Über konforme Abbildung im Raum.

Von

Karl VonderMühll.

Seit Mitte des vorigen Jahrhunderts ist bekannt, dass durch das Prinzip der reziproken Radien nicht nur eine Ebene auf einer andern Ebene, sondern auch ein Raum in einem andern Raum konform, d. h. in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird.

Für den Raum hat meines Wissens Liouville den Satz zuerst ausgesprochen.*) Während aber unendlich viele konforme Abbildungen einer Fläche auf einer andern Fläche existieren, ist die Abbildung durch reziproke Radien die einzige, wo die kleinsten Raumteile in Figur und Bild einander ähnlich sind. Auch dieser Satz ist längst bekannt; doch habe ich eine direkte, rein analytische Ableitung nirgends gefunden; ich erlaube mir daher sie im Folgenden zu geben.

Es bezeichne (ξ, η, ζ) einen Punkt der Figur, (x, y, z) sein Bild in geradlinigen rechtwinkligen Koordinaten; $d\sigma$ und ds seien zwei einander entsprechende unendlich kleine Längen:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 \ ,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ ;$$

der sogenannte Kartenmodul werde mit p bezeichnet.

*) Journal de Math. XII. 1847.

Dann gilt für konforme Abbildung die Gleichung:

$$(1) \qquad d\sigma = p\,ds \ ,$$

wo p eine Funktion von (ξ, η, ζ) oder (x, y, z) sein soll.

Wir suchen p als Funktion von (x, y, z) zu bestimmen.

Indem wir x, y, z als Funktionen von (ξ, η, ζ), ξ, η, ζ als Funktionen von (x, y, z) betrachten, folgen aus den Gleichungen

$$dx = \frac{dx}{d\xi} d\xi + \frac{dx}{d\eta} d\eta + \frac{dx}{d\zeta} d\zeta \ , \text{ u. s. w.}$$

$$d\xi = \frac{d\xi}{dx} dx + \frac{d\xi}{dy} dy + \frac{d\xi}{dz} dz \ , \text{ u. s. w.}$$

die Beziehungen zwischen den partiellen Differentialquotienten:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{dx}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} + \frac{dx}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx} = 1 \ , \\ &\frac{dx}{d\xi}\frac{d\xi}{dy} + \frac{dx}{d\eta}\frac{d\eta}{dy} + \frac{dx}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dy} = 0 \ , \end{aligned} \right.$$

u. s. w.

Die Bedingung der konformen Abbildung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = p^2 (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)$$

aber liefert die Gleichungen:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = p^2 \ , \text{ u. s. w.} \\ &\frac{dx}{d\eta}\frac{dx}{d\zeta} + \frac{dy}{d\eta}\frac{dy}{d\zeta} + \frac{dz}{d\eta}\frac{dz}{d\zeta} = 0 \ , \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right.$$

und die entsprechenden:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = \frac{1}{p^2} \ , \text{ u. s. w.} \\ &\frac{d\xi}{dy}\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\eta}{dy}\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\zeta}{dz} = 0 \ , \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right.$$

Die Funktionaldeterminanten

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dx}{d\zeta} & \frac{dy}{d\zeta} & \frac{dz}{d\zeta} \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\zeta}{dx} \\ \frac{d\xi}{dy} & \frac{d\eta}{dy} & \frac{d\zeta}{dy} \\ \frac{d\xi}{dz} & \frac{d\eta}{dz} & \frac{d\zeta}{dz} \end{vmatrix}$$

können nicht verschwinden, und es ist

$$D\Delta = 1 \ .$$

Durch Auflösen der Gleichungen (2), (3) und (4) ergeben sich die Relationen:

$$(5) \qquad \frac{dx}{d\xi} = p^2 \frac{d\xi}{dx} \ , \quad \frac{dx}{d\eta} = p^2 \frac{d\eta}{dx} \ , \quad \frac{dx}{d\zeta} = p^2 \frac{d\zeta}{dx}$$

u. s. w.

