$	1·866066	0·535887	477 7130	
20 10	c''	$\sqrt[10]{2^{10}}$	2·000000	0·500000	512 0000	

A hangsor beosztása	A hang neve		Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne		Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[11]{2\cdots}$. (Tonleiter.)							
11 11	c’		$\sqrt[11]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	Kirnberger-féle intervallok a $\sqrt[12]{2\cdots}$-hez: 1·00000 1·05349 1·12500 1·18518 1·25000 1·33334 1·40625 1·50000 1·58024 1·67702 1·77779 1·87500 2·00000
12 11	—		$\sqrt[11]{2^1}$	0·065041	0 938931	272·6506	
13 11	—		$\sqrt[11]{2^2}$	1·134313	0·881591	290·3841	
14 11	—		$\sqrt[11]{2^3}$	1·208090	0·827753	309·2710	
15 11	—		$\sqrt[11]{2^4}$	1·286665	0·777203	329·3864	
16 11	—		$\sqrt[11]{2^5}$	1·370352	0·729739	350·8100	
17 11	—		$\sqrt[11]{2^6}$	1·459481	0·685175	373·6272	
18 11	—		$\sqrt[11]{2^7}$	1·554407	0·643332	397·6272	
19 11	—		$\sqrt[11]{2^8}$	1·655508	0·604044	423·8100	
20 11	—		$\sqrt[11]{2^9}$	1·763184	0·567156	451·3751	
21 11	—		$\sqrt[11]{2^{10}}$	1·877863	0·532520	480·7331	
22 : 11	c”		$\sqrt[11]{2^{11}}$	2 000000	0·500000	512·0000	
Hanglejtő $\sqrt[12]{2\cdots}$. (Tonleiter.) (A mai egyenletes temperált, chromatikus hanglejtő. Megteremtője Archytas 365. Kr. e.)							
	1	2					
12 12	c’	c’	$\sqrt[12]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	[1] Ezen 7-tagú skála, mint látjuk, nem a diatonikus skálából eredt, hanem a jelen 12-tagúból hallás után lett összeállitva. Ehhez hasonló skálákat azonban más összetettebb hanglejtőkből is könnyen ki lehet választani. [2] A divó zenei megjelölések.
13 12		cis’	$\sqrt[12]{2^1}$	1·059463	0·943874	271·2226	
14 12	d’	d’	$\sqrt[12]{2^2}$	1·122462	0·890999	287·3503	
15 12		dis’	$\sqrt[12]{2^3}$	1·189207	0·840896	304·4370	
16 12	e’	e’	$\sqrt[12]{2^4}$	1·259920	0·793629	322·5397	
17 12	f’	f’	$\sqrt[12]{2^5}$	1·334840	0·749153	341·7191	
18 12		fis’	$\sqrt[12]{2^6}$	1·414213	0·707109	362·0385	
19 12	g’	g’	$\sqrt[12]{2^7}$	1·498307	0·667420	383·5664	
20 12		gis’	$\sqrt[12]{2^8}$	1·587400	0·629909	406·3745	
21 12	a’	a’	$\sqrt[12]{2^9}$	1·681790	0·594605	430·5390	
22 12		b’	$\sqrt[12]{2^{10}}$	1·781797	0·561231	456·1398	
23 12	h’	h’	$\sqrt[12]{2^{11}}$	1·887748	0·529732	483·2633	
24 12	c”	c”	$\sqrt[12]{2^{12}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

Benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[2]{2\cdots}$, $\sqrt[3]{2\cdots}$ $\sqrt[4]{2\cdots}$ és $\sqrt[6]{2\cdots}$ hanglejtő.

Hanglejtő $\sqrt[13]{2\cdots}$. (Tonleiter.)

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
13 13	c’[1]	$\sqrt[13]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	[1] Szükséges megnevezések. [1] (Die nöthigen Bezeichnungen der Töne.)
14 13	d’	$\sqrt[13]{2^1}$	1·054766	0·948077	270·0202	
15 13	e’	$\sqrt[13]{2^2}$	1·112532	0·898851	284·8081	
16 13	f’	$\sqrt[13]{2^3}$	1·173460	0·852180	300·4059	
17 13	g’	$\sqrt[13]{2^4}$	1·237726	0·807933	316·8580	
18 13	a’	$\sqrt[13]{2^5}$	1·305512	0·765983	334·2111	
19 13	h’	$\sqrt[13]{2^6}$	1·377010	0·726212	352·5144	
20 13	i’	$\sqrt[13]{2^7}$	1·452423	0·688505	371·8203	
21 13	k’	$\sqrt[13]{2^8}$	1.531966	0·652756	392·1834	
22 13	l’	$\sqrt[13]{2^9}$	1·615866	0·618863	413·6618	
23 13	m’	$\sqrt[13]{2^{10}}$	1·704361	0·586730	436·3164	
24 13	n’	$\sqrt[13]{2^{11}}$	1·797702	0·556266	460·2117	
25 13	o’	$\sqrt[13]{2^{12}}$	1·896155	0·527383	485·4157	
26 : 13	c’’	$\sqrt[13]{2^{13}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

Hanglejtő $\sqrt[14]{2\cdots}$. (Tonleiter.)

