

Zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung.

Mit einer Tafel (II).

Von

Th. Niethammer.

I.

Es ist üblich, die beobachteten Schwerebeschleunigungen je nach dem Zweck ihrer Verwendung nach zwei verschiedenen Methoden auf ein einheitliches Niveau zu reduzieren. Beim *Faye*'sehen Verfahren denkt man sich die äusseren, oberhalb des Meeresniveaus gelegenen Massen zu einer Flächenschicht im Meeresniveau kondensiert. Bezeichnet man mit g die im Punkte P in der Meereshöhe H beobachtete Schwerebeschleunigung und mit Δg ihre Änderung in freier Luft beim Übergang vom Punkte P zu dem vertikal darunter gelegenen Punkte Q dicht über dem Meeresniveau, so stellt, wenn man den Wert

$$g_0 = g + \Delta g \quad (1)$$

mit dem theoretischen Wert γ_0 der Schwere im Meeresniveau vergleicht, die Differenz

$$g_0 - \gamma_0 = (g + \Delta g) - \gamma_0 \quad (2)$$

die totale Schwerestörung im Meeresniveau dar.

Dieses Verfahren liefert im allgemeinen für die Schwerestationen im Flachlande geringe Abweichungen $g_0 - \gamma_0$; wird es dagegen auf Schwerestationen im Gebirge angewendet, so erhält man grosse positive oder negative Differenzen, je nachdem sich die Station über oder unter der mittleren Höhe der umgebenden Massen befindet (vergl. z. B. Band XXIII dieser Verhandlungen, Seite 194 ff.). Sobald die äusseren Massen das Stationsniveau überragen, ist die Anziehung der kondensierten Massen auf den Punkt Q nicht gleich gross wie die Anziehung der Massen vor der Kondensation auf den Punkt P ; deshalb werden die Schwerebeschleunigungen von Gebirgsstationen durch das *Faye*'sche Verfahren nicht auf vergleichbare Werte zurückgeführt.

Das *Bouguer'sche* Verfahren unterscheidet sich vom *Faye'schen* dadurch, dass die Schwerewerte von der Anziehung der äusseren Massen in der Umgebung der Station befreit werden. Bezeichnen wir mit Δg_1 die vertikale Komponente der Anziehung dieser Massen auf den Punkt P, so ist

$$g''_0 = g + \Delta g - \Delta g_1 \quad (3)$$

derjenige Wert der Schwerebeschleunigung, den man im Punkte Q beobachtet hätte, wenn man sich die äusseren Massen in der Umgebung der Station weggenommen denkt. In der Differenz

$$g''_0 - \gamma_0 = (g + \Delta g - \Delta g_1) - \gamma_0 \quad (4)$$

kommt also nur noch die Wirkung der Massenstörung unterhalb des Meeresniveaus zum Ausdruck.

In Gebirgsgegenden sind die Differenzen $g''_0 - \gamma_0$ fast durchweg kleiner als null und nehmen im allgemeinen umso grössere negative Werte an, je grösser die durchschnittlichen Erhebungen der Gebirgsmassen sind. Beide Verfahren, sowohl das *Faye'sche* als das *Bouguer'sche*, lassen aber nicht erkennen, ob die auf Gebirgsstationen beobachtete Schwere normal sei oder nicht; als normal ist die Schwere einer Gebirgsstation dann anzusehen, wenn der tatsächlich vorhandene Massendefekt unterhalb des Meeresniveaus durch die äusseren Gebirgsmassen vollständig kompensiert wird.

Um diesen Nachteil zu vermeiden, hat *Hayford* ein Reduktionsverfahren vorgeschlagen, bei welchem die Wirkung des Massendefektes unter den Gebirgen oder des Massenüberschusses unter den Meeren in Rechnung gezogen wird.¹⁾ Das wird möglich, wenn man die *Pratt'sche* Hypothese, wonach vertikale Prismen von gleichem Querschnitt, die von der äusseren Begrenzung der Erde bis zu einer gemeinsamen Niveaufläche im Erdinnern gehen, an verschiedenen Stellen der Erde gleich viel Masse enthalten, so bedingt, dass die Grösse und Lage des Massendefektes oder Überschusses als bekannt angesehen werden kann. Hiezu nimmt *Hayford* an, es werde eine homogene Erdrinde erzeugt, wenn die äussern Massen lotrecht verschoben und unterhalb des Meeresniveaus gleichmässig bis zur Tiefe der gemeinsamen Niveaufläche, der sogenannten Ausgleichsfläche, verteilt werden oder wenn man den Massenüberschuss unterhalb des Meeres in gleicher Weise zur Kompensation der geringeren Dichte des Meereswassers verwendet. Mit andern Worten: die *Hayford'sche* Bedingung nimmt an, dass sich die Begrenzung der festen Erdober-

¹⁾ Vergleiche: The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity, by John F. Hayford and William Bowie, Coast and Geodetic Survey, Special Publication N° 10, Washington 1912.

fläche im Massendefekt oder Überschuss widerspiegeln oder dass die Pratt'sche Hypothese auch für Prismen von kleinstem Querschnitt als gültig anzusehen sei. Es wird schon von Hayford bemerkt, dass unzweifelhaft die Kompensation der äusseren Massen oder des Meeresswassers nicht in dieser Weise erfolgen könne. Diese Annahme hat aber den grossen Vorteil, die Berechnung der isostatisch reduzierten Schwerewerte sehr zu vereinfachen, indem sie gestattet, die *Resultante* aus der Anziehung der äusseren Massen und der Wirkung des Massendefektes oder Überschusses zu berechnen.

Die Dichte des Massendefektes (oder Überschusses) an irgend einer Stelle der Erdrinde ergibt sich nach dieser Annahme auf folgendem Wege. Die äussere Erdrinde zwischen dem Meeresniveau und der Ausgleichsfläche in der Tiefe T sei ursprünglich eine homogene Schale von der Dichte Θ_0 gewesen. Eine Massenerhebung über dem Meeresniveau von der Höhe h sei dadurch entstanden, dass die homogene Schicht unter gleichmässiger Dichteverminderung gehoben wurde, bis sie das Niveau h erreicht hatte. Bezeichnen wir die neue Dichte mit δ , so besteht, wenn man, wie Hayford, von der Erdkrümmung absieht, die Beziehung

$$(T + h) \delta = T \cdot \Theta_0 \quad (5)$$

aus welcher man für die Dichte δ des Massendefektes erhält:

$$\delta = \delta - \Theta_0 = -\frac{h}{T + h} \Theta_0 \quad (6)$$

Statt dessen darf in ausreichender Annäherung angenommen werden:

$$\delta = -\frac{h}{T} \Theta_0 \quad (a)$$

Die hierbei begangene Vernachlässigung läuft darauf hinaus, dass man den äusseren Massen statt der nach Gleichung (5) variablen Dichte δ die konstante Dichte Θ_0 zuschreibt, wie aus der Form $T \delta = -h \Theta_0$ erkannt wird.

Bei strengerer Rechnung hat man die Erdkrümmung zu berücksichtigen. Sieht man die Erde als Kugel vom Radius R an, so hat man statt der Gleichung (5) die Beziehung

$$\left\{ (R + h)^3 - (R - T)^3 \right\} \delta = \left\{ R^3 - (R - T)^3 \right\} \Theta_0 \quad (7)$$

Entwickelt man nach Potenzen von $\frac{h}{R}$ und $\frac{T}{R}$ und setzt

$$T \left(1 - \frac{T}{R}\right) = T'$$

so folgt, wenn Glieder von der Ordnung $\frac{h}{R}$ und $\frac{T^2}{R^2}$ vernachlässigt werden, die der Gleichung (6) analoge Form:

$$\Theta = \delta - \Theta_0 = - \frac{h}{T' + h} \Theta_0 \quad (8)$$

Statt dessen darf wieder in ausreichender Annäherung gesetzt werden :

$$\Theta = - \frac{h}{T'} \Theta_0 \quad (b)$$

Berechnet man den Massendefekt nach dem Ausdruck (a) statt nach (b), so begeht man einen Fehler von der Ordnung $\frac{T}{R}$ d. i. nahezu 2% für $T = 120$ km.

Für die Dichte Θ des Massenüberschusses unterhalb des Meeres erhält man, wenn die Tiefe des Meeresbodens gleich t und die Dichte des Meeresswassers gleich Θ_w gesetzt wird, entsprechend der Gleichung (b):

$$\Theta = \frac{t}{T'} (\Theta_0 - \Theta_w) \quad (b')$$

Auf Grund des Ausdruckes (a) oder (b) für die Dichte des Massendefektes (oder Überschusses) kann, wenn T als bekannt vorausgesetzt wird, die Resultante aus der Wirkung der äusseren Massen und des Massendefektes auf den Punkt P berechnet werden. Bezeichnen wir die vom Massendefekt (oder Überschuss) allein herführende Komponente dieser Wirkung mit Δg_2 , so ist die Resultante Δg_i gleich

$$\Delta g_i = \Delta g_1 + \Delta g_2$$

Reduziert man die normale Schwere γ_0 im Meeresniveau mittels der normalen Änderung Δg auf das Niveau der Beobachtungsstation:

$$\gamma = \gamma_0 - \Delta g$$

und vermehrt γ um den Betrag Δg_i , so erhält man für die normale Schwere γ im Stationsniveau:

$$\gamma_i = \gamma + \Delta g_i = \gamma_0 - \Delta g + \Delta g_i$$

In der Differenz zwischen dem beobachteten Wert g der Schwerebeschleunigung und dem *isostatisch* reduzierten Normalwert γ_i :

$$g - \gamma_i = (g + \Delta g - \Delta g_i) - \gamma_0 \quad (9)$$

kommen nun diejenigen Massen zum Ausdruck, welche eine Störung darstellen gegenüber der ideellen Massenverteilung in der Erdrinde, die vorhanden wäre, wenn die Hayford'sche Bedingung der Wirklichkeit entspräche.

