

# Die Fehler der durch bicylindrische Linsen erzeugten Bilder

von

Dr. HUGO KRÜSS.

---

Von französischen Optikern werden vielfach bicylindrische Linsen mit rechtwinklig gekreuzten Cylinderaxen als Lupen und Lefegläser verfertigt und hervorgehoben, daß dieselben ebenere und weniger verzerrte Bilder geben sollen als äquivalente sphärische Linsen. Dieses veranlaßte mich, die Bilder, welche durch solche bicylindrischen Linsen erzeugt werden, einmal genau darzustellen durch Verfolgung einer Reihe von Strahlen durch dieselben.

Unter einer bicylindrischen Linse versteht REUSCH<sup>1)</sup> mit DONDERS<sup>2)</sup> eine Linse, bei welcher beide Flächen cylindrische Krümmung haben, deren Cylinderaxen rechtwinklig gekreuzt sind, während er solche<sup>3)</sup>, deren Cylinderaxen einander parallel sind, mit DONDERS<sup>4)</sup> einfach-cylindrische Linsen nennt. — Nach der Bezeichnung sphärischer Linsen als biconvex und biconcav ist man berechtigt, allgemein jede Linse bicylindrisch zu nennen, deren beide Flächen cylindrisch gekrümmt sind; außerdem giebt es dann zum Unterschied von ihnen plan-cylindrische und sphärisch-cylindrische Linsen.

---

<sup>1)</sup> F. E. REUSCH, Theorie der Cylinderlinsen. Leipzig 1868. § 12.

<sup>2)</sup> F. C. DONDERS, Astigmatismus und Cylindrische Gläser. Berlin 1862. Seite 74.

<sup>3)</sup> REUSCH, § 11.

<sup>4)</sup> DONDERS, S. 72 (f. auch F. PAROW: Ueber den Durchgang des Lichtes durch beliebige brechende Flächen. Bonn 1876. S. 11).

Eine bicylindrische Linse mit paralleler Axenstellung sammelt alle auffallenden Strahlen, die von einem Punkte herkommen, in einer der Cylinderaxe parallelen geraden Linie, welche durch denjenigen Punkt der optischen Axe geht, wo das Bild des leuchtenden Punktes durch eine sphärische Linse mit gleichgekrümmten Flächen entstehen würde. Diese Gerade ist für Strahlen, welche in verschiedenen Entfernungen von der optischen Axe auf die Linse fallen, verschieden weit von der letzten Linsenfläche entfernt und diese Abweichungen sind vollkommen übereinstimmend mit dem Kugelgestaltfehler sphärischer Linsen.

Es sollen deshalb im Folgenden nur die Bilder untersucht werden, welche von einer bicylindrischen Linse mit rechtwinklig gekreuzter Axenstellung geliefert werden, und der einfachste Fall angenommen werden, daß beide Flächen die gleiche convexe Krümmung haben, deren Radius =  $r$  ist. Eine solche Linse kann man sich durch einen Schnitt senkrecht zur optischen Axe in zwei gleiche plancyclindrische Linsen zerlegt denken. Die Brennweite der Combination beider ist  $f = \frac{1}{n-1} r^1$  ( $n$  = Brechungsindex des Glases). Diese Formel gilt auch für die Brennweite einer planconvexen sphärischen Linse, deren Radius =  $r$  ist; jede der beiden plancyclindrischen Linsen wirkt in der ihrer Cylinderaxe parallelen Richtung als Planglas, in der darauf senkrechten als planconvexe Linse mit dem Radius  $r$ . — Ebenso stellt aber auch dieselbe Formel die Brennweite einer gleichseitigen biconvexen sphärischen Linse dar, deren Radien =  $2 r$  sind; mit dieser ist also die bicylindrische Linse in ihrer Wirkung am besten zu vergleichen.

REUSCH sagt<sup>2)</sup>: »Macht man (überdies) beide Radien gleich, so gehen die Brennlinien durch denselben Axenpunkt und alle gebrochenen Strahlen gehen nothwendig durch den Kreuzungspunkt der Brennlinien. Diese Linsen wirken daher wie sphärische Linsen von derselben positiven oder negativen Brenn-

<sup>1)</sup> REUSCH, § 12.

