Ueber unimodulare, lineare Substitutionen.

Von

Rudolf Fueter.

Im folgenden sollen alle unimodularen, ganz- und rationalzahligen linearen Substitutionen einer Variablen ω betrachtet werden:

$$\omega_1 = \frac{\alpha\,\omega + \beta}{\gamma\,\omega + \delta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \omega; \quad \text{wo } \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

und α, β, γ, δ ganze rationale Zahlen sind. Die Substitution wird abgekürzt durch

$$s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Wenden wir auf ω_1 noch eine weitere Substitution $s_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ an, so wird

$$s_1\,\omega_1 = s_1\,s\,\omega = \frac{\alpha_1 \dfrac{\alpha\,\omega + \beta}{\gamma\,\omega + \delta} + \beta_1}{\gamma_1 \dfrac{\alpha\,\omega + \beta}{\gamma\,\omega + \delta} + \delta_1} \quad \text{und} \quad s_1\,s = \begin{pmatrix} \alpha\,\alpha_1 + \gamma\,\beta_1, & \alpha_1\,\beta + \delta\,\beta_1 \\ \gamma_1\,\alpha + \gamma\,\delta_1, & \gamma_1\,\beta + \delta\,\delta_1 \end{pmatrix}$$

Die Substitution $s_1 s$ wird das *Produkt* der beiden Substitutionen s und s_1 genannt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $s s_1$ wieder eine unimodulare Substitution ist. *Die linearen unimodularen Substitutionen bilden daher eine Gruppe.* Das Produkt ist im allgemeinen nicht von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig (im allgemeinen $s_1 s \neq s s_1$).

Wir wollen im folgenden einen einfachen Beweis des fundamentalen Satzes geben:

Jede unimodulare lineare Substitution lässt sich als Produkt von lauter Substitutionen der beiden Formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Man nennt letztere die Grundsubstitutionen. Auf eine Variable ω angewandt, lautet der Satz auch so: ω *geht in*

$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ *über, wenn man auf* ω *in richtiger Reihenfolge die beiden Grundsubstitutionen*

$$(\omega : \omega + 1) \quad \text{und} \quad \left(\omega : -\frac{1}{\omega}\right)$$

endlich oft anwendet.

Dieser Satz kann einfach mittels Kettenbrüche bewiesen werden, wie schon seit längerer Zeit bekannt ist; z. B. vergl. *Klein*, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie.[1]) Allein Klein hat seine Entwicklung nur für spezielle Fälle der Vorzeichen und Grössenverhältnisse von α, β, γ, δ durchgeführt. Der allgemeine Fall lässt sich in der dortigen Weise nicht so elegant erledigen. Ganz anders verhält es sich, wenn man eine andere Art Kettenbrüche einführt, die allerdings den Fall $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ ganz ausschliessen, die dafür aber eine Anwendung in der Theorie der Modulfunktionen gestatten. *Minkowski*[2]) hat von einem ganz andern und viel allgemeinern Gesichtspunkte Kettenbrüche behandelt, die die hier gegebenen und die gewöhnlichen verbinden.

In 1. werden die Kettenbrüche allgemein definiert; in 2. auf rationale Zahlen angewendet und etwas erweitert; 3. bringt den obigen Fundamentalsatz und 4. die Anwendung auf die Modulfunktion $\eta(\omega)$.

1. Es sei ω eine positive oder negative reelle Zahl $\neq 0$, und a_0 die kleinste ganze rationale Zahl $\geqq \omega$. Dann ist

$$\omega = a_0 - \frac{1}{\omega_1}, \quad \text{wo } \omega_1 > 1.$$

Ebenso sei, falls $\omega_1 \neq \infty$, a_1 die kleinste ganze rationale Zahl $\geqq \omega_1$ und

$$\omega_1 = a_1 - \frac{1}{\omega_2}, \quad \text{wo } \begin{cases} \omega_2 > 1 \\ a_1 \geqq 2 \end{cases}$$

In der Weise fährt man fort:

$$\omega = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_{\nu-1} - \cfrac{1}{\omega_\nu}}}} \qquad \text{wo } \begin{cases} a_i \geqq 2 \\ \omega_\nu > 1 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots \nu - 1$$

[1]) Ausgearb. von *Sommerfeld*, Göttingen 1896, p. 29 u. ff.

[2]) *Minkowski:* Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rat. Zahlen. Math. Ann., Bd. 54, p. 91 u. ff., 1901.

