

Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper und die Klassenzahl relativ-Abelscher Körper.

Von

E. Hecke.

Bekanntlich spielen die Dirichletschen Reihen

$$f(s) = \sum_{m,n} \varphi(m, n)^{-s}, \quad (1)$$

wo $\varphi(m, n) = am^2 + bmn + cn^2$ eine positiv definite quadratische Form mit ganzen Zahlkoeffizienten ist, in der Theorie des imaginären Zahlkörpers $k(\sqrt{b^2 - 4ac})$ eine grosse Rolle. Die Summation ist in (1) über alle ganzen Zahlen m, n zu erstrecken mit Ausnahme des Systems $0, 0$ was durch den Akzent an dem Summenzeichen angedeutet sei. Nun weiss man, dass diese Reihen, als Funktionen von s betrachtet, eindeutige analytische Funktionen mit dem Pole $s = 1$ sind, also eine Entwicklung

$$f(s) = \frac{A_{-1}}{s-1} + A_0 + A_1(s-1) + \dots$$

besitzen. Der Koeffizient A_{-1} , das Residuum, ist bereits durch Dirichlet bestimmt worden, durch seine klassische Methode zur Ermittlung der Klassenzahl des Zahlkörpers. Zu den schönsten Entdeckungen Kroneckers gehört die Bestimmung von A_0 . Es ist ihm gelungen — sogar für den allgemeinen Fall, dass die Form (a, b, c) beliebige reelle Koeffizienten mit $b^2 - 4ac < 0$ hat — eine Darstellung von A_0 zu geben, in der als wesentlicher Term der Logarithmus der elliptischen Modulfunktion $\eta(\omega)$ auftritt, wobei das Argument ω (oder $-\omega$) Nullstelle der Funktion $\varphi(\omega, 1)$ ist. Die Bedeutung dieses Resultates liegt zunächst darin, dass hier die Zahlentheorie ein Prinzip zur Konstruktion interessanter analytischer Funktionen liefert. Die ganze Theorie der linearen Transformation der η -Funktion lässt sich aus dieser sog. Kroneckerschen Grenzformel entwickeln. Sodann aber enthält für den Fall ganzzahliger a, b, c diese Formel den Kern der Beziehungen zwischen elliptischen Funktionen und imaginär-quadratischen Zahlkörpern, welche als „Theorie der kom-

plexen Multiplikation“ von Abel begründet, hauptsächlich von Kronecker, dann von Weber allgemein durchgeführt und neuerdings von Herrn Fueter durch seinen Vollständigkeitsbeweis zu einem ersten Abschluss gebracht worden ist. Diese Theorie ist von einem ganz bestimmenden Einfluss auf die neuere Zahlentheorie geworden, insofern hier der Keim zu dem von Herrn Hilbert geschaffenen Begriffe des Klassenkörpers liegt, der die moderne Zahlentheorie beherrscht.

Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der Klassenkörper aus sind nun ganz analoge Fragen für einen beliebigen Grundkörper an Stelle des oben auftretenden imaginär-quadratischen Körpers möglich. Für den Körper der rationalen Zahlen, der mit dem imaginär-quadratischen Körper die Eigenschaft teilt, nur endlich viele Einheiten zu besitzen, führt diese Frage auf die wohlbekannten L -Reihen, die sich aus Bestandteilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)^s}$$

zusammensetzen (a, b ganze Zahlen). Die Bestimmung des konstanten Gliedes, welches dem A_0 von vorhin entspricht, hat Kummer¹⁾ bei der Bestimmung der Klassenzahl des Körpers der a -ten Einheitswurzeln durchgeführt. Diese Reihen führen von rein zahlen-theoretischen Fragen her auf die Exponentialfunktion $e^{2\pi iz}$, die für $z = \frac{b}{a}$ gerade den betreffenden Zahlkörper liefert.