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
14 14	c’	$\sqrt[14]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	Benne van $\sqrt[7]{2\cdots}$ hanglejtő. — Itt azért nem szükséges uj betűket behozni, mivel a *cis, dis, eis* stb. megjelölések jobb áttekintést nyujtanak. — Ezen hanglejtőt kellett volna használni a zenészeknek, ha már a 7-tagúból indultak ki.
15 14	cis’	$\sqrt[14]{2^1}$	1·050756	0·951695	268·9925	
16 14	d’	$\sqrt[14]{2^2}$	1.104089	0·905724	282·6468	
17 14	dis’	$\sqrt[14]{2^3}$	1·160129	0·861973	296·9932	
18 14	e’	$\sqrt[14]{2^4}$	1·219140	0·820250	312·0998	
19 14	eis’	$\sqrt[14]{2^5}$	1·280887	0·780709	327·9070	
20 14	f’	$\sqrt[14]{2^6}$	1·345900	0·742997	344·5500	
21 14	fis’	$\sqrt[14]{2^7}$	1·414214	0·707107	362·0387	
22 14	g’	$\sqrt[14]{2^8}$	1·485994	0·672950	380·4144	
23 14	gis’	$\sqrt[14]{2^9}$	1·561418	0·640443	399·7232	
24 14	a’	$\sqrt[14]{2^{10}}$	1·640670	0·609507	420·0117	
25 14	ais’	$\sqrt[14]{2^{11}}$	1·723945	0·580065	441·3300	
26 14	h’	$\sqrt[14]{2^{12}}$	1·811447	0·552049	463·7300	
27 14	his’	$\sqrt[14]{2^{13}}$	1·903390	0·525378	487·2679	
28 14	c’’	$\sqrt[14]{2^{14}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása		A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung		Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[15]{2\cdots}$. (Tonleiter.)							
15	15	c'	$\sqrt[15]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	
16	15	d'	$\sqrt[15]{2^1}$	1·047294	0·954842	268·1073	
17	15	e'	$\sqrt[15]{2^2}$	1·096825	0·911723	280·7872	
18	15	f'	$\sqrt[15]{2^3}$	1·148701	0·870549	294·0675	
19	15	g'	$\sqrt[15]{2^4}$	1·203025	0·831238	307·9745	
20	15	a'	$\sqrt[15]{2^5}$	1·259920	0·793629	322·5396	
21	15	h'	$\sqrt[15]{2^6}$	1·319510	0·757857	337·7940	Benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[3]{2\cdots}$ és $\sqrt[5]{2\cdots}$ hanglejtő. (Enthält in sich die Tonleitern $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[3]{2\cdots}$ und $\sqrt[5]{2\cdots}$.)
22	15	i'	$\sqrt[15]{2^7}$	1·381913	0·723635	353·7698	
23	15	k'	$\sqrt[15]{2^8}$	1·447269	0·690956	370·5010	
24	15	l'	$\sqrt[15]{2^9}$	1·515720	0·659752	388·0235	
25	15	m'	$\sqrt[15]{2^{10}}$	1·587400	0·629909	406·3748	
26	15	n'	$\sqrt[15]{2^{11}}$	1·662476	0·601512	425·9539	
27	15	o'	$\sqrt[15]{2^{12}}$	1·741100	0·574350	445·7300	
28	15	p'	$\sqrt[15]{2^{13}}$	1·823445	0·548412	466·8020	
29	15	q'	$\sqrt[15]{2^{14}}$	1·909684	0·523647	488·8790	
30	15	c''	$\sqrt[15]{2^{15}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[16]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
16 16	c'	$\sqrt[16]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	
17 16	cis'	$\sqrt[16]{2^1}$	1·044274	0·957603	267·3341	
18 16	d'	$\sqrt[16]{2^2}$	1·090508	0·917004	279·1700	
19 16	dis'	$\sqrt[16]{2^3}$	1·138788	0·878126	291·5300	
20 16	e'	$\sqrt[16]{2^4}$	1·189207	0·840896	304·4371	
21 16	eis'	$\sqrt[16]{2^5}$	1·241858	0·805245	317·9157	
22 16	f'	$\sqrt[16]{2^6}$	1·296840	0·771105	331·9911	Benne van $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[2]{2\cdots}$, $\sqrt[4]{2\cdots}$ és $\sqrt[8]{2\cdots}$ hanglejtő. (Enthält in sich die Tonleitern $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[2]{2\cdots}$, $\sqrt[4]{2\cdots}$ und $\sqrt[8]{2\cdots}$.)
23 16	fis'	$\sqrt[16]{2^7}$	1 354256	0·738413	346·6896	
24 16	g'	$\sqrt[16]{2^8}$	1·414213	0·707107	362·0388	
25 16	gis'	$\sqrt[16]{2^9}$	1·476826	0·677128	378·0677	
26 16	a'	$\sqrt[16]{2^{10}}$	1·542210	0·648420	394·8063	
27 16	ais'	$\sqrt[16]{2^{11}}$	1·610490	0·620929	412·1858	
28 16	h'	$\sqrt[16]{2^{12}}$	1·681790	0·594605	430·5393	
29 16	his'	$\sqrt[16]{2^{13}}$	1·756252	0·569395	449·6090	
30 16	i'	$\sqrt[16]{2^{14}}$	1·834010	0·545253	469·5066	
31 16	is'	$\sqrt[16]{2^{15}}$	1·915207	0·522136	490·2934	
32 16	c''	$\sqrt[16]{2^{16}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása		A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Összehasonlítva a tiszta hangolással[1]	
Eintheilung		Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Reine Stimmung[1]	
Hanglejtő $\sqrt[17]{2^{\cdots}}$. (Tonleiter.)								
17	17	c'	$\sqrt[17]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	c	1·00000
18	17	d'	$\sqrt[17]{2^1}$	1·041616	0·960047	266·6536	cis	1·04166
19	17	e'	$\sqrt[17]{2^2}$	1·084964	0·921689	277·7508	des	1·08000
20	17	f'	$\sqrt[17]{2^3}$	1·130116	0·884865	289·3097	d	1·12500
21	17	g'	$\sqrt[17]{2^4}$	1·177146	0·849512	301·3496	dis	1·17187
22	17	a'	$\sqrt[17]{2^5}$	1·226135	0·815571	313·8905	e	1·25000
23	17	h'	$\sqrt[17]{2^6}$	1·277162	0·782986	326·9535	fes	1·28000
24	17		$\sqrt[17]{2^7}$	1·330312	0·751703	340·5600	f	1·33333
25	17	k'	$\sqrt[17]{2^8}$	1·382488	0·721670	354·7327	fis	1·38889
26	17	l'	$\sqrt[17]{2^9}$	1·443341	0·692837	369·4952	ges	1·44000
27	17	m'	$\sqrt[17]{2^{10}}$	1·503407	0·665156	384·8721	g	1·50000
28	17	n'	$\sqrt[17]{2^{11}}$	1·565972	0·638581	400·8890	gis	1·56250
29	17	o'	$\sqrt[17]{2^{12}}$	1·631142	0·613067	417·5724	a	1·66667
30	17	p'	$\sqrt[17]{2^{13}}$	1·699024	0·588573	434·9501	ais	1·73611
31	17	q'	$\sqrt[17]{2^{14}}$	1·769730	0·565058	453·0510	b	1·80000
32	17		$\sqrt[17]{2^{15}}$	1·843379	0·542482	471·9051	h	1·87500
33	17	s'	$\sqrt[17]{2^{16}}$	1·920094	0·520808	491·5440	ces	1·92000
34	17	c''	$\sqrt[17]{2^{17}}$	2·000000	0·500000	512·0000	c	2·00000

