

## Ueber eine Klasse von Kurven.

Von

O. Spiess.

---

Eine Strecke mit den Endpunkten A und B, die in einer Ebene gleitet, werde aus einer ersten Lage  $A_1 B_1$  durch irgendwelche Bewegung in eine zweite Lage  $A_2 B_2$  übergeführt. Dabei überstreicht die Strecke eine Fläche, deren Inhalt wesentlich abhängt von der Art der Ueberführung. Wir stellen nun die Frage:

*Bei welcher Art von Bewegung hat die überstrichene Fläche den absolut kleinsten Inhalt?*

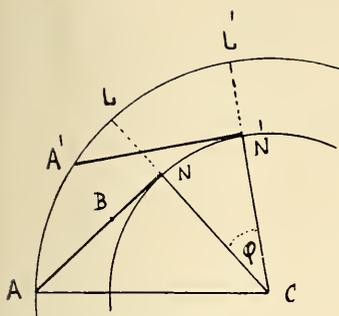
Zunächst erledigen wir einen *trivialen Fall*. Wenn nämlich die festen Strecken  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  der gleichen Geraden angehören und gleich gerichtet sind, so genügt es, die bewegliche Strecke (*Gleitstrecke*) in ihrer eigenen Richtung zu verschieben. Dabei ist die beschriebene Fläche = 0, also sicher ein absolutes Minimum.

Sind aber  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  in parallelen Geraden  $g_1$ ,  $g_2$  gelegen und gleichgerichtet, so verschiebe man die Gleitstrecke von  $A_1 B_1$  an in  $g_1$  bis ins Unendliche, und von dort auf  $g_2$  zurück bis  $A_2 B_2$ . Dabei ist die bedeckte Fläche wieder gleich Null.

Nehmen wir jetzt an, dass Endlage und Anfangslage einen von Null verschiedenen Winkel mit einander bilden.

Da sich jede Bewegung aus unendlich kleinen Rotationen zusammensetzen lässt, so führt die obige Frage auf die folgende spezielle **Aufgabe**:

*Eine Strecke AB soll durch Drehung um einen in der Ebene liegenden Punkt C in eine neue Richtung gebracht werden, die mit der Anfangsrichtung einen gegebenen Winkel  $\varphi$  einschliesst. Wo muss der Punkt C liegen, damit die von A beschriebene Fläche ein Minimum wird?*



Figur 1.

Wir fällen (Fig. 1) von einem beliebigen Drehzentrum C auf die Gerade, der AB angehört, das Lot CNL und betrachten zunächst das Flächenstück ANN'A', das die Strecke AN bei der Rotation um den Winkel  $\varphi$  überstreicht. Da die Fläche

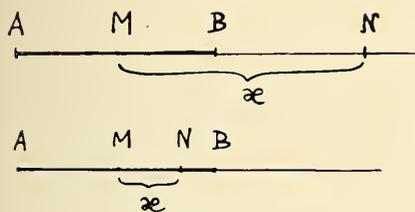
$$ANLA \cong A'N'L'A',$$

so ist

$$ANN'A' = ANN'L'A' - ANLA = LNN'L'$$

$$= \frac{1}{2} (CL^2 - CN^2) = \frac{1}{2} AN^2 \cdot \varphi$$

Analog ist die von BN überdeckte Fläche  $= \frac{1}{2} BN^2 \cdot \varphi$



Figur 2.

Somit ist die Fläche, die AB beschreibt, gleich der *Summe* oder *Differenz* dieser beiden Ausdrücke, jenachdem der Punkt N die Punkte A und B trennt oder nicht.

Ist M die Mitte von AB und setzt man die absolute Entfernung  $MN = x$ , so ist also die genannte Fläche

wenn  $x \geq h$ : gleich  $\frac{\varphi}{2} [(x+h)^2 - (x-h)^2] = 2hx \cdot \varphi$

„  $x \leq h$ : „  $\frac{\varphi}{2} [(x+h)^2 + (x-h)^2] = (x^2 + h^2) \cdot \varphi$

Der absolute Inhalt der Fläche nimmt also mit  $x$  überall stetig ab und erreicht für  $x=0$  den Minimalwert

$$h^2 \cdot \varphi$$

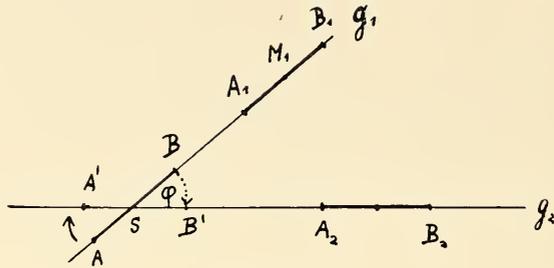
Wir fassen das Ergebnis in die folgenden **Sätze** zusammen:

- I. Für alle Drehungsmittelpunkte, die auf einer zu AB senkrechten Geraden liegen, hat die erzeugte Fläche denselben Inhalt.
- II. Für alle Punkte der Mittelsenkrechten von AB erreicht die überstrichene Fläche den (dem gegebenen Winkel entsprechenden) Minimalwert.