Hiernach erschien es also von grösster Wichtigkeit, nun für beliebige Zahlkörper das entsprechende Problem zu lösen; das führt auf die Untersuchung folgender Summen:

$$\sum_{(\mu)} N(\mu)^{-s}, \quad (2)$$

worin $N(\mu)$ die Norm von μ (absolut genommen) bedeutet und μ alle ganzen durch ein bestimmtes Ideal $\mathfrak{a}$ teilbaren Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers k zu durchlaufen hat, dabei jedoch von jedem System assoziierter (sich nur um Einheitsfaktoren unterscheidender) Zahlen nur je ein Individuum. Das Ideal (μ) durchläuft also das System aller durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Hauptideale. Überdies hat μ im allgemeinen noch gewisse lineare Kongruenzbedingungen zu erfüllen. Das Residuum dieser Funktion bei $s=1$ hat Dedekind bei der Ermittlung der Klassenzahl von k bestimmt. Dagegen bietet die

1) Zeitlich liegt das Kummersche Resultat vor dem Kroneckerschen. Die Auffassung aller derartigen Reihen als zu gewissen „Klassenkörpern“ gehörend, hat sich vorzugsweise im Anschluss an die Kroneckerschen Reihen (1) ausgebildet, weshalb ich diese voranstellte.

Bestimmung des konstanten Gliedes infolge der von den Einheiten herrührenden Summationsbeschränkung Schwierigkeiten dar, die nur in den oben genannten Fällen wegfallen. Auf die Bedeutung dieser Fragestellung haben unter anderen Herr Hilbert in seinem Pariser Vortrage über mathematische Probleme und Dedekind in einer seiner letzten Arbeiten hingewiesen.

Es ist mir nun gelungen, das genannte Problem zu lösen, d. h. den Koeffizienten A_0 im Falle der Summe (2) durch analytische Funktionen mehrerer Variablen vom Charakter automorpher Funktionen auszudrücken. Und zwar führt dabei derselbe einfache Gedanke zum Ziel, mit dessen Hilfe ich kürzlich die Fortsetzbarkeit aller $\xi_k(s)$ und verwandter Funktionen beweisen konnte.²⁾

Für den reellen quadratischen Körper insbesondere ergibt sich das überraschende Resultat, dass wieder nur der Logarithmus der η -Funktion, allerdings unter dem Integralzeichen auftritt, indem nämlich die Formel für den reellen quadratischen Körper als unmittelbare Folge der Kroneckerschen Formel für definite Formen sich herausstellt (s. Gl. (5)). Im ersten Paragraphen werde ich diesen Zusammenhang entwickeln; im zweiten decke ich den Zusammenhang der Summen (2) mit gewissen, besonders von Herrn Epstein untersuchten Zetafunktionen auf, woraus sich sogleich die allgemeine Grenzformel ergibt. Endlich bringe ich im letzten Paragraphen einige Erörterungen über die Bestimmung der Klassenzahl relativ-Abelscher Zahlkörper, welche durch diese Formeln ebenfalls geleistet wird.

Ich werde mich überall nur auf die einfachsten Fälle beschränken; ich beabsichtige an anderer Stelle diese Fragen in mehreren Richtungen ausführlicher zu behandeln.

§ 1.

Reelle quadratische Körper.

Es sei im reellen quadratischen Zahlkörper k ein Ideal $\mathfrak{a}$ gegeben; α_1, α_2 sei eine Basis von $\mathfrak{a}$. Ferner bezeichnen wir mit ε die positive Grundeinheit von k , welche grösser als 1 ist. Endlich setzen wir

$$\mu = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2$$

und haben nun die Summe

$$f(s) = \sum_{(\mu)} |\mu \mu'|^{-s} \quad (3)$$

²⁾ Ueber die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen (math.-physikal. Klasse) 1917. (Sitzung vom 23. XII. 16).

zu untersuchen. Dabei durchläuft μ alle Zahlen ($\neq 0$) des Ideals $\mathfrak{a}$, aber von jedem System assoziierten Zahlen $\pm \varepsilon^n \mu$ nur je ein Individuum. Der Akzent bedeutet wie auch weiterhin bei den Zahlen aus k die Konjugierte. Bekanntlich konvergiert die Reihe, wenn $s > 1$.