Hayford hat nach diesem Verfahren die Schwereabweichungen $g - \gamma_i$ von 89 Stationen, die über die Vereinigten Staaten von Nordamerika verteilt sind, berechnen lassen, indem die Wasser- und Landmassen der gesamten Erde in die Rechnung einbezogen wurden, und

findet zwischen den Mittelwerten von Stationsgruppen gleicher topographischer Lage überraschend kleine Differenzen $(g - \gamma_i)$.²⁾ Das Verfahren wurde von Hayford auch auf die Schwerewerte einiger ausseramerikanischer Stationen angewendet, unter welchen sich zwei Schwerestationen der Schweizerischen Geodätischen Kommission befinden, nämlich die Stationen St. Maurice und Gornergrat. Die Wahl dieser beiden Stationen ist offenbar dadurch veranlasst worden, dass sie topographisch sehr verschieden liegen, nach dem Bouguer'schen Verfahren aber die gleiche Schwereabweichung $g''_0 - \gamma_0$ aufweisen. Um die Brauchbarkeit des Hayford'schen Verfahrens für Schwerestationen im Gebirge zu prüfen, habe ich seinerzeit 11 weitere schweizerische Schwerestationen darnach berechnet. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im Procès-verbal de la 56^{me} séance de la Commission géodésique suisse 1910, Seite 43 ff. publiziert. Dieser Stelle ist die nachstehende Zusammenstellung der Schwereabweichungen dieser 13 Stationen nach dem Bouguer'schen und Hayford'schen Verfahren entnommen:

Station	See- höhe	Geographische		Δg_i	$g - \gamma_i$ Hayford	$g''_0 - \gamma_0$ Bouguer
		Breite	Länge östlich Greenwich			
	m			cm sec ⁻²	cm sec ⁻²	cm sec ⁻²
St. Maurice . . .	419	46° 13'0	7° 0'2	- 0.091	+ 0.006	- 0.108
Sitten	514	14.1	7 21.5	- 0.082	- 0.007	- 0.130
Iselle	630	12.5	8 12.1	- 0.105	+ 0.004	- 0.123
Visp	649	17.6	7 53.0	- 0.090	- 0.002	- 0.136
Brig	683	19.7	8 0.4	- 0.085	- 0.003	- 0.133
Gsteig	1185	23.2	7 16.2	- 0.001	+ 0.022	- 0.095
Zermatt	1603	1.5	7 45.0	- 0.006	+ 0.041	- 0.108
Simplonospiz	1998	14.9	8 1.9	+ 0.076	+ 0.013	- 0.131
Sanetsch	2041	19.2	7 17.2	+ 0.085	+ 0.021	- 0.111
Chanrion	2435	45 56.3	7 22.9	+ 0.113	+ 0.044	- 0.113
Grd. St. Bernard	2473	52.1	7 10.4	+ 0.131	+ 0.009	- 0.136
Schwarzsee . . .	2582	59.5	7 42.7	+ 0.125	+ 0.055	- 0.105
Gornergrat . . .	3016	59.0	7 46.8	+ 0.165	+ 0.052	- 0.109

Wie hieraus ersichtlich ist, liefert das Hayford'sche Verfahren, absolut genommen, erheblich kleinere Schwereabweichungen als das Bouguer'sche. Betrachtet man indessen die relativen Änderungen, so muss auffallen, dass innerhalb des die obigen Stationen umfassenden Gebietes nach dem Hayford'schen Verfahren grössere Variationen bestehen als nach dem Bouguer'schen; die Differenz zwischen Maximal-

²⁾ Siehe a. a. O. Seite 75 ff.

und Minimalwert beträgt im ersten Fall 62, im zweiten Fall 41 Einheiten der dritten Dezimalstelle. Wenn man versucht, auf einer Karte Kurven gleicher Anomalie für die Hayford'schen Werte zu konstruieren, so entsteht ein Bild, das einerseits mit dem Verlauf der Linien nach dem Bouguer'schen Verfahren grosse Ähnlichkeit hat, in dem sich aber andererseits deutlich eine Abhängigkeit von der Stationshöhe und von der durchschnittlichen Erhebung der Gebirgsmassen ausdrückt. Man wird von vorneherein geneigt sein, hierin eine Folge der nicht zutreffenden Voraussetzung Hayfords zu sehen, wonach sich im Massendefekt die äussere Begrenzung der Erdoberfläche widerspiegelt. Der wirklichen Massenverteilung in der Erdrinde kommt jedenfalls die Annahme näher, dass für den Massendefekt unterhalb einer Gebirgsgegend nur die *durchschnittliche* Terrainerhebung innerhalb einer bestimmten Fläche massgebend sei. Wie gross diese Fläche anzunehmen sei, darüber fehlen bis jetzt noch bestimmte Anhaltspunkte. Doch wird man in jedem Falle einen zutreffenderen Wert für die isostatische Reduktion berechnen, wenn man eine in horizontaler Richtung ausgeglichene Form der Erdoberfläche zu Grunde legt, insofern sich nur die Ausgleichung nicht über eine zu grosse Fläche ausdehnt. Wenn aber für die Dichte des Massendefektes eine ausgeglichene Terrainform massgebend ist, dann kann die isostatische Reduktion Δg_i nicht mehr nach Hayfords Vorgang berechnet werden, sondern es muss die Berechnung der Komponente Δg_1 der äussern Massen auf Grund der wirklichen topographischen Gestalt der Erdoberfläche und die Berechnung der Komponente g_2 des Massendefektes auf Grund des ausgeglichenen Terrains erfolgen.³⁾

Zur Berechnung von Δg_1 oder Δg_2 denkt man sich die Erdrinde in einzelne Zonen geteilt durch konzentrische Kegelflächen, deren Spitze im Mittelpunkt der als Kugel vom Radius R angenommenen Erde liegt, und deren Axe mit der Lotrichtung der Beobachtungsstation zusammenfällt. Die Zonen werden durch vertikale Ebenen, die sich unter gleichem Winkelabstand in dieser Lotrichtung schneiden, in einzelne Sektoren zerlegt. Nach dem Hayford'schen Verfahren hat man dann in jedem einzelnen Zonensektor die mittlere Höhe zu bestimmen und kann dann den entsprechenden Betrag von Δg_i angeben. In der nächsten Umgebung der Station muss die Breite der Zonen sehr schmal angenommen werden, damit die wirkliche Terraingestalt genau berücksichtigt wird; die linear gemessenen Radien der ersten Zonen der Hayford'schen Einteilung sind in Metern:

³⁾ Vergl. Seite 48 des erwähnten Procès-verbal; ferner: O. E. Schiötz, Ueber die Isostasie der Schwerkraftbestimmungen, und Erich Hübner, Beitrag zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung (Gerlands Beiträge zur Geophysik, XII. Band, Heft 4).

2, 68, 230, 590, 1280, 2290, 3520, 5240, 8440 etc.

Wenn aber Δg_2 auf Grund einer ausgeglichenen Terrainform berechnet wird, kann die Zonenbreite von Anfang an grösser angenommen werden. Da mit der Zunahme der Zonenbreite die Zahl der zu bestimmenden Höhen abnimmt, wird dadurch die Berechnung von Δg_2 viel expeditiver gestaltet. Die gesonderte Berechnung von Δg_1 und Δg_2 hat übrigens nur bis zu derjenigen Entfernung von der Station zu erfolgen, wo die Zonenbreite gleich oder grösser ist als die lineare Ausdehnung der Fläche, innerhalb deren die Erdoberfläche ausgeglichen wurde; für die weiter entfernt liegenden Massen genügt es, die Resultante Δg_i zu berechnen.

II.

1. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, für den Fall, dass eine Karte vorliege, welche mittels Horizontalkurven eine ausgeglichene Form des Terrains gibt, denjenigen Anteil an der isostatischen Reduktion Δg_2 zu bestimmen, der von den Massen innerhalb einer bestimmten Entfernung a herrührt, und zwar für verschiedene Annahmen für die Tiefe T der Ausgleichsfläche; dieser Anteil sei mit (Δg_2) bezeichnet.

Die Erdrinde denken wir uns in der angegebenen Weise durch ein System von Kegelflächen und Vertikalebene in einzelne Abschnitte zerlegt. Die durchschnittliche Höhe innerhalb des Sektors einer Zone werde auf der Karte der ausgeglichenen Erdoberfläche abgelesen. Die Dichte des Massendefektes in dem diesem Abschnitt entsprechenden Raume zwischen dem Meeresniveau und der Niveaufläche in der Tiefe T ist dann durch den Ausdruck (b) gegeben. Die Vertikalkomponente der Anziehung, welche eine über diesen Raum gleichmässig verteilte Masse von der Dichte Θ auf die Beobachtungsstation P in der Meereshöhe H ausübt, sei mit \mathfrak{U}_P bezeichnet. Summieren wir \mathfrak{U}_P über sämtliche Sektoren und sämtliche Zonen innerhalb der Entfernung a , so erhalten wir für (Δg_2) :

$$(\Delta g_2) = \Sigma \mathfrak{U}_P \quad (10)$$

Wenn wir den Radius R unendlich gross werden lassen, womit die Erde in der Umgebung der Station bis zur Entfernung a als eben vorausgesetzt wird, soll \mathfrak{U}_P in A_P , d. i. in die Anziehungskomponente eines Hohlzylindersektors, übergehen. In jedem Abschnitt wird \mathfrak{U}_P in einem bestimmten Verhältnis zu A_P stehen, sodass wir setzen können:

$$\mathfrak{U}_P = \Phi \cdot A_P \quad (11)$$

wo der Faktor Φ für die einzelne Zone konstant ist. Denken wir uns nun die Beobachtungsstation P lotrecht verschoben bis in den Punkt Q dicht über dem Meeresniveau, so soll A_P in den Wert A_Q übergehen und man kann wieder setzen

$$A_P = (1 + f) A_Q. \quad (12)$$

A_Q bezieht sich auf eine beliebige Annahme für die Tiefe T. Für einen speziellen Fall $T = T_0$ gehe in A_Q^0 über und es sei

$$A_Q = F_0 A_Q^0 \quad (13)$$

Für \mathfrak{A}_P erhält man somit durch die Einführung der Ausdrücke (11), (12) und (13):

$$\mathfrak{A}_P = F_0 A_Q^0 + F_0 f A_Q^0 + (\Phi - 1) F_0 A_Q^0 + (\Phi - 1) F_0 f A_Q^0 \quad I$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite dieser Gleichung entsprechen der Annahme, die Berechnung von \mathfrak{A}_P könne erfolgen unter der Voraussetzung, dass die Erdkrümmung vernachlässigt werden dürfe; die beiden letzten Glieder, die den Faktor $(\Phi - 1)$ enthalten, berücksichtigen den bei dieser Voraussetzung begangenen Fehler.

Zunächst suchen wir für A_Q^0 d. i. die Vertikalkomponente der Anziehung eines Hohlzylindersektors von bekannter Dichte auf den Punkt Q, einen möglichst einfachen Ausdruck; die übrigen in Formel I vorkommenden Grössen F_0 , f und $(\Phi - 1)$ sind dann bestimmt, wenn für die Tiefe T der Ausgleichsfläche und die Höhe H der Beobachtungsstation spezielle Annahmen eingeführt werden.