oder

$$(6) \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p^2} \frac{dx}{d\xi} \ , \quad \frac{d\xi}{dy} = \frac{1}{p^2} \frac{dy}{d\xi} \ , \quad \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{p^2} \frac{dz}{d\xi}$$

u. s. w.

so dass

$$D = p^6 \Delta \ ,$$

also, weil $D\Delta = 1$,

$$D^2 = p^6 \ , \qquad \Delta^2 = \frac{1}{p^6} \ .$$

Die Gleichungen (3) können auch ersetzt werden durch

$$(3,a) \begin{cases} \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = p^2 \text{ , u. s. w.} \\ \frac{dy}{d\xi}\frac{dz}{d\xi} + \frac{dy}{d\eta}\frac{dz}{d\eta} + \frac{dy}{d\zeta}\frac{dz}{d\zeta} = 0 \text{ , u. s. w.} \end{cases}$$

entsprechend die Gleichungen (4) durch

$$(4,a) \begin{cases} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = \frac{1}{p^2} \text{ , u. s. w.} \\ \frac{d\eta}{dx}\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\frac{d\zeta}{dz} = 0 \text{ , u. s. w.} \end{cases}$$

Ist nun F eine beliebige Funktion von (x, y, z) oder (ξ, η, ζ), so folgt aus

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{dF}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} + \frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx}$$

durch Einsetzen der Werte $\frac{d\xi}{dx}$, u. s. w. nach den Gleichungen (6) in $\left(\frac{dx}{d\xi}\right)$, u. s. w.

$$\frac{dF}{d\xi}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dF}{d\eta}\frac{dx}{d\eta} + \frac{dF}{d\zeta}\frac{dx}{d\zeta} = p^2\frac{dF}{dx} \text{ ,}$$

und dieselbe Gleichung gilt, wenn wir y oder z statt x schreiben.

Wir setzen zunächst $F = \frac{dx}{d\xi}$ und erhalten:

$$\frac{dx}{d\xi}\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{dx}{d\eta}\frac{d^2x}{d\xi\, d\eta} + \frac{dx}{d\zeta}\frac{d^2x}{d\xi\, d\zeta} = p^2 \frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dx} \text{ ;}$$

nach der ersten Gleichung (3,a) ist aber die linke Seite gleich

$$p\,\frac{dp}{d\xi} \text{ ,}$$

folglich

$$\frac{d\,\dfrac{dx}{d\xi}}{dx} = \frac{1}{p}\,\frac{dp}{d\xi}\,.$$

Nehmen wir dagegen y statt x und setzen $F = \dfrac{dy}{d\xi}$, so folgt

$$\frac{dy}{d\xi}\,\frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\eta}\,\frac{d^2y}{d\xi d\eta} + \frac{dy}{d\zeta}\,\frac{d^2y}{d\xi d\zeta} = p^2\,\frac{d\,\dfrac{dy}{d\xi}}{dy}\,,$$

und auch dieser Wert ist nach (3,a) gleich $p\,\dfrac{dp}{d\xi}$.

Ebenso mit z statt x.

Wir haben somit

$$\frac{d\,\dfrac{dx}{d\xi}}{dx} = \frac{d\,\dfrac{dy}{d\xi}}{dy} = \frac{d\,\dfrac{dz}{d\xi}}{dz}\,. \tag{7}$$

Weiter folgt aus der Gleichung unter (3,a):

$$\frac{dy}{d\xi}\,\frac{dz}{d\xi} + \frac{dy}{d\eta}\,\frac{dz}{d\eta} + \frac{dy}{d\zeta}\,\frac{dz}{d\zeta} = 0$$

durch Differentiation nach ξ:

$$0 = \frac{d^2y}{d\xi^2}\,\frac{dz}{d\xi} + \frac{d^2y}{d\xi d\eta}\,\frac{dz}{d\eta} + \frac{d^2y}{d\xi d\zeta}\,\frac{dz}{d\zeta} +$$

$$+ \frac{dy}{d\xi}\,\frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{dy}{d\eta}\,\frac{d^2z}{d\xi d\eta} + \frac{dy}{d\zeta}\,\frac{d^2z}{d\xi d\zeta}$$

$$= p^2\left(\frac{d\,\dfrac{dy}{d\xi}}{dz} + \frac{d\,\dfrac{dz}{d\xi}}{dy}\right).$$