[1] Müller-Pouillet, 709. l. (1886.)

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[18]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
18 18	c'	$\sqrt[18]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	Benne van (enthält) $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[2]{2\cdots}$, $\sqrt[3]{2\cdots}$ és $\sqrt[6]{2\cdots}$ hanglejtő.
19 18	cis'	$\sqrt[18]{2^1}$	1·039259	0·962224	266·0504	
20 18	d'	$\sqrt[18]{2^2}$	1·080059	0·925875	276·4953	
21 18	dis'	$\sqrt[18]{2^3}$	1·122462	0·890897	287·3500	
22 18	e'	$\sqrt[18]{2^4}$	1·166530	0·857243	298·6314	
23 18	eis'	$\sqrt[18]{2^5}$	1·212326	0·824861	310·3556	
24 18	f'	$\sqrt[18]{2^6}$	1·259920	0·793701	322·5396	
25 18	fis'	$\sqrt[18]{2^7}$	1·309385	0·763717	335·2025	
26 18	g'	$\sqrt[18]{2^8}$	1·360790	0·734864	348·3620	
27 18	gis'	$\sqrt[18]{2^9}$	1·414214	0·707109	362·0386	
28 18	a'	$\sqrt[18]{2^{10}}$	1·469735	0·680395	376·2517	
29 18	ais'	$\sqrt[18]{2^{11}}$	1·527435	0·654692	391·0234	
30 18	h'	$\sqrt[18]{2^{12}}$	1·587400	0·829909	406·3743	
31 18	his'	$\sqrt[18]{2^{13}}$	1·649721	0·606163	422·3287	
32 18		$\sqrt[18]{2^{14}}$	1 714488	0·583265	438·9084	
33 18	is'	$\sqrt[18]{2^{15}}$	1·781797	0·561231	456·1400	
34 18	k'	$\sqrt[18]{2^{16}}$	1·851750	0·540030	474·0472	
35 18	kis'	$\sqrt[18]{2^{17}}$	1·924449	0·519630	492·6586	
36 18	c''	$\sqrt[18]{2^{18}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saiten-längen	Schwingungs-zahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[19]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
19 19	c'	$\sqrt[19]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	
20 19	d'	$\sqrt[19]{2^1}$	1·037155	0·964176	265·5117	
21 19	e'	$\sqrt[19]{2^2}$	1·075691	0·929635	275·3768	
22 19	f'	$\sqrt[19]{2^3}$	1·115658	0·896332	285·6084	
23 19	g'	$\sqrt[19]{2^4}$	1·157110	0·864222	296·2202	
24 19	a'	$\sqrt[19]{2^5}$	1·200103	0·833262	307·2263	
25 19	h'	$\sqrt[19]{2^6}$	1·244692	0·803411	318·6413	
26 19	i'	$\sqrt[19]{2^7}$	1·290939	0·774630	330·4805	
27 19	k'	$\sqrt[19]{2^8}$	1·338904	0·746880	342·7594	Összehasonlítandó a „tiszta hangolással.“ (Zu verglichen mit „reiner Stimmung.“
28 19	l'	$\sqrt[19]{2^9}$	1·388651	0·720123	355·4947	
29 19	m'	$\sqrt[19]{2^{10}}$	1·440246	0·694326	368·7031	
30 19	n'	$\sqrt[19]{2^{11}}$	1·493659	0·669452	382·4023	
31 19	o'	$\sqrt[19]{2^{12}}$	1·549260	0·645470	396·6105	
32 19	p'	$\sqrt[19]{2^{13}}$	1·606822	0·622346	411·3465	
33 19	q'	$\sqrt[19]{2^{14}}$	1·666524	0·600052	426·6301	
34 19		$\sqrt[19]{2^{15}}$	1·728443	0·578555	442·4816	
35 19	s'	$\sqrt[19]{2^{16}}$	1·792664	0·557829	458·9220	
36 19	t'	$\sqrt[19]{2^{17}}$	1·859271	0·537845	475·9733	
37 19	u'	$\sqrt[19]{2^{18}}$	1·918352	0·518578	493·6581	
38 19	c''	$\sqrt[19]{2^{19}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[20]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
20 20	c’	$\sqrt[20]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	
21 20	cis’	$\sqrt[20]{2^1}$	1·035265	0·965936	265·0279	
22 20	d’	$\sqrt[20]{2^2}$	1·071773	0·932819	274·3740	
23 20	dis’	$\sqrt[20]{2^3}$	1·109569	0·901251	284·0498	
24 20	e’	$\sqrt[20]{2^4}$	1·148701	0·870549	294·0668	
25 20	eis’	$\sqrt[20]{2^5}$	1·189207	0·840896	304·4371	
26 20	f’	$\sqrt[20]{2^6}$	1·231144	0·812253	315·1730	
27 20	fis’	$\sqrt[20]{2^7}$	1.274561	0·784584	326·2075	
28 20	g’	$\sqrt[20]{2^8}$	1·319510	0·757857	337·7941	Benne van (enthält) $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[2]{2\cdots}$, $\sqrt[4]{2\cdots}$, $\sqrt[5]{2\cdots}$ és $\sqrt[10]{2\cdots}$ hanglejtő.
29 20	gis’	$\sqrt[20]{2^9}$	1·366040	0·732043	349·7063	
30 20	a’	$\sqrt[20]{2^{10}}$	1·414214	0·707107	362·0387	
31 20	ais’	$\sqrt[20]{2^{11}}$	1·464086	0·683020	374·8060	
32 20	h’	$\sqrt[20]{2^{12}}$	1·515720	0·659752	388·0235	
33 20	his’	$\sqrt[20]{2^{13}}$	1·569170	0·637280	401·7071	
34 20	i’	$\sqrt[20]{2^{14}}$	1·624500	0·615574	415·8733	
35 20	is’	$\sqrt[20]{2^{15}}$	1·681790	0·594605	430·5390	
36 20	k’	$\sqrt[20]{2^{16}}$	1·741100	0·574350	445·7220	
37 20	kis’	$\sqrt[20]{2^{17}}$	1·802500	0·554785	461·4403	
38 20	l’	$\sqrt[20]{2^{18}}$	1·866066	0·535887	477·7130	
39 20	lis’	$\sqrt[20]{2^{19}}$	1·931773	0·517659	494·5594	
40 20	c’’	$\sqrt[20]{2^{20}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása		A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung		Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[21]{2\cdots}$. (Tonleiter.)							