Bestimmung von A_Q^0 . Die Anziehung eines Hohlzylinders von der Höhe T_0 und mit dem inneren Radius a_1 und dem äusseren Radius a_2 auf dem Punkt Q ist, wenn k^2 die Konstante der allgemeinen Massenanziehung und Θ die Dichte bezeichnet, gegeben durch den Ausdruck⁴⁾

$$2\pi k^2 \Theta (a_2 - a_1 + \sqrt{a_1^2 + T_0^2} - \sqrt{a_2^2 + T_0^2}) \quad (14)$$

Setzt man für Θ den aus der Formel (a) folgenden Wert

$$\Theta = -\frac{h}{T_0} \Theta_0$$

ein, so wird, wenn der Hohlzylinder durch $\frac{n}{2}$ Vertikalebene, die sich unter gleichen Winkeln in der Lotrichtung von Q schneiden, in Sektoren zerlegt wird, A_Q^0 gleich:

⁴⁾ Siehe z. B. *Helmert*, Die math. und physik. Theorien der höheren Geodäsie. II. Teil, Seite 141 ff.

$$A_Q^0 = - \frac{2\pi k^2}{n} \Theta_0 \frac{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1^2 + T_0^2} - \sqrt{a_2^2 + T_0^2}}{T_0} \cdot h \quad (15)$$

Die Radien a_1 und a_2 können bei gegebenen Werten von n , Θ_0 und T_0 so gewählt werden, dass A_Q^0 gleich dem Produkt aus einer Potenz von 10 und der Höhe h wird. Als passende Annahme für die praktische Durchführung der Rechnung setzen wir, wenn h in Metern ausgedrückt wird:

$$A_Q^0 = - h \cdot 10^{-6} \text{ cm sec}^{-2} \quad (16)$$

Das heisst: die Radien a_1 und a_2 müssen die Bedingung erfüllen:

$$\frac{2\pi k^2}{n} \cdot \Theta_0 \frac{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1^2 + T_0^2} - \sqrt{a_2^2 + T_0^2}}{T_0} 10^6 = 1 \quad (17)$$

Wenn man für k^2 den aus der Gleichung

$$g = \frac{3}{4}\pi k^2 \Theta_m R$$

folgenden Wert einführt und die nachstehenden, speziellen Zahlenwerte annimmt:

$$\begin{aligned} n &= 8 & ; & \quad g = 980,6 \text{ cm sec}^{-2} \quad (\text{mittlere Schwerebeschleunigung}) \\ \Theta_0 &= 2,70 & ; & \quad \Theta_m = 5,52 \quad (\text{mittlere Erddichte}) \\ T_0 &= 120 \text{ km} & ; & \quad R = 6371 \text{ km} \quad (\text{mittlerer Erdradius}), \end{aligned}$$

so wird die Bedingung (16) von dem folgenden Radiensystem erfüllt:

Zone	Radius der Hohlzylinder zur Berechnung von A_Q^0 für $T_0 = 120 \text{ km}$ km
	0,000
I	8,825
II	18,405
III	28,944
IV	40,726
V	54,160
VI	69,858
VII	88,773
VIII	112,484
IX	143,801
X	188,269

Liest man somit für diese Zoneneinteilung in je 8 Sektoren die durchschnittliche Höhe h in Metern ab und bildet die Summe der 8×10 Ablesungen, so stellt diese Summe, mit negativem Zeichen ge-

nommen, die isostatische Reduktion (Δg_2) dar in Einheiten der sechsten Dezimale von g in cm sec^{-2} unter der Annahme, dass der Punkt P mit dem Punkte Q dicht über dem Meeresniveau zusammenfalle und dass von der Erdkrümmung abgesehen werden könne.

Bestimmung von F_0 . Aus der Definitionsgleichung (13) für F_0 und der Gleichung (15) folgt:

$$F_0 = \frac{A_Q}{A_Q^0} = \frac{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1^2 + T^2} - \sqrt{a_2^2 + T^2}}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1^2 + T_0^2} - \sqrt{a_2^2 + T_0^2}} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (18)$$

Für die obige Zoneneinteilung und für die folgenden Annahmen von T:

$$T = 80, 100, 140, 160 \text{ km}$$

resultieren aus der Gleichung (18) die nachstehenden Werte von F_0 :

Zone	$F_0 = \frac{A_Q}{A_Q^0}$			
	T = 80 km	100 km	140 km	160 km
I	1,4716	1,1908	0,8618	0,7572
II	1,4072	1,1701	0,8725	0,7736
III	1,3329	1,1454	0,8857	0,7938
IV	1,2506	1,1169	0,9013	0,8185
V	1,1637	1,0848	0,9202	0,8485
VI	1,0762	1,0500	0,9425	0,8850
VII	0,9920	1,0136	0,9684	0,9284
VIII	0,9143	0,9771	0,9976	0,9798
IX	0,8456	0,9418	1,0296	1,0388
X.	0,7876	0,9095	1,0634	1,1046

Bestimmung von f. Die Vertikalkomponente der Anziehung des Hohlzylindersektors auf den Punkt P in der Meereshöhe H ist durch den folgenden Ausdruck gegeben, wenn die Dichte nach Gleichung (a) angenommen wird:

$$A_P = -\frac{2\pi k^2}{n} \Theta_0 \frac{\sqrt{a_2^2 + H^2} - \sqrt{a_2^2 + (T+H)^2} - \sqrt{a_1^2 + H^2} + \sqrt{a_1^2 + (T+H)^2}}{T} \cdot h \quad (19)$$

Der Faktor f ist somit bestimmt durch die Gleichung:

$$1 + f = \frac{A_P}{A_Q} = \frac{\sqrt{a_2^2 + H^2} - \sqrt{a_2^2 + (T+H)^2} - \sqrt{a_1^2 + H^2} + \sqrt{a_1^2 + (T+H)^2}}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1^2 + T^2} - \sqrt{a_2^2 + T^2}} \quad (20)$$

In den Tabellen Seite 218—221 ist das Produkt F_0f für die verschiedenen Annahmen von T und für die einzelnen Zonen tabuliert.

Bestimmung von Φ . Die Anziehung einer sphärischen Scheibe mit dem inneren Radius $(R-T)$ und dem äusseren Radius R auf den zentrisch über ihrer Mitte gelegenen Punkt P im Abstand $r' = R + H$ vom Erdmittelpunkt ist durch den Ausdruck gegeben:

$$2\pi k^2 \Theta \int_{R-T}^R \frac{r^2}{r'^2} \left(1 - \frac{r' \cos \psi - r}{E}\right) dr \quad (21)$$

Hierin bezeichnet ψ den Winkel, den die Lotrichtung in P mit dem vom Erdmittelpunkt nach dem äusseren Rand der Scheibe gezogenen Radius bildet, und E ist gleich:

$$E = + \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}$$

Das Integral lässt sich, wie Hübner gezeigt hat⁵⁾, ausführen; sein Wert, der mit α bezeichnet sei, ist gleich

$$\alpha = \left[\int_{R-T}^R \frac{r^3}{3r'^2} + E \left(\frac{r^2}{3r'^2} + \frac{r \cos \psi}{3r'} - \frac{2}{3} + \cos^2 \psi \right) - \cos \psi \sin^2 \psi \cdot r' \lg (r - r' \cos \psi + E) \right] \quad (22)$$

Mit $\psi_1 = \frac{a_1}{R}$ und $\psi_2 = \frac{a_2}{R}$ erhalten wir somit für \mathfrak{A}_P den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}_P = \frac{2\pi k^2}{n} \Theta [\alpha]_{\psi_1}^{\psi_2}$$

oder
$$\mathfrak{A}_P = -\frac{2\pi k^2}{n} \Theta_0 \left[\frac{\alpha}{T'} \right]_{\psi_1}^{\psi_2} \cdot h \quad (23)$$

wenn der Wert, der aus der Gleichung (b) für die Dichte Θ des Massendefektes resultiert, eingeführt wird. Die Faktoren Φ sind dann nach der Definitionsgleichung (11) bestimmt durch:

$$\Phi = \frac{\mathfrak{A}_P}{A_P}$$

wo \mathfrak{A}_P und A_P durch die Gleichungen (23) und (19) gegeben sind.

⁵⁾ Siehe a. a. O. Seite 598 ff.

Der bedeutende Aufwand an Rechnerarbeit, den die Bestimmung von Φ nach dieser Formel erfordert, lässt sich umgehen, wenn man annehmen darf, dass man für das Verhältnis von \mathfrak{A}_P zu \mathfrak{A}_Q , in welchen Wert \mathfrak{A}_P für $H = 0$ übergehen soll, setzen könne:

$$\frac{\mathfrak{A}_P}{\mathfrak{A}_Q} = \frac{A_P}{A_Q} = 1 + f \quad (24)$$

Denn dann braucht nur \mathfrak{A}_Q berechnet zu werden und die langwierige Berechnung von \mathfrak{A}_P für verschiedene Annahmen von H fällt weg. Um zu zeigen, dass die in (24) enthaltene Annahme, die Höhenänderung sei bei Berücksichtigung der Erdkrümmung gleich gross wie bei ihrer Vernachlässigung, gemacht werden darf, ist für einen bestimmten Fall, nämlich $T = 120$ km und $H = 2000$ m, das Verhältnis $\frac{\mathfrak{A}_P}{\mathfrak{A}_Q}$ berechnet und mit dem Verhältnis $\frac{A_P}{A_Q}$ verglichen worden. Aus der nachstehenden Übersicht ergibt sich, dass in der Tat durch die

Zone	$\frac{\mathfrak{A}_P}{\mathfrak{A}_Q}$	$\frac{A_P}{A_Q}$	Differenz
I	0,792	0,792	0,000
II	0,987	0,988	- 0,001
III	0,999	0,999	0,000
IV	1,003	1,003	0,000
V	1,006	1,007	- 0,001
VI	1,010	1,010	0,000
VII	1,012	1,013	- 0,001
VIII	1,016	1,017	- 0,001
IX	1,019	1,020	- 0,001
X	1,023	1,024	- 0,001

Annahme (24) kein Fehler erzeugt wird, der mehr als 1 0/100 ausmacht. Setzt man demnach

$$\mathfrak{A}_P = (1 + f) \mathfrak{A}_Q \quad (25)$$

und

$$\mathfrak{A}_Q = \Phi_0 \cdot A_Q \quad (26)$$

so geht die Formel I in die folgende über:

$$\mathfrak{A}_P = F_0 A_Q^0 + F_0 f A_Q^0 + (\Phi_0 - 1) F_0 A_Q^0 + (\Phi_0 - 1) F_0 f A_Q^0 \quad II$$

