

Über eine Klasse von Funktionalgleichungen.

Von

O. Spiess.

Einleitung.

Ist $x_1 = f(x)$ eine gegebene analytische Funktion, so nenne ich jede Funktion, die der Gleichung genügt

$$(1) \quad F(x_1) = F(x)$$

einen *Ring* von $f(x)$. Jede Lösung der Gleichung

$$(2) \quad \Phi(x_1) = a\Phi(x)$$

soll eine *Axe* von $f(x)$ heissen, die Konstante a der *Regulator* der *Axe*. Gleichungen der Form (2) (*Axengleichung*, gewöhnlich Schroöder'sche Gleichung genannt) treten in der Theorie der automorphen Funktionen auf. Man betrachtet dort Φ als gegeben und sucht algebraische Funktionen $f(x)$, die zu verschiedenen Werten von a gehören. Man spricht dann von einem Multiplikationstheorem. Andere Fragen der Analysis (Funktionalgleichungen, Transformationsgruppen, Iterationsrechnung) führen auf das umgekehrte *Problem*, das uns hier allein beschäftigt, *zu einem gegebenen $f(x)$ Lösungen Φ zu bestimmen*. Um dieses Problem zu lösen, bietet sich als natürliches Hilfsmittel der Iterationsprozess dar, angewandt auf die Funktion $f(x)$. Es ist vor allem das Verdienst von *Koenigs*,¹⁾ diese wichtige Operation auf einen exakten funktionentheoretischen Boden gestellt zu haben. Ihm und seinen Nachfolgern *Grévy*,²⁾ *Leau*³⁾ u. a.⁴⁾ mehr gelang es damit, für allgemeine Klassen von Funktionen $f(x)$ die *Existenz* einer analytischen Lösung von (2) nachzuweisen. Besitzt nämlich $f(x)$ einen Fixpunkt ω , in dessen Umgebung die Funktion sich in eine reguläre Reihe entwickeln lässt, so liefert die Iterationsrechnung in

¹⁾ *Koenigs*. (Bull. d. Sciences Math.) (2) VII 1883. — Ann. d. l'Ec. Norm. Sup. (3) I (1884), II (1885).

²⁾ *Grévy*. Ann. d. l'Ec. Norm. Sup. (3) (1894) (1896).

³⁾ *Leau*. Ann. de Toulouse XI. 1897.

⁴⁾ Vgl. besonders *Niccoletti*. Mem. d. Soc. ital. d. Sc. 3a XIV (1906) mit Literaturverzeichnis.

der Umgebung von ω eine Lösung $\Phi(x)$. Nur im Fall $f'(\omega) = e^{2\pi i \rho}$ (wo ρ irrational) versagt die Methode. Aber ausser der Existenz weiss man von diesen Funktionen Φ so gut wie nichts. Der Zusammenhang der Axen, die zu verschiedenen Fixpunkten gehören, die Gestalt von Existenz- und Wertbereich etc. ist unbekannt. Von trivialen Fällen abgesehen (in denen sich $f(x)$ in geschlossener Form iterieren lässt), ist es in keinem Fall gelungen, von der Gleichung (2) ausgehend, die Natur der Funktion Φ zu erschliessen.

Eine Ausnahme bildet bis zu einem gewissen Grade das Beispiel, mit dem *Gauss*⁵⁾ eigentlich dies ganze Problem ins Leben gerufen hat. Seine Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel führten ihn auf die Gleichung (2), in der

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \quad , \quad a = 2 \quad \text{war.}$$

Er fand die 2 Lösungen, die unsern späteren Formeln (3_a) (3_b) entsprechen, doch ist aus den hinterlassenen Fragmenten nicht ersichtlich, inwieweit er rein auf jenen Reihen weiterbaute oder Resultate der anderweitig begründeten Theorie der elliptischen Funktionen heranzog,⁶⁾ wie er dies in der fertigen Abhandlung über das arithmetisch-geometrische Mittel wirklich tat. Dort erscheint Φ als Quotient zweier Funktionen ψ_0, ψ_1 , die den Gleichungen genügen

$$(B) \quad \psi_0(x) = (1+x)\psi_0(x) \quad , \quad \psi_1(x) = \frac{1+x}{2} \psi_1(x)$$

Gauss löst diese Gleichungen durch Potenzreihen, deren Gesetz er errät und die sich als Integrale derselben Differenzialgleichung erweisen:

$$(C) \quad x(1-x^2) \psi'' + (1-3x) \psi' - x\psi = 0$$

Schliesslich ergeben sich ψ_0, ψ_1 als bestimmte elliptische Integrale.

Spätere Bearbeiter haben versucht, das empirische Moment auszuschalten und direkt von (B) auf (C) zu schliessen. Durch rein formale Prozesse geht dies natürlich nicht, da die Gleichungen (B) unendlich viele Lösungen besitzen, aber nur je eine, die bei 0 (resp. 1) reguläre, der Gleichung (C) genügt. Daher besitzt die Abhandlung von *Borchardt*⁷⁾ eine wesentliche Lücke. Gänzlich ungenügend ist ferner ein Versuch von *Schering* in Gauss' Werke Bd. III. Dagegen gibt *Lohnstein*⁸⁾ eine richtige Ableitung, die freilich ohne Kenntnis des Resultats kaum zu finden war.

Es war nun seit Jahren mein Ziel, das Problem der Gleichung (2)

⁵⁾ *Gauss*. Werke III.

⁶⁾ Vgl. *Schlesinger*. Monatsber. d. Berliner Ak. 1898 (pag. 346).

⁷⁾ *Borchardt*. Crelle 58 (1861).

⁸⁾ *Lohnstein*. Ztschr. f. Math. u. Phys. 33 (1888).

mit den Mitteln der Iterationsgleichung allein durchzuführen, ohne etwa bei der Theorie der Differenzialgleichungen Anleihen zu machen. Es gelang mir, die Gedanken, die den zitierten Arbeiten zugrunde liegen, zu einer Methode auszubauen, die es tatsächlich gestattet, in verschiedenen Fällen mit wenig Rechnung ans Ziel zu gelangen. Ich werde diese Methode im folgenden an dem klassischen Beispiel (A) sowie an zwei andern Funktionen erläutern, bei denen das Resultat nicht a priori bekannt war. Darüber hinaus bin ich zu allgemeinen Sätzen gelangt, von denen in § 4 einige gegeben werden. Es war vor allem nötig, den Begriff der Iteration einer analytischen Funktion in geeigneter Weise zu präzisieren, wodurch auch Funktionalgleichungen wie (1) und (2) erst einen exakten Sinn bekommen. Dabei zeigt es sich, dass man bei mehrdeutigen Funktionen i. A. unendlich viele Iterationsarten zu unterscheiden hat, die sich ganz verschieden verhalten können. Diese Dinge werden in § 1 auseinandergesetzt, § 2 und § 3 sind den speziellen Beispielen gewidmet, während § 4 die allgemeinen Betrachtungen von § 1 weiterführt.