21	21	c'	$\sqrt[21]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	Benne van (enthält) $\sqrt[1]{2\cdots}$, $\sqrt[3]{2\cdots}$ és $\sqrt[7]{2\cdots}$ hanglejtő.
22	21	d'	$\sqrt[21]{2^1}$	1·033558	0·967532	264·5909	
23	21	e'	$\sqrt[21]{2^2}$	1·068242	0·936118	273·4699	
24	21	f'	$\sqrt[21]{2^3}$	1·104089	0·905724	282·6468	
25	21	g'	$\sqrt[21]{2^4}$	1·141140	0·876317	292·1319	
26	21	a'	$\sqrt[21]{2^5}$	1·179435	0·847864	301·9352	
27	21	h'	$\sqrt[21]{2^6}$	1·219140	0·820250	312·0676	
28	21	i'	$\sqrt[21]{2^7}$	1·259920	0·793629	322·5396	
29	21	k'	$\sqrt[21]{2^8}$	1·302201	0·767931	333·3635	
30	21	l'	$\sqrt[21]{2^9}$	1·345900	0·742997	344·5500	
31	21	m'	$\sqrt[21]{2^{10}}$	1·391066	0·718873	356·1128	
32	21	n'	$\sqrt[21]{2^{11}}$	1·437747	0·695533	368·0632	
33	21	o'	$\sqrt[21]{2^{12}}$	1·485994	0·672950	380·4144	
34	21	p'	$\sqrt[21]{2^{13}}$	1·535860	0·651101	393·1805	
35	21	q'	$\sqrt[21]{2^{14}}$	1·587400	0·629909	406·3748	
36	21		$\sqrt[21]{2^{15}}$	1·640670	0·609507	420·0117	
37	21	s'	$\sqrt[21]{2^{16}}$	1·695728	0·589717	434·1064	
38	21	t'	$\sqrt[21]{2^{17}}$	1·752633	0·570570	448·6740	
39	21	u'	$\sqrt[21]{2^{18}}$	1·811447	0·552049	463·7300	
40	21	v'	$\sqrt[21]{2^{19}}$	1·872235	0·534121	479·2922	
41	21		$\sqrt[21]{2^{20}}$	1·935063	0·516779	495·3763	
42	21	c''	$\sqrt[21]{2^{21}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása		A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung		Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[22]{2\cdots}$. (Tonleiter.)							
22	22	c'	$\sqrt[22]{2^{0}}$	1·000000	1·000000	256·0000	Benne van (enthält) $\sqrt[2]{2\cdots}$ és $\sqrt[11]{2\cdots}$ hanglejtő.
23	22	cis'	$\sqrt[22]{2^{1}}$	1 032008	0·968985	264.1941	
24	22	d'	$\sqrt[22]{2^{2}}$	1·065041	0·938931	272·6504	
25	22	dis'	$\sqrt[22]{2^{3}}$	1·099131	0·909810	281·3775	
26	22	e'	$\sqrt[22]{2^{4}}$	1·134313	0·881591	290·3838	
27	22	eis'	$\sqrt[22]{2^{5}}$	1·170620	0·856218	299·6784	
28	22	f'	$\sqrt[22]{2^{6}}$	1·208090	0·827753	309·2708	
29	22	fis'	$\sqrt[22]{2^{7}}$	1·246758	0·802082	319·1697	
30	22	g'	$\sqrt[22]{2^{8}}$	1·286665	0 777203	329·9288	
31	22	gis'	$\sqrt[22]{2^{9}}$	1·327849	0·753098	339 9288	
32	22	a'	$\sqrt[22]{2^{10}}$	1 370352	0 729739	350·8092	
33	22	ais'	$\sqrt[22]{2^{11}}$	1·414214	0·707107	362·0379	
34	22	h'	$\sqrt[22]{2^{12}}$	1·459481	0·685175	373·6261	
35	22	his'	$\sqrt[22]{2^{13}}$	1·506196	0·663924	385·5851	
36	22		$\sqrt[22]{2^{14}}$	1·554407	0·643332	397·9270	
37	22	is'	$\sqrt[22]{2^{15}}$	1·604160	0·624816	410·6639	
38	22	k'	$\sqrt[22]{2^{16}}$	1·655508	0 604044	423·8084	
39	22	kis	$\sqrt[22]{2^{17}}$	1·708497	0·585310	437·3737	
40	22	l'	$\sqrt[22]{2^{18}}$	1·763184	0·567156	451·3732	
41	22	lis'	$\sqrt[22]{2^{19}}$	1·819619	0·549566	465·8209	
42	22	m'	$\sqrt[22]{2^{20}}$	1 877863	0·532520	480·7308	
43	22	mis'	$\sqrt[22]{2^{21}}$	1·937969	0·516004	496·1191	
44	22	c''	$\sqrt[22]{2^{22}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzék
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[23]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
23 23	c’	$\sqrt[23]{2^0}$	1·000000	1·000000	256 0000	
24 23	d’	$\sqrt[23]{2^1}$	1 030596	0 970313	263·8325	
25 23	e’	$\sqrt[23]{2^2}$	1·062127	0·941507	271 9046	
26 23	f’	$\sqrt[23]{2^3}$	1·094624	0·913556	280·2237	
27 23	g’	$\sqrt[23]{2^4}$	1·128114	0·886435	288·7972	
28 23	a’	$\sqrt[23]{2^5}$	1·162630	0·860119	297·6331	
29 23	h’	$\sqrt[23]{2^6}$	1·198201	0·834585	306·7394	
30 23	i’	$\sqrt[23]{2^7}$	1·234860	0·809808	316·1242	
31 23	k’	$\sqrt[23]{2^8}$	1·272642	0·785767	325·7963	
32 23	l’	$\sqrt[23]{2^9}$	1·311579	0·762440	335·7641	Más haglejtők nem foglaltatnak benne. (Enthält in sich keine anderen Tonleitern.)
33 23	m’	$\sqrt[23]{2^{10}}$	1·351707	0·739805	346 0370	
34 23	n’	$\sqrt[23]{2^{11}}$	1·393063	0·717842	356·6243	
35 23	o’	$\sqrt[23]{2^{12}}$	1·435685	0·696532	367·5353	
36 23	p’	$\sqrt[23]{2^{13}}$	1·479610	0·675854	378·7803	
37 23	q’	$\sqrt[23]{2^{14}}$	1·524880	0·655789	390·3693	
38 23		$\sqrt[23]{2^{15}}$	1·571534	0·636321	402·3129	
39 23	s’	$\sqrt[23]{2^{16}}$	1 619616	0·617430	414·6219	
40 23	t’	$\sqrt[23]{2^{17}}$	1·669170	0·599100	427·3074	
41 23	u’	$\sqrt[23]{2^{18}}$	1·720239	0·581315	440·3811	
42 23	v’	$\sqrt[23]{2^{19}}$	1·772870	0·564057	453·8548	
43 23	w’	$\sqrt[23]{2^{20}}$	1·827112	0·547312	467·7407	
44 23	x’	$\sqrt[23]{2^{21}}$	1·883014	0·531064	482·0516	
45 23	y’	$\sqrt[23]{2^{22}}$	1·939625	0·515298	496·8001	
46 23	c’’	$\sqrt[23]{2^{23}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