Faktoren F_{of} zur Berücksichtigung

Zone	I	II	III	IV	V
Meeres- höhe H	T = 80 km				
Meter					
200	- 0,0347	+ 0,0005	+ 0,0011	+ 0,0017	+ 0,0022
400	- 0,0686	+ 0,0005	+ 0,0021	+ 0,0033	+ 0,0044
600	- 0,1016	+ 0,0002	+ 0,0030	+ 0,0049	+ 0,0064
800	- 0,1340	- 0,0006	+ 0,0037	+ 0,0063	+ 0,0085
1000	- 0,1654	- 0,0018	+ 0,0042	+ 0,0077	+ 0,0105
1200	- 0,1962	- 0,0034	+ 0,0046	+ 0,0090	+ 0,0125
1400	- 0,2261	- 0,0054	+ 0,0049	+ 0,0102	+ 0,0144
1600	- 0,2553	- 0,0078	+ 0,0050	+ 0,0114	+ 0,0162
1800	- 0,2837	- 0,0105	+ 0,0050	+ 0,0125	+ 0,0180
2000	- 0,3113	- 0,0137	+ 0,0049	+ 0,0135	+ 0,0198
2200	- 0,3383	- 0,0172	+ 0,0046	+ 0,0144	+ 0,0215
2400	- 0,3645	- 0,0211	+ 0,0042	+ 0,0153	+ 0,0232
2600	- 0,3899	- 0,0253	+ 0,0036	+ 0,0161	+ 0,0248
2800	- 0,4147	- 0,0298	+ 0,0029	+ 0,0168	+ 0,0263
3000	- 0,4388	- 0,0347	+ 0,0020	+ 0,0174	+ 0,0278
	T = 100 km				
200	- 0,0278	+ 0,0002	+ 0,0006	+ 0,0010	+ 0,0013
400	- 0,0550	0,0000	+ 0,0010	+ 0,0018	+ 0,0026
600	- 0,0815	- 0,0005	+ 0,0014	+ 0,0027	+ 0,0038
800	- 0,1074	- 0,0012	+ 0,0017	+ 0,0034	+ 0,0050
1000	- 0,1326	- 0,0024	+ 0,0018	+ 0,0041	+ 0,0061
1200	- 0,1573	- 0,0038	+ 0,0018	+ 0,0048	+ 0,0072
1400	- 0,1813	- 0,0056	+ 0,0017	+ 0,0054	+ 0,0083
1600	- 0,2047	- 0,0077	+ 0,0015	+ 0,0059	+ 0,0094
1800	- 0,2274	- 0,0101	+ 0,0012	+ 0,0064	+ 0,0104
2000	- 0,2496	- 0,0128	+ 0,0008	+ 0,0068	+ 0,0113
2200	- 0,2712	- 0,0158	+ 0,0002	+ 0,0071	+ 0,0122
2400	- 0,2922	- 0,0190	- 0,0004	+ 0,0074	+ 0,0131
2600	- 0,3127	- 0,0226	- 0,0012	+ 0,0076	+ 0,0140
2800	- 0,3326	- 0,0264	- 0,0020	+ 0,0078	+ 0,0148
3000	- 0,3519	- 0,0305	- 0,0030	+ 0,0079	+ 0,0156
	T = 120 km				
200	- 0,0232	0,0000	+ 0,0003	+ 0,0005	+ 0,0008
400	- 0,0459	- 0,0002	+ 0,0005	+ 0,0010	+ 0,0016
600	- 0,0680	- 0,0007	+ 0,0007	+ 0,0015	+ 0,0023
800	- 0,0896	- 0,0014	+ 0,0007	+ 0,0019	+ 0,0030
1000	- 0,1107	- 0,0025	+ 0,0007	+ 0,0023	+ 0,0037
1200	- 0,1313	- 0,0038	+ 0,0005	+ 0,0026	+ 0,0044
1400	- 0,1513	- 0,0053	+ 0,0003	+ 0,0029	+ 0,0050
1600	- 0,1708	- 0,0071	0,0000	+ 0,0031	+ 0,0056
1800	- 0,1898	- 0,0092	- 0,0004	+ 0,0033	+ 0,0062
2000	- 0,2083	- 0,0116	- 0,0009	+ 0,0034	+ 0,0067
2200	- 0,2264	- 0,0142	- 0,0015	+ 0,0035	+ 0,0073
2400	- 0,2439	- 0,0170	- 0,0022	+ 0,0035	+ 0,0078
2600	- 0,2610	- 0,0200	- 0,0029	+ 0,0035	+ 0,0082
2800	- 0,2776	- 0,0233	- 0,0038	+ 0,0035	+ 0,0086
3000	- 0,2937	- 0,0268	- 0,0047	+ 0,0034	+ 0,0090

sichtigung der Stationshöhe.

VI	VII	VIII	IX	X	Zone
T = 80 km					Meeres- höhe H
					Meter
+ 0,0026	+ 0,0030	+ 0,0032	+ 0,0033	+ 0,0034	200
+ 0,0052	+ 0,0059	+ 0,0063	+ 0,0066	+ 0,0067	400
+ 0,0078	+ 0,0088	+ 0,0094	+ 0,0098	+ 0,0100	600
+ 0,0103	+ 0,0116	+ 0,0125	+ 0,0131	+ 0,0134	800
+ 0,0128	+ 0,0145	+ 0,0156	+ 0,0163	+ 0,0167	1000
+ 0,0152	+ 0,0173	+ 0,0187	+ 0,0196	+ 0,0200	1200
+ 0,0176	+ 0,0201	+ 0,0218	+ 0,0228	+ 0,0233	1400
+ 0,0200	+ 0,0228	+ 0,0248	+ 0,0260	+ 0,0266	1600
+ 0,0224	+ 0,0256	+ 0,0278	+ 0,0292	+ 0,0299	1800
+ 0,0247	+ 0,0283	+ 0,0308	+ 0,0324	+ 0,0332	2000
+ 0,0269	+ 0,0310	+ 0,0338	+ 0,0355	+ 0,0364	2200
+ 0,0292	+ 0,0337	+ 0,0368	+ 0,0387	+ 0,0397	2400
+ 0,0314	+ 0,0364	+ 0,0397	+ 0,0417	+ 0,0429	2600
+ 0,0335	+ 0,0389	+ 0,0426	+ 0,0449	+ 0,0462	2800
+ 0,0357	+ 0,0415	+ 0,0455	+ 0,0480	+ 0,0494	3000
T = 100 km					
+ 0,0017	+ 0,0020	+ 0,0024	+ 0,0026	+ 0,0029	200
+ 0,0033	+ 0,0040	+ 0,0047	+ 0,0052	+ 0,0057	400
+ 0,0049	+ 0,0060	+ 0,0070	+ 0,0079	+ 0,0086	600
+ 0,0065	+ 0,0080	+ 0,0093	+ 0,0105	+ 0,0114	800
+ 0,0081	+ 0,0099	+ 0,0116	+ 0,0130	+ 0,0143	1000
+ 0,0096	+ 0,0118	+ 0,0138	+ 0,0156	+ 0,0171	1200
+ 0,0111	+ 0,0137	+ 0,0161	+ 0,0182	+ 0,0199	1400
+ 0,0126	+ 0,0156	+ 0,0183	+ 0,0207	+ 0,0227	1600
+ 0,0140	+ 0,0175	+ 0,0206	+ 0,0233	+ 0,0255	1800
+ 0,0154	+ 0,0193	+ 0,0228	+ 0,0258	+ 0,0283	2000
+ 0,0168	+ 0,0211	+ 0,0250	+ 0,0283	+ 0,0311	2200
+ 0,0182	+ 0,0229	+ 0,0271	+ 0,0308	+ 0,0339	2400
+ 0,0195	+ 0,0247	+ 0,0293	+ 0,0333	+ 0,0367	2600
+ 0,0208	+ 0,0264	+ 0,0314	+ 0,0358	+ 0,0394	2800
+ 0,0221	+ 0,0282	+ 0,0336	+ 0,0383	+ 0,0422	3000
T = 120 km					
+ 0,0011	+ 0,0014	+ 0,0018	+ 0,0021	+ 0,0024	200
+ 0,0021	+ 0,0028	+ 0,0038	+ 0,0041	+ 0,0048	400
+ 0,0032	+ 0,0042	+ 0,0052	+ 0,0062	+ 0,0072	600
+ 0,0042	+ 0,0055	+ 0,0069	+ 0,0082	+ 0,0096	800
+ 0,0052	+ 0,0069	+ 0,0086	+ 0,0103	+ 0,0120	1000
+ 0,0062	+ 0,0082	+ 0,0102	+ 0,0123	+ 0,0144	1200
+ 0,0072	+ 0,0095	+ 0,0119	+ 0,0144	+ 0,0168	1400
+ 0,0081	+ 0,0108	+ 0,0136	+ 0,0164	+ 0,0191	1600
+ 0,0091	+ 0,0121	+ 0,0152	+ 0,0184	+ 0,0215	1800
+ 0,0100	+ 0,0133	+ 0,0168	+ 0,0203	+ 0,0238	2000
+ 0,0109	+ 0,0146	+ 0,0184	+ 0,0223	+ 0,0262	2200
+ 0,0117	+ 0,0158	+ 0,0200	+ 0,0243	+ 0,0285	2400
+ 0,0126	+ 0,0170	+ 0,0216	+ 0,0263	+ 0,0308	2600
+ 0,0134	+ 0,0182	+ 0,0232	+ 0,0282	+ 0,0344	2800
+ 0,0142	+ 0,0194	+ 0,0248	+ 0,0302	+ 0,0355	3000

Faktoren $F_0 f$ zur Berücksichtigung

Zone	I	II	III	IV	V
Meeres- höhe H	T = 140 km				
Meter					
200	- 0,0199	0,0000	+ 0,0002	+ 0,0004	+ 0,0005
400	- 0,0393	- 0,0002	+ 0,0003	+ 0,0007	+ 0,0011
600	- 0,0583	- 0,0007	+ 0,0004	+ 0,0010	+ 0,0016
800	- 0,0769	- 0,0014	+ 0,0003	+ 0,0012	+ 0,0020
1000	- 0,0949	- 0,0023	+ 0,0002	+ 0,0014	+ 0,0024
1200	- 0,1126	- 0,0035	0,0000	+ 0,0016	+ 0,0029
1400	- 0,1298	- 0,0048	- 0,0002	+ 0,0017	+ 0,0032
1600	- 0,1465	- 0,0065	- 0,0006	+ 0,0018	+ 0,0036
1800	- 0,1628	- 0,0083	- 0,0010	+ 0,0018	+ 0,0040
2000	- 0,1787	- 0,0103	- 0,0015	+ 0,0018	+ 0,0043
2200	- 0,1942	- 0,0126	- 0,0021	+ 0,0017	+ 0,0046
2400	- 0,2092	- 0,0150	- 0,0028	+ 0,0016	+ 0,0048
2600	- 0,2238	- 0,0177	- 0,0035	+ 0,0015	+ 0,0050
2800	- 0,2381	- 0,0206	- 0,0044	+ 0,0014	+ 0,0052
3000	- 0,2519	- 0,0236	- 0,0052	+ 0,0011	+ 0,0054
	T = 160 km				
200	- 0,0174	0,0000	+ 0,0001	+ 0,0002	+ 0,0004
400	- 0,0344	- 0,0002	+ 0,0002	+ 0,0005	+ 0,0007
600	- 0,0511	- 0,0007	+ 0,0002	+ 0,0006	+ 0,0011
800	- 0,0673	- 0,0013	+ 0,0001	+ 0,0008	+ 0,0014
1000	- 0,0831	- 0,0022	0,0000	+ 0,0009	+ 0,0017
1200	- 0,0986	- 0,0032	- 0,0003	+ 0,0009	+ 0,0019
1400	- 0,1136	- 0,0044	- 0,0006	+ 0,0010	+ 0,0022
1600	- 0,1283	- 0,0059	- 0,0009	+ 0,0010	+ 0,0024
1800	- 0,1426	- 0,0075	- 0,0013	+ 0,0009	+ 0,0026
2000	- 0,1565	- 0,0093	- 0,0018	+ 0,0008	+ 0,0028
2200	- 0,1700	- 0,0113	- 0,0024	+ 0,0007	+ 0,0029
2400	- 0,1832	- 0,0135	- 0,0030	+ 0,0006	+ 0,0030
2600	- 0,1960	- 0,0158	- 0,0037	+ 0,0004	+ 0,0031
2800	- 0,2084	- 0,0183	- 0,0045	+ 0,0002	+ 0,0032
3000	- 0,2265	- 0,0210	- 0,0053	- 0,0001	+ 0,0033

Die Werte des Faktors $(\Phi_0 - 1)F_0$ sind nachstehend angegeben:

Zone	Faktoren $(\Phi_0 - 1)F_0$ zur Berücksichtigung der Erdkrümmung				
	T = 80	100	120	140	160 km
I	0,014	0,015	0,0144	0,016	0,016
II	0,011	0,012	0,0139	0,014	0,014
III	0,009	0,010	0,0112	0,012	0,012
IV	0,010	0,011	0,0110	0,012	0,012
V	0,013	0,012	0,0121	0,012	0,013
VI	0,014	0,014	0,0138	0,014	0,014
VII	0,021	0,020	0,0188	0,018	0,018
VIII	0,026	0,025	0,0240	0,023	0,023
IX	0,035	0,034	0,0336	0,033	0,032
X	0,050	0,050	0,0492	0,048	0,047

sichtigung der Stationshöhe.