Folglich gelten die drei weiteren Gleichungen:

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dz} + \frac{d\frac{dz}{d\xi}}{dy} = 0\,, \\
&\frac{d\frac{dz}{d\xi}}{dx} + \frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dz} = 0\,, \\
&\frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dy} + \frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dx} = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

In den Gleichungen (7) und (8) kann statt ξ auch η oder ζ gesetzt werden.

Aus den Gleichungen (8) folgt durch Differentiation nach x, y und z:

$$
\frac{d^2\frac{dy}{d\xi}}{dzdx} + \frac{d^2\frac{dz}{d\xi}}{dxdy} = 0, \text{ u. s. w.}
$$

also

$$
(9) \qquad \frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dy\,dz} = 0\,, \quad \frac{d^2\frac{dy}{d\xi}}{dz\,dx} = 0\,, \quad \frac{d^2\frac{dz}{d\xi}}{dxdy} = 0\,.
$$

Aus den Gleichungen (7) aber finden wir in Verbindung mit den Gleichungen (8):

$$
\frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dx^2} = \frac{d^2\frac{dy}{d\xi}}{dxdy} = -\frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dy^2} = \frac{d^2\frac{dz}{d\xi}}{dxdz} = -\frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dz^2}\,,
$$

und dieser Wert ist konstant. Denn seine Differentialquotienten nach y und z verschwinden, weil nach (9)

$$
\frac{d^3\frac{dx}{d\xi}}{dx\,dy\,dz} = 0\,, \quad \frac{d^3\frac{dy}{d\xi}}{dx\,dy\,dz} = 0\,,
$$

und desgleichen der Differentialquotient nach x.

Wir haben nämlich:

$$\frac{d^3 \frac{dx}{d\xi}}{dx^3} = \frac{d^3 \frac{dy}{d\xi}}{dx^2\,dy} = \frac{d^3 \frac{dz}{d\xi}}{dx^2 dz} = \frac{d^3 \frac{dy}{d\xi}}{dz^2\,dy} = \frac{d^3 \frac{dz}{d\xi}}{dy^2\,dz},$$

und der letzte Ausdruck ist nach (8) gleich

$$-\frac{d^3 \frac{dy}{d\xi}}{dy\,dz^2};$$

folglich muss $\frac{d^3 \frac{dx}{d\xi}}{dx^3}$ gleich null sein.

Wir setzen:

$$(10)\quad \frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dx^2} = -\frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dy^2} = \frac{d^2 \frac{dy}{d\xi}}{dx\,dy} = -\frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dz^2} = \frac{d^2 \frac{dz}{d\xi}}{dx\,dz} = a,$$

nennen die Werte b und c, wenn statt x y und z gesetzt wird, dagegen a', b', c', und a'', b''. c'', wenn wir statt ξ η und ζ schreiben.

Nun haben wir einmal:

$$(11)\quad \frac{d \frac{dx}{d\xi}}{dx} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\xi} = \frac{1}{p}\left(\frac{dx}{d\xi}\frac{dp}{dx} + \frac{dy}{d\xi}\frac{dp}{dy} + \frac{dz}{d\xi}\frac{dp}{dz}\right)$$

u. s. w.

sodann

$$\frac{d \frac{dy}{d\xi}}{dz} + \frac{d \frac{dz}{d\xi}}{dy} = 0$$

und, nach (6),

$$\frac{d \frac{1}{p^2}\frac{dy}{d\xi}}{dz} = \frac{d \frac{1}{p^2}\frac{dz}{d\xi}}{dy}$$

oder

$$\frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dz} - \frac{d\frac{dz}{d\xi}}{dy} = \frac{2}{p}\left(\frac{dy}{d\xi}\frac{dp}{dz} - \frac{dz}{d\xi}\frac{dp}{dy}\right),$$

folglich

$$(12) \quad \frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dz} = \frac{1}{p} \quad \frac{dy}{d\xi}\frac{dp}{dz} - \frac{dz}{d\xi}\frac{dp}{dy} \quad , \quad \text{u. s. w.}$$

