Zur Gammafunktion.

Von

H. Kinkelin.

Den Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet die Ableitung der Eigenschaften der Gammafunktion aus dem für alle reellen und komplexen Werte ihres Argumentes geltenden Gauss'schen Ausdruck dieser Funktion auf direktem Wege und ohne Zuziehung anderer Hilfsmittel.

Angeschlossen sind von der herkömmlichen Weise abweichende Bestimmungen zweier bekannten Integrale.

I. Die Grundgleichungen.

Als Definition der Gammafunktion gilt der Ausdruck

$$\Gamma x = \lim_{k=\infty} \frac{k^{x-1} k!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)} \qquad (1)$$

Wird k ein für allemal als unendlich wachsende Zahl gedacht, so kann für die Folge die Bezeichnung lim. in der Regel weggelassen werden.

Die erste Grundgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma x \qquad (2)$$

ergibt sich sofort, wenn man beachtet, dass $k:(x+k)$ die Einheit zur Grenze hat.

Die zweite Grundgleichung

$$\Gamma x \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \pi x} \qquad (3)$$

beweist sich durch Auflösung von $\operatorname{Sin} \pi x$ in Faktoren. Man bestimme zunächst die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{Sin} z = o,$$

die mit

$$e^{zi} - e^{-zi} = o$$

gleichbedeutend ist. Es sei $z = a + bi$, wobei a und b als reell gedacht sind, so geht dieselbe über in

$$e^{-b}(\operatorname{Cos} a + i \operatorname{Sin} a) - e^{b}(\operatorname{Cos} a - i \operatorname{Sin} a) = o$$

und teilt sich in die zwei Gleichungen

$$\operatorname{Cos} a \left(e^{-b} - e^{b}\right) = o,$$

$$\operatorname{Sin} a \left(e^{-b} + e^{b}\right) = o.$$

Da der zweite Faktor in der zweiten Gleichung für reelle b nicht null sein kann, so muss

$$\operatorname{Sin} a = o.$$

woraus die Werte $a = o, \pm \pi, \pm 2\pi, \cdots \pm k\pi$ folgen. Für diese wird aber in der ersten Gleichung der erste Faktor Cos a nicht null, daher muss

$$e^{-b} - e^{b} = o,$$

was nur für $b = o$ stattfindet. Die Gleichung $\operatorname{Sin} z = o$ liefert somit nur die Wurzeln $z = o, \pm \pi, \pm 2\pi, \cdots \pm k\pi$, und die Gleichung

$$\operatorname{Sin} \pi x = o$$

die Wurzeln $x = o, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm k$, so dass $\operatorname{Sin} \pi x$ ausser den Faktoren $x, x \mp 1, x \mp 2. \cdots x \mp k$ keine andern von x abhängigen Faktoren besitzt. Demnach ist, unter A eine Konstante verstanden,

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} \pi x = A \cdot x\,(x+1)\,(x+2) \cdots (x+k) \\ (1-x)\,(2-x) \cdots (k-x) \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \begin{aligned} \frac{\operatorname{Sin} \pi x}{x} = A\,(x+1)\,(x+2) \cdots (x+k) \\ (1-x)\,(2-x) \cdots (k-x)\,. \end{aligned}$$

Lässt man x gegen null konvergieren, so kommt

$$\pi = A \cdot k!\,k!\,,$$

so dass nun

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Sin} \pi x}{\pi} = x\,(x+1)\,(x+2) \cdots (x+k) \\ (1-x)\,(2-x) \cdots (k-x) : k!\,k! \end{aligned}$$

Andrerseits gibt die Definition von Γx:

$$\Gamma x \cdot \Gamma(1-x) = \frac{k^{-1}\,k!\,k!}{\begin{aligned} x\,(x+1)\,(x+2) \cdots (x+k-1) \\ (1-x)\,(2-x) \cdots (k-x) \end{aligned}}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $x+k$ multipliziert und im Zähler für $(x+k):k$ die Einheit setzt:

$$\Gamma x \cdot \Gamma(1-x) = \frac{k!\,k!}{\begin{aligned} x\,(x+1)\,(x+2) \cdots (x+k) \\ (1-x)\,(2-x) \cdots (k-x) \end{aligned}}\,,$$

woraus sofort die Richtigkeit der zweiten Grundgleichung erhellt. Dass diese auch für komplexe Werte von x Geltung hat, geht aus ihrer Herleitung ohne weiteres hervor.