§ 1.

Die Funktionen, deren Axen wir bestimmen werden, sind die folgenden:

$$g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \quad h(x) = \sqrt{\frac{x(3-x)}{1+x}}, \quad j(x) = \sqrt{\frac{x(1-x)}{1+x}}$$

Sie führen alle drei auf Modulfunktionen, was bei der zweiten und dritten neu ist. Im Folgenden sind auch die allgemeinen Betrachtungen der notwendigen Kürze halber auf diese Beispiele zugeschnitten.

A. Kritische Punkte.

Ist $f(x)$ eine analytische Funktion, $f_{(-1)} = \bar{f}$ ihre Inverse, so bezeichne ich die durch Iteration aus ihnen entspringenden Funktionen mit $f_{(2)}, f_{(3)} \dots f_{(-2)}, f_{(-3)}$. Verschiedene Zweige werden durch obere Indizes unterschieden. $f_{(n)}(x)$ heisse das n -te Iterat von $f(x)$, wobei n , wie immer in dieser Arbeit, jede ganze (positive oder negative Zahl inkl. 0) bedeutet. Bezeichnet durchweg p eine positive ganze Zahl, so heisst $f_{(p)}(x)$ ein aufsteigendes, $f_{(-p)}(x)$ ein absteigendes Iterat.

Die Verzweigungspunkte (V-Punkte) sämtlicher $f_{(n)}$ heissen „kritische“ Punkte. Ist w ein V.-Punkt von $f(x)$, so sind die sämtlichen Werte von $f_{(-p)}(w)$ V-Punkte von $f_{(p)}$. Im allgemeinen ist die Zahl der kritischen Punkte unendlich, doch können auch bloss endlich viele vorkommen. Diese bilden dann in bezug auf die Substitutionen f und $f_{(-1)}$ eine endliche Gruppe. Das ist der Fall bei den obigen Bei-

spielen, für welche man die Gruppe der V-Punkte aus dem folgenden Schema abliest.

$w =$	0	1	-1	∞
$g(w) =$	0	± 1	∞	0

$w =$	0	1	-1	3	-3	∞
$h(w) =$	0	± 1	∞	0	± 3	∞

$w =$	0	1	-1	ϱ	ϱ'	$-\varrho$	$-\varrho'$	i	$-i$	∞	$\varrho = -1 + \sqrt{2}$
$j(w) =$	0	0	∞	$\pm \varrho$	$\pm \varrho'$	$\pm i$	$\pm i$	± 1	± 3	∞	$\varrho' = -1 - \sqrt{2}$

B. Fixpunkte.

Wir unterscheiden Fixpunkte *erster* bis *vierter Art*, je nachdem ein Zweig der Funktion $x_1 = f(x)$ in der Umgebung eines solchen eine der folgenden Entwicklungen besitzt

- I $x_1 - \omega = a(x - \omega)R$, $|a| \neq 1$
- II $= c(x - \omega)^a R$, $a > 0$ und $\neq 1$
- III $= \varepsilon(x - \omega)R$ $\varepsilon =$ Einheitswurzel
- IV $= e^{\alpha i}(x - \omega)R$ $\alpha =$ irrational.

Hierin bedeutet R eine Reihe der Form

$$R = 1 + c_1(x - \omega)^{1/\nu} + c_2(x - \omega)^{2/\nu} + \dots$$

Es ist klar, dass die inverse Funktion \bar{f} eine Entwicklung der gleichen Art besitzt, wobei an Stelle der Zahlen $a, \varepsilon, e^{i\alpha}$ ihr reziproker Wert tritt.

Die obigen Funktionen haben (ausser $g(x)$) bloss Fixpunkte zweiter Art und zwar ist speziell $\nu = 1$, und a für f oder \bar{f} gleich 2, d. h. eine ganze Zahl. Das letztere ist ein wesentlicher Umstand. Die Funktion $g(x)$ besitzt ausserdem zwei Fixpunkte vierter Art in $\frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$, die hier keine Rolle spielen.

C. Analytische Iteration.

Sei ξ ein „gewöhnlicher“ d. h. nicht-kritischer Punkt und ξ_1 einer der Punkte $f(\xi)$. Wir verbinden ξ mit ξ_1 durch eine die kritischen Punkte vermeidende Linie W_ξ . Wir bezeichnen denjenigen Zweig von $f(x)$, der für $x = \xi$ den Wert ξ_1 annimmt, mit x_1 und behalten diese

Bezeichnung bei beliebiger Bewegung von x bei. Wandert nun x von ξ über W_ξ nach ξ_1 , so geht x_1 längs einer Kurve W_{ξ_1} zu einem Punkt ξ_2 . Geht weiter x über W_{ξ_1} nach ξ_2 , so begibt sich x_1 über die Linie W_{ξ_2} nach ξ_3 u. s. f. Die so erhaltenen Werte

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, \dots$$

bilden die zu W_ξ gehörige „aufsteigende Iteralfolge“. Lassen wir jetzt die Variable x_1 von ξ_1 über W_ξ nach ξ wandern, so läuft x über eine Linie W_{ξ_1} zu einem Punkt ξ_{-1} ; geht x_1 nach ξ_{-1} , so gelangt x über $W_{\xi_{-1}}$ nach ξ_{-2} etc. So finden wir die „absteigende Iteralfolge“ zu W_ξ

$$\xi, \xi_{-1}, \xi_{-2}, \dots, \xi_{-p}, \dots$$

Die sämtlichen ξ_n bilden die *totale Iteralfolge* (zu W_ξ). Diese ist offenbar durch die definierende „Bahn“ W_ξ eindeutig bestimmt. Die aus den Linien $\dots W_{\xi_{-2}} W_{\xi_{-1}} W_\xi W_{\xi_1} \dots$ gebildete Kurve heisst *totale Bahnkurve* der Iteration. Wir bezeichnen nun den Zweig von $f_{(n)}(x)$, der für $x = \xi$ den Wert ξ_n hat, mit x_n und behalten diese Bezeichnung bei, wenn x von seiner Anfangslage ξ aus beliebige Wege beschreibt. Lassen wir also x längs einer Linie L laufen, so beschreibt jeder Punkt x_n eine Bildkurve L_n und bei jeder Lage von x bilden die Werte.

$$\dots, x_{-2}, x_{-1}, x, x_1, x_2, \dots$$

die zu (x, L, W_ξ) gehörige Iteralfolge.

