© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Die Fehler der durch bicylindrifche Linfen erzeugten Bilder

von

Dr. Hugo Krüss.

Von franzöfifchen Optikern werden vielfach bicylindrifche Linfen mit rechtwinklig gekreuzten Cylinderaxen als Lupen und Lefegläfer verfertigt und hervorgehoben, dafs diefelben ebenere und weniger verzerrte Bilder geben follen als äquivalente fphärifche Linfen. Diefes veranlafste mich, die Bilder, welche durch folche bicylindrifchen Linfen erzeugt werden, einmal genau darzuftellen durch Verfolgung einer Reihe von Strahlen durch diefelben.

Unter einer bicylindrifchen Linfe verfteht Reusch[1]) mit Donders[2]) eine Linfe, bei welcher beide Flächen cylindrifche Krümmung haben, deren Cylinderaxen rechtwinklig gekreuzt find, während er folche[3]), deren Cylinderaxen einander parallel find, mit Donders[4]) einfach-cylindrifche Linfen nennt. — Nach der Bezeichnung fphärifcher Linfen als biconvex und biconcav ift man berechtigt, allgemein jede Linfe bicylindrifch zu nennen, deren beide Flächen cylindrifch gekrümmt find; aufserdem giebt es dann zum Unterfchied von ihnen plancylindrifche und fphärifch-cylindrifche Linfen.

---

[1]) F. E. Reusch, Theorie der Cylinderlinfen. Leipzig 1868. § 12.

[2]) F. C. Donders, Aftigmatismus und Cylindrifche Gläfer. Berlin 1862. Seite 74.

[3]) Reusch, § 11.

[4]) Donders, S. 72 (f. auch F. Parow: Ueber den Durchgang des Lichtes durch beliebige brechende Flächen. Bonn 1876. S. 11).

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Eine bicylindrifche Linfe mit paralleler Axenftellung fammelt alle auffallenden Strahlen, die von einem Punkte herkommen, in einer der Cylinderaxe parallelen geraden Linie, welche durch denjenigen Punkt der optifchen Axe geht, wo das Bild des leuchtenden Punktes durch eine fphärifche Linfe mit gleichgekrümmten Flächen entftehen würde. Diefe Gerade ift für Strahlen, welche in verfchiedenen Entfernungen von der optifchen Axe auf die Linfe fallen, verfchieden weit von der letzten Linfenfläche entfernt und diefe Abweichungen find vollkommen übereinftimmend mit dem Kugelgeftaltfehler fphärifcher Linfen.

Es follen deshalb im Folgenden nur die Bilder unterfucht werden, welche von einer bicylindrifchen Linfe mit rechtwinklig gekreuzter Axenftellung geliefert werden, und der einfachfte Fall angenommen werden, dafs beide Flächen die gleiche convexe Krümmung haben, deren Radius = r ift. Eine folche Linfe kann man fich durch einen Schnitt fenkrecht zur optifchen Axe in zwei gleiche plancylindrifche Linfen zerlegt denken. Die Brennweite der Combination beider ift $f = \frac{1}{n-1} r$[1]) (n = Brechungsindex des Glafes). Diefe Formel gilt auch für die Brennweite einer planconvexen fphärifchen Linfe, deren Radius = r ift: jede der beiden plancylindrifchen Linfen wirkt in der ihrer Cylinderaxe parallelen Richtung als Planglas, in der darauf fenkrechten als planconvexe Linfe mit dem Radius r. — Ebenfo ftellt aber auch diefelbe Formel die Brennweite einer gleichseitigen biconvexen fphärifchen Linfe dar, deren Radien = 2 r find; mit diefer ift alfo die bicylindrifche Linfe in ihrer Wirkung am beften zu vergleichen.

REUSCH fagt[2]): »Macht man (überdies) beide Radien gleich, fo gehen die Brennlinien durch denfelben Axenpunkt und alle gebrochenen Strahlen gehen nothwendig durch den Kreuzungspunkt der Brennlinien. Diefe Linfen wirken daher wie fphärifche Linfen von derfelben pofitiven oder negativen Brenn-

---

[1]) REUSCH, § 12.