II. Das Multiplikationstheorem.

Setzt man in der Definitionsgleichung

$$\Gamma x = \frac{k^{x-1}\,k!}{x\,(x+1)\,(x+2) \cdots (x+k-1)}$$

der Reihe nach für x die Werte

$$x = \frac{nx}{n},\quad x + \frac{1}{n} = \frac{nx+1}{n}, \cdots x + \frac{n-1}{n} = \frac{nx+n-1}{n}$$

und multipliziert die Ergebnisse mit einander, so kommt

$$\Gamma x \cdot \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{k^{nx - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} (k!)^n \, n^{nk}}{nx\,(nx+1) \cdots (nx+nk-1)}$$

Andrerseits ist, wenn nk für k gesetzt wird, was gestattet ist,

$$\Gamma(nx) = \frac{k^{nx-1} \, n^{nx-1} \, (nk)!}{nx\,(nx+1) \cdots (nx+nk-1)}.$$

Aus der Vergleichung beider Ausdrücke folgt

$$\frac{\Gamma x \cdot \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx) \cdot n^{-nx}} = \frac{k^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} \, n^{nk+1} \, (k!)^n}{(nk)!}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung k nicht enthält, so muss auch die rechte Seite eine von k unabhängige Funktion von n sein, die mit $\varphi(n)$ bezeichnet werde, so dass

$$\varphi(n) = \frac{k^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} \, n^{nk+1} \, (k!)^n}{(nk)!};$$

dann ist

$$\Gamma x \, \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \Gamma(nx)\, n^{-nx} \varphi(n),$$

und es bleibt die Aufgabe, den Wert von $\varphi(n)$ zu bestimmen.

Setzt man hier $-x$ für x, so kommt, unter Anwendung der aus der ersten Grundgleichung folgenden Beziehung

$$-z \cdot \Gamma(-z) = \Gamma(1-z),$$

auf $\Gamma(-x)$ und $\Gamma(-nx)$ und nach Umkehrung der Faktorenfolge vom zweiten Faktor an:

$$\Gamma(1-x)\,\Gamma(1-x-\frac{1}{n})\cdots\Gamma(1-x-\frac{n-1}{n}) = \Gamma(1-nx)\,n^{nx-1}\,\varphi(n)\,.$$

Unter Anwendung der Beziehung

$$\Gamma z\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\pi z}$$

ergibt die Multiplikation der letzten Gleichung mit der vorhergehenden:

$$\operatorname{Sin}\pi x\cdot\operatorname{Sin}\pi(x+\frac{1}{n})\cdots\operatorname{Sin}\pi(x+\frac{n-1}{n}) = \operatorname{Sin}n\pi x\cdot\pi^{n-1}\,n\varphi(n)^{-2}$$

woraus für ein gegen null konvergierendes x:

$$\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{Sin}\frac{(n-1)\pi}{n} = \pi^{n-1}\,n^{2}\,\varphi(n)^{-2}\,.$$

Der Wert dieses Produktes wird aber bekanntlich gefunden, indem man $x^{2n}-1$ in seine reellen Faktoren von der Form $x^2-2x\operatorname{Cos}\frac{r\pi}{n}+1$ zerlegt, sodann $x=1$ und $=-1$ setzt, die beiden Ergebnisse mit einander multipliziert und aus dem Produkt die Quadratwurzel zieht, welche positiv sein muss. Man erhält

$$\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{Sin}\frac{(n-1)\pi}{n} = n\cdot 2^{1-n},$$

so dass nun aus der Vergleichung der beiden Werte des Produktes folgt:

$$\varphi(n) = n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}},$$

wodurch endlich als Multiplikationstheorem sich herausstellt:

$$\Gamma x\cdot\Gamma(x+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(x+\frac{n-1}{n}) = \Gamma(nx)\,n^{\frac{1}{2}-nx}(2\pi)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

Bemerkung. Die Einführung des gefundenen Wertes von φ (n) in die Definitionsgleichung dieser Funktion gibt noch zu einer weitern Bestimmung Anlass. Es wird nämlich

$$(nk)! = k^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} n^{nk + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} (k!)^n$$

für ein unendlich wachsendes k. Diese Eigenschaft der Funktion k! kann zur Aufstellung eines Grenzausdruckes für sie selbst benützt werden.