Offenbar können wir diese Folge statt durch analytische Fortsetzung der x_n aus den ξ_n auch direkt nach derselben Methode entstehen lassen, indem wir dem x eine Bahn W_x zuordnen, nämlich die aus den Kurven $LW_\xi L_1$ gebildete Linie. In der Tat, geht x über $LW_\xi L_1$ nach x_1 , so wandert x_1 über $L_1 W_1 L_2$ nach x_2 etc. Es ist ferner klar, dass man dieselben (ξ_n) und damit (x_n) erhält, wenn man die Gestalt der Linie W_ξ abändert, solange dabei nur kein kritischer Punkt überschritten wird. *Denken wir uns die Punkte x und x_1 durch einen dehnbaren Faden verbunden, der für $x = \xi$ die Lage von W_ξ hat und der bei Bewegung von x, x_1 mitgezogen wird, doch ohne jemals einen kritischen Punkt zu berühren. Wird nun für ein beliebiges x , das von ξ auf einem Wege L erreicht wurde, eine mögliche Lage des Fadens mit W_x bezeichnet, so kann dieses W_x als definierende Bahn der zu (x, L) gehörigen Iteralfolge dienen.*

Zwei auf die geschilderte Weise ineinander überführbare Bahnen W_x, W_y sollen „äquivalent“ heissen oder „zur gleichen Iterationsart gehörig“. Dieselbe Bezeichnung gelte auch für die zugehörigen Iteralfolgen.

folgen (x_n) (y_n) . Diese sind also durch analytische Fortsetzung längs einer x und y verbindenden Linie ineinander überführbar. Zwei Iteralfolgen hingegen, die aus nicht-äquivalenten Bahnen entspringen, gehen auf keine Weise Glied für Glied ineinander über, sie gehören *verschiedenen Iterationsarten* an.

Führt x eine geschlossene Bahn aus, die kritische Punkte umkreist, so geht die Folge (x_n) in eine Folge (x_n^*) über, die sich von jener in mindestens einem Gliede (bei unsern Beispielen sogar in allen Gliedern von einem bestimmten Index an) unterscheidet. Jeder Punkt x der Ebene gehört somit i. A. unendlich vielen Iteralfolgen an, die durch Angabe des Weges L zu unterscheiden sind. Wenn ich sage, „wir iterieren $f(x)$ n -mal“, so ist gemeint, dass die Variable von ihrem Anfangswert x an längs einer zu (x, L, W_ξ) gehörigen Bahnkurve nach x_n geht. Denkt man sich indess eine Riemann'sche Fläche, auf der sämtliche Funktionen $f_{(n)}$ eindeutig sind, so gehört jeder Punkt dieser Fläche einer einzigen Iteralfolge (der gewählten Iterationsart) an, und die Wahl einer Bahnkurve ist überflüssig.

D. Konvergenz.

Wir nehmen jetzt an, dass $f(x)$ einen Fixpunkt ω besitzt, bei dem ein Zweig die Entwicklung hat

$$x_1 - \omega = (x - \omega)^a (C_0 + C_1(x - \omega) + \dots)$$

worin a eine *positive ganze Zahl* ist. Ein solcher Punkt heisse ein „*regulärer Konvergenzpunkt zweiter Art*“.

Ich nehme weiter an, dass ein Kreis C um ω existiert, in dem (ausser ω) keine weiteren kritischen Punkte liegen („*isolierter*“ Fixpunkt). Dies trifft bei unsern Beispielen zu. Wir können dann den Kreis C so verengern, dass für alle Punkte x im Innern oder auf dem Rand (mit Ausnahme von ω)

$$|x_1 - \omega| < |x - \omega|$$

Verbinden wir ein bestimmtes x mit x_1 durch eine ganz innerhalb C gelegene Bahn W_x , so gilt für die so definierte Iterationsart

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = \omega \quad \text{für alle } x \text{ innerhalb } C.$$

Bei einem Umlauf von x um ω geht die absteigende Iteralfolge x_{-p} in eine andere über, die Bahn W_x in W'_x . Wir errichten über der Kreisfläche C ein Riemann'sches Flächenstück, das sich unendlich oft um den Punkt ω herumwindet und das ich den „*Windungskreis*“ C heisse. Jedem Punkt x dieser Fläche entspricht dann eine einzige aufsteigende Iteralfolge, die gegen

ω konvergiert. Beschreibt x die Randlinie I' des Windungskreises, so durchläuft x_1 eine ganz im Innern gelegene Linie I'_1 , die mit I' ein (unendlich gewundenes) Ringgebiet G begrenzt. G heisst ein *Fundamentalebereich* der Iteration. Durchläuft x den Bereich G , so beschreibt x_p den Bildbereich G_p . Die Bereiche G, G_1, G_2, \dots füllen die Fläche C gerade einfach aus. Wir setzen nun die Fläche C dadurch fort, dass wir G durch die inverse Funktion $f_{(-1)}$ sukzessive abbilden. Lassen wir x_1 den Bereich G durchlaufen, so erzeugt der Punkt x (den wir uns mit flächebildender Materie belastet denken) einen an G anschliessenden Bereich G_{-1} , aus diesem entsteht analog ein G_{-2} etc. Wo x an schon gebildete Fläche anstösst, schiebt sich ein neues Blatt über das alte. Die Gesamtheit aller Bereiche G_n bildet eine unendlich-blättrige Fläche K_ω von folgenden Eigenschaften:

1. K_ω besteht aus der Gesamtheit aller Punkte, deren aufsteigende Iteralfolge nach ω konvergiert. Daher heisst K_ω der zu ω gehörige *Konvergenzbereich* (der zugrunde gelegten Iterationsart I).

2. K_ω enthält keine nicht-zerstückelnde Rückkehrschnitte in seinem Innern noch kritische Punkte. Daher verhalten sich sämtliche Funktionen $f_{(n)}$ auf K_ω eindeutig. Jeder Punkt gehört einer einzigen totalen Iteralfolge an.