Ich setze nun

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) |\mu|^{-s} = \int_0^\infty e^{-\mu^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) |\mu'|^{-s} = \int_0^\infty e^{-\mu'^2 t'} t'^{\frac{s}{2}-1} dt'$$

und führe in dem Doppelintegral

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2 |\mu\mu'|^{-s} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\mu^2 t + \mu'^2 t'} (tt')^{\frac{s}{2}-1} dt dt'$$

neue Variable u, v durch die Gleichungen

$$t = ue^v, \quad t' = ue^{-v}$$

ein, wodurch man erhält

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2 |\mu\mu'|^{-s} = 2 \int_{v=-\infty}^{+\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-u(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})} u^{s-1} du dv.$$

Für das Integral nach u führen wir wieder die Γ -Funktion ein und erhalten so

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2 |\mu\mu'|^{-s} = 2\Gamma(s) \int_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})^s}$$

Statt die Integration über alle v zu vollziehen, reduzieren wir, wie ich es in der zitierten Note getan habe, das Intervall auf die Strecke $-\log \varepsilon$ bis $+\log \varepsilon$ und erhalten dafür eine Summe über alle zu μ assoziierten Zahlen, wodurch endlich für unsere Funktion $f(s)$ folgende Darstellung sich ergibt

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}{\Gamma(s)} f(s) = \int_{-\log \varepsilon}^{+\log \varepsilon} \left\{ \sum'_{m_1, m_2} (\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})^{-s} \right\} dv$$

Hierin ist jetzt die Summe über sämtliche ganzen Zahlen m_1, m_2 mit Ausschluss von $0,0$ zu erstrecken. In dem einzelnen Summanden steht offenbar jetzt eine *positiv definite quadratische Form* der Summationsbuchstaben.

Dieser Integrand ist nun eine analytische Funktion von s , die bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat und sonst im Endlichen regulär ist. Die Kroneckersche Grenzformel³⁾ liefert folgende Entwicklung nach $s-1$:

$$\sum_{m_1, m_2} (Am_1^2 + 2Bm_1m_2 + Cm_2^2)^{-s} = \frac{A_{-1}}{s-1} + A_0 + A_1(s-1) + \dots,$$

mit den Werten

$$A_{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

$$A_0 = -\frac{2\pi\Gamma'(1)}{\sqrt{m}} - \frac{2\pi}{\sqrt{m}} \log \frac{2\eta(\omega)\eta(-\bar{\omega})\sqrt{m}}{\sqrt{A}}$$

Zur Abkürzung ist hier gesetzt:

$$m = AC - B^2, \quad \sqrt{m} > 0$$

$$\omega = \frac{B + i\sqrt{m}}{A}, \quad -\bar{\omega} = \frac{-B + i\sqrt{m}}{A}, \quad Am_1^2 + 2Bm_1m_2 + Cm_2^2 = A(m_1 + \omega m_2)(m_1 + \bar{\omega} m_2).$$

Für den Logarithmus ist der reelle Wert zu nehmen. $\eta(\omega)$ bedeutet die „Diskriminante“:

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \omega})$$

In unserm Falle haben wir die quadratische Form

$$\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v} = (\mu e^{\frac{v}{2}} + i\mu' e^{-\frac{v}{2}})(\mu e^{\frac{v}{2}} - i\mu' e^{-\frac{v}{2}})$$