Es sei allgemein f(m) eine Funktion, die der Eigenschaft

$$f(nm) = m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} n^{nm + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} f(m)^n$$

genügt, so wird f(m) bei unendlich wachsendem m = k mit k! übereinstimmen. Aus dieser Gleichung folgt nun für m = 1:

$$f(n) = n^{n + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} f(1)^n ,$$

daher ist auch

$$f(m) = m^{m + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m} f(1)^m$$

Da beim Übergang von m in k die Funktion f(m) in k! übergeht, so hat auch k! diese Form, nämlich

$$k! = k^{k + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k} \cdot A^k ,$$

wo nun noch die Konstante A zu bestimmen übrig bleibt. Man setze k + 1 für k:

$$(k + 1)! = (k + 1)^{k + 1 + \frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}k} A^{k + 1}$$

und dividiere diese Gleichung durch die vorige, so wird

$$A = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k + \frac{1}{2}}} \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}}$$

und beim Übergang zur Grenze $k = \infty$:

$$A = \frac{1}{e} \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}},$$

wodurch endlich

$$k! = k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}, \qquad (5)$$

die bekannte Laplace'sche Grenzbestimmung sich ergibt.

III. Die periodische Reihe.

Innerhalb der Grenzen $x = 0$ und 1, diese selbst im allgemeinen ausgeschlossen, gilt für jede zwischen diesen Grenzen stetige Funktion $f(x)$ die Gleichung

$$f(x) = A_0 + \sum (2\, A_n \operatorname{Cos} 2n\pi x + 2\, B_n \operatorname{Sin} 2n\pi x),$$

wobei die Summe von $n = 1$ bis ∞ zu nehmen ist, und

$$A_0 = \int_0^1 f(x) \cdot dx,$$

$$A_n = \int_0^1 f(x) \operatorname{Cos} 2n\pi x \cdot dx, \qquad B_n = \int_0^1 f(x) \operatorname{Sin} 2n\pi x \cdot dx.$$

Die Funktion $\log \Gamma x$ genügt der Bedingung der Stetigkeit und kann daher in eine Reihe von der angegebenen Form entwickelt werden. Sie ist definiert durch den Ausdruck

$$\log \Gamma x = \log k! - \log k + x \log k - \sum_{r=0}^{k-1} \log (x + r).$$

Bei der Ausführung der Integrale setze man in den Summengliedern am Ende dieses Ausdruckes $x + r$ in y um, wodurch die Integrationsgrenzen 0 und 1 bezw. in r und $r + 1$ verwandelt werden und die Summe der

Integrale in ein einziges Integral zwischen den Grenzen o und k zusammengezogen werden kann. Man erhält so

$$A_0 = \int_0^1 \log \Gamma x \cdot dx = \log k! - \log k + \tfrac{1}{2} \log k - \Big[y \log y - y \Big]_0^k$$

$$= \log k! - \tfrac{1}{2} \log k - k \log k + k$$

Da aber vorhin in Gleichung (5)

$$\log k! = k \log k - k + \tfrac{1}{2} \log k + \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$

gefunden wurde, so wird einfach

$$A_0 = \tfrac{1}{2} \log 2\pi . \qquad \text{(a)}$$

Ferner wird, unter Anwendung partialer Integration leicht erhalten:

$$A_n = \int_0^1 \log \Gamma x \cdot \operatorname{Cos} 2n\pi x \cdot dx = - \int_0^k \log y \cdot \operatorname{Cos} 2n\pi y \cdot dy$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \int_0^k \frac{\operatorname{Sin} 2n\pi y}{y} dy = \frac{1}{2n\pi} \int_0^K \frac{\operatorname{Sin} v}{v} dv ,$$

wo zur Abkürzung $2n\pi k = K$ gesetzt ist.