Beispiel. $x_1 = x^3$, $x_{-1} = \sqrt[3]{x}$

Die kritischen Punkte sind 0 und ∞ , die zugleich reguläre Fixpunkte zweiter Art sind. Verbindet man x mit x_1 durch Bahnen W, W', W'' , die den Nullpunkt keinmal, einmal und zweimal umkreisen, so zeigt ein positiver Umlauf von x , dass W'' äquivalent mit W ist, während W' zu W nicht-äquivalent ist. Jede andere Bahn, die den Nullpunkt endlich oft umkreist, ist mit W oder W' äquivalent. Es gibt also nur zwei Iterationsarten, I und I' .

Die aufsteigende Folge (bei beiden Arten) konvergiert gegen 0 oder ∞ , je nachdem $|x| \lesseqgtr 1$. Das zu 0 gehörige Konvergenzgebiet K_0 ist also der um 0 sich windende, unendlichblättrige Einheitskreis. Die absteigende Folge konvergiert für I gegen den Fixpunkt erster Art (+1), für I' gegen (-1), wie man sich durch Rechnung überzeugt. Konvergenzgebiet K_1 oder K_{-1} ist beidemal die ganze bei 0 und ∞ verzweigte logarithmische Windungsfläche (mit Ausnahme der Punkte 0 und ∞).

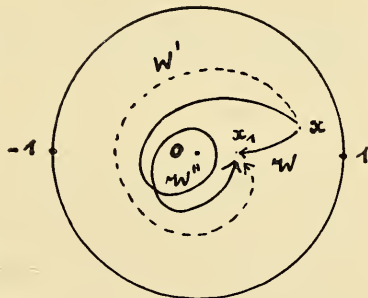


Fig. 1.

E. Iteralsummen und Iteralprodukte.

Seien $\varphi(x)$, $\psi(x)$ analytische Funktionen, die sich in K_ω überall rational verhalten und in der Umgebung von ω regulär sind. Speziell sei

$$\varphi(\omega) = 0 \quad , \quad \psi(\omega) = 1$$

Dann sind die Reihe und das Produkt

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty \varphi(x_p) \quad , \quad \Psi(x) = \prod_0^\infty \psi(x_p)$$

für alle Punkte von K_ω konvergent und zwar gleichmässig für jedes Gebiet, das mit seinen Randpunkten ganz innerhalb K_ω liegt; Φ und Ψ sind analytische Funktionen, die in K_ω eindeutig und bis auf Pole regulär sind und daselbst den Funktionalgleichungen genügen

$$\Phi(x_1) = \Phi(x) + \varphi(x) \quad , \quad \Psi(x_1) = \Psi(x) \cdot \psi(x)$$

Bei ω ist $\Phi(\omega) = 0 \quad , \quad \Psi(\omega) = 1$.

Solche *Iteralsummen* und *-Produkte*, wie ich sie nenne, sind in mehrerer Hinsicht bemerkenswert. Die Reihen konvergieren sehr stark und dürfen gliedweis beliebig oft differenziert werden. Ist K_ω , was oft der Fall ist, mit dem Existenzbereich von Φ oder Ψ identisch, so wird die i. A. unendlich vieldeutige Funktion durch einen einzigen analytischen Ausdruck vollständig dargestellt.

§ 2.

A. Wir wenden uns jetzt zu der Axengleichung (2), die also folgendes präzise Problem stellt. Gegeben ist eine Funktion fx der oben angenommenen Art und für jeden Punkt x eines endlichen Gebiets eine Bahn W_x ; gesucht ist eine Funktion $\Phi(x)$, die bei *Fortsetzung längs* W_x , (was wir durch ein beigefügtes (W_x) andeuten), einen Wert $\Phi(x_1)$ annimmt, der die Gleichung erfüllt

$$(2) \quad \Phi(x_1) = a \Phi(x) \quad (W_x)$$

Wir können sofort in der Funktion

$$(3) \quad \Phi_\omega(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{\log(x_p - \omega)}{a^p} \right]$$

eine Lösung angeben, die sich in der Umgebung von ω verhält wie $\log(x - \omega)$. In der Tat, setzt man

$$x_1 - \omega = (x - \omega)^a R(x)$$

so folgt durch Iteration $x_p = (x_{p-1} - \omega)^a R(x_{p-1})$ und hiéaus

$$\frac{\log(x_p - \omega)}{a^p} = \log(x - \omega) + \frac{1}{a} \log R(x) + \frac{1}{a^2} \log R(x_1) + \cdots + \frac{1}{a^p} \log R(x_{p-1})$$

In einem geeigneten Kreis C um ω ist $|R|$ zwischen festen positiven Zahlen enthalten, woraus folgt, dass die Reihe rechts für $p = \infty$ gleichmässig konvergiert. Es ist also

$$(3a) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\log(x_p - \omega)}{a^p} = \Phi_\omega(x) = \log(x - \omega) + \sum_0^\infty \frac{1}{a^p} \log R(x_p)$$

eine Funktion der genannten Art. Dass sie der Gleichung (2) genügt, ist evident. Beschreibt x auf der Fläche K_ω einen geschlossenen Weg U , so durchläuft x_p einen ebensolchen Weg, der von einem bestimmten Index an ganz innerhalb C liegt. Dabei geht $\Phi(x_p)$ in sich über, und da $\Phi(x) = a^{-p} \Phi(x_p)$ ist, so folgt

$$\text{Satz 1.} \quad \text{Die Funktion } \Phi_\omega(x) = \lim \left(\frac{\log(x_p - \omega)}{a^p} \right)$$

ist eine innerhalb des Konvergenzbereichs K_ω eindeutige und reguläre Axe von $f(x)$, die in der Umgebung von ω eine Entwicklung besitzt der Form

$$\Phi_\omega = \log(x - \omega) + \text{reguläre Reihe.}$$

Sei jetzt $\Phi(x)$ irgend eine (zu W_x gehörige) Lösung von (2), die wenigstens in einem Teil von K_ω existiert. Wir können dann sagen

Satz 2. Eine Axe $\Phi(x)$, die in der Nähe von ω nicht beliebig grosse Werte annimmt, ist identisch $= 0$.

Denn ist $\Phi(x) \neq 0$, so wächst $|\Phi(x_p)| = a^p |\Phi(x)|$ wegen $a > 1$ mit p über alle Grenzen, wobei ω Häufungsstelle der x_p ist.

Satz 3. Verhält sich $\Phi(x)$ bei ω wie ein Logarithmus, d. h., ist daselbst $\Phi = c \cdot \log(x - \omega) + \text{reg. Reihe}$, so stimmt $\Phi(x)$ mit $\Phi_\omega(x)$ bis auf einen konstanten Faktor überein.

Denn alsdann ist auch $\Psi = \Phi - c\Phi_\omega$ eine Axe, die aber bei ω regulär und also nach Satz 2 $= 0$ ist. Somit ist $\Phi = c\Phi_\omega$.