Wir bezeichnen mit Σ die Summe der drei Ausdrücke, die durch cyklische Vertauschung der Variabeln ξ, η, ζ folgen. Dann geben die Gleichungen (11) und (12):

$$\Sigma \;\frac{dx}{d\xi}\frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dx} = p\,\frac{dp}{dx}\;,$$

$$\Sigma\;\frac{dx}{d\xi}\frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dy} = -\Sigma\;\frac{dx}{d\xi}\frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dx} = p\,\frac{dp}{dy} = \Sigma\;\frac{dy}{d\xi}\frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dx}\;,$$

$$\Sigma\;\frac{dx}{d\xi}\frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dz} = 0\;.$$

Dividieren wir die zweite dieser Gleichungen mit p^2 und differenzieren wir dann nach y, so folgt:

$$\Sigma\;\frac{1}{p^2}\frac{dx}{d\xi}\frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dy^2} + \Sigma\;\frac{d^2\xi}{dxdy}\frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dy} = \frac{1}{p}\frac{d^2p}{dy^2} - \frac{1}{p^2}\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

und ähnlich:

$$\Sigma\;\frac{1}{p^2}\frac{dy}{d\xi}\frac{d^2\frac{dy}{d\xi}}{dx^2} + \Sigma\;\frac{d^2\xi}{dxdy}\frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dx} = \frac{1}{p}\frac{d^2p}{dx^2} - \frac{1}{p^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2,$$

mithin:

$$\Sigma \frac{dx}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dy^2} + \Sigma \frac{dy}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dy}{d\xi}}{dx^2} = p\left(\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dy^2}\right) - \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

Wir finden aber auch:

$$\Sigma \frac{dx}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dy^2} + \Sigma \left(\frac{d \frac{dx}{d\xi}}{dy}\right)^2 = p \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

$$\Sigma \frac{dy}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dy}{d\xi}}{dx^2} + \Sigma \left(\frac{d \frac{dy}{d\xi}}{dx}\right)^2 = p \frac{d^2p}{dx^2} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^2,$$

folglich

$$\Sigma \frac{dx}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dy^2} + \Sigma \frac{dy}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dy}{d\xi}}{dx^2} + \Sigma \left(\frac{d \frac{dx}{d\xi}}{dy}\right)^2 + \Sigma \left(\frac{d \frac{dy}{d\xi}}{dx}\right)^2 =$$

$$= p\left(\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dy^2}\right) + \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right) .$$

Mit Berücksichtigung von (8) folgt hieraus:

$$\Sigma \left(\frac{d \frac{dx}{d\xi}}{dy}\right)^2 = \Sigma \left(\frac{d \frac{dy}{d\xi}}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

und dann

$$\Sigma \frac{dx}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dy^2} = p \frac{d^2p}{dy^2} - \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = \Sigma \frac{dx}{d\xi} \frac{d^2 \frac{dx}{d\xi}}{dz^2} = p \frac{d^2p}{dz^2} - \left(\frac{dp}{dx}\right)^2,$$

nach den Gleichungen (10).

Foglich muss sein

$$\text{(13)} \qquad \frac{d^2p}{dy^2} = \frac{d^2p}{dz^2} = \frac{d^2p}{dx^2} .$$

Weiter folgt aus

$$\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dx} = \Sigma\,\frac{d\xi}{dz}\,\frac{d\,\frac{dz}{d\xi}}{dx}$$

durch Differentiation nach y:

$$p\,\frac{d^2p}{dx\,dy} - \frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dy} = p^2\,\Sigma\,\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\,\frac{d\,\frac{dz}{d\xi}}{dx} + \Sigma\,\frac{dz}{d\xi}\,\frac{d^2\,\frac{dz}{d\xi}}{dx\,dy},$$

und die letzte Summe verschwindet nach (9).