A hangsor beosztása		A hang neve		Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung		Töne		Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
A legczélszerűbb hanglejtő $\sqrt[24]{2\cdots}$. (Die zweckmässigste Tonleiter.)								
24	24	**c'**	[1] c'	$\sqrt[24]{2^{0}}$	**1·000000**	**1·000000**	**256·0000**	
25	24		cis'	$\sqrt[24]{2^{1}}$	1·029302	0·971532	263·5014	
26	24	**cis'**	des'	$\sqrt[24]{2^{2}}$	**1·059463**	**0·943874**	**271·2226**	Benne van (enthält) $\sqrt[1]{2}$, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[8]{2}$, és $\sqrt[12]{2}$ hanglejtő. — Ezen hanglejtőből kellett volna a mai chromatikus, egyenletesen temperált hanglejtőt kiválasztani, **s ebből kellene a zenét is tovább fejleszteni.** — [1] Ilyen megnevezéseket is lehetne használni a hangok finomabb megkülömböztetése czéljából.
27	24		d'	$\sqrt[24]{2^{3}}$	1·090508	0·917004	279·1700	
28	24	**d'**	dis'	$\sqrt[24]{2^{4}}$	**1·122462**	**0·890999**	**287 3500**	
29	24		es'	$\sqrt[24]{2^{5}}$	1·155350	0·865537	295·7703	
30	24	**dis', es'**	e'	$\sqrt[24]{2^{6}}$	**1·189207**	**0·840896**	**304·4370**	
31	24		eis'	$\sqrt[24]{2^{7}}$	1·224053	0·816958	313·3576	
32	24	**e'**	fes'	$\sqrt[24]{2^{8}}$	**1·259920**	**0·793629**	**322·5397**	
33	24		f'	$\sqrt[24]{2^{9}}$	1·296840	0·771105	331·9910	
34	24	**f'**	fis'	$\sqrt[24]{2^{10}}$	**1·334840**	**0·749153**	**341·7191**	
35	24		ges'	$\sqrt[24]{2^{11}}$	1.373953	0·727827	351·7320	
36	24	**fis'**	g'	$\sqrt[24]{2^{12}}$	**1·414213**	**0·707107**	**362·0385**	
37	24		gis'	$\sqrt[24]{2^{13}}$	1·455652	0·686977	372·6470	
38	24	**g'**	as'	$\sqrt[24]{2^{14}}$	**1·498308**	**0·667420**	**383·5664**	
39	24		a'	$\sqrt[24]{2^{15}}$	1·542210	0·648420	394·8058	
40	24	**gis', as'**	ais'	$\sqrt[24]{2^{16}}$	**1·587400**	**0·629909**	**406·3745**	
41	24		hes'	$\sqrt[24]{2^{17}}$	1·633914	0·612027	418·1821	
42	24	**a'**	h'	$\sqrt[24]{2^{18}}$	**1·681790**	**0·594605**	**430·5390**	
43	24		his'	$\sqrt[24]{2^{19}}$	1·731071	0·577677	443·1544	
44	24	**b'**	bes'	$\sqrt[24]{2^{20}}$	**1·781797**	**0·561231**	**256·1398**	
45	24		b'	$\sqrt[24]{2^{21}}$	1·834010	0·545253	469·5066	
46	24	**h'**	bis'	$\sqrt[24]{2^{22}}$	**1·887748**	**0·529732**	**483·2633**	
47	24		ces''	$\sqrt[24]{2^{23}}$	1·943062	0·514652	497·4240	
48	24	**c''**	c''	$\sqrt[24]{2^{24}}$	**2·000000**	**0·500000**	**512·0000**	