Setzt man

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \ddots - \cfrac{1}{a_{\nu-1}}}$$

wo P_ν und Q_ν ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, und $P_\nu \geqq 0$, $Q_\nu > 0$ für $\omega > 0$; $P_\nu \leqq 0$, $Q_\nu > 0$ für $\omega < 0$ seien, so heisst $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$ der ν^{te} Näherungsbruch von ω. Man findet leicht die beiden Rekursionsformeln:

$$\left.\begin{array}{l} P_\nu = a_{\nu-1} P_{\nu-1} - P_{\nu-2} \\ Q_\nu = a_{\nu-1} Q_{\nu-1} - Q_{\nu-2} \end{array}\right\} ; \quad P_0 = 1, \; Q_0 = 0 \tag{1}$$

Dieselben ergeben durch Elimination von $a_{\nu-1}$:

$$P_\nu Q_{\nu+1} - P_{\nu+1} Q_\nu = P_{\nu-1} Q_\nu - P_\nu Q_{\nu-1} = \ldots = Q_1 P_0 = +1$$

oder

$$P_\nu Q_{\nu+1} - P_{\nu+1} Q_\nu = +1 \tag{2}$$

$|P_\nu|$ *und* Q_ν *wachsen mit* ν *über alle Grenzen.* Denn da $a_\nu \geqq 2$, so ist

$$|P_\nu| = a_{\nu-1} |P_{\nu-1}| - |P_{\nu-2}| \geqq 2 |P_{\nu-1}| - |P_{\nu-2}| \geqq |P_{\nu-1}|$$
$$Q_\nu = a_{\nu-1} Q_{\nu-1} - Q_{\nu-2} \geqq 2 Q_{\nu-1} - Q_{\nu-2} > Q_\nu$$

Sobald einmal $|P_{\nu-1}| > |P_{\nu-2}|$ kann in der 1. Ungleichung zuletzt niemals mehr das Gleichheitszeichen eintreten. Letzteres kann aber nicht immer eintreten, da $\omega \neq 0$.

P_ν *und* Q_ν *sind teilerfremd* (siehe (2)).

2. Es sei speziell $\omega = \frac{\beta}{\delta}$, wo β und δ ganze rationale teilerfremde Zahlen seien. Ist $\omega < 0$, so sei $\beta < 0$, $\delta > 0$. Dann hört die Entwicklung etwa für $m = \nu$ auf; es ist wegen (2):

$$\frac{\beta}{\delta} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \ddots - \cfrac{1}{a_m}} \qquad \text{und } \delta \; P_m - \beta \, Q_m = +1.$$

Wir nennen die so erhaltenen P_m und Q_m eine *Grundlösung* der Gleichung $\delta x - \beta y = 1$. Im Falle $\delta = 1$, $\beta = a_0$ ist $P_m = 1$, $Q_m = 0$. Immer ist aber nach 1.

$$|P_m| < |\beta|; \; Q_m < \delta \tag{3}$$

Lässt man bei der in 1. definierten Kettenbruchentwicklung von ω für $\omega_\nu > 1$ auch das Gleichheitszeichen zu:

$$\omega_\nu \geqq 1$$

was nur bei rationalen Zahlen ω, dann aber immer eintritt, so ist die Entwicklung nicht mehr eindeutig. In der Tat kann man dann in der Kettenbruchentwicklung von $\frac{\beta}{\delta}$ an Stelle von a_m setzen:

$$a_m = a_m + 1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \ddots - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1}}}}$$

wo beliebig viele Nenner 2 eingeschaltet werden können. Berechnen wir auch hierfür die Näherungsbrüche. Es ist:

$$\begin{cases} P_{m+1} = (a_m + 1)\ P_m - P_{m-1} = \beta + P_m \\ Q_{m+1} = (a_m + 1)\ Q_m - Q_{m-1} = \delta + Q_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{m+2} = 2\ P_{m+1} - P_m = 2\ \beta + \mathrm{P}_m \\ Q_{m+2} = 2\ Q_{m+1} - Q_m = 2\,\delta + Q_m \end{cases}$$

. . . .

$$\begin{cases} P_{m+\tau} = \tau\beta + P_m \\ Q_{m+\tau} = \tau\,\delta + Q_m \end{cases}$$

Nehmen wir $(\tau - 1)$ mal den Nenner 2. so wird

$$\begin{cases} P_{m+\tau+1} = P_{m+\tau} - P_{m+\tau-1} = \beta \\ Q_{m+\tau+1} = Q_{m+\tau} - Q_{m+\tau-1} = \delta \end{cases} \tag{4}$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{P}_m + \tau\,\beta = \mathrm{P}_{m+\tau} \\ \gamma &= Q_m + \tau\,\delta = Q_{m+\tau} \end{aligned}\right\}; \text{ dann ist } \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = +1 \tag{5}$$