Um den Wert dieses Integrals zu finden, lasse man in dem geschlossenen Integral

$$\int \frac{1 - e^{-z}}{z} dz = o$$

die komplexe Veränderliche z den Umfang des ersten Quadranten im Kreise vom Radius K um den Koordinatenanfang als Mittelpunkt durchlaufen, wodurch sich für ein unendlich wachsendes K durch Trennung des reellen vom imaginären Teile sofort die Bestimmungen ergeben:

$$\int_0^K \frac{\operatorname{Sin} v}{v} dv = \frac{\pi}{2},$$

und
$$\int_0^K \frac{1 - \operatorname{Cos} v}{v} dv = \int_0^K \frac{1 - e^{-v}}{v} dv,$$

deren erste für A_n den Wert liefert:

$$A_n = \frac{1}{4n} \qquad \text{(b)}$$

Endlich erhält man auf gleiche Weise

$$B_n = \int_0^1 \log \Gamma x \cdot \operatorname{Sin} 2n\pi x \cdot dx$$

$$= -\frac{\log k}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^k \frac{1 - \operatorname{Cos} 2n\pi y}{y} dy$$

$$= -\frac{\log k}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^K \frac{1 - \operatorname{Cos} v}{v} dv$$

oder zufolge der zweiten der obigen Integralbestimmungen

$$B_n = -\frac{\log k}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^K \frac{1 - e^{-v}}{v} dv.$$

Der Wert dieses Integrals berechnet sich wie folgt. Zunächst kann die obere Grenze $K = 2n\pi k$ durch die zunächst grössere ganze Zahl $\varkappa = K + \vartheta$ ersetzt werden, indem der hinzugefügte Teil zwischen den Grenzen

K und $\varkappa$ bei wachsendem k die Null zur Grenze hat. Sodann kann für e^{-v} der Grenzausdruck

$$e^{-v} = \lim. \left(1 - \frac{v}{m}\right)^m$$

gesetzt werden, wobei für m eine beliebige unendlich wachsende Zahl genommen werden darf. Nimmt man der Einfachheit wegen $m = \varkappa$ an, so geht das Integral über in

$$\int_0^{\varkappa} \frac{1-(1-v)^{\varkappa}}{v}\, dv = \int_0^1 \frac{1-u^{\varkappa}}{1-u}\, du$$

und wird nach Auflösung des Bruches gleich

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots \frac{1}{\varkappa},$$

dessen Wert durch Differenziation von $\log \Gamma x$ und die Annahme $x = 1$ gleich

$$\log \varkappa + C$$

erhalten wird, wo $C = -\Gamma' 1 : \Gamma 1$ die Mascheronische Konstante $0{,}577 \cdots$ bedeutet. Es ist aber

$$\log \varkappa = \log (K + \vartheta) = \log K + \log \left(1 + \frac{\vartheta}{K}\right)$$

und geht bei unendlich wachsendem k in $\log 2n\pi k$ über, so dass nun

$$\int_0^K \frac{1-e^{-v}}{v}\, dv = \log K + C = \log 2n\pi k + C$$

wird, wodurch sich für B_n der Wert ergibt:

$$B_n = \frac{1}{2n\pi} \log 2n\pi + \frac{C}{2n\pi}. \qquad (c)$$

Die in den Gleichungen (a), (b), (c) gefundenen Werte von A_0, A_n, B_n geben schliesslich die Bestimmung

$$\log \Gamma x = \tfrac{1}{2} \log 2\pi + \tfrac{1}{2} \sum \frac{\operatorname{Cos} 2n\pi x}{n} + \frac{C + \log 2\pi}{\pi} \sum \frac{\operatorname{Sin} 2n\pi x}{n}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum \frac{\log n}{n} \operatorname{Sin} 2n\pi x \quad (o < x < 1)\,, \qquad (6)$$

die Summen von $n = 1$ bis ∞ genommen.