Jede zu W_x gehörige Axe von $f(x)$ ist offenbar in der Form enthalten

$$\Phi = \Phi_\omega \cdot F$$

wo F eine Lösung der Gleichung

$$F(x_1) = F(x) \tag{W_x}$$

d. h. ein Ring bedeutet. Von diesen Funktionen erkennt man sofort

Satz 4. *Ein Ring ist entweder eine Konstante oder er hat in ω eine Stelle der Unbestimmtheit.*

Denn wegen $F(x_p) = F(x)$ nimmt F in der Umgebung von ω jeden Wert, dessen F überhaupt fähig ist, unendlich oft an.

B. Ich nehme jetzt an, dass wenigstens in einem Teil von K_ω auch die absteigende Folge x_{-p} gegen einen Fixpunkt α konvergiert, und zwar soll dieser von gleicher Beschaffenheit sein wie ω , also regulär, isoliert, und mit demselben Regulator a . Mit andern Worten es verhalte sich $x_1 - \alpha$ wie $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ oder $x_{-1} - \alpha$ wie $(x - \alpha)^a$. Die Funktion

$$(3b) \quad \Phi_\alpha(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a^p}{\log(x_{-p} - \alpha)} = \frac{1}{\log(x - \alpha) + \text{reg. Reihe}}$$

ist dann ebenfalls eine Lösung der Gleichung (2), die sich auf einer Riemann'schen Fläche K_α eindeutig und regulär verhält.

Im folgenden mache ich zunächst von den Flächen K_α , K_ω deren Gestalt wir a priori nicht kennen, keinen Gebrauch, sondern deute x als Punkt der Ebene. In Praxi findet man zunächst ein schlichtes Gebiet G , das α und ω zu Randpunkten hat und in dessen Innerem die Iteralfolge (x_n) beidseitig konvergiert. Wir besitzen nun in Φ_α , Φ_ω zwei Lösungen von (2), die sich bei α und ω resp. verhalten wie $\frac{1}{\log(x - \alpha)}$ und $\log(x - \omega)$. Die Frage ist, welche Beziehungen diese beiden Axen zu einander haben. Könnte man zeigen, dass Φ_α sich bei ω verhält wie $\log(x - \omega)$, so würde nach Satz 3 folgen dass $\Phi_\alpha = c\Phi_\omega$ wäre. Ich werde in diesem Abschnitt zeigen, dass dies davon abhängt, ob eine gewisse Funktionalgleichung eine Lösung besitzt, die bei α und ω endlich bleibt. Im Fall der Funktionen g , h , j lässt sich jene Gleichung durch eine ganze rationale Funktion befriedigen, wodurch die Frage entschieden ist. Es ist praktisch und entspricht auch dem historischen Gang, Φ_α und Φ_ω nicht direkt unter sich, sondern beide mit einer dritten Axe zu vergleichen, was auch zu interessanten analytischen Darstellungen führt.

Da bei ω und α die Entwicklungen gelten

$$x_1 - \omega = (x - \omega)^a (e_0 + \dots), \quad x_1 - \alpha = (x - \alpha)^{\frac{1}{a}} (d_0 + \dots)$$

so ist in der Umgebung jener Punkte

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{x_1 - \omega}{x - \omega} (a + \dots), \quad \text{resp.} \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \left(\frac{1}{a} + \dots \right)$$

Man kann daher (auf viele Arten) dem Wert von $\frac{dx_1}{dx}$ die folgende Gestalt geben

$$(4) \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{P(x_1)}{P(x)} \cdot \frac{r^2(x)}{\alpha} \quad \left(\begin{array}{l} P(\alpha) = P(\omega) = 0 \\ r(\alpha) = 1, \quad r(\omega) = \alpha \end{array} \right)$$

Hierin bedeuten $P(x)$, $r(x)$ Funktionen, die (wenigstens im ersten Blatt, falls sie mehrdeutig sind) bei α und ω reguläre Entwicklungen haben der Form

$$(5) \quad \begin{array}{l} P = (x - \alpha)(a_0 + \dots) \quad \text{resp.} = (x - \omega)(b_0 + \dots) \\ r = 1 + c_0(x - \alpha) + \dots \quad \text{resp.} = a + d_0(x - \omega) + \dots \end{array}$$

Bei den Funktionen g , h , j können wir für P , r ganze rationale Funktionen wählen. Z. B. ist für

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{x_1(x_1^2 - 1)}{x(x^2 - 1)} \cdot \frac{(1+x)^2}{2}, \quad (\alpha = 0, \quad \omega = 1, \quad a = 2.)$$

Nach § 1. E. existieren dann innerhalb G die Funktionen

$$(6) \quad \psi_\alpha(x) = \prod_1^\infty r(x_p), \quad \psi_\omega(x) = \prod_0^\infty \frac{\alpha}{r(x_p)}$$

und genügen den Gleichungen

$$(7) \quad \begin{array}{l} \psi_\alpha(x_1) = r(x) \cdot \psi_\alpha(x) \quad ; \quad \psi_\omega(x_1) = \frac{r(x)}{\alpha} \psi_\omega(x) \\ \psi_\alpha(\alpha) = 1 \quad , \quad \psi_\omega(\omega) = 1. \end{array}$$

Folglich genügt der Quotient $\frac{\psi_\alpha}{\psi_\omega}$ der Axengleichung

$$(8) \quad \frac{\psi_\alpha(x_1)}{\psi_\omega(x_1)} = a \frac{\psi_\alpha(x)}{\psi_\omega(x)}$$

ψ_α , ψ_ω sind bei den gleichnamigen Fixpunkten regulär, werden aber bei den ungleichnamigen ∞ . Wir fragen nun nach der Bedingung dafür, dass jener Quotient sich verhält

$$\text{bei } \alpha \text{ wie } \frac{1}{\log(x - \alpha)}, \text{ bei } \omega \text{ wie } \log(x - \omega)$$

Dann muss er nämlich nach Satz 3 mit jeder der Axen Φ_α , Φ_ω bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen. Nun folgt aus (8)

$$(\psi_\omega \psi'_\alpha - \psi'_\omega \psi_\alpha)_{x_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} = a \frac{\psi_\omega^2(x_1)}{\psi_\omega^2(x)} \cdot (\psi_\omega \psi'_\alpha - \psi'_\omega \psi_\alpha)_x$$

und weiter wegen (4) (7)

$$P(x_1)(\psi_\omega \psi'_\alpha - \psi'_\omega \psi_\alpha)_{x_1} = P(x)(\psi_\omega \psi'_\alpha - \psi'_\omega \psi_\alpha)_x$$

d. h. $H = P(x)(\psi_\omega \psi'_\alpha - \psi'_\omega \psi_\alpha)$ ist ein Ring von $f(x)$.