[2]) REUSCH, § 12.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

weite[1]). Es ſcheint ſogar, als ob bei dieſen bicylindriſchen Linſen die Verzerrung der Bilder gegen den Rand hin geringer wäre, als bei äquivalenten ſphäriſchen Linſen, weswegen ſie manchmal als Leſegläſer benutzt werden.«

Dieſe Sätze REUSCH's ſind natürlich nur richtig unter den Beſchränkungen, welche er ſeinen Rechnungen in § 3 und 4 auferlegte, nämlich: 1) die Oeffnung der Linſe ſei ſehr klein (y_0 und z_0 ſehr klein, $x_0 = 0$), 2) ihre Dicke ſei ſehr klein ($\triangle$ ſehr klein gegen r, r. und x.). Sie gelten demgemäſs (ebenſo wie meine obigen Bemerkungen) in praktiſchen Fällen nur für die Brennweite eines ganz nahe der optiſchen Axe auffallenden Strahles. Für weiter dem Rande der Linſe zu einfallende Strahlen treten an den einzelnen Flächen die Erſcheinungen der ſphäriſchen Aberration zu Tage, jedoch in ganz eigenthümlichen Verhältniſſen, deren ich bisher noch an keinem Orte erwähnt fand. —

Sämmtliche im Folgenden mitgetheilten Reſultate ſind durch trigonometriſche Rechnung (mit 5ſtelligen Logarithmen) gewonnen, da nur ſolche in dieſem Falle anzuwenden iſt. Es werden nämlich die analytiſchen Formeln, welche den Kugelgeſtaltfehler darſtellen, mindeſtens ebenſo lang, wie die trigonometriſchen, ſie ſind aber bei der numeriſchen Ausrechnung weniger bequem.

Um die ſpäter bei den bicylindriſchen Linſen zu erhaltenden Reſultate mit der Wirkung einer biconvexen ſphäriſchen Linſe vergleichen zu können, ſeien zuerſt die nöthigen Daten für die letztere gegeben.

---

[1]) DONDERS, S. 72: »Ihre Wirkung kommt nahezu überein mit derjenigen der gewöhnlichen biconvexen Lupen.«

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Es sei angenommen:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = +10 \\ r_2 = -10 \end{array}\right\} d = 2;\ o = 4$$
$$n = 1{,}52.$$

wobei r_1 und r_2 die Radien der Linsenflächen bedeuten (positiv, wenn die Fläche dem auffallenden Lichte ihre Convexität zuwendet), d die Dicke derselben, o der Durchmesser des symmetrisch gegen die optische Axe auffallenden Lichtbüschels und n der Brechungsindex des Glases.

Aus einem parallel der Axe auf die Linse treffenden Lichtbüschel wurden durch die Linse verfolgt: ein Strahl (A,) welcher nahe der Axe auf die Linse trifft (Einfallswinkel = 1 Secunde), ein zweiter Strahl (R), welcher am Rande der Oeffnung einfällt (also um 2 von der Axe entfernt), und dazwischen noch zwei Strahlen ($^1/_3$ R und $^2/_3$ R), welche in $^1/_3$ resp. $^2/_3$ der Oeffnung von der Axe gegen den Rand einfallen.

Es ergeben sich die Vereinigungsweiten, das sind die Entfernungen derjenigen Punkte, in welchen die gebrochenen Strahlen die Axe schneiden, von dem Scheitel der letzten Fläche:

A	9,2748
$^1/_3$ R	9,2101
$^2/_3$ R	9,0095
R	8,6578

und hieraus der Kugelgestaltfehler:

$^1/_3$ R	0,0647
$^2/_3$ R	0,2653
R	0,6170

Als Bildebene wählt man nach Bessel[1]) diejenige zur

[1]) Fr. W. Bessel, Astronomische Untersuchungen. Königsberg 1841. I. Bd. II, § 17.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

optiſchen Axe ſenkrechte Ebene, in welcher das Product der auf jeden Punkt fallenden Lichtmenge und des Quadrates ſeiner Entfernung von der Axe ein Minimum wird. Dieſe Ebene fällt zuſammen mit derjenigen, in welcher die Radien der durch die am Rande und in $^2/_3$ der Oeffnung einfallenden Strahlen erzeugten Zerſtreuungskreiſe gleich und entgegengeſetzt ſind. Die Bildebene ergiebt ſich demnach für dieſe Linſe in der Entfernung 8,7955 von der letzten Fläche und die Radien der Zerſtreuungskreiſe werden:

$^1/_3$	R	+0,0279
$^2/_3$	R	+0,0294
	R	—0,0294

Fällt man von den (virtuellen) Durchſchnittspunkten der austretenden mit den zugehörigen eintretenden Strahlen Perpendikel auf die Axe, ſo ergiebt ſich die Lage der Hauptpunkte (Abſtand von der letzten Fläche):