Aus dieser Gleichung lässt sich das Multiplikationstheorem ebenfalls leicht ableiten, wie schon Kummer bemerkt hat (Crelle J., Bd. 35).

IV. Die Potenzreihen.

Setzt man zur Abkürzung

$$\log \Gamma (1 + x) = v,$$

so folgt aus der Definitionsgleichung

$$\Gamma (1 + x) = \frac{k^x \cdot k!}{(x + 1)(x + 2) \cdots (x + k)}:$$

$$v = x \log k + k! - \log (x + 1) - \log (x + 2) - \cdots \log (x + k)$$

und die Ableitungen

$$v' = \log k - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} - \cdots \frac{1}{x + k}$$

$$v'' = \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(x + 2)^2} + \frac{1}{(x + 3)^2} + \cdots$$

$$v''' = -2! \left(\frac{1}{(x + 1)^3} + \frac{1}{(x + 2)^3} + \frac{1}{(x + 3)^3} + \cdots \right)$$

. . . .

$$v^{(n)} = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x + 1)^n} + \frac{1}{(x + 2)^n} + \frac{1}{(x + 3)^n} + \cdots \right)$$

Man erkennt, dass zwischen den Grenzen o und 1 für $|x|$ weder v noch dessen Ableitungen unstetig sind, so dass v sich zwischen diesen Grenzen nach dem Maclaurinschen Satz in eine nach Potenzen von x fortschreitende konvergente Reihe entwickeln lässt. Für $x = o$ wird

$$v_o = o, \; v'_o = -C, \; v''_o = s_2, \; v'''_o = -2!\, s_3, \cdots$$

$$v_o^{(n)} = (-1)^n (n-1)!\, s_n,$$

worin allgemein

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots,$$

so dass nun

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \tfrac{1}{2} s_2 x^2 - \tfrac{1}{3} s_3 x^3 + \cdots \frac{1}{n}(-1)^n s_n x^n + \cdots \quad (7)$$

Mit dieser Formel, zweckmässig umgeformt, hat Legendre seine Tafel der Logarithmen der Gammafunktion berechnet.

Eine andere zur Berechnung von $\log \Gamma x$ bequeme Formel erhält man durch Verwendung der allgemeinen Gleichung

$$fx + f(x+1) + \cdots f(x+k) = \int_x^{x+k} fz \cdot dz + \tfrac{1}{2}\big(fx + f(x+k)\big)$$

$$- \frac{B_2}{2!}\big(f'x - f'(x+k)\big) + \frac{B_4}{4!}\big(f'''x - f'''(x+k)\big) - \cdots$$

wo die B_2, B_4, $\cdots$ die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Für $fz = \log z$ ergibt sich hieraus bei unendlich wachsendem k:

$$\log x(x+1)(x+2)\cdots(x+k) = (x+k)\log(x+k) - k - x\log x + \tfrac{1}{2}\log x$$

$$+ \tfrac{1}{2}\log(x+k) - \frac{B_2}{1 \cdot 2}\frac{1}{x} + \frac{B_4}{3 \cdot 4}\frac{1}{x^3} - \frac{B_6}{5 \cdot 6}\frac{1}{x^5} + \cdots$$

Demnach geht die Gleichung

$$\log \Gamma x = (x-1)\log k + \log k! - \log x(x+1)\cdots(x+k) + \log(x+k)$$

unter Berücksichtigung der Bestimmungen

$$\log k! = k \log k - k - \tfrac{1}{2} \log k + \tfrac{1}{2} \log 2\pi,$$

$$\lim. \log (x + k) = \log k$$

$$\lim. k \log (x + k) = k \log k + k \log \left(1 + \frac{x}{k}\right) = k \log k + x$$

über in

$$\log \Gamma x = \tfrac{1}{2} \log 2\pi - x + (x - \tfrac{1}{2}) \log x$$
$$+ \frac{B_2}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_4}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \frac{B_6}{5 \cdot 6} \frac{1}{x^5} - \cdots \qquad (8)$$

wo beim Abbrechen der Reihe der Rest jeweilen kleiner ist als das zuletzt berechnete Glied.