<sup>2)</sup> REUSCH, § 12.

weite<sup>1)</sup>. Es scheint fogar, als ob bei diesen bicylindrischen Linfen die Verzerrung der Bilder gegen den Rand hin geringer wäre, als bei äquivalenten sphärischen Linfen, weswegen sie manchmal als Lefegläfer benutzt werden.«

Diese Sätze REUSCH's sind natürlich nur richtig unter den Beschränkungen, welche er seinen Rechnungen in § 3 und 4 auferlegte, nämlich: 1) die Oeffnung der Linse sei sehr klein ( $y_0$  und  $z_0$  sehr klein,  $x_0 = 0$ ), 2) ihre Dicke sei sehr klein ( $\Delta$  sehr klein gegen  $r$ ,  $r_1$  und  $x$ ). Sie gelten demgemäfs (ebenso wie meine obigen Bemerkungen) in praktischen Fällen nur für die Brennweite eines ganz nahe der optischen Axe auffallenden Strahles. Für weiter dem Rande der Linse zu einfallende Strahlen treten an den einzelnen Flächen die Erscheinungen der sphärischen Aberration zu Tage, jedoch in ganz eigenthümlichen Verhältnissen, deren ich bisher noch an keinem Orte erwähnt fand. —

Sämmtliche im Folgenden mitgetheilten Resultate sind durch trigonometrische Rechnung (mit 5stelligen Logarithmen) gewonnen, da nur solche in diesem Falle anzuwenden ist. Es werden nämlich die analytischen Formeln, welche den Kugelgestaltfehler darstellen, mindestens ebenso lang, wie die trigonometrischen, sie sind aber bei der numerischen Ausrechnung weniger bequem.

---

Um die später bei den bicylindrischen Linfen zu erhaltenden Resultate mit der Wirkung einer biconvexen sphärischen Linse vergleichen zu können, seien zuerst die nöthigen Daten für die letztere gegeben.

---

<sup>1)</sup> DONDERS, S. 72: »Ihre Wirkung kommt nahezu überein mit derjenigen der gewöhnlichen biconvexen Lupen.«

Es sei angenommen:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= +10 \\ r_2 &= -10 \\ n &= 1,52. \end{aligned} \right\} d = 2; o = 4$$

wobei  $r_1$  und  $r_2$  die Radien der Linflächen bedeuten (positiv, wenn die Fläche dem auffallenden Lichte ihre Convexität zuwendet),  $d$  die Dicke derselben,  $o$  der Durchmesser des symmetrisch gegen die optische Axe auffallenden Lichtbüchfels und  $n$  der Brechungsindex des Glases.

Aus einem parallel der Axe auf die Linse treffenden Lichtbüchel wurden durch die Linse verfolgt: ein Strahl (A,) welcher nahe der Axe auf die Linse trifft (Einfallswinkel = 1 Secunde), ein zweiter Strahl (R), welcher am Rande der Oeffnung einfällt (also um 2 von der Axe entfernt), und dazwischen noch zwei Strahlen ( $\frac{1}{3}$  R und  $\frac{2}{3}$  R), welche in  $\frac{1}{3}$  resp.  $\frac{2}{3}$  der Oeffnung von der Axe gegen den Rand einfallen.

Es ergeben sich die Vereinigungsweiten, das sind die Entfernungen derjenigen Punkte, in welchen die gebrochenen Strahlen die Axe schneiden, von dem Scheitel der letzten Fläche:

$$\begin{aligned} A & 9,2748 \\ \frac{1}{3} R & 9,2101 \\ \frac{2}{3} R & 9,0095 \\ R & 8,6578 \end{aligned}$$

und hieraus der Kugelgestaltfehler:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} R & 0,0647 \\ \frac{2}{3} R & 0,2653 \\ R & 0,6170 \end{aligned}$$