Will man also die Strecke aus der Anfangslage  $A_1B_1$  auf der Geraden  $g_1$  bei minimalem Flächenaufwand in die Endlage  $A_2B_2$  auf  $g_2$  überführen, so kann dies am einfachsten so geschehen:

Man verschiebe die Strecke in  $g_1$ , bis ihr Mittelpunkt M mit dem Schnittpunkt S von  $g_1$  und  $g_2$  zusammenfällt. Dann drehe

man die Strecke um M, bis sie gleichgerichtet wie  $A_2B_2$  in der Geraden  $g_2$  liegt und schiebe sie in  $g_2$  bis in die Endlage. (Fig. 3.)

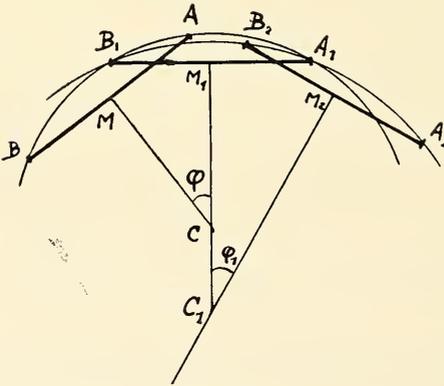


Figur 3.

§ 2.

Wird eine Strecke AB um einen beliebigen Punkt ihrer Mittelsenkrechten gedreht, so nennen wir diese Bewegung eine *Minimalrotation*. Eine Bewegung, die sich aus lauter endlichen oder unendlich kleinen Minimalrotationen zusammensetzt, heisse eine *Minimalbewegung*. Um in das Wesen dieser Bewegung einzudringen, betrachten wir einige aufeinanderfolgende Lagen der bewegten Strecke mit den jeweiligen Drehungsmittelpunkten.

Aus dem Anblick der Fig. 4 ergeben sich sofort die folgenden Bemerkungen:



Figur 4.

I. Bei jeder einzelnen Rotation um  $C, C_1$  etc. beschreibt der Mittelpunkt der Strecke einen Kreisbogen,  $\widehat{MM_1}, \widehat{M_1M_2} \dots$ , bewegt sich also stets senkrecht zum Radius  $CM, C_1M_1, \dots$ .

II. Die von AB überstrichene Fläche ist gleich

$$h^2 (\varphi + \varphi_1 + \dots)$$

d. h. gleich  $h^2$  mal dem totalen Drehungswinkel. Gibt man der Fläche sowie dem Winkel ein *Vorzeichen* je nach dem Sinn der erzeugenden Drehung, so hängt die von AB beschriebene Fläche also nur ab von dem Winkel, den End- und Anfangslage mit einander bilden.

III. Bei jeder einzelnen Rotation beschreiben die Endpunkte  $A$  und  $B$  der Strecke kongruente Kreisbogen  $\widehat{AA_1} = \widehat{BB_1}$ ,  $\widehat{A_1A_2} = \widehat{B_1B_2}$  etc. Je 2 aufeinander folgende Punktepaare wie  $(A, B)$ ,  $(A_1, B_1)$  liegen auf einem Kreis.

Lässt man nun die einzelnen Drehungswinkel  $\varphi$  und die Verschiebungen  $CC_1 \dots$  unendlich klein werden, so wird der Ort der Punkte  $M$  eine Kurve  $\Phi$  und der Ort der momentanen Rotationszentren  $C$  wird zur Kurve der Krümmungsmittelpunkte, zur *Evolute* von  $\Phi$ . Die bewegte Strecke  $AB$  gehört der *Tangente* von  $\Phi$  an und berührt  $\Phi$  in ihrer Mitte  $M$ . Ebenso beschreiben die Punkte  $A$  und  $B$  zwei Kurven  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , die *gleiche Bogenelemente* und also zwischen entsprechenden Punkten *gleiche Bogen* besitzen. Wir gelangen somit dazu, die Bewegung einer Strecke, die wir als „Minimalbewegung“ bezeichnet haben, in folgender Weise zu beschreiben:

**Satz I.** *Gleitet eine Strecke  $AB$  auf einer beliebigen Kurve, so dass sie in ihrem Mittelpunkt  $M$  die Kurve beständig berührt, so führt sie eine Minimalbewegung aus.*

**Satz II.** *Ist  $2h$  die Länge der bewegten Strecke, so ist der Inhalt der bedeckten Fläche gleich*

$$h^2 \cdot \varphi$$

*wenn  $\varphi$  der Winkel ist, um den die Endlage der Strecke gegenüber der Anfangslage verdreht ist.*