VI	VII	VIII	IX	X	Zone
T = 140 km					Meeres- höhe H
					Meter
+ 0,0008	+ 0,0010	+ 0,0013	+ 0,0017	+ 0,0020	200
+ 0,0015	+ 0,0020	+ 0,0026	+ 0,0033	+ 0,0041	400
+ 0,0022	+ 0,0030	+ 0,0038	+ 0,0049	+ 0,0061	600
+ 0,0029	+ 0,0039	+ 0,0052	+ 0,0065	+ 0,0081	800
+ 0,0036	+ 0,0049	+ 0,0064	+ 0,0082	+ 0,0101	1000
+ 0,0042	+ 0,0058	+ 0,0077	+ 0,0098	+ 0,0121	1200
+ 0,0049	+ 0,0068	+ 0,0089	+ 0,0114	+ 0,0141	1400
+ 0,0055	+ 0,0077	+ 0,0101	+ 0,0129	+ 0,0160	1600
+ 0,0061	+ 0,0086	+ 0,0113	+ 0,0145	+ 0,0180	1800
+ 0,0067	+ 0,0094	+ 0,0125	+ 0,0161	+ 0,0200	2000
+ 0,0073	+ 0,0103	+ 0,0137	+ 0,0176	+ 0,0219	2200
+ 0,0078	+ 0,0112	+ 0,0149	+ 0,0192	+ 0,0239	2400
+ 0,0084	+ 0,0120	+ 0,0161	+ 0,0207	+ 0,0258	2600
+ 0,0089	+ 0,0128	+ 0,0172	+ 0,0222	+ 0,0277	2800
+ 0,0094	+ 0,0136	+ 0,0184	+ 0,0238	+ 0,0297	3000
T = 160 km					
+ 0,0005	+ 0,0007	+ 0,0010	+ 0,0013	+ 0,0017	200
+ 0,0010	+ 0,0015	+ 0,0020	+ 0,0026	+ 0,0033	400
+ 0,0016	+ 0,0022	+ 0,0029	+ 0,0039	+ 0,0051	600
+ 0,0020	+ 0,0029	+ 0,0039	+ 0,0052	+ 0,0067	800
+ 0,0025	+ 0,0036	+ 0,0048	+ 0,0064	+ 0,0084	1000
+ 0,0030	+ 0,0042	+ 0,0058	+ 0,0077	+ 0,0101	1200
+ 0,0034	+ 0,0049	+ 0,0067	+ 0,0090	+ 0,0117	1400
+ 0,0038	+ 0,0056	+ 0,0076	+ 0,0102	+ 0,0134	1600
+ 0,0042	+ 0,0062	+ 0,0086	+ 0,0115	+ 0,0150	1800
+ 0,0046	+ 0,0068	+ 0,0095	+ 0,0127	+ 0,0166	2000
+ 0,0050	+ 0,0074	+ 0,0104	+ 0,0139	+ 0,0182	2200
+ 0,0054	+ 0,0080	+ 0,0112	+ 0,0152	+ 0,0199	2400
+ 0,0057	+ 0,0086	+ 0,0121	+ 0,0164	+ 0,0215	2600
+ 0,0061	+ 0,0092	+ 0,0130	+ 0,0176	+ 0,0231	2800
+ 0,0064	+ 0,0098	+ 0,0138	+ 0,0188	+ 0,0247	3000

Wie hieraus ersichtlich ist, sind die Faktoren $(\Phi_0 - 1)F_0$ für verschiedene Annahmen von T einander so nahe gleich, dass es genügt, den Einfluss der Erdkrümmung nur für einen Fall, etwa $T_0 = 120$ km, zu berechnen.

Der zweite, sphärische Faktor $(\Phi_0 - 1)F_0 f$ ist so klein, dass das letzte Glied in Formel II vernachlässigt werden darf; es macht im ungünstigsten Fall $0,5 \cdot 10^{-3}$ cm sec⁻² in (Δg_2) aus.

2. Für diejenigen Massen, die ausserhalb des äusseren Radius der Zone X ($a = 188$ km) liegen, berechnen wir Δg_1 und Δg_2 nicht mehr gesondert, sondern nur ihre Resultante, die mit (Δg_1) bezeichnet sei; es ist dann

$$\Delta g_i = \underbrace{(\Delta g_1)}_{\text{Massen innerhalb}} + \underbrace{(\Delta g_2)}_{\text{äusserhalb}} + \underbrace{(\Delta g_i)}_{\text{äusserhalb}} \quad (27)$$

a = 188 km.

Hiezu machen wir zwei vereinfachende Annahmen und behalten uns vor, in einer späteren Untersuchung die Fehler anzugeben, die durch die Vereinfachung in (Δg_i) erzeugt werden. Die erste Annahme besteht darin, es sei (Δg_i) für den Punkt Q dicht über dem Meeresniveau gleich gross wie für den Punkt P in der Meereshöhe H. Ferner setzen wir voraus, dass die äusseren Massen auf das Meeresniveau kondensiert werden, d. h. dass die Wirkung der äusseren Massen auf den Punkt Q ersetzt werden dürfe durch die Wirkung der aufs Meeresniveau kondensierten Massen.

Die Anziehung einer sphärischen Scheibe von der Dichte Θ_0 und der Dicke dr, die sich im Abstand r vom Erdmittelpunkte befindet, auf den über ihrem Zentrum im Abstand $r' = R + H$ gelegenen Punkt P ist, durch den Ausdruck bestimmt :

$$2\pi k^2 \Theta_0 \cdot \frac{r^2}{r'^2} \left(1 - \frac{r' \cos \psi - r}{E}\right) dr$$

wo ψ und E die schon angegebene Bedeutung haben. Unter den obigen Annahmen nimmt dieser Ausdruck, da $\Theta_0 dr$ in die Flächendichte $\Theta_0 h$ übergeht, wenn Glieder von der Ordnung $\frac{h}{R}$ vernachlässigt werden, und $r = r' = R$ wird, die folgende Form an :

$$2\pi k^2 \left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right) \cdot \Theta_0 h \quad (28)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right) = \beta_0$$

so wird die vertikale Komponente der Anziehung eines Zonensektors der äusseren Massen gleich :

$$\frac{2\pi k^2}{n} [\beta_0]_{\psi_1}^{\psi_2} \cdot \Theta_0 h \quad (29)$$

Bezeichnen wir den Wert des Integrales in (21) für $r' = R$ mit α_0 , so ist die entsprechende isostatische Reduktion gleich :

$$\frac{2\pi k^2}{n} [\alpha_0]_{\psi_1}^{\psi_2} \cdot \Theta \quad (30)$$

Die Dichte Θ des Massendefektes ergibt sich aus der Bedingung :

$$\frac{\Theta}{3} \left\{ R^3 - (R - T)^3 \right\} = - R^2 \cdot \Theta_0 h \quad (31)$$

$$\text{Setzt man} \quad \frac{1}{3} \left[\frac{r^3}{R^2} \right]_{R-T}^R = T'' \quad (32)$$

$$\text{so wird} \quad \Theta = - \frac{h}{T''} \cdot \Theta_0 \quad (c)$$

Setzt man diesen Wert in den Ausdruck (30) ein, so wird die Resultante aus den Vertikalkomponenten der Anziehung der äusseren, kondensierten Massen und des Massendefektes für den einzelnen Zonensektor gleich:

$$\frac{2\pi k^2}{n} \left[\beta_0 - \frac{\alpha_0}{T''} \right]_{\psi_1}^{\psi_2} \cdot \Theta_0 h \quad (33)$$

und (Δg_i) wird gleich der Summe dieses Ausdruckes über alle Sektoren und Zonen.

Wie bei der Bestimmung von A_0^o können die Grenzen ψ_1 und ψ_2 der Zonen so gewählt werden, dass bei einer bestimmten Annahme von T und n der Ausdruck (33) übergeht in

$$h \cdot 10^{-x} \text{ cm sec}^{-2}$$

wenn h in Metern ausgedrückt wird und x eine ganze Zahl bedeutet. Hiezu muss der Ausdruck

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0}{T''} = f(\psi)$$

als Funktion von ψ bekannt sein. Diese Funktion ist auf Seite 224 tabuliert für die Normaltiefe $T_0 = 120$ km (entsprechend $T_0'' = 117,754$ km).⁶⁾

Bei der Wahl eines Zonen- und Sektorensystems wird man darauf Bedacht nehmen, dass Zonensektoren von regelmässiger Gestalt entstehen; für die Konstruktion des Netzes ist es ferner angenehm, wenn die Zahlen n Potenzen von 2 sind. Eine Einteilung, die diesen Wünschen Rücksicht trägt, ist auf Seite 225 gegeben; für die Konstanten in (33) sind die Seite 214 angeführten Werte benützt. Die neuen Zonen sind absteigend nummeriert; der erste Wert von ψ entspricht dem äusseren Radius der Zone X.

⁶⁾ Die Funktion ist nur auf soviel Stellen berechnet worden, als es der praktische Zweck, das Zonensystem auf Karten von kleinem Masstabe zu zeichnen, erfordert; die letzte der angegebenen Dezimalstellen ist nicht durchweg als sicher anzusehen, da ungefähr die Hälfte der angegebenen Funktionswerte nicht direkt berechnet, sondern aus den einschliessenden Werten interpoliert wurde.