Als Bildebene wählt man nach Bessel<sup>1)</sup> diejenige zur

<sup>1)</sup> Fr. W. Bessel, Astronomische Untersuchungen. Königsberg 1841. I. Bd. II, § 17.

optischen Axe senkrechte Ebene, in welcher das Product der auf jeden Punkt fallenden Lichtmenge und des Quadrates seiner Entfernung von der Axe ein Minimum wird. Diese Ebene fällt zusammen mit derjenigen, in welcher die Radien der durch die am Rande und in  $\frac{2}{3}$  der Oeffnung einfallenden Strahlen erzeugten Zerftreuungskreise gleich und entgegengesetzt find. Die Bildebene ergibt sich demnach für diese Linse in der Entfernung 8,7955 von der letzten Fläche und die Radien der Zerftreuungskreise werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} R &+ 0,0279 \\ \frac{2}{3} R &+ 0,0294 \\ R &- 0,0294 \end{aligned}$$

Fällt man von den (virtuellen) Durchschnittspunkten der austretenden mit den zugehörigen eintretenden Strahlen Perpendikel auf die Axe, so ergibt sich die Lage der Hauptpunkte (Abstand von der letzten Fläche):

$$\begin{aligned} A &- 0,6813 \\ \frac{1}{3} R &- 0,6834 \\ \frac{2}{3} R &- 0,6905 \\ R &- 0,7060 \end{aligned}$$

und aus ihrer Entfernung von den Vereinigungspunkten die Brennweiten:

$$\begin{aligned} A &9,9561 \\ \frac{1}{3} R &9,8935 \\ \frac{2}{3} R &9,7000 \\ R &9,3638 \end{aligned}$$

Die Elemente der mit dieser biconvexen sphärischen Linse zu vergleichenden bicylindrischen Linse sind:

$$d_1 = 1 \left\{ \begin{array}{l} r_1 = +5 \\ r_2 = \infty \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r_3 = \infty \\ r_4 = -5 \end{array} \right\} d_2 = 1 ; \quad \begin{array}{l} o = 4 \\ n = 1,52 \end{array}$$

$$\Delta = 0$$

Fig. 1.

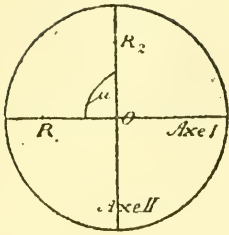


Fig. 2.

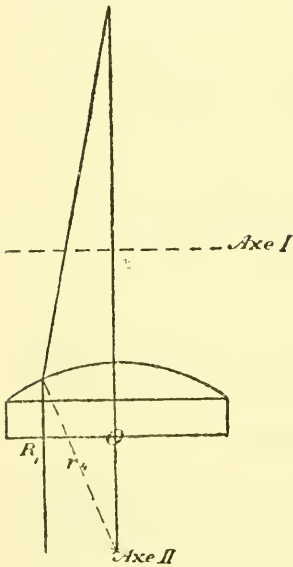
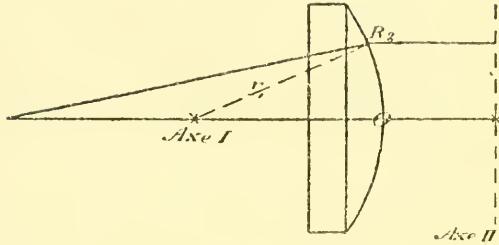


Fig. 3.



wo das Zeichen  $\square$  andeuten soll, daß die Cylinderaxen der beiden plancyindrigen Linse, aus welchen die bicylindrische Linse besteht, rechtwinklig gekreuzt sind<sup>1)</sup>;  $\Delta$  ist der Abstand der beiden plancyindrigen Linse von einander.

Es sei in Fig. 1 eine Ansicht der bicylindrischen Linse von der Seite der auffallenden Strahlen gegeben, in welcher Axe I die Richtung der Cylinderaxe der ersten plancyindrigen Linse, Axe II diejenige der Cylinderaxe der zweiten darstellt; die optische Axe steht senkrecht zur Zeichenebene im Punkte O.