Aus

$$0 = \Sigma\,\frac{d\xi}{dy}\,\frac{d\,\frac{dx}{d\xi}}{dz}$$

aber finden wir durch Differentiation nach z:

$$\Sigma\,\frac{d^2\xi}{dydz}\,\frac{d\,\frac{dx}{d\xi}}{dz} + \frac{1}{p^2}\,\Sigma\,\frac{dy}{d\xi}\,\frac{d^2\,\frac{dx}{d\xi}}{dz^2} = 0.$$

Somit ist:

$$p\,\frac{d^2p}{dxdy} - \frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dy} = \Sigma\,\frac{dy}{d\xi}\,\frac{d^2\,\frac{dx}{d\xi}}{dz^2}\,.$$

Ferner gibt die Gleichung

$$p\,\frac{dp}{dy} = \Sigma\,\frac{dy}{d\xi}\,\frac{d\,\frac{dy}{d\xi}}{dy}$$

durch Differentiation nach x:

$$p\,\frac{d^2p}{dxdy} + \frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dy} = \Sigma\,\frac{dy}{d\xi}\,\frac{d^2\,\frac{dy}{d\xi}}{dxdy} + \Sigma\,\frac{d\,\frac{dy}{d\xi}}{dx}\,\frac{d\,\frac{dy}{d\xi}}{dy}\,;$$

folglich wird

$$2\,p\frac{d^2p}{dxdy} = \sum \frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dx}\,\frac{d\frac{dy}{d\xi}}{dy} = -\sum \frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dy}\,\frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dx}$$

$$= \sum \frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dy}\,\frac{d\frac{dx}{d\xi}}{dx} = 0\,,$$

da wir in dem ersten Wert x und y vertauschen können.

Wir finden also, dass die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2p}{dy\,dz}$, u. s. w. null sein müssen; dann ist $\frac{dp}{dx}$ nur Funktion von x, und wegen der Gleichungen (13) $\frac{d^2p}{dx^2}$ konstant.

Wir setzen:

$$(14) \qquad \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{d^2p}{dy^2} = \frac{d^2p}{dz^2} = \frac{2}{R^2}\,,$$

wo R eine Länge bedeutet.

Dann folgt durch Integration

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\,(x+\alpha)}{R^2}\;, \text{ u. s. w.}$$

und indem wir den Anfangspunkt der x, y, z verlegen, werden α, β, γ null. Durch nochmalige Integration ergibt sich:

$$(15) \qquad p = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} + C\;.$$

Die Konstante C bleibt vorläufig unbestimmt.

Wir setzen diesen Wert ein in die Gleichungen:

$$\Sigma' \frac{dx}{d\xi}\,\frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dx^2} = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 - p\,\frac{d^2p}{dx^2},$$

$$\Sigma' \frac{dx}{d\xi}\,\frac{d^2\frac{dy}{d\xi}}{dz^2} = -\frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dy},$$

$$\Sigma' \frac{dx}{d\xi}\,\frac{d^2\frac{dz}{d\xi}}{dy^2} = -\frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dz}$$

wo die beiden letztern folgen aus

$$\Sigma' \frac{dy}{d\xi}\,\frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dz^2} = -\frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dy}$$

und die erstere aus

$$\Sigma' \frac{dx}{d\xi}\,\frac{d^2\frac{dx}{d\xi}}{dy^2} = p\,\frac{d^2p}{dy^2} - \left(\frac{dp}{dx}\right)^2,$$

und führen die Konstanten a, b, c u. s. w. ein, nach den Gleichungen (10).