ψ	$\beta_o - \frac{\alpha_o}{T_o''}$	Differenz	ψ	$\beta_o - \frac{\alpha_o}{T_o''}$	Differenz
2° 0'	0,2531		17°	0,03123	
15	0,2279	- 252	18	0,02943	- 180
30	0,2071	- 208	19	0,02782	- 161
45	0,1896	- 175	20	0,026369	- 145
3 0	0,1748	- 148	22	0,023828	- 2541
15	0,1620	- 128	24	0,021691	- 2137
30	0,1510	- 110	26	0,019903	- 1788
45	0,1413	- 97	28	0,018371	- 1532
4 0	0,1328	- 85	30	0,017023	- 1348
15	0,1252	- 76	32	0,015830	- 1193
30	0,1184	- 68	36	0,013817	- 2013
45	0,1123	- 61	40	0,012193	- 1624
5 0	0,1068	- 55	44	0,010830	- 1363
15	0,1018	- 50	48	0,009691	- 1139
30	0,0973	- 45	52	0,008702	- 989
45	0,0931	- 42	56	0,007842	- 860
6 0	0,0893	- 38	60	0,007084	- 758
15	0,08575	- 35	64	0,006410	- 674
30	0,08248	- 327	68	0,005805	- 605
45	0,07944	- 304	72	0,005259	- 546
7 0	0,07662	- 282	76	0,004764	- 495
15	0,07399	- 263	80	0,004312	- 452
30	0,07155	- 244	84	0,003898	- 414
45	0,06924	- 231	88	0,003518	- 389
8 0	0,06708	- 217	92	0,003168	- 350
30	0,06312	- 396	96	0,002845	- 323
9 0	0,05961	- 351	100	0,002547	- 298
30	0,05646	- 315	104	0,002272	- 275
10 0	0,05363	- 283	112	0,001782	- 490
30	0,05104	- 259	120	0,001363	- 419
11 0	0,04869	- 235	128	0,001010	- 353
30	0,04654	- 215	136	0,000715	- 295
12 0	0,04458	- 196	144	0,000474	- 241
13	0,04111	- 347	152	0,000285	- 189
14	0,03813	- 298	160	0,000145	- 140
15	0,03553	- 260	168	0,000052	- 93
16	0,03324	- 229	176	0,000006	- 46
17	0,03123	- 201	180	0,000000	

Zoneneinteilung der Erdkugel zur Berechnung von (Δg_i)

Zone	ψ	$\beta_o - \frac{\alpha_o}{T'_o}$	$[\beta_o - \frac{\alpha_o}{T'_o}] \psi_1$	10^{-x}	n	Unter- teilung
11	10 41' 35",3	0,29213				
	3 30 48	0,15045	- 0,14168	10 ⁻⁶	16	20 19'
10	6 44 11	0,07960	- 0,07085	10 ⁻⁶	8	4 38
9	12 6,4	0,044181	- 0,03542	10 ⁻⁶	4	8 40
8	17 39,9	0,030013	- 0,014168	10 ⁻⁷	16	14 23
7	31 58,5	0,015844	- 0,014169	10 ⁻⁷	16	22,8
6	51 45,0	0,008760	- 0,007084	10 ⁻⁷	8	39,7
5	72 18,9	0,005218	- 0,003542	10 ⁻⁷	4	60,6
4	113 57	0,001676	- 0,003542	10 ⁻⁷	4	88,8
3	129 5	0,000968	- 0,000708	10 ⁻⁸	8	120,9
2	153 22	0 000259	- 0,000708	10 ⁻⁸	8	139,2
1	180 0	0,000000	- 0,000259	10 ⁻⁸	4	161,1

Da in der letzten Zone 1 die Differenz $\left[\beta_o - \frac{\alpha_o}{T'_o} \right] \psi_1 = 0,000259$ ist,

statt, wie es bei 4 Profilen sein sollte, gleich 0,000354, so sind die Höhen h der letzten Zone mit $\frac{259}{354}$ d. i. rund $\frac{3}{4}$ zu multiplizieren. Die in der letzten Kolonne „Unterteilung“ gegebenen Grenzen zerlegen die einzelnen Zonen so, dass die in den entstehenden Unterabschnitten abgelesenen Höhen h einfach gemittelt werden dürfen.

Der Einfluss des Massenüberschusses unterhalb des Meeres kann auf Grund des gleichen Zonensystems berechnet werden, wenn die Meerestiefen t mit einem konstanten Faktor multipliziert werden und wenn eine kleine von der Tiefe t abhängige Korrektur angebracht wird. Bezeichnet nämlich θ_w die Dichte des Meeresswassers, so ist der Massendefekt des Meeres gegenüber der ursprünglich homogen geschichteten Erdrinde von der Dichte θ_o gleich

$$\theta_w - \theta_o$$

Denkt man sich diesen Massendefekt wieder aufs Meeresniveau kondensiert, so ist die Flächendichte in gleicher Annäherung wie früher gleich

$$(\theta_w - \theta_o) \cdot t$$

und die Vertikalkomponente der Anziehung eines Zonensektors gegeben durch :

$$-\frac{2\pi k^2}{n} [\beta_0]_{\psi_1}^{\psi_2} (\Theta_0 - \Theta_w) \cdot t \quad (34)$$

Der Massenüberschuss Θ unterhalb des Meeres ist durch die Bedingung bestimmt:

$$\frac{1}{3} \left\{ (R-t)^3 - (R-T_0)^3 \right\} \cdot \Theta = R^2 (\Theta_0 - \Theta_w) \cdot t$$

Setzt man:

$$\frac{1}{3} \left[\frac{r^3}{R^2} \right]_{R-T_0}^{R-t} = T_0''' \quad (35)$$

so wird:

$$\Theta = \frac{t}{T_0'''} (\Theta_0 - \Theta_w) \quad (d)$$

Bezeichnen wir mit α den Wert des Integrals in (21) zwischen den Grenzen $(R-T_0)$ und $(R-t)$ für $r' = R$, so ist die Vertikalkomponente der Anziehung des Massenüberschusses im einzelnen Zonen-sektor gleich

$$\frac{2\pi k^2}{n} [\alpha]_{\psi_1}^{\psi_2} \cdot \Theta \quad (36)$$

Statt α dürfen wir hierin α_0 d. i. der Wert des Integrales zwischen den Grenzen $(R-T_0)$ und R einführen, wenn man sich die im Raum zwischen dem Meeresboden und Meeresniveau zugefügte Masse wieder weggenommen denkt. Die Wirkung dieser zugefügten Masse können wir kompensieren durch eine aufs Meeresniveau kondensierte Flächenschicht von der Dichte $-\Theta t$. Statt (36) erhält man dann

$$\frac{2\pi k^2}{n} [\alpha_0]_{\psi_1}^{\psi_2} \Theta - \frac{2\pi k^2}{n} [\beta_0]_{\psi_1}^{\psi_2} \Theta \cdot t \quad (37)$$

Führt man für Θ den durch die Gleichung (d) bestimmten Wert ein, so erhält man aus der Summe der Ausdrücke (34) und (37) für die Vertikalkomponente der Resultante aus der Wirkung des Massendefektes im Meere und des Massenüberschusses unterhalb:

$$\frac{2\pi k^2}{n} \left[\frac{\alpha_0}{T_0'''} - \frac{T_0''' + t}{T_0'''} \beta_0 \right]_{\psi_1}^{\psi_2} (\Theta_0 - \Theta_w) t \quad (38)$$

Dieser Ausdruck wird für $\psi_1 = 0^0$ als untere und $\psi_2 = 180^0$ als obere Grenze nicht streng gleich Null, wie es unter den gemachten Voraussetzungen für die isostatische Reduktion Δg_i einer vollen Kugelschale der Fall sein sollte, weil die Wirkung der im Meeresraume zugefügten Massen und diejenige der aufs Meeresniveau kon-

densierten sich nicht genau aufhebt; er wird aber streng gleich Null, wenn man $(T_0''' + t)$ durch T_0'' ersetzt, womit im Faktor von β_0 höchstens ein Fehler von der Ordnung 0,0001 entsteht. Setzt man

$$\text{somit} \quad T_0''' + t = T_0''$$

$$\text{und} \quad T_0''' = \frac{T_0''}{1 + \varepsilon}$$

so geht der Ausdruck (38) über in den folgenden :

$$\frac{2\pi k^2}{n} \left[\frac{\alpha_0}{T_0''} - \beta_0 \right]_{\psi_1}^{\psi_2} (\Theta_0 - \Theta_w) t \cdot (1 + \varepsilon) \quad (39)$$

Sieht man vom Faktor ε und vom Zeichen ab, so stimmt dieser Ausdruck mit (33) überein, wenn man $(\Theta_0 - \Theta_w)$ an Stelle von Θ_0 setzt. Da für $\Theta_0 = 2,70$ und $\Theta_w = 1,027$

$$\frac{\Theta_0 - \Theta_w}{\Theta_0} = 0,620$$

ist, hat man somit, um bei der gleichen Zoneneinteilung die isostatische Reduktion (Δg_i) für die vom Meere bedeckten Teile der Erdrinde zu erhalten, die in den Zonensektoren abgelesenen Meerestiefen t mit dem Faktor 0,620 zu multiplizieren und noch eine der Grösse ε entsprechende Korrektur anzubringen, die leicht angegeben werden kann, da man sie der Tiefe t proportional annehmen darf.

In welchem Masse sich der nach dem entwickelten Verfahren ermittelte Betrag von (Δg_i) ändert, wenn statt $T_0 = 120$ km eine andere Annahme für die Tiefe der Ausgleichsfläche eingeführt wird, ist der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen; sie gibt für die Zonen 11 bis 1 die Reduktionsfaktoren Φ'_0 nach der Gleichung

$$\Phi'_0 = \frac{\left[\beta_0 - \frac{\alpha}{T''} \right]_{\psi_1}^{\psi_2}}{\left[\beta_0 - \frac{\alpha_{T_0}}{T_0''} \right]_{\psi_1}^{\psi_2}}$$

wo mit α_T der Wert des Integrales in (21) für eine beliebige Annahme von T und mit α_{T_0} der Wert für die Annahme $T_0 = 120$ km bezeichnet ist.

Zone	Faktoren Φ'_0			
	T = 80	100	140	160 km
11	0,722	0,870	1,112	1,206
10	0,683	0,844	1,150	1,293
9	0,670	0,836	1,162	1,322
8	0,668	0,834	1,165	1,330
7	0,67	0,83	1,17	1,33
6	0,67	0,83	1,17	1,33
5	0,67	0,83	1,17	1,33
4	0,67	0,83	1,17	1,33
3	0,66	0,83	1,17	1,33
2	0,66	0,83	1,17	1,33
1	0,7	0,8	1,2	1,3

III.

Da die Grösse des Querschnittes der Prismen, die nach der Pratt'schen Hypothese gleich viel Massen enthalten sollen, nicht bekannt ist, wird man die Aufgabe umkehren, das heisst: für verschiedene starke Ausgleichungen der äusseren Massen in horizontalem Sinn die isostatische Reduktion berechnen und unter diesem System verschiedener Lösungen diejenige als der Wirklichkeit am besten entsprechend annehmen, welche die beste Darstellung der beobachteten Schwerebeschleunigungen liefert. Als ein erster Schritt zur Lösung dieses Problems ist die Karte mittlerer Höhen anzusehen, die dieser Abhandlung (siehe Tafel II) beigegeben ist. Die mittlere Höhe in einer beliebigen Lotrichtung definieren wir als das Verhältnis des Volumens der äusseren Massen in einem bestimmten Umkreis zu dessen Flächeninhalt. Aus praktischen Gründen ist die Karte der Tafel II nicht für eine Ausgleichung der Massen innerhalb Kreisflächen, sondern für eine Ausgleichung innerhalb Quadraten konstruiert worden; bei quadratischer Anordnung kann das einer ersten Karte zugrunde liegende Zahlenmaterial leicht zur Bildung ausgeglichener Höhen in grösseren Quadraten wieder verwendet werden. Dass bei diesem Verfahren die Symmetrie nicht gewahrt wird, ist insofern nicht von Bedeutung, als es sich vorerst nur um die Grössenordnung handelt, d. h. ob Isostasie innerhalb Flächen von $10 \times 10 \text{ km}^2$ oder $100 \times 100 \text{ km}^2$ oder innerhalb noch grösserer Flächen vorhanden ist. Übrigens würde auch die Bildung mittlerer Höhen innerhalb Kreisflächen durchaus nicht der strengen Lösung des Problems entsprechen; denn diese hat nicht von der Gleichheit der Massen auszugehen, sondern von der Gleichheit des Druckes in der Ausgleichsfläche.