Die Gammafunktion selbst und ihr reziproker Wert lassen sich ebenfalls in Potenzreihen auflösen. Denn ebenso wie $\log \Gamma (1 + x) = v$ und seine Ableitungen, so sind auch $\Gamma (1 + x) = u$ und seine Ableitungen zwischen den Grenzen o und 1 für $|x|$ stetig.

Aus $\qquad v' = \dfrac{u'}{u}$

folgt $\qquad u' = uv'$,

$$u'' = uv'' + u' v'$$

$$u''' = uv''' + 2u' v'' + u'' v'$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n-1}{1} u' v^{(n-1)} + \binom{n-1}{2} u'' v^{(n-2)} + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n-1}{n-1} u^{(n-1)} v'$$

und hieraus für $x = 0$, da $u_0 = 1$:

$$u_0' = \Gamma' (1) = - C,$$

$$u_0'' = s_2 - u_0' C$$

$$u_0''' = s - 2! \, s_3 - 2u_0' s_2 - u_0'' C$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_0^{(n)} = (-1)^n (n-1)!\, s_n + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{1} (n-2)!\, u_0' s_{n-1}$$
$$+ (-1)^{n-2} \binom{n-1}{2} (n-3)!\, u_0'' s_{n-2} + \cdots - \binom{n-1}{n-1} u_0^{(n-1)} C,$$

daher die Koeffizienten der Potenzen von x in der Reihenentwicklung:

$$u_0 = 1, \qquad u_0' = -C,$$
$$\frac{1}{2!} u_0'' = \tfrac{1}{2} (s_2 - u_0' C)$$
$$\frac{1}{3!} u_0''' = -\tfrac{1}{3} \left(s_3 - u_0' s_2 + \frac{1}{2!} u_0'' C\right)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{n!} u_0^{(n)} = (-1)^n \frac{1}{n} \left(s_n - u_0' s_{n-1} + \frac{1}{2!} u_0'' s_{n-1} - \cdots \pm \frac{1}{(n-1)!} u_0^{n-1} C \right).$$

Schreibt man der Analogie wegen s_1 für C und setzt

$$\Gamma(1+x) = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots (-1)^n a_n x^n + \cdots$$

so gibt dies die Rekursionsgleichungen:

$$a_1 = s_1$$
$$a_2 = \tfrac{1}{2} (s_2 + a_1 s_1)$$
$$a_3 = \tfrac{1}{3} (s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n = \frac{1}{n} (s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots a_{n-1} s_1)$$

Eine für die Ausrechnung geeignetere Formel erhält man durch Subtraktion der vorigen von

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots (-1)^n x^n + \cdots$$

Setzt man abkürzend $b_n = 1 - a_n$, so kommt

$$\Gamma(1+x) = \frac{1}{1+x} + b_1 x - b_2 x^2 + b_3 x^3 - \cdots (-1)^{n-1} b_n x^n + \cdots \quad (9)$$

wo die Koeffizienten folgende Zahlenwerte haben:

$b_1 = 0{,}4227\,8434$	$b_8 = 0{,}0018\,9431$
$b_2 = 0{,}0109\,4400$	$b_9 = 0{,}0009\,7474$
$b_3 = 0{,}0925\,2093$	$b_{10} = 0{,}0004\,8435$
$b_4 = 0{,}0182\,7192$	$b_{11} = 0{,}0002\,4341$
$b_5 = 0{,}0180\,0494$	$b_{12} = 0{,}0001\,2173$
$b_6 = 0{,}0068\,5089$	$b_{13} = 0{,}0000\,6094$
$b_7 = 0{,}0039\,9824$	$b_{14} = 0{,}0000\,3048$.

Von hier an ist jeder folgende Koeffizient die Hälfte des vorhergehenden.