Fig. 2 sei ein Schnitt durch Axe I und die optische Axe, Fig. 3 ein Schnitt durch Axe II und die optische Axe. Um den Gang zweier Strahlen in diesen beiden Ebenen zu betrachten seien zwei am Rande der Oeffnung parallel zur optischen Axe einfallende Strahlen angenommen:  $R_1$  in der Ebene der Axe I und  $R_2$  in derjenigen der Axe II, also um den Winkel  $\mu = 90^\circ$  entfernt von der Ebene der Axe I. Für

<sup>1)</sup> DONDERS, S. 74.

$R_1$  wirkt die erste Linse, für  $R_2$  die zweite als Planglas;  $R_1$  erleidet an der letzten Fläche einen Kugelgestaltfehler,  $R_2$  an der ersten, welcher jedoch in der Gröfse verschieden von dem Fehler des Strahles  $R_1$  ist; außerdem erleidet  $R_2$  noch eine Verschiebung durch die planparallele Platte, als welche sich ihm die zweite Linse vorstellt, welche proportional ihrer Dicke ist.

Andere Strahlen  $R$ , die in einem Winkelabstande  $\mu$  von der Axe I einfallen, welcher kleiner ist als  $90^\circ$ , erleiden an der ersten und an der letzten Fläche Brechung und sphärische Aberration. Die Folge hiervon ist, dafs alle mit der optischen Axe parallelen Strahlen  $R$ , welche in gleichem Abstände von der optischen Axe, aber in verschiedenem Winkelabstande  $\mu$  von der Cylinderaxenebene I auf die bicylindrische Linse fallen, nach der Brechung durch dieselbe nicht in einem und demselben Punkte die optische Axe schneiden, so dafs also der Durchschnitt des gebrochenen Strahlenbüschels mit einer zur optischen Axe senkrechten Ebene (z. B. der Bildebene) nicht wie bei den sphärischen Linsen ein Kreis ist.

An Stelle der Zerstreuungskreise der sphärischen Linse treten also bei der bicylindrischen Linse mit gekreuzten Axen andere Abweichungsfiguren auf. Um ihre Form näher zu untersuchen, wurden aus dem der optischen Axe parallel auffallenden Büschel Strahlen  $A$ ,  $\frac{1}{3} R$ ,  $\frac{2}{3} R$  und  $R$  durch die bicylindrische Linse verfolgt, welche in den Winkelabständen  $\mu = 0^\circ$  (in der Axenebene I),  $11\frac{1}{4}^\circ$ ,  $22\frac{1}{2}^\circ$ ,  $33\frac{3}{4}^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $56\frac{1}{4}^\circ$ ,  $67\frac{1}{2}^\circ$ ,  $78\frac{3}{4}^\circ$  und  $90^\circ$  (in der Axenebene II) von der Axenebene I die Linse treffen. Die analogen Untersuchungen in den anderen drei Quadranten sind unnöthig, da leicht einzusehen ist, dafs zwei symmetrisch zu den beiden Cylinderaxen auffallende Strahlen in ihrem Verlauf symmetrisch zu denselben bleiben, also nach der Brechung die optische Axe in einem und demselben Punkte schneiden.

Die Resultate dieser Rechnungen finden sich in den folgenden Tabellen zusammengestellt.



Tabelle I. (Vereinigungsweiten).

	0°	11 $\frac{1}{4}$ °	22 $\frac{1}{2}$ °	33 $\frac{3}{4}$ °	45°	56 $\frac{1}{4}$ °	67 $\frac{1}{2}$ °	78 $\frac{3}{4}$ °	90°
A	9,6154	9,5336	9,4104	9,2242	8,9596	8,7232	8,4999	8,3447	8,2998
$\frac{1}{3}$ R	9,4204	9,3810	9,2816	9,1148	8,8913	8,6663	8,4953	8,3263	8,2497
$\frac{2}{3}$ R	8,7981	8,8066	8,8016	8,7485	8,6569	8,4903	8,3025	8,1575	8,1023
R	7,6844	7,7566	7,9340	8,1301	8,2257	8,1829	8,0328	7,9009	7,8435

Tabelle II. (Kugelgestaltfehler).