Nehmen wir α_1, α_2 so, dass die Determinante

$$\Delta = \alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1' > 0,$$

so sind

$$\omega = \frac{\alpha_2 e^{\frac{v}{2}} + i\alpha_2' e^{-\frac{v}{2}}}{\alpha_1 e^{\frac{v}{2}} + i\alpha_1' e^{-\frac{v}{2}}} = \frac{\alpha_2 e^v + i\alpha_2'}{\alpha_1 e^v + i\alpha_1'}$$

$$-\bar{\omega} = \frac{-\alpha_2 e^v + i\alpha_2'}{\alpha_1 e^v - i\alpha_1'} \quad (4)$$

$$A = \alpha_1^2 e^v + \alpha_1'^2 e^{-v}$$

$$m = -A^2(\omega - \bar{\omega})^2 = 4(\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1')^2 = (2\Delta)^2$$

Damit erhalten wir endlich für die Entwicklung unser Funktion

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2}{\Gamma(s)} f(s) \text{ um den Punkt } s=1 \text{ durch Integration nach } v:$$

³⁾ Vgl. etwa H. Weber, Ellipt. Funkt. u. algebr. Zahlen, 2. Aufl. (1908) pg. 531.

Das Residuum hat den Wert

$$\int_{-\log \varepsilon}^{+\log \varepsilon} \frac{\pi}{2\Delta} dv = \frac{\pi}{(\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1')} \log \varepsilon$$

Das konstante Glied hat den Wert

$$-\frac{2\pi(\Gamma'(1) + \log 4)}{(\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1')} \log \varepsilon - \frac{\pi}{(\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1')} \int_{-\log \varepsilon}^{+\log \varepsilon} \log \frac{\Delta \eta(\omega) \eta(-\bar{\omega})}{\alpha_1^2 e^v + \alpha_1'^2 e^{-v}} dv \quad (5)$$

Dieses Integral ist eine Funktion allein von α_1, α_2 , die sich ihrer Entstehung nach nicht ändert, wenn man α_1, α_2 einer linearen ganzzahligen Transformation mit Determinante $+1$ unterwirft; es ist eine „arithmetische Invariante“ im Sinne von Poincaré. Die Invarianz lässt sich auch direkt aus den Eigenschaften der η -Funktion herleiten.

Führt man in dem Integral etwa ω an Stelle von v als Variable ein, so wird der Integrationsweg in der Ebene der komplexen Variablen ω ein Teilbogen des Halbkreises, der die beiden Punkte $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}$ der reellen Achse mit einander verbindet. Die Endpunkte dieses Teilbogens sind aequivalent vermöge einer solchen Transformation der Modulgruppe, welche die beiden reellen Punkte zu Fixpunkten hat. Wir gelangen so in den Kreis der Ideenbildungen von St. Smith über den Zusammenhang der elliptischen Modulfunktionen mit den indefiniten quadratischen Formen. Diese Theorie ist bisher wenig bearbeitet worden;⁴⁾ ihr Auftreten bei unserm Problem deutet darauf hin, dass ihr für die Untersuchung der reellen quadratischen Körper eine viel grössere Bedeutung zukommt, als man bisher bemerkt hat.

§ 2.

Allgemeine Zahlkörper.

Liegt an Stelle des reellen quadratischen Zahlkörpers ein beliebiger Zahlkörper $k = k^{(1)}$ vom n -ten Grade zu Grunde, unter dessen konjugierten $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(r_1)}$ reell sind ($r_1 \geq 0$), während die übrigen $k^{(r_1+1)}, \dots, k^{(n)}$ imaginär sind (ihre Anzahl $2r_2 \geq 0$), so lässt sich das entsprechende Problem, die Ermittlung des A_0 , vermöge der Methode zur Erledigung bringen, die ich an der oben zitierten Stelle bei Untersuchung der Funktionen $\zeta_k(s)$ angewendet habe.

⁴⁾ Vgl. insbesondere die Ausführungen in *Klein-Fricke*, Ellipt. Modulfunktionen, Bd. II. pg. 165 ff. über die Smith'sche Kurve.

Man gelangt indessen rascher zum Ziele, wenn man wie im vorigen Paragraphen die betr. Dirichletsche Reihe auf eine Klasse von Funktionen zurückführt, welche von mehreren Autoren, insbesondere Herrn Epstein⁵⁾ bereits untersucht worden und von ihm als „allgemeine Zetafunktionen“ bezeichnet worden sind.