Hieraus folgt der **Satz:** *Es sei P_m, Q_m die Grundlösung von $x\delta - y\beta = 1$, und*

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= P_m + \tau\,\beta \\ \gamma &= Q_m + \tau\,\delta \end{aligned}\right\} \text{ also } \alpha\,\delta - \beta\,\gamma - 1$$

wo τ jede beliebige positive Zahl sein kann. Dann kann man den positiven oder negativen Bruch $\frac{\beta}{\delta}$ stets so in einen endlichen Kettenbruch entwickeln, dass der letzte Näherungsbruch $\frac{\beta}{\delta}$, der vorletzte $\frac{\alpha}{\gamma}$ ist.

3. Diesen Satz verwenden wir zur Lösung unseres Problemes. Es sei $s = \begin{pmatrix} \alpha\,\beta \\ \gamma\,\delta \end{pmatrix}$ eine beliebige unimodulare Substitution. Da

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\beta \\ \gamma\,\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ -\gamma - \delta \end{pmatrix}$$

dürfen wir immer eine der vier Zahlen als positiv annehmen. Wir setzen

$$\delta \geqq 0 \tag{6}$$

a) $\underline{\delta = 0}$; $\beta = -\gamma = \pm 1$; $s = \begin{pmatrix} \alpha & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\omega_1 = s\,\omega = \pm\,\alpha - \frac{1}{\omega}$.

Diese Substitution erhält man, wenn man α mal die Substitution $(\omega : \omega \pm 1)$ und hierauf $\left(\omega : -\frac{1}{\omega}\right)$ anwendet. Da aber

$$\omega - 1 = -\cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{\omega}}} \tag{7}$$

durch $(\omega : \omega + 1)$ und $\left(\omega : -\frac{1}{\omega}\right)$ ausgedrückt werden kann, so haben wir in diesem Fall den Satz bewiesen.

b) $\underline{\delta > 0}$. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $\gamma \geqq 0$. Man entwickle $\frac{\beta}{\delta}$ nach 2. in einen Kettenbruch. P_m, Q_m sei die Grundlösung. Dann muss

$$\alpha = P_m + \tau\beta$$
$$\gamma = Q_m + \tau\delta$$

Da $\delta > 0$, $\gamma \geqq 0$, $Q_m < \delta$ (wegen (3)), muss auch $\tau \geqq 0$. Nach dem Satz in 2. kann der Kettenbruch von $\frac{\beta}{\delta}$ dann so beschaffen sein, dass der letzte Näherungsbruch gleich $\frac{\beta}{\delta}$, der vorletzte gleich $\frac{\alpha}{\gamma}$ ist; d. h. nach (4) und (5)

$$P_{m+\tau+1} = P_{m+\tau} - P_{m+\tau-1} = \beta;\quad P_{m+\tau} = \alpha$$
$$Q_{m+\tau+1} = Q_{m+\tau} - Q_{m+\tau-1} = \delta;\quad Q_{m+\tau} = \gamma$$

Dann ist

$$\omega_1 = s\,\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_m + 1 - \cfrac{1}{2 - \ddots - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\omega + 1}}}}}}.$$

Denn der Wert des Kettenbruches ist:

$$\frac{P_{m+\tau}(\omega + 1) - P_{m+\tau-1}}{Q_{m+\tau}(\omega + 1) - Q_{m+\tau-1}} = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

II. $\gamma < 0$. Man entwickle $\frac{-\alpha}{-\gamma}$ in einen Kettenbruch. Es sei $(P_m\, Q_m)$ die Grundlösung, also

$$-\gamma P_m + \alpha Q_m = 1\,; \quad \begin{cases} \beta = P_m - \alpha \cdot \tau \\ \delta = Q_m - \gamma \cdot \tau \end{cases}$$

Da $\delta > 0$, $-\gamma > 0$, $Q_m < -\gamma$ (wegen (3)), so muss $\tau \geqq 0$ sein. Also kann in $\frac{-\alpha}{-\gamma}$ der letzte Näherungsbruch zu $\frac{\alpha}{\gamma}$ der vorletzte zu $\frac{\beta}{\delta}$ gemacht werden; d. h. nach (4) und (5):

$$P_{m+\tau+1} = P_{m+\tau} - P_{m+\tau-1} = -\alpha;\; P_{m+\tau} = \beta$$
$$Q_{m+\tau+1} = Q_{m+\tau} - Q_{m+\tau-1} = -\gamma;\; Q_{m+\tau} = \delta$$

Dann ist:

$$\omega_1 = s\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_m + 1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \ddots - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{\omega}}}}}}}}$$