	0°	11 $\frac{1}{4}$ °	22 $\frac{1}{2}$ °	33 $\frac{3}{4}$ °	45°	56 $\frac{1}{4}$ °	67 $\frac{1}{2}$ °	78 $\frac{3}{4}$ °	90°
$\frac{1}{3}$ R	0,1950	0,1526	0,1288	0,1094	0,0683	0,0569	0,0046	0,0184	0,0401
$\frac{2}{3}$ R	0,98173	0,7270	0,6098	0,4757	0,3027	0,2329	0,1974	0,1872	0,1975
R	1,9310	1,7770	1,4764	1,0941	0,7339	0,5403	0,4671	0,4438	0,4563

Tabelle III. (Hauptpunkte).

	0°	11 $\frac{1}{4}$ °	22 $\frac{1}{2}$ °	33 $\frac{3}{4}$ °	45°	56 $\frac{1}{4}$ °	67 $\frac{1}{2}$ °	78 $\frac{3}{4}$ °	90°
A	0	-0,0527	-0,1865	-0,3835	-0,5637	-0,8880	-1,31078	-1,92630	-1,3157
$\frac{1}{3}$ R	-0,30423	-0,0881	-0,2131	-0,4057	-0,56498	-0,88808	-1,0961	-1,2129	-1,2882
$\frac{2}{3}$ R	-0,11816	-0,2143	-0,3118	-0,4796	-0,6578	-0,8584	-1,0315	-1,1186	-1,1897
R	-0,31174	-0,4329	-0,5487	-0,5705	-0,56905	-0,8197	-0,9349	-1,0020	-1,0266

Tabelle IV. (Brennweiten).

	0°	11 $\frac{1}{4}$ °	22 $\frac{1}{2}$ °	33 $\frac{3}{4}$ °	45°	56 $\frac{1}{4}$ °	67 $\frac{1}{2}$ °	78 $\frac{3}{4}$ °	90°
A	9,76155	9,5863	9,5969	9,6077	9,5933	9,6112	9,6077	9,6077	9,6155
$\frac{1}{3}$ R	9,54626	9,4691	9,4947	9,5295	9,5411	9,5471	9,5914	9,5392	9,5339
$\frac{2}{3}$ R	8,99797	9,0269	9,1134	9,2281	9,3117	9,3387	9,3340	9,3061	9,2920
R	8,7018	8,71895	8,74157	8,7006	8,9162	9,0026	8,9677	8,9029	8,8701

Tabelle V. (Bildradien).

	0°	11 $\frac{1}{4}$ °	22 $\frac{1}{2}$ °	33 $\frac{3}{4}$ °	45°	56 $\frac{1}{4}$ °	67 $\frac{1}{2}$ °	78 $\frac{3}{4}$ °	90°
$\frac{1}{3}$ R	+0,0930	+0,0902	+0,0830	+0,0711	+0,0553	+0,0395	+0,0275	+0,0158	+0,0103
$\frac{2}{3}$ R	+0,21037	+0,21044	+0,21027	+0,0937	+0,0797	+0,0557	+0,0289	+0,0082	+0,0003
R	-0,1026	-0,0839	-0,30395	+0,0069	+0,0282	+0,0184	-0,0150	-0,20447	-0,30578



Tabelle I enthält die Vereinigungsweiten für die verschiedenen Strahlen; hieraus ergeben sich diejenigen Größen  $(A - \frac{1}{3} R)$ ,  $(A - \frac{2}{3} R)$  und  $(A - R)$ , welche dem Kugelgestaltfehler der biconvexen sphärischen Linse an die Seite zu stellen sind (Tabelle II).