Es sei etwa $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ein System von Basiszahlen eines Ideals $\mathfrak{a}$ im Körper $k = k^{(1)}$, ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ ($r = r_1 + r_2 - 1$) ein System von Grundeinheiten, endlich verstehen wir unter

$$\mu = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \dots + m_n \alpha_n$$

eine Zahl aus $\mathfrak{a}$ ($\neq 0$). Die Nummerierung der konjugierten Körper sei ferner so getroffen, dass für einen imaginären Körper $k^{(p)}$ ($p \leq r_1 + r_2$) stets $k^{(p+r_2)}$ den konjugiert imaginären Körper bedeutet. Ist p Index eines reellen Körpers, so setzen wir

$$I\left(\frac{s}{2}\right) |\mu^{(p)}|^{-s} = \int_0^\infty e^{-\mu^{(p)} t_p} t_p^{\frac{s}{2}-1} dt_p;$$

dagegen wenn p Index eines imaginären Körpers ist ($p \leq r_1 + r_2$)

$$2^{-s} I(s) |\mu^{(p)} \mu^{(p+r_2)}|^{-s} = 2^{-s} I(s) |\mu^{(p)}|^{-2s} = \int_0^\infty e^{-2|\mu^{(p)}|^2 t_p} t_p^{s-1} dt_p$$

Für das Produkt aller $\mu^{(p)}$ findet man so ein $(r+1)$ -faches Integral:

$$2^{-r_2 s} I\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} I(s)^{r_2} |N(\mu)|^{-s} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{p=1}^m |\mu^{(p)}|^2 t_p} (t_1 \dots t_{r_1} t_{r_1+1} \dots t_n)^{\frac{s}{2}} \frac{dt_1 \dots dt_{r+1}}{t_1 \cdot t_2 \dots t_{r+1}}$$

Hierbei ist zu vereinbaren, dass für $r_1 + 1 \leq p \leq r_2 + r_1$ immer

$$t_p = t_{p+r_2}$$

zu setzen ist, also konjugiert imaginäre Körper dasselbe t_p zugeordnet erhalten. An Stelle der t führen wir die Variabeln $u, x_1, \dots, x_r$ durch die Gleichungen

$$t_p = u e^{\sum_{i=1}^r x_i \log |\varepsilon_i^{(p)}|^2} \quad p = 1, 2, \dots, r+1$$

ein. Die Funktionaldeterminante der t nach den neuen Variablen ist

⁵⁾ P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. Math. Ann. 56. (1903). pg. 615 ff. (Für das Folgende insbesondere pg. 644).

$$\frac{t_1 \cdot t_2 \cdots t_{r+1}}{u} \Delta,$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \log |\varepsilon_1^{(1)}|^2 & \cdots & \log |\varepsilon_r^{(1)}|^2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \log |\varepsilon_1^{(r+1)}|^2 & \cdots & \log |\varepsilon_r^{(r+1)}|^2 \end{vmatrix} = \pm 2^{r_1-1} n R$$

(R der Regulator des Körpers). Endlich benutzen wir noch die Abkürzung

$$\tau_p = \frac{t_p}{u} = e^{\sum_{i=1}^r x_i \log |\varepsilon_i^{(p)}|^2} \quad p = 1, \cdots, n, \quad (6)$$

sodass die τ reelle positive Grössen mit der Eigenschaft

$$\tau_p = \tau_{p+r_2} \quad r_1 + 1 \leq p \leq r_2 + r_1 \quad (7)$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_n = 1$$

sind. So erhalten wir

$$2^{-r_2 s} I\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} I(s)^{r_2} |N(\mu)|^{-s} = \int_{x_i=-\infty}^{+\infty} \int_{u=0}^{\infty} 2^{r_1-1} n R$$

$$\cdot u^{\frac{ns}{2}-1} e^{-u \sum_{p=1}^n |\mu^{(p)}|^2} \tau_p dx_1 \cdots dx_r du$$