Setzt man endlich

$$w = \frac{1}{\Gamma(1+x)},$$

so folgt

$$\log w = -\log \Gamma(1+x) = -v\,,$$

woraus durch Differentiation

$$\begin{aligned} w' &= -w v' \\ w'' &= -w v'' - w' v' \\ w''' &= -w v''' - 2 w' v'' - w'' v' \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

In den vorhin aufgestellten Gleichungen für die Ableitungen von u hat man somit nur den Buchstaben u durch w zu ersetzen und auf der rechten Seite das Vorzeichen zu ändern. Man erhält so die Reihe

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots c_n x^n + \cdots \tag{10}$$

und für die Koeffizienten c die Rekursionen:

$$\begin{aligned} c_1 &= s_1 \\ c_2 &= -\tfrac{1}{2}\left(s_2 - c_1 s_1\right) \\ c_3 &= \tfrac{1}{3}\left(s_3 - c_1 s_2 + c_2 s_1\right) \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$c_n = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\left(s_n - c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} - \cdots (-1)^{n-1} c_{n-1} s_1\right),$$

welche folgende Zahlenwerte ergeben:

$c_1 = 0{,}5772\,1566$	$c_9 = -0{,}0002\,1524$
$c_2 = -0{,}6558\,7807$	$c_{10} = 0{,}0001\,2805$
$c_3 = -0{,}0420\,0263$	$c_{11} = -0{,}0000\,2014$
$c_4 = 0{,}1665\,3861$	$c_{12} = -0{,}0000\,0125$
$c_5 = -0{,}0421\,9773$	$c_{13} = 0{,}0000\,0113$
$c_6 = -0{,}0096\,2197$	$c_{14} = -0{,}0000\,0021$
$c_7 = 0{,}0072\,1894$	$c_{15} = 0{,}0000\,0001$
$c_8 = -0{,}0011\,6517$	

Mit x multipliziert, gibt die Reihe den Wert von $\frac{1}{\Gamma x}$.

Für Werte von x, deren Modul $\leq \frac{1}{2}$, nehmen die Glieder der beiden Reihen (9) und (10) rasch ab, so dass sich die Berechnung der Gammafunktion sowie die ihres reziproken Wertes auf das einfachste gestaltet. Man kann aber jede Gammafunktion auf solche zurückführen, in denen x diese Bedingung erfüllt. Ist x reell, so genügt hiezu die Verwendung der Grundgleichungen (1) und (2). Ist x komplex $= \alpha + \beta i$, so verwende man zunächst für die Reduktion des imaginären Teils das Multiplikationstheorem (3), indem man für n eine ganze Zahl $> 2\,|\beta|$ wählt, und reduziere sodann in den als Faktoren auftretenden Funktionen noch den reellen Teil des Argumentes mittelst der Grundgleichungen (1) und (2).

V. Das Integral $\int_0^\infty \frac{v^{x-1}\,dv}{1+v}$.

Für reelle positive Werte von $x < 1$ beweist man gewöhnlich die Grundgleichung (3) vermittelst des Eulerschen Integrals der ersten Art

$$\int_0^k \frac{v^{x-1}\,dv}{1+v} = \Gamma x \cdot \Gamma(1-x),$$

dessen Wert aus dem Integral

$$J = \int_0^k \frac{z^{2m-1}\,dz}{1+z^{2n}} \quad (m < n)$$

abgeleitet wird. Dieses kann ohne Integrationsverrichtung gefunden werden. Für ein geschlossenes Integral mit komplexer Veränderlichen gilt die Bestimmung

$$\int \frac{fz}{\varphi z}\,dz = 2\pi i \cdot \lim. \frac{f\alpha}{\varphi'\alpha},$$

falls für nur einen Wert α von z innerhalb des von z umlaufenen Gebietes $\varphi z = o$ wird. Daher ist

$$\int \frac{z^{2m-1}\,dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i \cdot \frac{\alpha^{2m-2n}}{2n}.$$