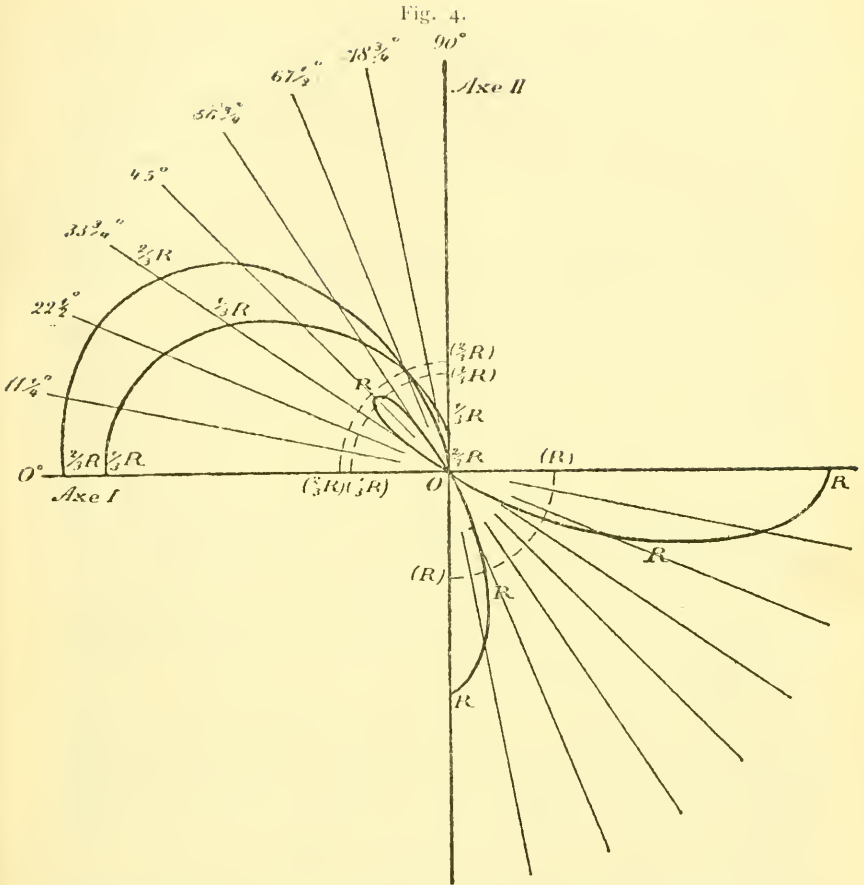
Die Hauptpunkte ergeben sich in den in Tabelle III befindlichen Entfernungen von der letzten Fläche, und aus ihren Abständen von den zugehörigen Vereinigungspunkten finden sich die Brennweiten in Tabelle IV.

Die Bildebene wurde in der Entfernung  $s_{,1}$  von der letzten Fläche gewählt, weil diese von den Strahlen  $\frac{2}{3} R$  und  $R$  für den Winkel  $\mu = 0^\circ$  in gleichen Abständen von der Axe getroffen wird. Die Entfernungen der Punkte von der optischen Axe, in welcher die einzelnen Strahlen die Bildebene schneiden (zu vergleichen mit den Radien des Zerftreuungsbildes bei der sphärischen Linse) sind in der Tabelle V enthalten.

Man sieht daraus, daß für die zusammengehörigen Strahlen mit verschiedenem Winkelabstande  $\mu$  diese Größen, welche ich auch hier kurz Bildradien nennen will, sehr verschiedene Werthe erhalten, daß also die Zerftreuungsfignuren eine ganz eigenthümliche Gestalt besitzen. Dieselben sind in Fig. 4 dargestellt.

In derselben schneiden sich die Ebenen der Cylinderaxen I und II unter rechtem Winkel in dem Punkte O. Dieser Winkel ist in acht gleiche Theile getheilt und auf jedem Richtungsstrahl die dem jedesmaligen Winkelabstande  $\mu$  zugehörige GröÙe des Bildradius in einem willkürlichen Maßstabe von O aus abgetragen. Auf diese Weise erhält man die Durchschnitte der verschiedenen Strahlen mit der Bildebene. Es ist klar, daß diejenigen Strahlen, welche die optische Axe zwischen Linse und Bildebene schneiden und in Folge dessen in Tabelle V mit negativem Bildradius aufgeführt sind, die Bildebene im dritten Quadranten schneiden müssen.