**Anmerkung.** Ist die Endlage  $A_2B_2$  parallel und gleichgerichtet der Anfangslage  $A_1B_1$ , so ist also der Flächeninhalt  $= 0$ , indem die positiven und negativen Flächenstücke sich gerade aufheben. Rechnet man indess (entgegen der obigen Festsetzung) alle Flächen als positive Grössen, so gilt der Satz II nicht mehr unbedingt, sondern nur so lange, als der Punkt  $M$  keinen Wendepunkt der Kurve  $\Phi$  passiert. Dann wird auch in dem Spezialfall, dass  $A_2B_2$  parallel  $A_1B_1$  ist, das Minimum „0“ praktisch nicht mehr erreicht werden können, doch bleibt der Flächeninhalt Null noch die untere Grenze, der man sich beliebig annähern kann.

### § 3.

Die Kurve  $\Phi$ , welche der Mittelpunkt  $M$  bei einer Minimalbewegung der Strecke  $AB$  beschreibt, soll künftig „*Gleitkurve*“ heissen. Die Kurven  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , welche die Endpunkte  $A$  und  $B$  erzeugen, nennen wir „*Endkurven*“. Zu jeder *Gleitkurve* gehören unendlich viele *Endkurven*, den sämtlichen Werten von  $h$  ent-

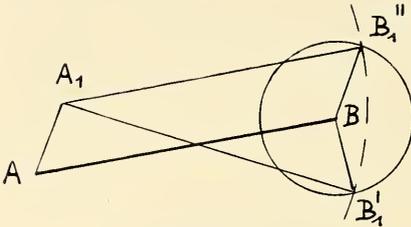
sprechend. Je zwei Endkurven, die durch die beiden Enden einer Strecke erzeugt werden, sollen *kolligiert* heissen. Ebenso nennen wir zwei Punkte auf  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , die bei der Erzeugung gleichzeitig die Endpunkte der gleitenden Strecke sind, *kolligiert*.

Im folgenden interessieren uns vornehmlich die Beziehungen zwischen zwei kolligierten Endkurven,  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ . Die Haupteigenschaft ist, dass der Bogen zwischen 2 Punkten  $A_1$  und  $A_2$  auf  $\mathfrak{A}$  gleich ist dem Bogen zwischen den kolligierten Punkten  $B_1$  und  $B_2$  auf  $\mathfrak{B}$ . Wir fragen nun:

*Gibt es noch andere Bewegungen einer Strecke, wobei die Endpunkte gleiche Bogen beschreiben?*

In der Tat besitzt die *Translationsbewegung* dieselbe Eigenschaft. Wird nämlich AB parallel sich selbst bewegt, so dass das eine Ende A eine Kurve beschreibt, so erzeugt das andere Ende B eine kongruente Kurve.

*Andere Bewegungen dieser Art gibt es aber nicht.* Denn wird AB unendlich wenig verschoben, so dass A nach  $A_1$  kommt, so gibt es nur 2 Punkte  $B_1$ , so dass zugleich  $A_1B_1=AB$  und  $BB_1=AA_1$  wird, nämlich die Punkte  $B_1'$  und  $B_1''$ , die in Figur 5 konstruiert sind. Die Lage  $A_1B_1$  entsteht aber durch Translation, die Lage  $A_1B_1$  durch Minimalrotation aus AB.



Figur 5.

Wir ersehen zugleich, dass, bei jeder dieser beiden Bewegungsarten, der Punkt  $B_1$  durch  $A_1$  *eindeutig* bestimmt ist. Lässt man also die Strecke AB von einer Anfangslage  $A_1B_1$  aus sich in Minimal-Bewegung verschieben, so dass das Ende A eine gegebene Kurve  $\mathfrak{A}$  beschreibt, so beschreibt das Ende B eine eindeutig bestimmte zweite Kurve  $\mathfrak{B}$ . Da die Anfangsrichtung  $A_1B_1$  und die Länge  $2h$  der Strecke willkürlich gewählt werden kann, so gibt es also zu jeder Kurve  $\mathfrak{A} \infty^2$  kolligierte Endkurven  $\mathfrak{B}$ , und ebensoviel zugehörige Gleitkurven  $\Phi$ .

Der Charakter der Kurve  $\mathfrak{B}$  ist im allgemeinen gänzlich verschieden von dem der Kurve  $\mathfrak{A}$ .

Wählt man z. B. die X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems als  $\mathfrak{A}$ -Kurve, so lautet die Gleichung von  $\mathfrak{B}$  (wenn dem Koordinatenanfang der Punkt „ $2h$ “ auf der Y-Achse kolligiert sein soll)

$$x = -\frac{1}{2} \sqrt{4h^2 - y^2} - \frac{1}{8h} \log \left( \frac{2h - \sqrt{4h^2 - y^2}}{2h + \sqrt{4h^2 - y^2}} \right)$$

die ersichtlich transzendent ist.