A		—0,6813
$^1/_3$	R	—0,6834
$^2/_3$	R	—0,6905
R		—0,7060

und aus ihrer Entfernung von den Vereinigungspunkten die Brennweiten:

A		9,9561
$^1/_3$	R	9,8935
$^2/_3$	R	9,7000
R		9,3638

Die Elemente der mit dieſer biconvexen ſphäriſchen Linſe zu vergleichenden bicylindriſchen Linſe ſind:

$$d_1 = 1 \left\{ \begin{array}{l} r_1 = +5 \\ r_2 = \infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} r_3 = \infty \\ r_4 = -5 \end{array} \Bigg\} d_2 = 1 \quad ; \quad \begin{array}{l} o = 4 \\ n = 1{,}52 \end{array}$$

$$\triangle = 0$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Fig. 1.

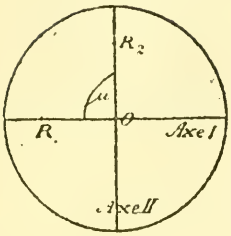


Fig. 3.

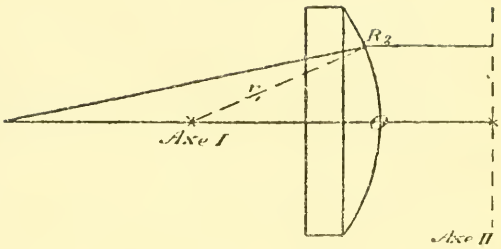
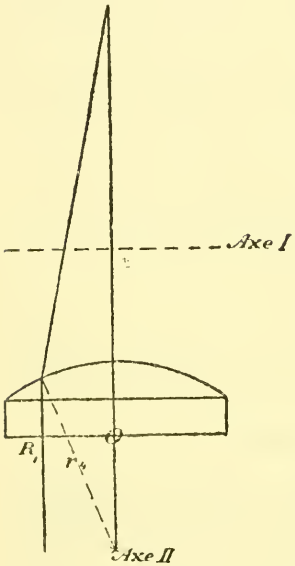


Fig. 2.



wo das Zeichen ⌐ andeuten foll, dafs die Cylinderaxen der beiden plancylindrifchen Linfen, aus welchen die bicylindrifche Linfe befteht, rechtwinklig gekreuzt find[1]; △ ift der Abftand der beiden plancylindrifchen Linfen von einander.

Es fei in Fig. 1 eine Anficht der bicylindrifchen Linfe von der Seite der auffallenden Strahlen gegeben, in welcher Axe I die Richtung der Cylinderaxe der erften plancylindrifchen Linfe, Axe II diejenige der Cylinderaxe der zweiten darftellt; die optifche Axe fteht fenkrecht zur Zeichenebene im Punkte O.

Fig. 2 fei ein Schnitt durch Axe I und die optifche Axe, Fig. 3 ein Schnitt durch Axe II und die optifche Axe. Um den Gang zweier Strahlen in diefen beiden Ebenen zu betrachten feien zwei am Rande der Oeffnung parallel zur optifchen Axe einfallende Strahlen angenommen: R_1 in der Ebene der Axe I und R_2 in derjenigen der Axe II, alfo um den Winkel $\mu = 90^0$ entfernt von der Ebene der Axe I. Für

[1]) Donders, S. 74.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

R_1 wirkt die erſte Linſe, für R_2 die zweite als Planglas; R_1 erleidet an der letzten Fläche einen Kugelgeſtaltfehler, R_2 an der erſten, welcher jedoch in der Gröſse verſchieden von dem Fehler des Strahles R_1 iſt; auſserdem erleidet R_2 noch eine Verſchiebung durch die planparallele Platte, als welche ſich ihm die zweite Linſe vorſtellt, welche proportional ihrer Dicke iſt.

Andere Strahlen R, die in einem Winkelabſtande μ von der Axe I einfallen, welcher kleiner iſt als 90^0, erleiden an der erſten und an der letzten Fläche Brechung und ſphäriſche Aberration. Die Folge hiervon iſt, daſs alle mit der optiſchen Axe parallelen Strahlen R, welche in gleichem Abſtande von der optiſchen Axe, aber in verſchiedenem Winkelabſtande μ von der Cylinderaxenebene I auf die bicylindriſche Linſe fallen, nach der Brechung durch dieſelbe nicht in einem und demſelben Punkte die optiſche Axe ſchneiden, ſo daſs alſo der Durchſchnitt des gebrochenen Strahlenbüſchels mit einer zur optiſchen Axe ſenkrechten Ebene (z. B. der Bildebene) nicht wie bei den ſphäriſchen Linſen ein Kreis iſt.