Wenn nun z. B. ψ_ω bei α logarithmisch unendlich wird, so besitzt H in $x = \alpha$ einen endlichen Wert und folglich ist nach Satz 5

$$(9) \quad H = P(x)(\psi_\omega \psi'_\alpha - \psi'_\omega \psi_\alpha) = c = \text{const.}$$

Umgekehrt, wenn (9) gilt, schliesst man sofort auf die Entwicklungen

$$(9a) \quad \frac{\psi_\alpha}{\psi_\omega} = \frac{c}{P'(\omega)} \log(x - \omega) + \dots, \quad \frac{\psi_\omega}{\psi_\alpha} = \frac{c}{P'(\alpha)} \log(x - \alpha) + \dots$$

Die Frage ist also zurückgeführt auf die nach der Gültigkeit von (9). Ich beweise nun auf zwei Arten den

Satz 6. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen von (9) ist die, dass die Funktionalgleichung

$$(10) \quad \frac{r^4}{a^2} P_1 Q_1 - PQ = \frac{2r'^2 - rr''}{r^2} \cdot P^2 - \frac{r'}{r} PP'$$

eine Lösung $Q(x)$ besitzt, für die

$$(10a) \quad Q(\alpha), \quad Q(\omega) \quad \text{endliche Werte haben.}$$

Hierin ist $P_1 Q_1$ geschrieben für $P(x_1), Q(x_1)$, wie wir überhaupt im Folgenden $\varphi(x_n)$ durch φ abkürzen wollen.

C. Erster Beweis.

Differenziert man (9), so lässt sich das Resultat schreiben

$$[(P\psi'_\alpha)' + Q\psi_\alpha] \psi_\omega - [(P\psi'_\omega)' + Q\psi_\omega] \psi_\alpha = 0$$

wo Q eine beliebige Funktion ist. Wählt man Q so, dass die erste Klammer = 0 ist, so verschwindet auch die zweite, d. h. es besteht die Gleichung

$$(11) \quad P\psi'' + P'\psi' + Q\psi = 0 \quad (\text{für } \psi = \psi_\alpha \text{ und } \psi_\omega)$$

Umgekehrt folgt aus (11) wieder (9). Ich zeige nun direkt, dass unter der Annahme (10), (10a) die Funktionen (6) der Gl. (11) genügen. Ich fasse die Gleichungen (7) zusammen in die eine

$$(12) \quad \psi_1 = \frac{r}{\mu} \psi$$

und differenziere zweimal unter Benützung von (4). Es folgt

$$P_1 \psi'_1 = \frac{\alpha}{\mu} \left[\frac{P\psi'}{r} + \frac{r'}{r^2} P\psi \right]$$

$$\frac{d}{dx_1} (P_1 \psi'_1) \cdot P_1 r^2 = \frac{\alpha^2}{\mu} \left[\frac{P}{r} \cdot \frac{d}{dx} (P\psi') + \frac{r'}{r^2} P P' \psi + \frac{r r'' - 2r'^2}{r^3} P^2 \psi \right]$$

Hiezu addiert

$$P_1 r^2 \cdot Q_1 \psi_1 = \frac{r^3}{\mu} P_1 Q_1 \psi = \frac{\alpha^2}{\mu} \frac{P}{r} \cdot \frac{r^4 P_1 Q_1}{\alpha^2 P} \cdot \psi \quad \text{gibt}$$

$$\left[\frac{d}{dx_1} (P_1 \psi'_1) + Q_1 \psi_1 \right] P_1 r^2 = \frac{\alpha^2}{\mu} \frac{P}{r} \left[\frac{d}{dx} (P\psi') + \left(\frac{r^4}{\alpha^2} \cdot \frac{P_1 Q_1}{P} + \frac{r r'' - 2r'^2}{r^2} P + \frac{r'}{r} P' \right) \psi \right]$$

Gilt (11), so folgt hieraus (10) (10a). Umgekehrt, gilt (10), so ist die innere Klammer rechts gleich Q . Setzt man noch für r nach (12)

$\frac{\mu \psi_1}{\psi}$ ein, so erhält man für die Funktion

$$L = P \cdot \psi^3 [P\psi'' + P'\psi' + Q\psi]$$

die Gleichung

$$L(x_1) = \frac{\alpha^2}{\mu^4} L(x)$$

Für $\psi = \psi_\alpha$ ist $\mu = 1$, $L = L_\alpha$, für $\psi = \psi_\omega$ ist $\mu = \alpha$, $L = L_\omega$ zu setzen. L_α , L_ω genügen also den Gleichungen

$$(13) \quad \begin{aligned} L_\alpha(x) &= \alpha^2 L_\alpha(x_{-1}) = \alpha^{2p} L_\alpha(x_{-p}) \\ L_\omega(x) &= \alpha^2 L_\omega(x_1) = \alpha^{2p} L_\omega(x_p) \end{aligned}$$

Wächst jetzt p ins Unendliche, so konvergiert x_{-p} gegen α , x_p gegen ω . Nun sind ψ_α , ψ_ω samt ihren Ableitungen in den gleichnamigen Fixpunkten endlich, ebenso sind nach (10a) $Q(\alpha)$, $Q(\omega)$ endlich. Somit nähert sich der mit P multiplizierte Teil von L_α , L_ω einem endlichen Grenzwert. P selbst verschwindet nach (5) in α , ω in der ersten Ordnung, und folglich verschwinden $P(x_{-p})$, $P(x_p)$ resp. wie $(x_{-p} - \alpha)$, $(x_p - \omega)$, d. h. wie $(x - \alpha)^{ap}$, $(x - \omega)^{ap}$. Somit ist sicher

$$(14) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha^{2p} P(x_{-p}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha^{2p} P(x_p) = 0$$

Die rechte Seite von (13) wird also mit wachsendem p beliebig klein, und somit ist identisch $L_\alpha = 0$, $L_\omega = 0$, d. h. aber, ψ_α , ψ_ω erfüllen Gleichung (11).