Indem man nun diejenigen Durchschnittpunkte mit einander verbindet, welche Strahlen angehören, die in gleichem Abstände von der optischen Axe auf die Linse fielen, erhält man eine Curve, welche darstellt den Durchschnitt der Bildebene



mit demjenigen Theile eines Strahlenmantels, welcher die erste Fläche der Linse in einem Viertelkreise traf. — Alle Strahlen  $R$ , welche auf den ersten Quadranten der vordersten Linsenfläche fielen in dem Abstände  $2$  von der optischen Axe, schneiden die Bildebene in der Curve  $R$ ; dieselbe liegt theils im dritten Quadranten, theils im ersten, da die Werthe des Bildradius für einige Randstrahlen negativ, für andere positiv sind. In den anderen Quadranten sind die Durchschnittsfiguren symmetrisch mit der gezeichneten Curve zu den Axen I und II; sie wurden in der Zeichnung fortgelassen, um dieselbe nicht zu

verwirren. — Ebenso sind die Curven  $\frac{2}{3} R$  und  $\frac{1}{3} R$  die Durchschnittsfiguren der Strahlen  $\frac{2}{3} R$  und  $\frac{1}{3} R$ .

Bei der äquivalenten biconvexen sphärischen Linse sind die Durchschnittsfiguren des gefamnten gebrochenen Strahlencomplexes (wie er durch die Daten auf Seite 5 und 6 bestimmt ist) mit der Bildebene Kreise und es sind in Fig. 4 durch die punktirten Viertelskreise (R), ( $\frac{2}{3} R$ ), ( $\frac{1}{3} R$ ) die den untersuchten Oeffnungen zugehörigen Zerftreuungskreise angedeutet in demselben Mafstabe wie die Curven für die bicylindrische Linse.

Die Strahlen, welche auf die beiden untersuchten Linsen (die sphärische und die bicylindrische) fielen, sind als untereinander mit der optischen Axe parallel angenommen worden. Ihre Vereinigung nach der Brechung ist demgemäfs das Bild eines in unendlicher Entfernung in der Richtung der optischen Axe befindlichen leuchtenden Punktes. Fig. 4 zeigt also für die bicylindrische und die sphärische Linse die relative Gröfse dieses Bildes (welche bei einer ideal vollkommenen Linse = 0 ist) und die Anordnung der einzelnen Strahlen in demselben. — In beider Beziehung fällt die Vergleichung weitaus zu Gunsten der sphärischen Linse aus.

Der den bicylindrischen Linsen nachgerühmte Vorzug vor den sphärischen, die gröfsere Schärfe gegen den Rand des Bildes hin, bezieht sich allerdings auf Strahlen, welche nicht parallel der optischen Axe auf die Linse fallen, sondern in beträchtlichem Winkel gegen dieselbe geneigt, und ein bestimmtes Urtheil mufs so lange zurückgehalten werden, bis die Arbeit über den Weg solcher Strahlen durch die bicylindrische Linse beendet sein wird. Einen kleinen Anhalt bieten jedoch auch zur Beurtheilung dieser Frage schon die vorliegenden Resultate, indem die Abweichungen in der Gröfse der Brennweite und in der Lage der Hauptpunkte von einander für die Strahlen A,  $\frac{1}{3} R$ ,  $\frac{2}{3} R$  und R ein Mafs abgeben für die Gröfse der Verzerrung gegen den Rand des Bildes hin. Auch in dieser Richtung verspricht die sphärische Linse viel bessere Resultate als die äquivalente bicylindrische Linse mit rechtwinklig gekreuzten Cylinderaxen.

Hamburg, im Februar 1879.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Hamburg](#)

Jahr/Year: 1879

Band/Volume: [NF\\_3](#)

Autor(en)/Author(s): Krüss Hugo

Artikel/Article: [Die Fehler der durch bicylindrische Linsen erzeugten Bilder 104-114](#)