Wir stellen uns nun die **Aufgabe**:

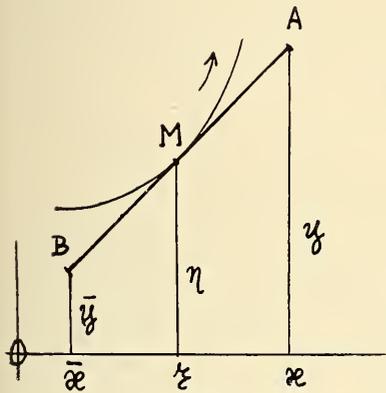
*Alle algebraischen Kurven zu finden, deren kolligierte Kurven wieder algebraisch sind.*

Wir gehen aus von einer beliebigen Gleitkurve  $\Phi$  und stellen die Beziehungen auf, die zwischen den Koordinaten eines Punkts von  $\Phi$  und den Koordinaten der Punkte A und B bestehen.

Wir bezeichnen im folgenden durchweg mit  $(\xi, \eta)$  die Koordinaten eines Punkts M von  $\Phi$ , mit  $d\sigma$  das Bogenelement von  $\Phi$ .

Dasselbe bedeuten  $(x, y)$ ,  $ds$  für den Punkt A auf  $\mathfrak{A}$ , und  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $d\bar{s}$  für B auf  $\mathfrak{B}$ , wobei zu bemerken ist, dass

$$(1) \quad d\bar{s} = ds.$$



Figur 6.

Wir gebrauchen noch die Abkürzung  $\xi', \eta', \xi'', \eta''$  für  $\frac{d\xi}{d\sigma}, \frac{d\eta}{d\sigma}$  etc. Alsdann gelten die Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= \xi + h\xi' & \bar{x} &= \xi - h\xi' \\ y &= \eta + h\eta' & \bar{y} &= \eta - h\eta' \end{aligned}$$

wobei

$$(3) \quad \xi'^2 + \eta'^2 = 1$$

Ist die Kurve  $\Phi$  gegeben etwa durch eine Gleichung

$$(4) \quad \Phi(\xi, \eta) = 0$$

so erhält man die Gleichung zwischen  $(x, y)$  resp.  $(\bar{x}, \bar{y})$ , indem man aus den Gleichungen (2)  $\xi$

und  $\eta$  mit Hilfe von (3) und (4) eliminiert.

Wir beweisen nun den

**Satz:** *Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass die Endkurven  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  beide algebraisch sind, ist die, dass die Gleitkurve  $\Phi$  algebraisch ist.*

**Beweis.** Wir gebrauchen das Zeichen „Alg“ mit unteren Indizes, um irgend welche algebraische Funktionen zu bezeichnen. Aus der Annahme:

$$y = \text{Alg}_1(x), \quad \bar{y} = \text{Alg}_2(\bar{x})$$

ergibt sich wegen (2)

$$\eta + h\eta' = \text{Alg}_1(\xi + h\xi'); \quad \eta - h\eta' = \text{Alg}_2(\xi - h\xi')$$

und hieraus durch Addition und Subtraktion

$$(5) \quad \eta = \text{Alg}_3(\xi, \xi') \text{ und}$$

$$(6) \quad \eta' = \sqrt{1 - \xi'^2} = \text{Alg}_4(\xi, \xi')$$

Aus Gl. (6) (die sich nicht etwa auf eine Identität reduzieren kann), folgt weiter

$$(7) \quad \xi' = \text{Alg}_5(\xi)$$

und also wegen (5)

$$(8) \quad \eta = \text{Alg}_6(\xi)$$

w. z. b. w.

Umgekehrt folgt aus der Gl. (8) als Annahme durch Differenzieren, wegen  $\eta' = \sqrt{1 - \xi'^2}$  rückwärts Gl. (7) und damit auch

$$\eta' = \sqrt{1 - \xi'^2} = \text{Alg}_7(\xi)$$

Somit erhält man aus (2)  $x, y, \bar{x}, \bar{y}$  als algebraische Funktionen von  $\xi$  dargestellt, woraus sich unmittelbar  $y = \text{Alg}_1(x), \bar{y} = \text{Alg}_2(\bar{x})$  ergeben. Damit ist der obige Satz vollständig bewiesen.