Denn der Wert des Kettenbruches ist

$$\frac{P_{m+\tau}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) - P_{m+\tau-1}}{Q_{m+\tau}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) - Q_{m+\tau-1}} = \frac{-\alpha\omega - \beta}{-\gamma\omega - \delta}$$

In jedem Falle ist also $\omega_1 = s\,\omega$ in einen Kettenbruch entwickelt, der, wie man sofort sieht, nur die Substitutionen $(\omega : \omega + 1)$ und $\left(\omega : -\frac{1}{\omega}\right)$ gebraucht. Denn auch wenn a_0 negativ ist, kann man die Substitution $(\omega : \omega - 1)$ nach (7) durch die Grundsubstitutionen ausführen.

4. *Anwendung auf die Theorie der Modulfunktionen.*

Von der Funktion

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} \left(1 - e^{2\pi i \omega \nu}\right),$$

die für alle ω mit positivem Imaginärteil definiert ist, kennt man die beiden Funktionalgleichungen[3])

$$\begin{aligned} \eta(\omega+1) &= e^{\frac{\pi i}{12}}\,\eta(\omega) \\ \eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= \sqrt{-i\omega}\,\eta(\omega) \end{aligned} \tag{8}$$

Man kann hieraus mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung 3. auch $\eta\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ durch $\eta(\omega)$ ausdrücken, wo $s = \begin{pmatrix}\alpha\,\beta\\ \gamma\,\delta\end{pmatrix}$ eine beliebige unimodulare Substitution $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$ ist. Wir wollen uns etwa auf den Fall $\delta > 0$, $\gamma > 0$ beschränken. Dann ist

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \ddots - \cfrac{1}{a_m + 1 - \cfrac{1}{2 - \ddots - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\omega+1}}}}}$$

Berechnen wir sukzessive die Werte von $\eta(\omega)$ mittelst (8), indem wir gemäss der Kettenbruchentwicklung die Substitutionen

$(\omega : \omega + a_0)$; $\left(\omega ; -\frac{1}{\omega}\right)$; $(\omega : \omega + a_1)$; $\left(\omega : -\frac{1}{\omega}\right)$; u. s. f. machen:

$$(\omega : \omega + a_0);\ \eta\left(\frac{P_0\omega + P_1}{Q_0\omega + Q_1}\right) = \eta(\omega + a_0) = e^{\frac{\pi i a_0}{12}}\,\eta(\omega)$$

$$\left(\omega : -\frac{1}{\omega}\right);\ \eta\left(\frac{P_1\omega - P_0}{Q_1\omega - Q_0}\right) = \eta\left(a_0 - \frac{1}{\omega}\right) = e^{\frac{\pi i a_0}{12}}\sqrt{-i\omega}\,\eta(\omega)$$

$$(\omega : \omega + a_1);\ \eta\left(\frac{P_1\omega + P_2}{Q_1\omega + Q_2}\right) = e^{\frac{\pi i}{12}(a_0 + a_1)}\sqrt{-i(\omega + a_1)}\,\eta(\omega)$$

$$\left(\omega : -\frac{1}{\omega}\right);\ \eta\left(\frac{P_2\omega - P_1}{Q_2\omega - Q_1}\right) = e^{\frac{-\pi i}{12}(a_0 + a_1)}\sqrt{Q_2 - Q_1}\,\eta(\omega)$$

. . . .

$$\eta\left(\frac{P_{m+\tau}\,\omega - P_{m+\tau-1}}{Q_{m+\tau}\,\omega - Q_{m+\tau-1}}\right) = \varepsilon\sqrt{Q_{m+\tau}\,\omega - Q_{m+\tau-1}}\,\eta(\omega)$$

---

[3]) Vergleiche hiezu etwa Weber, Algebra, Bd. III, p. 113. Einfache Beweise der zweiten Formel sind von Eppstein und mir gegeben worden. Jahresber. d. D. M. V. XVIII, 1909, Heft 9/10, p. 411 u. ff.

wo ε eine bestimmte 12. Einheitswurzel. Macht man hier schliesslich noch die Substitution $(\omega : \omega + 1)$, so wird wegen (4) und (5):

$$\eta\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \varepsilon \sqrt{\gamma\omega + \delta}\, \eta(\omega)$$

Die Einheit ε ist eine sehr wichtige und merkwürdige Grösse, die zum erstenmale von *Hermite*[4]) berechnet worden ist. Sie erscheint hier als Funktion der a_ν und lässt sich vielleicht in dieser Form einfach berechnen.

---

[4]) *Weber.* Algebra, III., p. 125.

Eingegangen 26. Januar 1910.