Die Karte mittlerer Höhen der Tafel II (im Masstab 1 : 2 000 000 mit Horizontalkurven von 200 m Abstand) ist in folgender Weise konstruiert worden. Die schweizerische Schulwandkarte (Masstab 1 : 200 000 mit Horizontalkurven von 100 m Abstand) trägt am Rand ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt sich in der Südwestecke befindet und dessen Axen parallel sind den Axen des Bonne'schen Projektionssystems, das den schweizerischen Karten zugrunde liegt.⁷⁾ Entsprechend der am Rande angegebenen Kilometrierung wurde die Schulwandkarte in Quadrate von 1 cm Seitenlänge zerlegt und in jedem dieser Quadrate durch einfaches Abschätzen mittels der Horizontalkurven die mittlere Höhe bestimmt. Durch Mittelung von je 4×4 dieser Höhenablesungen wurde dann die mittlere Höhe von Quadraten von 4 cm Seitenlänge, entsprechend 8×8 km² des Terrains, gebildet. Die Mittelpunkte dieser lückenlos aneinander stossenden und sich nicht überdeckenden Quadrate liegen auf Parallelen zu den Rändern der Schulwandkarte in folgenden Abständen vom Nullpunkt:

in der West-Ost-Richtung: $x = 4,12,20,28, \dots$ km

in der Süd-Nord-Richtung: $y = 4,12,20,28, \dots$ km.

Diese mittleren Höhen wurden sowohl in der West-Ost- und Süd-Nord-Richtung als auch in der Diagonalrichtung von Nordwesten nach Südosten graphisch aufgetragen und durch eine kontinuierlich verlaufende Kurve miteinander verbunden, welche als das Profil der ausgeglichenen Terrainfläche angesehen werden kann. Diesen Profilen wurde die Lage der Schnittpunkte der Horizontalkurven, deren Wert ein gerades Vielfaches von 100 m ist, mit den Parallelen zur x-, y- und zur Diagonalrichtung entnommen; der Verlauf der Horizontalkurven der ausgeglichenen Terrainfläche ergab sich dann durch Verbindung der entsprechenden Höhenkoten, die in der Originalzeichnung im Masstab 1 : 1 000 000 aufgetragen wurden, mittels eines zwanglos verlaufenden Linienzuges.

Ausserhalb des auf der schweizerischen Schulwandkarte enthaltenen Gebietes wurden die mittleren Höhen auf folgenden Karten abgelesen: im Westen, Süden und Osten auf der italienischen Karte 1 : 500 000 mit Horizontalkurven von ungleichem Abstand (Wert der Kurven: 200, 300, 500, 800, 1000, 1300, 1600, 2000, 2400 m etc.); im Norden auf der topographischen Übersichtskarte des deutschen Reiches 1 : 200 000 mit Horizontalkurven von 20 m Abstand; im

⁷⁾ In diesem „Randkoordinatensystem“ betragen die Koordinaten des Nullpunktes des Bonne'schen Systems in der Richtung West-Ost 130,0 km, in der Richtung Süd-Nord 138,0 km.

Nordwesten auf der Carte de la France 1 : 200 000 mit Horizontalkurven von 20 m Abstand. Auf diesen Karten wurden im allgemeinen zur Bestimmung der mittleren Höhe des Grundquadrates von 8 km Seitenlänge nur noch 4 Einzelablesungen gemacht.

Um ein Urteil zu gewinnen, wie genau die mittlere Höhe eines 8 km-Quadrates durch die einfache Mittelung der 16 Einzelablesungen erhalten wird, ist für die nachstehend angegebenen Quadrate die mittlere Höhe durch Planimetrierung ermittelt worden. Die Lage der Quadrate ist durch die „Rand“koordinaten x und y der Eckpunkte bestimmt; die Zahlen sind die Korrekturen in Metern, die an den durch einfache Mittelung der Ablesungen abgeleiteten Höhen anzubringen sind, um sie auf die planimetrisch ermittelten zurückzuführen.

x in y km in km	0 · 8	24 · 32	48 · 56	72 · 80	96 · 104	120 · 128	144 · 152	168 · 176
	a			b		c		
96 · 104	+ 12	+ 10	- 1	+ 9	- 7	- 13	- 9	- 7
72 · 80	+ 3	+ 18	+ 10	- 20	0	- 5	- 9	- 14
48 · 56	+ 19	- 7	+ 1	- 12	+ 14	- 3	- 24	0
24 · 32	+ 29	0	+ 31	+ 8	- 24	- 11	- 23	- 32
0 · 8	- 2	- 13	+ 7	- 35	- 22	+ 5	+ 5	+ 9

Die unter „a“ zusammengefassten Werte beziehen sich auf Quadrate, die im Jura liegen, die unter „b“ auf solche im Mittelland und unter „c“ auf solche im Alpengebiet. Der quadratische Mittelwert sämtlicher Korrekturen beträgt ± 22 m. Zu einem Betrag von nahezu derselben Grösse gelangt man durch die Annahme, die Unsicherheit der *einzelnen* Ablesung sei gleich dem Abstand der Horizontalkurven, also gleich ± 100 m; die Unsicherheit des Mittels aus 16 Einzelwerten ist dann gleich $\pm 100 : 4 = \pm 25$ m. Diese Genauigkeitsangabe gilt nur für die direkt bestimmten Höhen; für die mittels des Profilizuges interpolierten Werte ist die Unsicherheit etwas höher anzusetzen.

Bildet man den Durchschnittswert der obigen Korrekturen für jeden der drei Fälle, so erhält man:

a) im Jura	+ 4 m
b) im Mittelland	- 2 m
c) im Alpengebiet	- 7 m

Erhebliche systematische Fehler sind nach diesen Beträgen nicht anzunehmen.

Ausserhalb des Gebietes der Schulwandkarte ist wegen der Mittelung aus nur 4 Einzelhöhen die Unsicherheit grösser anzusetzen. Dieser geringere Grad an Genauigkeit ist indessen ohne Bedeutung für die Berechnung der isostatischen Reduktion schweizerischer Schwerestationen, da in den weiter entfernt liegenden Gebieten nur mittlere Höhen aus Flächen, die erheblich grösser sind als das Grundquadrat von 8 km Seitenlänge, in Betracht kommen.

Die Karte der Tafel wird ausser ihrem eigentlichen Zwecke auch anderen Untersuchungen, z. B. solchen meteorologischer oder pflanzengeographischer Natur, eine Grundlage bieten können.

IV.

Es bleibt einer besonderen Untersuchung vorbehalten zu zeigen, was für Resultate die Anwendung der Karte mittlerer Höhen auf die Stationen des schweizerischen Schwerenetzes auf Grund der im zweiten Abschnitt entwickelten Formeln liefert. Im Folgenden soll nur die Berechnung von (Δg_2) an einer Station gezeigt und das Resultat der entsprechenden Rechnung für die auf Seite 210 angeführten Stationen mit dem Ergebnis der Hayford'schen Methode verglichen werden.

Für die Station *Gsteig* sind in der nachstehenden Tabelle unter Σh die Summen der in je 8 Sektoren abgelesenen Höhen für die Zonen I bis X angegeben. Die einfache Summe über alle Zonen: 106 475 m, sagt aus, dass im Punkte Q die Schwere infolge des Massendefektes, dessen Dichte auf Grund der Karte mittlerer Höhen angenommen wird, für $T = 120$ km um $0,106_{475}$ cm sec^{-2} vermindert wird. Multipliziert man die Zonensummen Σh mit den Faktoren F_0 (Seite 215), so erhält man die entsprechenden, auf verschiedene Annahmen von T reduzierten Beträge, die in der folgenden Zusammenstellung unter „ $\Sigma(F_0 \Sigma h)$ “ angegeben sind. Addiert man hiezu die in der nächsten Kolonne stehende Höhenkorrektur $\Sigma(f F_0 \Sigma h) 10^{-6}$ und bringt noch die sphärische Korrektur $\Sigma((\Phi_0 - 1) F_0 \Sigma h) 10^{-6} = 0,00186$ cm sec^{-2} an, die für die verschiedenen Annahmen von T gleich gross angesetzt werden kann, so resultieren die angegebenen

Station Gsteig.

Zone	Σh	Faktoren f. F_0 für $H = 1185$ m und T gleich:					$(\Phi_0 - 1) F_0 \Sigma h 10^{-6}$
		80 km	100 km	120 km	140 km	160 km	
	m	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	cm sec ⁻²
I	14 550	-1939	-1554	-1298	-1112	-974	0,000 21
II	12 950	-33	-37	-37	-34	-31	18
III	11 250	+46	+18	+5	0	-3	13
IV	12 000	+89	+48	+26	+16	+9	13
V	12 475	+124	+71	+44	+29	+19	15
VI	11 800	+150	+95	+61	+42	+30	16
VII	10 500	+171	+117	+81	+57	+42	20
VIII	9 150	+185	+136	+101	+76	+57	22
IX	6 230	+194	+154	+122	+97	+76	21
X	5 570	+198	+169	+142	+120	+100	27
Summe:	106 475						0,001 86

Werte von (Δg_2) . Aus den beigeschriebenen ersten und zweiten Differenzen geht hervor, dass (Δg_2) leicht auf eine beliebige Annahme von T zwischen 80 und 160 km interpoliert werden kann.

T	$\Sigma(F_0 \Sigma h) 10^{-6}$	$\Sigma(f \cdot F_0 \Sigma h) 10^{-6}$	(Δg_2)	1te Diff.	2te Diff.
km	cm sec ⁻²	cm sec ⁻²	cm sec ⁻²		
80	0,12529	-0,00180	-0,1254	+99	-13
100	0,11521	-0,00159	-0,1155	+86	-11
120	0,10648	-0,00144	-0,1069	+75	-8
140	0,09885	-0,00130	-0,0994	+67	
160	0,09204	-0,00120	-0,0927		

Die Anziehung der äusseren Massen auf den Punkt P in der Meereshöhe H ist in den Veröffentlichungen der Schwerebestimmungen (siehe: astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, herausgegeben von der schweizerischen geodätischen Kommission, 12., 13. und 15. Band) angegeben. Die Berechnung erstreckt sich dort nur bis zu einer Entfernung von 33 resp. 42 km und ist nach dem üblichen Verfahren ausgeführt, wonach die Anziehung der äusseren Massen gleich der Differenz zweier Grössen gesetzt wird, von denen die erste die Anziehung einer ebenen, unendlich ausgedehnten Platte von der Höhe H darstellt, während die zweite, die sogenannte topographische Reduktion, die Abweichung der Erdoberfläche in der Umgebung der Station von dieser ebenen Platte berücksichtigt. Die

Differenz dieser beiden Grössen ist in den erwähnten Publikationen mit $-(\Delta g' + \Delta g'')$ bezeichnet. Die Anziehung der mehr als 42 km entfernten Massen muss unter Berücksichtigung der Erdkrümmung berechnet werden; die Tabellen, die wir dieser Berechnung zugrunde gelegt haben, beruhen auf dem Ausdruck (21), der numerisch integriert wurde für die gleichen Zonen, die zur Berechnung von $\Delta g'_0$ angenommen wurden. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass die zur Berechnung von $\Delta g'_0$ abgelesenen Höhen von der Zone V an auch zur Berechnung der Anziehung der äusseren Massen verwendet werden können.⁸⁾