#### § 4.

Wir werfen nun die Frage auf:

*Gibt es Kurven, die sich selbst kolligiert sind?*

Die Gleitkurve muss dann so beschaffen sein, dass die Endpunkte der gleitenden Strecke Stücke desselben Kurvenzuges erzeugen, dass also  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{B}$  identisch wird. Eine solche sich selbst kolligierte Kurve möge als „Zweiendkurve“ oder kurz als „Z-Kurve“ bezeichnet werden. Sie besitzt nach der Definition eine Sehne AB, die im Gleiten eine Minimalbewegung ausführt. Sind  $A_1 B_1, A_2 B_2$  zwei Lagen der Sehne, so ist

$$\text{Bogen } (B_2 B_1) = \text{Bogen } (A_2 A_1)$$

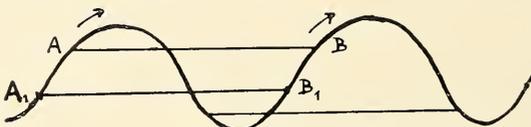
Wird beiderseits der Bogen  $(A_1 B_2)$  addiert, so folgt

$$\text{Bogen } (A_1 B_1) = \text{Bogen } (A_2 B_2),$$

d. h. *der über der Sehne AB stehende Kurvenbogen bleibt konstant.*

Denkt man sich also über einen solchen Bogen einen Faden gespannt und verbindet die Enden A und B durch einen festen Stab, so kann der Stab noch immer längs der Kurve verschoben werden.

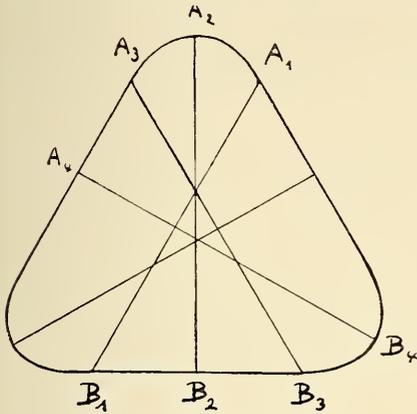
Triviale Fälle solcher Kurven sind seit langem bekannt. Vor allem die Gerade und der Kreis. Sodann alle *periodischen Kurven*, die durch eine Parallelverschiebung in sich übergehen. Man verbinde nämlich die Punkte  $A_1 B_1$  durch einen beliebigen Kurvenzug und lasse dann die Strecke mit dem Ende A parallel sich



Figur 7.

Die Punkte  $A_1 B_1$  durch einen beliebigen Kurvenzug und lasse dann die Strecke mit dem Ende A parallel sich

selbst längs dieser Linie gleiten. Dann beschreibt B ein kongruentes Kurvenstück, das sich nach beiden Seiten ins Unendliche wiederholt. Alle Stücke zusammen bilden dann eine, allerdings im allgemeinen nicht „monogene“ Kurve der betrachteten Art. Beispiel einer analytisch monogenen Kurve ist die *Sinuslinie*.



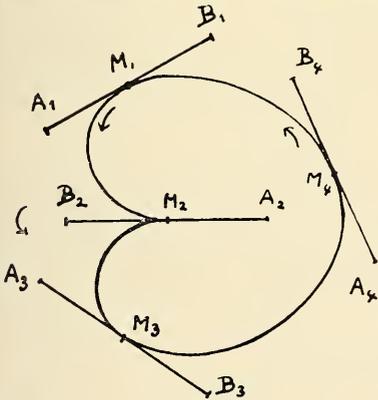
Figur 8.

Auch bei Anwendung von Minimalbewegung kann man aus Stücken verschiedener Kurven offene oder geschlossene Linienzüge stetig zusammensetzen, die als Ganzes betrachtet (nicht-monogene) Z-Kurven vorstellen. Ein Beispiel gibt Fig. 8, die aus einer geraden Strecke und einem gleichlangen Stück der kolligierten Kurve (siehe pag. 106) zusammengesetzt ist.

Von grösserem Interesse ist nun, dass es auch neben dem Kreis noch unendlich viele analytisch monogene und sogar algebraische Z-Kurven gibt. Wir beweisen nämlich den

**Satz:** *Besitzt die Gleitkurve eine ungerade Anzahl von Spitzen, so beschreiben beide Enden der gleitenden Sehne dieselbe Kurve.*

Man verfolge nämlich die Strecke AB beim Umlauf um eine solche Kurve (Fig. 9). Ist bei Beginn der Bewegung in  $M_1$  der Punkt A das vordere Ende, so ist nach Passierung einer Spitze A zum hinteren Ende geworden. Kommt also M nach Passierung einer *ungeraden* Zahl von Spitzen wieder nach  $M_1$ , so fällt nun das Ende A auf  $B_1$  und wird also bei einem zweiten Umlauf dieselbe Linie beschreiben, die beim ersten Umlauf von B erzeugt worden ist. Erst nach zweimaligem Umläufen der Gleitkurve wird die Strecke AB sich wieder mit der Anfangslage  $A_1B_1$  decken und die von A beschriebene Kurve sich schliessen. — Dabei ist (im Fortschreitungsinn gerechnet) der Bogen von  $A_1$  nach  $B_1$  gleich dem von  $B_1$  nach  $A_1$  und also gleich dem halben Umfang der Kurve.