An Stelle der Zerſtreuungskreiſe der ſphäriſchen Linſe treten alſo bei der bicylindriſchen Linſe mit gekreuzten Axen andere Abweichungsfiguren auf. Um ihre Form näher zu unterſuchen, wurden aus dem der optiſchen Axe parallel auffallenden Büſchel Strahlen A, $^1/_3$ R, $^2/_3$ R und R durch die bicylindriſche Linſe verfolgt, welche in den Winkelabſtänden $\mu = 0^0$ (in der Axenebene I), $11^1/_4{}^0$, $22^1/_2{}^0$, $33^3/_4{}^0$, 45^0, $56^1/_4{}^0$, $67^1/_2{}^0$, $78^3/_4{}^0$ und 90^0 (in den Axenebene II) von der Axenebene I die Linſe treffen. Die analogen Unterſuchungen in den anderen drei Quadranten ſind unnöthig, da leicht einzuſehen iſt, daſs zwei ſymmetriſch zu den beiden Cylinderaxen auffallende Strahlen in ihrem Verlauf ſymmetriſch zu denſelben bleiben, alſo nach der Brechung die optiſche Axe in einem und demſelben Punkte ſchneiden.

Die Reſultate dieſer Rechnungen finden ſich in den folgenden Tabellen zuſammengeſtellt.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Tabelle I. (Vereinigungsweiten).

	0°	11¼°	22½°	33¾°	45°	56¼°	67½°	78¾°	90°
A	9,6154	9,5336	9,4104	9,2242	8,9596	8,7232	8,4999	8,3447	8,2998
⅓ R	9,4204	9,3810	9,2816	9,1148	8,8913	8,6663	8,4953	8,3263	8,2497
⅔ R	8,7981	8,8066	8,8016	8,7485	8,6569	8,4903	8,3025	8,1575	8,1023
R	7,6844	7,7566	7,9340	8,1301	8,2257	8,1829	8,0328	7,9009	7,8435

Tabelle II. (Kugelgeftaltfehler).

	0°	11¼°	22½°	33¾°	45°	56¼°	67½°	78¾°	90°
⅓ R	0,1950	0,1526	0,1288	0,1094	0,0683	0,0569	0,0046	0,0184	0,0401
⅔ R	0,8173	0,7270	0,6088	0,4757	0,3027	0,2329	0,1974	0,1872	0,1975
R	1,9310	1,7770	1,4764	1,0941	0,7339	0,5403	0,4671	0,4438	0,4563

Tabelle III. (Hauptpunkte).

	0°	11¼°	22½°	33¾°	45°	56¼°	67½°	78¾°	90°
A	0	—0,0527	—0,1865	—0,3835	—0,6337	—0,8880	—1,1078	—1,2630	—1,3157
⅓ R	—0,0424	—0,0881	—0,2131	—0,4057	—0,6498	—0,8808	—1,0961	—1,2129	—1,2842
⅔ R	—0,1816	—0,2143	—0,3118	—0,4796	—0,6578	—0,8584	—1,0315	—1,1486	—1,1897
R	—0,4174	—0,4329	—0,4817	—0,5705	—0,6905	—0,8197	—0,9349	—1,0020	—1,0266

Tabelle IV. (Brennweiten).

	0°	11¼°	22½°	33¾°	45°	56¼°	67½°	78¾	90°
A	9,6155	9,5863	9,5969	9,6077	9,5933	9,6112	9,6077	9,6077	9,6155
⅓ R	9,4626	9,4691	9,4947	9,5205	9,5411	9,5471	9,5914	9,5392	9,5339
⅔ R	8,9797	9,0209	9,1134	9,2281	9,3117	9,3187	9,3340	9,3061	9,2920
R	8,1018	8,1895	8,4157	8,7006	8,9162	9,0026	8,9677	8,9029	8,8701

Tabelle V. (Bildradien).