D. Zweiter Beweis.

Die Gleichungen (6) logarithmisch differenziert ergeben

$$(15) \quad \frac{\psi'_\alpha}{\psi_\alpha} = \sum_{-1}^{\infty} \frac{r'_n}{r_n} x'_n \quad , \quad \frac{\psi'_\omega}{\psi_\omega} = \sum_0^{\infty} \frac{r'_n}{r_n} x'_n$$

Nun folgt aus (4) mit Hilfe von (7) die Formel

$$\frac{dx_1}{dx} = x'_1 = \frac{P_1 \psi_\alpha(x_1) \psi_\omega(x_1)}{P \psi_\alpha(x) \psi_\omega(x)} \quad \text{woraus für jedes } n$$

$$(16) \quad \frac{dx_n}{dx} = x'_n = \frac{P_n \psi_\alpha(x_n) \psi_\omega(x_n)}{P \psi_\alpha(x) \psi_\omega(x)}$$

Führt man dies in (15) ein und setzt noch

$$\frac{r'_n}{r_n} P_n \psi_\alpha(x_n) \psi_\omega(x_n) = C_n \quad \text{so folgt}$$

$$(17) \quad P \psi_\omega \psi'_\alpha = \sum_{-1}^{\infty} C_n, \quad P \psi_\alpha \psi'_\omega = - \sum_0^{\infty} C_n \quad \text{und also ist}$$

$$(18) \quad H = P(\psi_\omega \psi'_\alpha - \psi'_\omega \psi_\alpha) = \sum_{-1}^{\infty} C_n$$

Ich zeige nun, dass unter der Voraussetzung (10) (10a) $H' = 0$ also $H = \text{konst.}$ ist. Dabei ist zu beachten, dass alle die auftretenden Reihen absolut und gleichmässig konvergent sind, so dass die damit vorgenommenen Operationen alle erlaubt sind. Differenziert man (18) unter Benützung von (16) so erhält man

$$(19) \quad P \psi_\alpha \psi_\omega \cdot H' = \sum_{-1}^{\infty} P_n \frac{d}{dx} \left(P_n \frac{r'_n}{r_n} \right) \psi_\alpha^2(x_n) \psi_\omega^2(x_n) +$$

$$+ \sum_{-1}^{\infty} \frac{r'_n}{r_n} P_n^2 \psi_\alpha(x_n) \psi_\omega(x_n) [\psi'_\alpha(x_n) \psi_\omega(x_n) + \psi'_\omega(x_n) \psi_\alpha(x_n)]$$

Nun folgt aus (17) sofort

$$P_n \psi_\omega(x_n) \psi'_\alpha(x_n) = \sum_{i=n-1}^{\infty} C_i, \quad P_n \psi_\alpha(x_n) \psi'_\omega(x_n) = - \sum_{i=n}^{\infty} C_i$$

Damit wird die zweite Summe in (19) gleich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(\sum_{i=n-1}^{\infty} C_i - \sum_{i=n}^{\infty} C_i \right)$$

Multipliziert man aus, so erkennt man, dass jedes Produkt $C_n C_i$ zweimal auftritt mit entgegengesetztem Zeichen und also wegfällt, ausser wenn $i = n$. Die Doppelsumme reduziert sich daher auf die einfache: $-\sum C_n^2$, die wir mit der ersten Summe in (19) vereinigen zu

$$- \sum_{-1}^{\infty} P_n \left[\frac{2r'^2_n - r_n r''_n}{r_n^2} P_n - \frac{r'_n}{r_n} P'_n \right] \psi_\alpha^2(x_n) \psi_\omega^2(x_n)$$

Der Ausdruck unter dem \sum ist aber nach (10) gleich

$$\left[\frac{r^4}{a^2} P_{n+1} Q_{n+1} - P_n Q_n \right] \psi_\alpha^2(x_n) \psi_\omega^2(x_n)$$

was sich wegen $r_n \psi_\alpha(x_n) = \psi_\alpha(x_{n+1})$, $\frac{r_n}{a} \psi_\omega(x_n) = \psi_\omega(x_{n+1})$ auf die Form bringen lässt

$$- P_n Q_n \psi_\alpha^2(x_n) \psi_\omega^2(x_n) + P_{n+1} Q_{n+1} \psi_\alpha^2(x_{n+1}) \psi_\omega^2(x_{n+1})$$

Die rechte Seite von (19) bekommt dadurch schliesslich die Gestalt

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})$$

Diese Summe hat aber den Wert 0, falls u_p und u_{-p} für $p = \infty$ gegen Null konvergieren. Nun lässt sich

$$u_n = P_n Q_n \psi_\alpha^2(x_n) \psi_\omega^2(x_n)$$

wegen $\frac{\psi_\alpha(x_n)}{\psi_\alpha} = \frac{a^n \psi_\omega(x_n)}{\psi_\omega}$ je nachdem $n = \pm p$ ist, in die Form bringen

$$u_{-p} = \frac{\psi_\omega^2}{\psi_\alpha^2} \cdot Q_{-p} \cdot (P_{-p} a^{2p}) \cdot \psi_\alpha^2(x_{-p})$$

$$u_p = \frac{\psi_\alpha^2}{\psi_\omega^2} \cdot Q_p \cdot (P_p a^{2p}) \cdot \psi_\omega^2(x_p)$$

und also ist in der Tat nach (10a) und (14) $\lim_{p \rightarrow \infty} u_{-p} = \lim_{p \rightarrow \infty} u_p = 0$.

Damit ist Gl. (9) von neuem bewiesen und zugleich für die Konstante c die merkwürdige Darstellung gefunden (nach (18))

$$(20) \quad c = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{r'_n}{r_n} P_n \psi_\alpha(x_n) \psi_\omega(x_n)$$

E. Wir betrachten jetzt die Gl. (10), auf die die Frage nach dem Zusammenhang von Φ_α , Φ_ω also zurückkommt. Es wäre nun leicht zu zeigen, dass in der Umgebung jedes der beiden Punkte α und ω je eine Lösung Q existiert, die sich daselbst regulär verhält. Doch nützt uns dies nichts, da im allgemeinen doch nicht zu erweisen ist, ob eine solche Lösung sich auch im andern Fixpunkt endlich verhält, d. h. ob (10a) erfüllt ist. Ich werde aber jetzt zeigen, dass im Fall der Funktionen g , h , j die Gleichung (10) eine ganze rationale Funktion als Lösung besitzt, womit natürlich (10a) von selbst erfüllt ist.