Die Vermehrung der x_i um ganze Zahlen bedeutet Multiplikation der τ_p mit $|\eta^{(p)}|^2$, wo $\eta^{(p)}$ eine Einheit in $k^{(p)}$ ist. Auf diese Weise lässt sich die Integration über alle x zerlegen in die Integration über den Würfel $|x_i| \leq \frac{1}{2}$ und Summation des Integranden über die zu μ assoziierten Zahlen, wenn man noch die in k liegenden Einheitswurzeln berücksichtigt, deren Anzahl w sei. Ersetzen wir endlich das Integral über u durch die Γ -Funktion, so kommt durch Summation über die verschiedenen durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Hauptideale (μ) folgende Formel: Wenn man

$$w \frac{2^{-r_2 s} I\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} I(s)^{r_2}}{2^{r_1-1} n R I\left(\frac{ns}{2}\right)} \cdot \sum_{(\mu)} |N(\mu)|^{-s} = F(s) \quad (8)$$

setzt, so ist unter Benutzung der Abkürzungen (6), (7)

$$F(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \int_{\frac{\mu}{u}} \left\{ \sum_{\mu} (|\mu^{(1)}|^2 \tau_1 + |\mu^{(2)}|^2 \tau_2 + \cdots + |\mu^{(n)}|^2 \tau_n)^{-\frac{ns}{2}} \right\} dx_1 \cdots dx_r \quad (9)$$

In der Summe ist über alle ganzen Zahlen $m_1, \cdots, m_n$ in

$$\mu = m_1 \alpha_1 + \cdots + m_n \alpha_n$$

mit Ausschluss von $m_1 = \dots m_n = 0$ zu summieren. In dem Summanden steht jetzt eine definite quadratische Form der Summationsbuchstaben. Die Reihe konvergiert, wenn $s > 1$ und ist nichts anderes als eine von Herrn Epstein „allgemeine Zetafunktion n -ter Ordnung“ genannte Funktion. Durch diese Formel erhält die Benennung Zetafunktion eine unerwartete Rechtfertigung von der Theorie der algebraischen Zahlkörper her.

An der zitierten Stelle hat Herr Epstein vermittels der Theorie der Thetafunktionen das Verhalten einer Zetafunktion bei dem Pole $s = 1$ untersucht. Für das konstante Glied in der Entwicklung nach $s - 1$ findet er einen Ausdruck, der, von unwesentlichen Konstanten abgesehen, sich aus zwei Bestandteilen zusammensetzt: erstens dem Werte einer Zetafunktion $(n - 1)$ -ter Ordnung bei $s = 1$, welche entsteht, wenn man in der Summe nur die Glieder mit $m_1 = 0$ nimmt, und zweitens dem Logarithmus eines $(n - 1)$ -fach unendlichen Produktes, das als die genaue Verallgemeinerung der η -Funktion aus der Theorie der elliptischen Funktionen zu bezeichnen ist.

Nach denselben Prinzipien lässt sich die Summe (8), wenn μ noch linearen Kongruenzen genügen muss, auf die Epsteinschen Zetafunktionen zurückführen, und ihre Entwicklungskoeffizienten bei $s = 1$ lassen sich aus derselben Formel angeben.⁶⁾ Ich gedenke an anderer Stelle eine ausführlichere Darstellung dieser Theorie zu geben, in der ich auch eine direkte Berechnung der fraglichen Koeffizienten durchführen werde, welche die Einführung der Thetafunktionen vermeidet.

§ 3.

Die Klassenzahl relativ Abelscher Zahlkörper.