	0°	11¼°	22½°	33¾°	45°	56¼°	67½°	78¾°	90°
⅓ R	+0,0930	+0,0902	+0,0830	+0,0711	+0,0553	+0,0395	+0,0275	+0,0158	+0,0103
⅔ R	+0,1037	+0,1044	+0,1027	+0,0937	+0,0797	+0,0557	+0,0289	+0,0082	+0,0003
R	—0,1026	—0,0839	—0,0395	+0,0069	+0,0282	+0,0184	—0,0150	—0,0447	—0,0578

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Tabelle I enthält die Vereinigungsweiten für die verſchiedenen Strahlen; hieraus ergeben ſich diejenigen Gröſsen (A — $^1/_3$ R), (A — $^2/_3$ R) und (A — R), welche dem Kugelgeſtaltfehler der biconvexen ſphäriſchen Linſe an die Seite zu ſtellen ſind (Tabelle II).

Die Hauptpunkte ergeben ſich in den in Tabelle III befindlichen Entfernungen von der letzten Fläche, und aus ihren Abſtänden von den zugehörigen Vereinigungspunkten finden ſich die Brennweiten in Tabelle IV.

Die Bildebene wurde in der Entfernung $8_{/1}$ von der letzten Fläche gewählt, weil dieſe von den Strahlen $^2/_3$ R und R für den Winkel $\mu = 0^0$ in gleichen Abſtänden von der Axe getroffen wird. Die Entfernungen der Punkte von der optiſchen Axe, in welcher die einzelnen Strahlen die Bildebene ſchneiden (zu vergleichen mit den Radien des Zerſtreuungsbildes bei der ſphäriſchen Linſe) ſind in der Tabelle V enthalten.

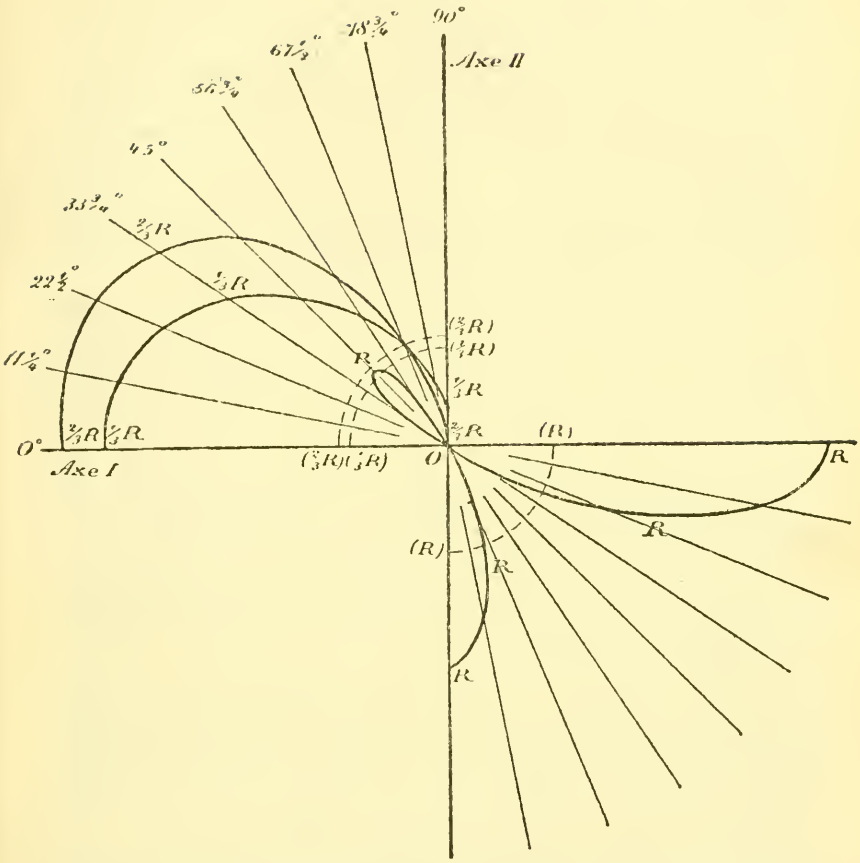
Man ſieht daraus, daſs für die zuſammengehörigen Strahlen mit verſchiedenem Winkelabſtande μ dieſe Gröſsen, welche ich auch hier kurz Bildradien nennen will, ſehr verſchiedene Werthe erhalten, daſs alſo die Zerſtreuungsfiguren eine ganz eigenthümliche Geſtalt beſitzen. Dieſelben ſind in Fig. 4 dargeſtellt.