Wir erhalten dann:

$$\Sigma' a\,\frac{dx}{d\xi} = \frac{2\,(x^2 - y^2 - z^2)}{R^4} - \frac{2\,C}{R^2},$$

$$\Sigma' b\,\frac{dx}{d\xi} = \frac{4\,xy}{R^4},$$

$$\Sigma' c\,\frac{dx}{d\xi} = \frac{4\,xz}{R^4}.$$

Indem wir diese Gleichungen zweimal nach x differenzieren, folgt:

$$(16)\quad \Sigma' a^2 = \frac{4}{R^4}, \quad \Sigma' ba = 0, \quad \Sigma' ca = 0, \text{ u. s. w.}$$

Dann ist auch:

$$(16a) \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{R^4}, \text{ u. s. w.} \\ a' a'' + b' b'' + c' c'' = 0, \text{ u. s. w.} \end{array} \right.$$

Durch Auflösen der obigen Gleichungen aber finden wir:

$$\frac{dx}{d\xi} = (ax + by + cz)\, x - \tfrac{1}{2}\, a\, (r^2 + C R^2),$$

$$\frac{dx}{d\eta} = (a' x + b' y + c' z)\, x - \tfrac{1}{2}\, a' (r^2 + C R^2),$$

$$\frac{dx}{d\zeta} = (a'' x + b'' y + c'' z)\, x - \tfrac{1}{2}\, a'' (r^2 + C R^2),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(17) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Nun ist nach (3.a):

$$p^2 = \Sigma \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 ;$$

folglich

$$\left(\frac{r^2}{R^2} + C\right)^2 = x^2\, \Sigma (ax + by + cz)^2 + \tfrac{1}{4} (r^2 + CR^2)^2\, \Sigma a^2 -$$
$$- x\, (r^2 + C R^2)\, \Sigma a\, (ax + by + cz)$$
$$= \frac{4 r^2 x^2 + (r^2 + C R^2)^2 - 4 (r^2 + C R^2)\, x^2}{R^4} .$$

also $\qquad C = 0 .$

Wir erhalten somit:

$$(18) \qquad p = \frac{r^2}{R^2}$$

$$(19) \qquad \frac{dx}{d\xi} = (ax + by + cz)\, x - \tfrac{1}{2}\, a\, r^2 ,$$

u. s. w.

Aus (6)

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p^2}\frac{dx}{d\xi} = R^4 \frac{(ax + by + cz)\,x - {}^1/_2\,ar^2}{r^4}$$

$$= -\frac{R^4}{2}\frac{d\,\dfrac{ax + by + cz}{r^2}}{dx}$$

folgt dann weiter:

$$\xi + A = -\frac{R^4}{2}\frac{ax + by + cz}{r^2},$$

oder, wenn wir den Anfangspunkt der (ξ, η, ζ) mit dem der (x, y, z) zusammenlegen:

$$(20) \quad \xi = -\frac{R^4}{2}\frac{ax + by + cz}{r^2}, \text{ u. s. w.}$$

Setzen wir also

$$(21) \qquad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 .$$

so wird nach (20)

$$\varrho^2 = \frac{R^4}{r^2}$$

oder

$$(22) \qquad r^2 \varrho^2 = R^4 ,$$

und

$$ax + by + cz = -\frac{2\xi}{\varrho^2}, \text{ u. s. w.}$$

Drehen wir endlich das Koordinatensystem (x, y, z) so um den Anfangspunkt, dass seine Axen mit denen der (ξ, η, ζ) zusammenfallen, so wird:

$$x = - \, {}^1/_2 \, R^2 \, (ax + by + cz) \ ,$$
$$y = - \, {}^1/_2 \, R^2 \, (a'x + b'y + c'z \ ,$$
$$z = - \, {}^1/_2 \, R^2 \, (a''x + b''x + c''z) \ ,$$

und wir gelangen zu den bekannten Formeln der Transformation mittelst reziproker Radien:

$$r^2 \varrho^2 = R^4 \ ,$$
$$x = \frac{R^2 \xi}{\varrho^2} \ , \ \text{u. s. w.}$$
$$\xi = \frac{R^2 x}{r^2} \ , \ \text{u. s. w.}$$

als der einzigen konformen Abbildung eines Raumes in einem andern Raum.