Lässt man z den Umfang eines Kreissektors durchlaufen vom Radius k und dem Zentriwinkel $\frac{\pi}{n}$ im Koordinatenanfang, von welchem der eine Schenkel in die Abszissenaxe fällt, so liegt innerhalb des Sektors der Punkt

$$z = e^{\frac{\pi i}{2n}} = \alpha,$$

in dem $1 + z^{2n} = o$ ist. Der Wert des Integrals ist daher gleich

$$\frac{\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{2n}(2m-2n)} = \frac{\pi i}{n} e^{\frac{m\pi i}{n} - \pi i} = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{m\pi i}{n}}.$$

Das Integral selbst teilt sich in drei Teile, in denen beziehungsweise

$$z = v, \qquad dz = dv, \qquad v \text{ von o bis } k,$$

$$z = ke^{i\varphi}, \quad dz = kie^{i\varphi} d\varphi, \; \varphi \text{ von o bis } \frac{\pi}{n},$$

$$z = ve^{\frac{i\pi}{n}}, \; dz = e^{\frac{i\pi}{n}} dv, \quad v \text{ von k bis o}.$$

Der erste Teil wird $= J$, der zweite $= o$ für $m < n$, der dritte $= Je^{\frac{2m\pi i}{n}}$, so dass nun

$$J - Je^{\frac{2m\pi i}{n}} = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{m\pi i}{n}},$$

woraus

$$J = \frac{\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\frac{m\pi i}{n}}}{e^{\frac{2m\pi i}{n}} - 1} = \frac{\pi i}{n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{m\pi i}{n}} - e^{-\frac{m\pi i}{n}}}$$

oder endlich

$$\int_0^k \frac{z^{2m-1} dz}{1 + z^{2n}} = \frac{\pi}{2n \operatorname{Sin} \frac{m\pi}{n}}$$

Die Substitution von $z^{2n} = v$ gibt bei Ersetzung von k^{2n} durch k,

$$\int_0^k \frac{v^{\frac{m}{n}-1} dv}{1 + v} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{n}}$$

oder, wenn $\frac{m}{n} = x$ gesetzt wird,

$$\int_0^k \frac{v^{x-1} dv}{1 + v} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \pi x}.$$

VI. Das Integral $\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv$.

Durch Umsetzung von v^2 in u geht dieses Integral über in

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

und wird als besonderer Fall von

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\,u^{x-1}\,du = \tfrac{1}{2}\,\Gamma x$$

für $x = \frac{1}{2}$ erkannt, so dass sein Wert $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, wie sich sowohl aus der zweiten Grundgleichung (3) für $x = \frac{1}{2}$, als aus dem Multiplikationstheorem (4) für $x = 1$ und $n = 2$ ergibt.

Der Wert des Integrals kann direkt gefunden werden, wie folgt. Durch partielle Integration kommt

$$\int_0^1 (1-u^2)^m\,du = \frac{2m}{2m+1}\int_0^1 (1-u^2)^{m-1}\,du.$$

Nimmt man einmal $m = k$, das andere Mal $m = k - \frac{1}{2}$ an, so erhält man bei wiederholter Anwendung dieser Formel

$$\int_0^1 (1-u^2)^k\,du = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)},$$

$$\int_0^1 (1-u^2)^{k-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Die Umsetzung $u^2 = \frac{v^2}{k}$ ergibt

$$\int_0^{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{v^2}{k}\right)^k dv = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} \cdot \sqrt{k},$$

$$\int_0^{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{v^2}{k}\right)^{k - \frac{1}{2}} dv = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{k},$$

woraus das Produkt

$$\int_0^{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{v^2}{k}\right)^k dv \cdot \int_0^{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{v^2}{k}\right)^{k - \frac{1}{2}} dv = \frac{k}{2k+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Mit unendlich wachsendem k nähern sich die Potenzen in beiden Integralen dem gemeinsamen Grenzwert e^{-v^2}, so dass schliesslich nach Ausziehung der Quadratwurzel folgt:

$$\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Der Quotient der beiden Integrale aber gibt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (2k) \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k-1)(2k+1)}.$$

Basel, 24. November 1902.

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel

Jahr/Year: 1903

Band/Volume: 16_1903

Autor(en)/Author(s): Kinkelin Hermann

Artikel/Article: Zur Gammafunktion 309-328