A hangsor beosztása	A hang neve	Az intervall képlete	Az intervall értéke	A húr hossza	A hang rezgési száma	Megjegyzés
Eintheilung	Töne	Intervall-Formeln	Intervall-Werthe	Saitenlängen	Schwingungszahlen	Bemerkung
Hanglejtő $\sqrt[32]{2\cdots}$. (Tonleiter.)						
32 32	c’	$\sqrt[32]{2^0}$	1·000000	1·000000	256·0000	
33 32	cis’	$\sqrt[32]{2^1}$	1·021897	0·978572	261·6057	
34 32	d’	$\sqrt[32]{2^2}$	1·044274	0·957603	267·3341	
35 32	dis’	$\sqrt[32]{2^3}$	1·067141	0·937084	273·1880	
36 32	e’	$\sqrt[33]{2^4}$	1·090508	0·917004	279·1700	
37 32	eis’	$\sqrt[32]{2^5}$	1·114387	0·897354	285·2831	
38 32	f’	$\sqrt[32]{2^6}$	1·138788	0·878126	291·5300	
39 32	fis’	$\sqrt[32]{2^7}$	1·163725	0·859309	297·9136	
40 32	g’	$\sqrt[32]{2^8}$	1·189207	0·840896	304·4371	Ezen hanglejtő csak érdekességénél fogva van ide mellékelve. (Diese Tonleiter steht noch nicht an der Grenze unseres heutigen Gehörsinnes; ihre Nachbartöne sind noch **sehr** unterschiedlich.)
41 32	gis’	$\sqrt[32]{2^9}$	1·215247	0·822878	311·1034	
42 32	a’	$\sqrt[2]{2^{10}}$	1·241858	0·805245	317·9157	
43 32	ais’	$\sqrt[32]{2^{11}}$	1·269051	0·787990	324·8771	
44 32	h’	$\sqrt[32]{2^{12}}$	1·296840	0·771105	331·9911	
45 32	his’	$\sqrt[32]{2^{13}}$	1·325237	0·754582	339·2606	
46 32		$\sqrt[32]{2^{14}}$	1·354256	0·738413	346·6896	
47 32	is’	$\sqrt[32]{2^{15}}$	1·383910	0·722595	354·2810	
48 32	k’	$\sqrt[32]{2^{16}}$	1·414213	0·707107	362·0388	
49 32	kis’	$\sqrt[32]{2^{17}}$	1·445181	0·691955	369·9663	
50 32	l’	$\sqrt[32]{2^{18}}$	1·476828	0·677128	378·0677	
51 32	lis’	$\sqrt[32]{2^{19}}$	1·509165	0·662618	386·3462	
52 32	m’	$\sqrt[32]{2^{20}}$	1·542210	0·648420	394·8063	
53 32	mis’	$\sqrt[32]{2^{21}}$	1·575981	0·634525	403·4512	
54 32	n’	$\sqrt[32]{2^{22}}$	1·610490	0·620929	412·1858	
55 32	nis’	$\sqrt[32]{2^{23}}$	1·645756	0·607624	421·3135	
56 32	o’	$\sqrt[32]{2^{24}}$	1·681790	0·594605	430·5393	
57 32	ois’	$\sqrt[32]{2^{25}}$	1·718620	0·581862	439·9667	
58 32	p’	$\sqrt[32]{2^{26}}$	1·756252	0·569395	449·6090	
59 32	pis’	$\sqrt[32]{2^{27}}$	1·794708	0·557193	459·4456	
60 32	r’	$\sqrt[32]{2^{28}}$	1·834010	0·545253	469·5065	
61 32	ris’	$\sqrt[32]{2^{29}}$	1·874168	0·533570	479 7870	
62 32	s’	$\sqrt[33]{2^{30}}$	1·915207	0·522137	490·2934	
63 32	sis’	$\sqrt[32]{2^{31}}$	1·957145	0·510949	501·0291	
64 ; 32	c’’	$\sqrt[32]{2^{32}}$	2·000000	0·500000	512·0000	