Die oben entwickelten Formeln gestatten eine Darstellung der Klassenzahl relativ-Abelscher Zahlkörper in einer ähnlichen Gestalt, wie sie Kummer für die Kreiskörper gegeben hat. Sobald für einen Grundkörper k die Zerfällung seiner Primideale in einem Oberkörper K bekannt ist, lässt sich die zu K gehörige ζ -Funktion durch die zu k gehörige und ähnliche Reihen vom Typus (2) darstellen, deren Wert für $s = 1$ bei dem Klassenproblem in Frage kommt. Auf diese Art ist es möglich, den Quotienten aus der Klassenzahl von K und von k vermöge der Grössen darzustellen, die oben allgemein mit A_0 bezeichnet wurden.

Der einfachste Fall nach den Kreiskörpern ist derjenige, wo k ein imaginärer quadratischer Körper und K ein relativ-Abelscher

⁶⁾ Vgl. meine im Februar 1917 der Göttinger Ges. d. Wissenschaften vorgelegte Arbeit: Ueber die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper.

Körper ist, wie er durch die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen geliefert wird. Die in der Hauptsache bekannten Zerlegungsgesetze in K führen dann bei der Bestimmung der Klassenzahl gerade auf die Kroneckersche Grenzformel, vermöge deren, wie Herr Fueter⁷⁾ gezeigt hat, sich für die Klassenzahl von K ein Ausdruck ergibt, der neben einer damals noch unbekannten Grösse die Logarithmen der η -Funktion ebenso enthält wie die Kummersche Formel die Logarithmen der Kreiseinheiten.

Nehmen wir nun für k einen beliebigen Grundkörper, welcher noch die l -Einheitswurzel enthalte (l eine ungerade Primzahl). Der Relativkörper der durch die l -te Wurzel aus einer Zahl von k , $\sqrt[l]{\omega}$ erzeugt wird, sei K . Ist alsdann ω eine Primärzahl in k oder was dasselbe ist, ist die Relativediskriminante von K bezüglich k zu dem Grad l prim, so gibt das Hilbert-Furtwänglersche Reziprozitätsgesetz über die Zerfällung der Primideale aus k im Oberkörper K folgenden Satz: Alle Primideale, welche mod. ω in dieselbe Klasse gehören, zerfallen in K in derselben Art. Dies hat zur Folge, dass man die Funktion $\zeta_K(s)$ durch $\zeta_k(s)$ und die gewöhnlich mit $L(s, \chi)$ bezeichneten Funktionen ausdrücken kann, wobei χ ein Charakter mod. ω ist. Der Quotient der Klassenzahlen von K und k wird dann durch die Werte von $L(s, \chi)$ bei $s=1$ bestimmt und diese sind nach den oben angegebenen Prinzipien durch die Logarithmen gewisser transzendenter Funktionen, wie Gl. (5) zeigt, darstellbar.

Ähnliches gilt, falls in k nicht die l -te Einheitswurzel vorkommt, wenn K ein relativ-cyclischer Körper vom Relativgrade l ist, dessen Relativediskriminante zu l prim ist. Dieser Zusatz ist notwendig, weil man gegenwärtig das Reziprozitätsgesetz für nicht primäre Zahlen noch nicht kennt.

Nimmt man z. B. für k den absoluten Rationalitätsbereich, und für K einen auflösbaren, d. h. durch Wurzelzeichen darstellbaren Körper, so erhält man folgenden allgemeinen Satz:

Die Klassenzahl eines jeden auflösbaren Körpers, dessen Diskriminante und Grad prim zu einander sind, lässt sich durch die Integrale über Logarithmen gewisser transzendenter Funktionen darstellen, in derselben Weise, wie Kummer die Klassenzahl der Kreiskörper durch die Logarithmen der Kreiseinheiten dargestellt hat.

⁷⁾ Die verallgemeinerte Kroneckersche Grenzformel und ihre Anwendung auf die Berechnung der Klassenzahl. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 1910 I. Von dem damals noch unbekannten Faktor F habe ich gezeigt, dass er den Wert 1 hat.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel](#)

Jahr/Year: 1917

Band/Volume: [28_1917](#)

Autor(en)/Author(s): Hecke Erich

Artikel/Article: [Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper und die Klassenzahl relativ-Abelscher Körper 1363-1372](#)