In derſelben ſchneiden ſich die Ebenen der Cylinderaxen I und II unter rechtem Winkel in dem Punkte O. Dieſer Winkel iſt in acht gleiche Theile getheilt und auf jedem Richtungsſtrahl die dem jedesmaligen Winkelabſtande μ zugehörige Gröſse des Bildradius in einem willkürlichen Maſsſtabe von O aus abgetragen. Auf dieſe Weiſe erhält man die Durchſchnitte der verſchiedenen Strahlen mit der Bildebene. Es iſt klar, daſs diejenigen Strahlen, welche die optiſche Axe zwiſchen Linſe und Bildebene ſchneiden und in Folge deſſen in Tabelle V mit negativem Bildradius aufgeführt ſind, die Bildebene im dritten Quadranten ſchneiden müſſen.

Indem man nun diejenigen Durchſchnittspunkte mit einander verbindet, welche Strahlen angehören, die in gleichem Abſtande von der optiſchen Axe auf die Linſe fielen, erhält man eine Curve, welche darſtellt den Durchſchnitt der Bildebene

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Fig. 4.



mit demjenigen Theile eines Strahlenmantels, welcher die erſte Fläche der Linſe in einem Viertelkreiſe traf. — Alle Strahlen R, welche auf den erſten Quadranten der vorderſten Linſenfläche fielen in dem Abſtande 2 von der optiſchen Axe, ſchneiden die Bildebene in der Curve R; dieſelbe liegt theils im dritten Quadranten, theils im erſten, da die Werthe des Bildradius für einige Randſtrahlen negativ, für andere poſitiv ſind. In den anderen Quadranten ſind die Durchſchnittsfiguren ſymmetriſch mit der gezeichneten Curve zu den Axen I und II; ſie wurden in der Zeichnung fortgelaſſen, um dieſelbe nicht zu

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

verwirren. — Ebenſo ſind die Curven $^2/_3$ R und $^1/_3$ R die Durchſchnittsfiguren der Strahlen $^2/_3$ R und $^1/_3$ R.

Bei der aequivalenten biconvexen ſphäriſchen Linſe ſind die Durchſchnittsfiguren des geſammten gebrochenen Strahlencomplexes (wie er durch die Daten auf Seite 5 und 6 beſtimmt iſt) mit der Bildebene Kreiſe und es ſind in Fig. 4 durch die punktirten Viertelskreiſe (R), ($^2/_3$ R), ($^1/_3$ R) die den unterſuchten Oeffnungen zugehörigen Zerſtreuungskreiſe angedeutet in demſelben Maſsſtabe wie die Curven für die bicylindriſche Linſe.

Die Strahlen, welche auf die beiden unterſuchten Linſen (die ſphäriſche und die bicylindriſche) fielen, ſind als untereinander mit der optiſchen Axe parallel angenommen worden. Ihre Vereinigung nach der Brechung iſt demgemäſs das Bild eines in unendlicher Entfernung in der Richtung der optiſchen Axe befindlichen leuchtenden Punktes. Fig. 4 zeigt alſo für die bicylindriſche und die ſphäriſche Linſe die relative Gröſse dieſes Bildes (welche bei einer ideal vollkommenen Linſe = 0 iſt) und die Anordnung der einzelnen Strahlen in demſelben. — In beider Beziehung fällt die Vergleichung weitaus zu Gunſten der ſphäriſchen Linſe aus.

Der den bicylindriſchen Linſen nachgerühmte Vorzug vor den ſphäriſchen, die gröſsere Schärfe gegen den Rand des Bildes hin, bezieht ſich allerdings auf Strahlen, welche nicht parallel der optiſchen Axe auf die Linſe fallen, ſondern in beträchtlichem Winkel gegen dieſelbe geneigt, und ein beſtimmtes Urtheil muſs ſo lange zurückgehalten werden, bis die Arbeit über den Weg ſolcher Strahlen durch die bicylindriſche Linſe beendet ſein wird. Einen kleinen Anhalt bieten jedoch auch zur Beurtheilung dieſer Frage ſchon die vorliegenden Reſultate, indem die Abweichungen in der Gröſse der Brennweite und in der Lage der Hauptpunkte von einander für die Strahlen A, $^1/_3$ R, $^2/_3$ R und R ein Maſs abgeben für die Gröſse der Verzerrung gegen den Rand des Bildes hin. Auch in dieſer Richtung verſpricht die ſphäriſche Linſe viel beſſere Reſultate als die aequivalente bicylindriſche Linſe mit rechtwinklig gekreuzten Cylinderaxen.

Hamburg, im Februar 1879.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Hamburg

Jahr/Year: 1879

Band/Volume: NF_3

Autor(en)/Author(s): Krüss Hugo

Artikel/Article: Die Fehler der durch bicylindrische Linsen erzeugten Bilder 104-114