	C_2—16	C_1—32	C—64	c—128	c'—256	c''—512	c'''—1024	c''''—2048
Hanglejtő $\sqrt[24]{2\cdots}$ rezgési számai. (Schwingungszahlen.)								
c'	16·0000	32·0000	64·0000	128·0000	256 0000	512·0000	1024·0000	2048·0000
	16·4688	32·9377	65·8753	131·7507	263·5013	527·0026	1054·0052	2108·0104
cis'	16·9514	33·9028	67·8056	135·6113	271·2225	542·4450	1084·8901	2169·7802
	17·4481	34·8963	69·7924	139·5848	279·1697	558 3400	1116 6800	2233·3600
d'	17 9594	35·9188	71·8376	143·6751	287·3503	574·7005	1149·4011	2298 8022
	18 4856	36 9712	73·9424	147·8848	295·7703	591 5406	1183·0816	2366·1632
dis', es'	19·0273	38·0546	76·1092	152·2185	304·4370	608·8740	1217·7480	2435·4959
	19·5848	39·1697	78·3394	156·6788	313·3576	626·7151	1253·4303	2506·8605
e'	20·1587	40·3174	80 6349	161·2698	322·5400	645·0790	1290·1581	2580·3162
	20·7494	41·4989	82·9978	165·9955	331·9910	663·9821	1327·9642	2655·9283
f'	21·3574	42·7149	85 4298	170·8595	341·7190	683·4381	1366·8762	2733·7523
	21·9832	43·9665	87·9340	175·8680	351·7320	703·4644	1406·9280	2813·8560
fis'	22·6274	45·2548	90·5097	181·0194	362 0388	724·0776	1448·1551	2896·3103
	23 2904	46·5809	93·1617	186·3235	372·6470	745·2940	1490·5880	2981·1760
	23·9729	47·4958	95·8916	191·7833	383·5666	767·1332	1534·2664	3068·5326
	24·6754	49·3507	98·7014	197·4029	394·8058	789·6115	1579·2230	3158·4461
gis', as'	25·3984	50·7968	101.5936	203·1872	406·3744	812·7488	1625·4976	3250·9952
	26·1426	52·2852	104·5705	209·1410	418·2810	836·5618	1673·1236	3346·2472
	26·9086	53·8172	107·6346	215·2691	430·5382	861·0765	1722·1530	3444·3059
	27·6971	55·3943	110 7885	221·5771	443·1542	886·3084	1772·6168	3545·2336
b'	28·5088	57·0175	114 0350	228·0700	456·1400	912 2801	1824·5601	3649·1203
	29·3442	58·6883	117·3766	234·7533	469 5066	939·0131	1878·0262	3756·0525
h'	30·2040	60·4079	120·8159	241·5317	483·2635	966·5270	1933·0540	3866·1079
	31·0890	62·1780	124·3560	248·7119	497·4239	994·8477	1986 6955	3979·3910
c''	32·0000	64·0000	128·0000	256·0000	512·0000	1024 0000	2048·0000	4096·0000

Az ide mellékelt táblázatokkal némi szolgálatot vélek tenni azoknak, a kik ezen tárgygyal netán tovább foglalkozni szándékoznak.

A jelen hangrendszer jogosultságát még azzal is lehet indokolni, hogy mindegyik hanglejtőnek csak **egy** intervallquotiense van, holott a többiben *két-*, sőt *három*-féle intervallquotiens is fordul elő. A 21-tagú „tiszta hangolás"-ban az intervallquotiensről szó sem lehet, mert ott, ahány tag, annyi az intervallquotiens is.

Az *intervallquotiens* (Iq) azon szám, mely keletkezik, ha valamely hanglejtőnek bármely intervallját az utána következővel elosztjuk. De mivel ezen szabály az alaphangra is vonatkozik, önként következik, hogy az intervallquotiens egyúttal egyenlő az alaphang után következő hangnak megfelelő húrhosszával is. — Ha ezen számmal az illető hanglejtőnek valamely intervall értékét megszorozzuk, megkapjuk az előtte való hangnak intervallját, ha pedig elosztjuk, akkor az utána való hangnak intervallja áll elő. Az intervallquotiensnek és a rezgési számoknak hasonló eljárásával megkapjuk az illető hanglejtőnek összes rezgési számait is.