Figur 9.

*Die Gleitsehne einer Z-Kurve halbiert also stets deren Peripherie.*

### § 5.

Wir müssen uns hier versagen, in das Studium dieser „Z-Kurven“, deren Existenz wir erwiesen haben, näher einzudringen. Es soll hier bloss noch auf die Bedeutung hingewiesen werden, die diese Kurven für die *Funktionentheorie* besitzen. Diese Bedeutung beruht auf einem merkwürdigen Zusammenhang zwischen der Gleichung einer solchen Kurve und einer gewissen *Funktionalgleichung*.

Betrachten wir nämlich die Koordinaten  $(x, y)$  eines Punktes einer Z-Kurve als Funktionen des Bogens  $s$ , und bilden wir daraus die neuen Funktionen

$$(1) \quad f_1(s) = x(s) + iy(s); \quad f_2(s) = x(s) - iy(s)$$

so besteht zwischen diesen offenbar die Beziehung

$$(2) \quad f_1'(s) \cdot f_2'(s) = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

Es gilt nun der **Satz I**:

*Die Funktionen  $f_1(s)$  und  $f_2(s)$  sind Lösungen der Funktionalgleichung*

$$(3) \quad \frac{f'(s) \cdot f'(s+1)}{[f(s+1) - f(s)]^2} = \frac{1}{4h^2}$$

Darin bedeutet  $1$  den halben Umfang der Z-Kurve, und  $2h$  die Länge der Sehne, die diesen Umfang halbiert.

**Beweis.** Da der Bogen, der die Enden  $(x, y)$ ,  $(\bar{x}, \bar{y})$  der Sehne verbindet  $= 1$  ist, so kann man schreiben

$$\bar{x} = x(s+1), \quad \bar{y} = y(s+1)$$

Wir haben nun zunächst wieder die Gleichungen des § 2 hinzuschreiben

$$(4) \quad \begin{array}{ll} x = \xi + h\xi' & \bar{x} = \xi - h\xi' \\ y = \eta + h\eta' & \bar{y} = \eta - h\eta' \end{array}$$

$$(5) \quad \xi'^2 + \eta'^2 = 1, \text{ woraus}$$

$$(6) \quad \xi' \xi'' + \eta' \eta'' = 0$$

Aus (5) und (6) berechnen wir leicht

$$(7) \quad \xi''^2 + \eta''^2 = \left(\frac{\eta''}{\xi'}\right)^2 \text{ und} \quad (8) \quad \xi'' \pm i\eta'' = \pm i \frac{\eta''}{\xi'} (\xi' \pm i\eta')$$

Aus (4) ergibt sich mit Hülfe von (5) (6) (7).

$$(9) \quad \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1 + h^2 \left(\frac{\eta''}{\xi'}\right)^2$$

Fassen wir  $f_1$  und  $f_2$  die sich bloss durch das Vorzeichen von  $i$  unterscheiden, unter dem Zeichen  $f$  zusammen, so gelten die Gleichungen

$$(10) \quad f(s) = (\xi \pm i\eta) + h(\xi' \pm i\eta'); \quad f(s+1) = (\xi \pm i\eta) - h(\xi' \pm i\eta')$$

$$(11) \quad [f(s+1) - f(s)]^2 = 4h^2(\xi' \pm i\eta')^2$$

$$(12) \quad \frac{df(s+1)}{d\sigma} \cdot \frac{df(s)}{d\sigma} = (\xi' \pm i\eta') - h^2(\xi'' \pm i\eta'')^2, \quad \text{oder nach (8)}$$

$$= (\xi' \pm i\eta')^2 \left( 1 + h^2 \left( \frac{\eta''}{\xi'} \right)^2 \right) = (\xi' \pm i\eta')^2 \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2$$

Schreibt man noch  $f'(s)$  für  $\frac{df}{ds}$ , so erhält man aus (11) und (12) unmittelbar die obige Funktionalgleichung (3).

Der bewiesene Satz lässt sich aber auch umkehren und lautet dann:

**Satz II:** Sind  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  2 Lösungen von (3) zwischen deren Ableitungen die Beziehung (2) besteht, so wird durch die Gleichungen

$$(13) \quad x = \frac{f_1(s) + f_2(s)}{2}, \quad y = \frac{f_1(s) - f_2(s)}{2i}$$

als Ort des Punktes  $(x, y)$  eine Z-Kurve definiert.