Da bei der Berechnung von $\Delta g'$ die ebene Platte unendlich ausgedehnt angenommen wurde, ist an Stelle von $-\Delta g'$ die Anziehung $-\Delta g'_a$ einer zylindrischen Platte vom Radius $a = 42$ km einzuführen; die Differenz δ zwischen $\Delta g'_a$ und $\Delta g'$ beträgt

$$\delta = \Delta g' - \Delta g'_a = -\frac{3\theta}{2\theta_m} \cdot \frac{g}{R} (\sqrt{a^2 + H^2} - a)$$

Für die Station Gsteig sind die numerischen Daten zur Berechnung der Anziehung der äusseren Massen bis 188 km Entfernung nachstehend zusammengestellt:

Anziehung der ebenen unendlich ausgedehnten Platte:	cm sec ⁻²	+ 0,1304				
Topographische Reduktion	<table> <tbody> <tr> <td>von 0 bis 33 km:</td> <td>- 0,0147</td> </tr> <tr> <td>von 33 bis 42 km:</td> <td>- 0,0001</td> </tr> </tbody> </table>	von 0 bis 33 km:	- 0,0147	von 33 bis 42 km:	- 0,0001	
von 0 bis 33 km:	- 0,0147					
von 33 bis 42 km:	- 0,0001					
Differenz δ der Anziehung der ebenen Platte und des Zylinders:		- 0,0019				
Anziehung der äusseren Massen von 42 bis 188 km für $\theta = 2,70$:		+ 0,0023				
Anziehung der äusseren Massen von 0 bis 188 km:	$(\Delta g_1) =$	+ 0,1160				
Anziehung des Massendefektes für $T = 120$ km:	$(\Delta g_2) =$	- 0,1069				
Isostatische Reduktion für die Massen von 0 bis 188 km:	$(\Delta g_1) + (\Delta g_2) =$	+ 0,0091				

Die Resultate der Berechnung von (Δg_1) und (Δg_2) für die übrigen Stationen sind nachstehend zusammengestellt. Zum Vergleich mit den nach dem Hayford'schen Verfahren berechneten Beträgen wurden die Werte von (Δg_2) zunächst auf die diesem letztern zugrunde liegende Tiefe der Ausgleichsfläche, nämlich $T = 113,7$ km, interpoliert. Da ferner die Hayford'schen Werte Δg_1 der Seite 234 sich auf die Massen der ganzen Erde beziehen, wobei aber für die mehr als 167 km entfernten Massen ein konstanter Beitrag von $-0,010$ cm sec⁻²

⁸⁾ Für die vorliegende Karte mittlerer Höhen läuft dieses Verfahren auf dasselbe hinaus, wie wenn schon für die mehr als 42 km entfernten Massen nur die Resultante Δg_1 und nicht die Komponenten Δg_1 und Δg_2 getrennt berechnet worden wären. — Von einer Wiedergabe dieser Tabellen, die bei graphischer Darstellung die Berechnung sehr einfach gestalten, sehen wir der Kürze halber ab.

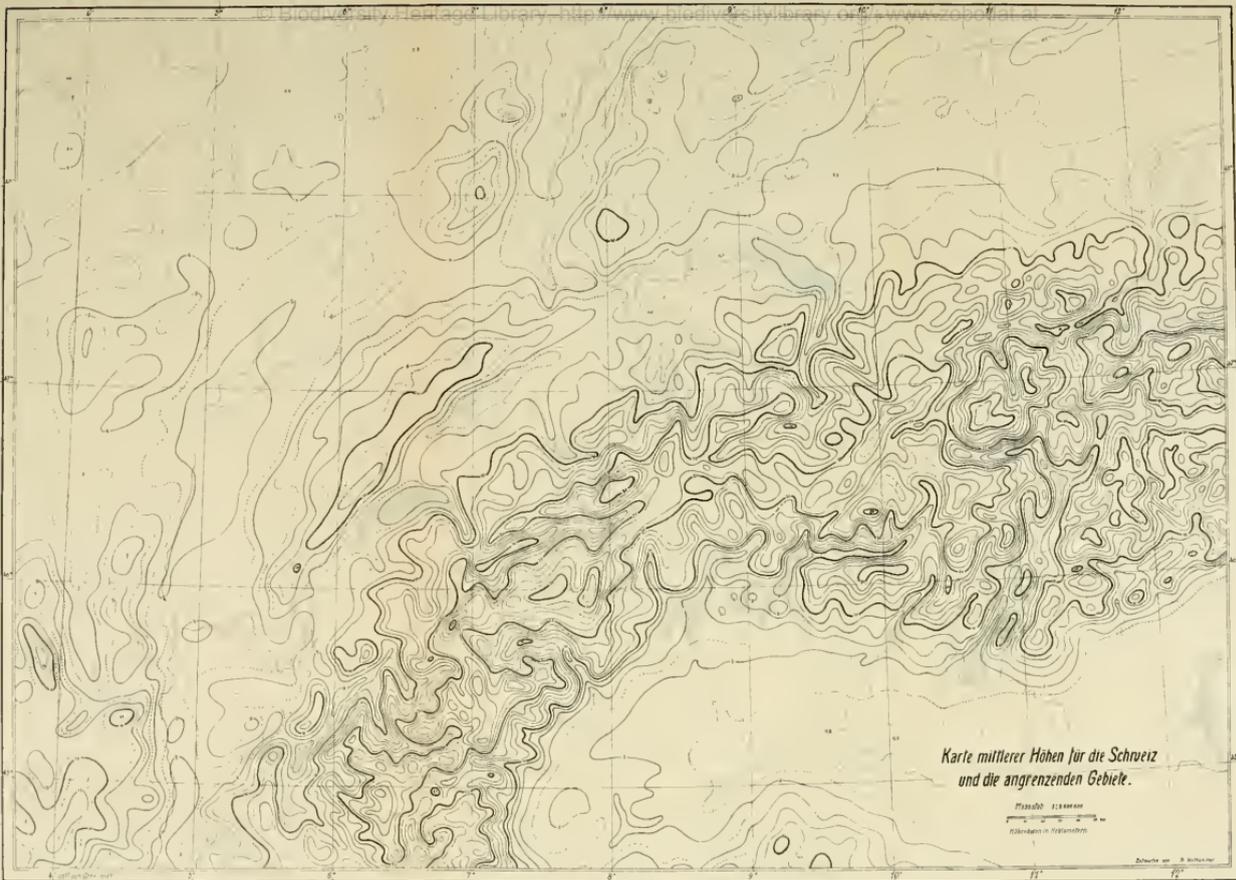
Station	Meeres- höhe	(A _{g1})	(A _{g2})				bis a = 167 km	(A _{g1}) + (A _{g2})	Differenz	
			bis zur Entfernung a = 188 km T = 100 km	120 km	140 km	113,7 km				
	m	10 ⁻³ cm sec ⁻²	10 ⁻³ cm sec ⁻²					10 ⁻³ cm sec ⁻²		
St. Maurice	419	+ 23,0	- 111,1	- 103,2	- 96,3	- 105,6	- 103	- 80	- 81	- 1
Siten	514	+ 40,2	- 122,6	- 113,3	- 105,2	- 116,1	- 113	- 73	- 72	+ 1
Iselle	630	+ 22,4	- 124,0	- 114,7	- 106,6	- 117,5	- 114	- 92	- 95	- 3
Visp	649	+ 44,3	- 133,1	- 122,5	- 113,4	- 125,7	- 122	- 78	- 80	- 2
Brig	683	+ 45,0	- 132,5	- 121,9	- 112,8	- 125,1	- 122	- 77	- 75	+ 2
Gsteig	1185	+ 116,0	- 115,5	- 106,9	- 99,4	- 109,5	- 107	+ 9	+ 9	0
Zermatt	1603	+ 143,4	- 143,9	- 131,9	- 121,1	- 135,2	- 132	+ 11	+ 4	- 7
Simplonospiz	1998	+ 219,0	- 132,0	- 121,4	- 112,4	- 124,6	- 121	+ 98	+ 86	- 12
Sanetsch	2041	+ 216,2	- 118,3	- 109,4	- 101,5	- 112,1	- 109	+ 107	+ 95	- 12
Chaurron	2435	+ 267,4	- 139,6	- 127,6	- 117,7	- 131,3	- 128	+ 139	+ 123	- 16
Grd. St. Bernard	2473	+ 273,4	- 134,4	- 123,3	- 113,8	- 126,6	- 124	+ 149	+ 141	- 8
Schwarzsee	2582	+ 281,8	- 141,4	- 129,2	- 119,1	- 132,9	- 129	+ 153	+ 135	- 18
Gornegrat	3016	+ 320,4	- 139,5	- 127,6	- 117,6	- 131,1	- 128	+ 192	+ 175	- 17

für T = 113,7 m, a = 167 km
nach der Karte nach dem
mittleren Höhen Verfahren

angenommen wurde, ist in der letzten Kolonne der Werte (Δg_2) derjenige Betrag angegeben, der der Berücksichtigung der Massen bis 167 km Entfernung entspricht, und die Hayford'schen Werte Δg_1 sind durch Vermehrung um $0,010 \text{ cm sec}^{-2}$ ebenfalls auf die Massen innerhalb dieser Entfernung reduziert.

Wie aus den letzten Kolonnen der Zusammenstellung, Seite 234, hervorgeht, sind die Differenzen zwischen den beiden Rechnungsarten für Talstationen nicht bedeutend; sie erreichen nur wenige Einheiten der dritten Dezimalstelle von g in cm sec^{-2} . Für Gebirgsstationen nehmen aber die Differenzen erhebliche Beträge an, die bis nahezu 20 Einheiten geben. Wenn man der Rechnung eine noch stärker ausgeglichene Terrainform zugrunde legte, so würden auch bei den Talstationen grössere Differenzen, und zwar im positiven Sinne, auftreten. Bei dieser relativ weitgehenden Abhängigkeit scheint der Versuch, auf Grund von verschieden starker Ausgleichung der äusseren Massen in horizontalem Sinn die bestmögliche Darstellung der beobachteten Schwerewerte eines Gebirgslandes zu suchen und dadurch die Pratt'sche Hypothese genauer zu präzisieren, nicht ohne Aussicht auf Erfolg zu sein. Erst dann wird man auch auf die Frage nach den Beziehungen zwischen geologischen Vorgängen in der äussersten Erdrinde und den Anomalien isostatisch reduzierter Schwerewerte näher eintreten können.

Manuskript eingegangen den 15. Januar 1917.



Vorstellung: Die Karte gibt nicht die Höhenstellungen von 200 m Abstand ab, sondern die Höhenstellungen der wirklichen Terrainhöhen, die durch die Höhenlinien im Maßstab eines Quadrates von 1 km Seitenlänge dargestellt wird.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel](#)

Jahr/Year: 1917

Band/Volume: [28_1917](#)

Autor(en)/Author(s): Niethammer Th.

Artikel/Article: [Zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung 1206-1235](#)