Ha végre valamely hanglejtőnek intervallquotiensét 1, 2, 3, 4, 5 . . . . n-dik hatványra emeljük, akkor abban a hanglejtőben mindegyik húrhossz is pontosan adva van.

Kisérleteim, melyeket 2 kitűnően szerkesztett, *vaskeretben foglalt* és 12, 12 húrral biró polychorddal[1] tettem, elméletemet igazolják.

Az ide mellékelt ábra mutatja a polychord szerkezetét, s mivel a rajz a polychord minden részletét világosan tünteti fel, bővebb leirása fölöslegessé válik. Azonban nem hagyhatom említés nélkül a polychordoknak igen egyszerű és kényelmes hangolási módját. A hangolás ugyanis oly módon történik, hogy a 2 polychordnak összes húrjait egyszer mindenkorra egyik c-re (pl. c' = 256 rezgés) valamely hangvilla segítségével hangoljuk. Az így előkészített (1000 mm. hosszú) húrokkal már most nem kell egyebet tennünk, mint a nyergeket a kiszámított húrhosszak szerint, melyek itt millimeterekben adva vannak, beállítanunk. Igy aztán minden hanglejtő néhány percz alatt összeállítható. Az összetettebb hanglejtőknél igen előnyösen járunk el, ha azokat két részre bontjuk, így pl. a $\sqrt[14]{2\cdots}$ hanglejtőt akként oszthatjuk szét, hogy a balkezünknél levő polychordon a *c' d' e' f' g' a' h' c''* és a jobbkezünknél levőn a *cis' dis' fis' gis' ais' his' c''* hangokat hozzuk létre és aztán a húrok pengetését valamely meggömbölyített vagy prismatikus élű parafakalapácscsal eszközöljük. A pengetés alkalmával a két egymásmellett fekvő polychord fejénél foglalunk helyet. A húroknak c-re való hangolását az *aluminiumgyűrűk* segítségével[2] oly ember is eszközölheti, kinek hallási tehetsége nem kifogástalan.

Itt megjegyezhetem még, hogy az accordok keresésénél és az egyes hangok tisztaságának meghatározásánál igen czélszerűen

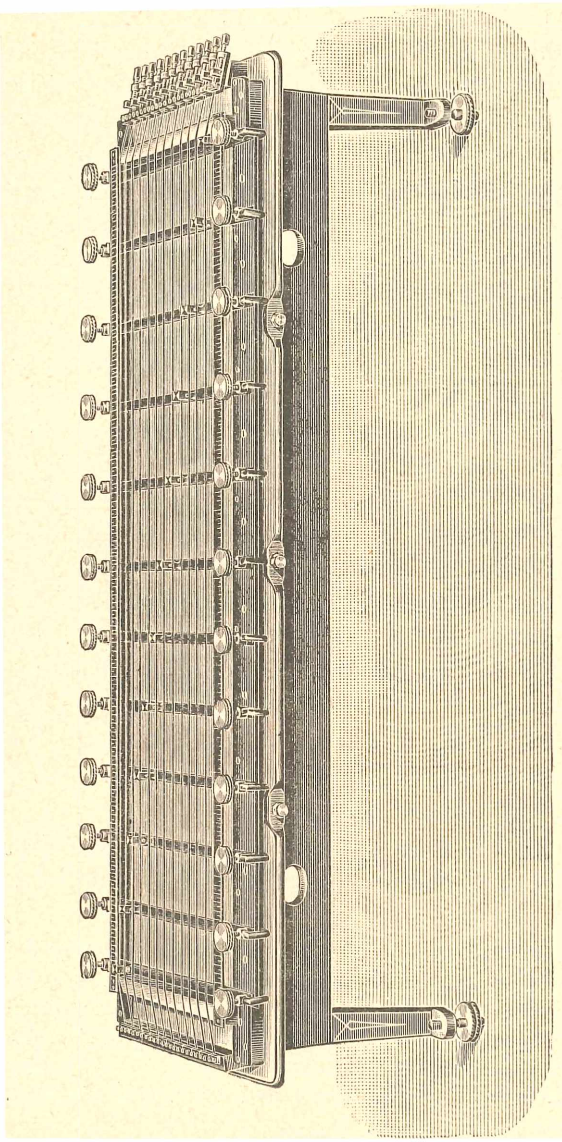
---

A polychordokat Kohl mechanikus rendkivül ügyesen készítette; mindkettőnek ára 520 márka. Kohl úrnak nagy előzékenysége és szakavatottsága megérdemli, hogy őt szaktársaimnak figyelmébe melegen ajánljam és teljes czimét ide mellékeljem: „Max Kohl, Werkstätten für Präzisionsmechanik in Chemnitz (Sachsen), Poststrasse Nr. 51.“

[2] Lásd: „Zeitschrift für den phys. und chem. Unterricht“ (Berlin) 1891. p. 177.

járunk el, ha a húroknak elvágott, azaz a nyergek tulsó oldalán levő húrrészleteket posztólappal vagy puha kendővel befedjük, mert a szóban forgó húrrészletek együtthangzása ilyenkor zavarólag hathat hallásunkra, illetőleg kisérleteinkre.

Pozsony, 1894. junius 2-án.



A polychord.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des Vereine für Naturkunde zu Presburg

Jahr/Year: 1894

Band/Volume: NF_8

Autor(en)/Author(s): Antolik Karl

Artikel/Article: A hanglejtök rendszere. (Tonleitern-System.) 129-160