In der Tat, multipliziert man die beiden Gleichungen, die aus (3) für  $f=f_1$  und  $f=f_2$  entstehen, mit einander, so folgt wegen (2) ohne weiteres

$$[f_1(s+1) - f_1(s)] [f_2(s+1) - f_2(s)] = 4h^2$$

Durch Einführung von  $x, y$  und  $\bar{x} = x(s+1)$ ,  $\bar{y} = y(s+1)$  geht diese Gleichung über in

$$(14) \quad (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 = 4h^2$$

welche aussagt, dass die Sehne, welche die durch den Bogen  $l$  getrennten Punkte  $(x, y)$  und  $(\bar{x}, \bar{y})$  verbindet, die konstante Länge  $2h$  besitzt. Der Ort des Punktes  $(x, y)$  ist also eine Z-Kurve.

Ist es an sich interessant, dass die unendlich vielen Z-Kurven aus Lösungen derselben Funktionalgleichung (3) entspringen, so verdient diese Gleichung doch ganz unabhängig davon Beachtung. Der Ausdruck auf ihrer linken Seite hat nämlich die Eigenschaft, in sich über zu gehen, wenn  $f(s)$  durch eine lineare Funktion von  $f(s)$  ersetzt wird, d. h. wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\frac{f'(s) \cdot f'(s+1)}{[f(s+1) - f(s)]^2} = [f; l]_s$$

so gilt

$$(15) \quad \left[ \frac{af + b}{cf + d}; l \right]_s = [f; l]_s$$

Man bestätigt dies leicht durch Rechnung. Der Grund liegt übrigens in folgendem. Sind  $s, s_1, s_2, s_3$  unabhängige Variable, so bleibt der Ausdruck

$$(16) \quad \frac{f(s) - f(s_2)}{f(s) - f(s_1)} \cdot \frac{f(s_3) - f(s_1)}{f(s_3) - f(s_2)}$$

als Doppelverhältnis gegenüber einer linearen Transformation von  $f$  invariant, ebenso natürlich alle Ausdrücke, die aus ihm durch Differenzieren nach den Variablen hervorgehen. Differenziert man nun den Ausdruck (16) nacheinander nach  $s_2$  und  $s_3$  und setzt nachher

$$s_2 = s, \quad s_3 = s_1, \quad s_1 = s + 1$$

so erhält man gerade den Ausdruck  $[f; 1]$ , dessen Invariantennatur dadurch klar wird.

Die Gleichung (3) ist also ein Analogon zu der Differenzialgleichung dritter Ordnung, die in der Theorie der automorphen Funktionen eine Rolle spielt. Ist  $f$  eine partikuläre Lösung von (3), so erhält man in  $\frac{af+b}{cf+d}$  eine dreifach unendliche Schar weiterer Lösungen. Doch wird durch eine solche Schar bei weitem nicht die Gesamtheit der Lösungen geliefert. Wie wir gesehen haben, führt ja jede  $Z$ -Kurve (bei passender Wahl der Konstanten) zu 2 neuen Scharen. [Dass  $f_1$  und  $f_2$  nicht der gleichen Schar angehören können, ergibt sich leicht aus (2)]. Die Lösung der Funktionalgleichung stellt deshalb doch ein ganz anderes Problem vor als die der entsprechenden Differenzialgleichung.

## § 6

Der Umstand, dass jede analytische Kurve mit einer ungeraden Anzahl von Spitzen zu einer  $Z$ -Kurve und damit zu einer Lösung der Funktionalgleichung führt, erlaubt es, an einzelnen Beispielen den Charakter solcher Lösungen zu studieren. So liefern die einfachsten  $Z$ -Kurven, nämlich die Gerade und der Kreis, die beiden partikulären Lösungen  $f(s) = a \cdot s$  und  $f(s) = e^{as}$ . Im ersten Fall ist ersichtlich  $l=h$ , und dies ist der einzige Fall, in dem die Funktionalgleichung ein algebraisches Integral besitzt. Alle andern Lösungen sind transzendent. Wir geben zum Schluss ein Beispiel, das sich ohne grosse Rechnung durchführen lässt.

Wir definieren die Gleitkurve  $\Phi$  durch die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{a}{2} \left\{ \frac{\cos(n+1)\vartheta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\vartheta}{n-1} \right\} \\ \eta &= \frac{a}{2} \left\{ \frac{\sin(n+1)\vartheta}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\vartheta}{n-1} \right\} \end{aligned}$$

Man berechnet hieraus leicht der Reihe nach

$$\begin{aligned}d\xi &= -a \sin(n\vartheta) \cos\vartheta \cdot d\vartheta; \\d\eta &= a \cos(n\vartheta) \cos\vartheta \cdot d\vartheta\end{aligned}$$

$$(2) \quad d\sigma = a \cdot \cos\vartheta \cdot d\vartheta$$

Es folgt weiter

$$(4) \quad \frac{d\xi}{d\sigma} = \xi' = -\sin(n\vartheta); \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \eta' = \cos(n\vartheta)$$

$$(5) \quad \frac{\eta''}{\xi'} = \frac{n}{a} \cdot \frac{1}{\cos\vartheta}$$

Für ein *ungerades*  $n$  ist die Kurve (1) symmetrisch zur  $\xi$ -Achse und hat auf dieser bei  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  eine Spitze. Der Bogen von  $\vartheta = 0$  bis zur Spitze ergibt sich aus (2) leicht gleich  $a$ ; somit ist der Umfang  $= 2a$ . Für  $n = 3$  kennt man die Kurve unter dem Namen *Cardioid*.

Wächst  $\vartheta$  um  $\pi$ , so gehen  $\xi$  und  $\eta$  in sich über, während  $\xi'$  und  $\eta'$  das Zeichen wechseln, eben weil die Tangente beim Durchgang durch die Spitze den Sinn ändert. Dabei vertauschen sich, wie die Gleichungen (4) in § 5 bestätigen, die Punkte  $(x, y)$  und  $(\bar{x}, \bar{y})$  der Z-Kurve. Die dortige Formel (9) gibt nun wegen der obigen Gleichungen (5) und (3)

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1 + \frac{n^2 h^2}{a^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{(a^2 + n^2 h^2) - a^2 \sin^2 \vartheta}{a^2 \cos^2 \vartheta}$$

Setzen wir nun

$$\frac{a^2}{a^2 + n^2 h^2} = k^2$$

so wird

$$(6) \quad s = \frac{1}{k} \int_0^{\vartheta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \cdot d\vartheta$$

Für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  erhalten wir den halben Umfang der Z-Kurve

$$1 = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta = \frac{E^1}{k} \text{ (nach Legendre).}$$

Aus § 5 (4) und § 6 (1) ergibt sich ferner

$$(7) \quad f_1(s) = x + iy = a \left\{ \frac{e^{i(n+1)\vartheta}}{n+1} + \frac{e^{i(n-1)\vartheta}}{n-1} \right\} + hi \cdot e^{in\vartheta}$$

Wir setzen schliesslich mit Jacobi

$$\vartheta = a m(u, k) \\ \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta = \int d n^2(u) du = E(u)$$

sodass die Funktion  $f_1(s)$  definiert erscheint durch die beiden Gleichungen

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{E(u)}{k} \\ f_1(s) = a \left\{ \frac{e^{i(n+1)am(u)}}{n+1} + \frac{e^{i(n-1)am(u)}}{n-1} \right\} + h i e^{in am(u)} \end{array} \right.$$

Es ist also  $f_1$  eine elliptische Funktion erster Art von  $u$ , wobei  $u$  selbst in Bezug auf  $s$  die inverse Funktion einer elliptischen Funktion zweiter Art ist.

Betrachten wir in den Gleichungen (1)  $n$  als *gerade* Zahl, so ist die dargestellte Kurve symmetrisch zu beiden Achsen, und besitzt bei  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und  $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$  je eine Spitze. Wächst  $\vartheta$  um  $\pi$ , so wechseln  $\xi$  und  $\eta$  das Vorzeichen, während  $\xi'$  und  $\eta'$  unverändert bleiben. Die Endpunkte A und B der Sehne erzeugen 2 getrennte Linien, *die aber einfach 2 zum Punkt (0, 0) symmetrische Exemplare derselben Kurve sind*. Denn die Gleichungen (4) in § 5 zeigen, dass jetzt

$$\begin{aligned} x(\vartheta + \pi) &= -\xi + h \xi' = -\bar{x} \\ y(\vartheta + \pi) &= -\eta + h \eta' = -\bar{y} \end{aligned}$$

ist, womit die Behauptung erwiesen ist.

Auch solche Kurven, die mit ihren Kolligierten *kongruent* sind, haben ein gewisses Interesse. Bildet man aus ihren laufenden Koordinaten wie in § 5 die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ , so sind auch diese Lösungen einer Funktionalgleichung, nämlich der Gleichung

$$\frac{f'(s) \cdot f'(s+1)}{[f(s) + f(s+1)]^2} = -\frac{1}{2h^2}$$

doch hat hier der Ausdruck der linken Seite nicht mehr die Eigenschaft, gegenüber linearen Transformationen von  $f$  invariant zu bleiben.

Wir schliessen hiemit unsere Betrachtungen. Man kann sie nach verschiedenen Richtungen fortsetzen und insbesondere auf den dreidimensionalen Raum ausdehnen. Doch müssen wir an dieser Stelle auf weitere Ausführungen verzichten.

Eingegangen 3. Juli 1910.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel](#)

Jahr/Year: 1910

Band/Volume: [21\\_1910](#)

Autor(en)/Author(s): Spiess O.

Artikel/Article: [Ueber eine Klasse von Kurven 102-114](#)