Wir wählen für $P(x)$ diejenige ganze Funktion, welche die sämtlichen (endlichen) Verzweigungspunkte zu Wurzeln besitzt, die man aus dem Schema in § 1 A. abliest. Man findet dann für die 3 Fälle:

$$\text{I} \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{2\sqrt{\mathbf{x}}}{1+\mathbf{x}}$$

$$P = x(1-x^2) \quad , \quad r = (1+x) \quad , \quad a = 2$$

Die Funktionalgleichung (10) lautet jetzt

$$\frac{(1+x)^4}{4} x_1(1-x_1^2)Q_1 - x(1-x^2)Q = x(1-x^2)(x^2+2x-1)$$

Wir setzen $Q = xR$, $Q_1 = x_1 R_1$, benützen $x_1^2 = \frac{4x}{1+x}$, $1-x_1^2 = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$, so bleibt nach Division mit $x(1-x)$:

$$(1-x)R_1 - x(1+x)R = x^2 + 2x - 1$$

was unmittelbar $R = R_1 = -1$, also $Q = -x$ ergibt

$$\text{II} \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\mathbf{x}(3-\mathbf{x})}{1+\mathbf{x}}}$$

$$P = x(1-x^2)(9-x^2) \quad , \quad r = (1+x) \quad , \quad a = 2$$

$$\frac{(1+x)^4}{4} P_1 Q_1 - PQ = P \left[\frac{2P}{(1+x)^2} - \frac{P'}{1+x} \right]$$

Man setzt wieder $Q = xR$, und zeigt dass $x_1 P_1 = \frac{(1-x)(3+x)P}{(1+x)^4}$ ist.

Es folgt so nach Multiplikation mit $\frac{4(1+x)}{P}$:

$$(1-x^2)(3+x)R_1 - 4x(1+x)R = -9 + 18x + 12x^2 - 2x^3 - 3x^4$$

Man macht den Ansatz $R = bx^2 + c$ und findet, dass er genügt für $b = 4$, $c = 12$. Also ist $Q = 4x(x^2 + 3)$

$$\text{III} \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\mathbf{x}(1-\mathbf{x})}{1+\mathbf{x}}}$$

$$P = x(1-x^4)(\varrho^2 - x^2)(\varrho'^2 - x^2) \quad , \quad r = (1+x)^2 \quad , \quad a = 2$$

$$\frac{(1+x)^8}{4} P_1 Q_1 - PQ = P \left[\frac{6P}{(1+x)^2} - \frac{2P'}{1+x} \right]$$

Setzt man wieder $Q = xR$, benützt $x_1 P_1 = -\frac{(\varrho-x)(\varrho'-x)P}{(1+x)^6}$, und multipliziert mit $\frac{-4(1+x)}{P}$, so erhält man

$$(x^2 + 2x - 1)(1+x)^3 R_1 + 4x(1+x)R = 8P' - \frac{24P}{1+x}$$

Eine ganze rationale Lösung muss die Form haben

$$R = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$$

Gibt man x die Werte $0, \infty, 1, i$, so ergibt sich leicht

$$R = 2x^6 - 7x^4 + 1.$$

Ich bemerke zu diesen Beweisen noch das Folgende. Die erste Methode (C) enthält den Grundgedanken des *Borchardt'schen* Versuches. Man könnte auch so vorgehen, dass man die lineare Differenzialgleichung für ψ ersetzt durch die zugehörige Riccatische Gleichung für $t = \frac{\psi'}{\psi}$ und dann zeigt, dass dieser durch die Reihen (15) genügt wird. Das wäre der Beweis von *Lohnstein*, auf seine einfachste Form gebracht. Gedanklich einfacher wäre es übrigens, die Funktionen Φ_α , Φ_ω ohne Vermittlung der ψ_α , ψ_ω direkt zu vergleichen. Bezeichnet $[\Phi]$ die Schwarz'sche Derivierte von Φ nach x , so setze man $[\Phi_\alpha] = R_\alpha(x)$, $[\Phi_\omega] = R_\omega(x)$. Aus der Axengleichung und den Eigenschaften der Operation $[\]$ folgt dann, dass R_α , R_ω Lösungen der Funktionalgleichung sind

$$(21) \quad R(x) = \frac{dx_1}{dx} R(x_1) + [x_1]$$

welche an Stelle von (10) tritt. Im Fall unserer Beispiele g , h , j wird dann R eine gebrochen-rationale Funktion, deren Auffindung aber mühsamer ist als die der ganzen Funktion Q . Die Gleichung (21) hat bereits *Appell*⁹⁾ zu verwandten Untersuchungen betrachtet, doch bloss für die Umgebung eines einzigen Fixpunkts.

§ 3.

A. Wir nehmen künftig an, dass für die Funktion $f(x)$ die Bedingungen von Satz 6 erfüllt sind. Dann ist also wegen (9a) und Satz 3

$$(22) \quad \frac{\psi_\alpha}{\psi_\omega} = \frac{c}{P'(\omega)} \cdot \Phi_\omega = \frac{P'(\alpha)}{c} \cdot \Phi_\alpha \quad \text{und also}$$

$$\Phi_\alpha = \frac{c^2}{P'(\alpha)P'(\omega)} \cdot \Phi_\omega$$

Wir führen nun an Stelle von Φ_α , Φ_ω eine neue Funktion Φ ein, indem wir setzen

$$(23) \quad \Phi = -i\pi \Phi_\alpha = \frac{h}{\pi i} \Phi_\omega \quad \text{wo also}$$

$$(24) \quad h = -\frac{\pi^2 c^2}{P'(\alpha)P'(\omega)} \quad \text{gesetzt ist}$$

Φ existiert dann jedenfalls in einem Teil der Ebene, der die Punkte α , ω im Innern enthält, und erleidet bei Umläufen um diese Punkte die linearen Substitutionen

⁹⁾ Appell. Acta mathematica 15.

$$(25) \quad S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ - & 21 \end{pmatrix}, \quad S_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei den Funktionen g, h, j zeigt sich nun, dass diese Kenntnis genügt, um mit alleiniger Berücksichtigung der Relation

$$\Phi(x_1) = a \Phi(x)$$

die Funktion Φ auch um die übrigen Verzweigungspunkte herum fortzusetzen, und zwar gehört zu jedem solchen Punkt eine lineare Umlaufsubstitution, die sich aus S_α, S_ω in einfacher Weise berechnen lässt. Dabei ergibt sich von selbst der Wert der Konstanten h . Ich behandle der Reihe nach die 3 Fälle.

I $x_1 = g(x)$

Die längs der negativen Axe aufgeschnittene Zahlenebene möge E_1 heissen. Für alle Punkte von E_1 (mit Ausnahme der kritischen Punkte $0, -1, \infty$) beweist man leicht (etwa indem man E_1 durch die daselbst eindeutige Funktion $g(x)$ wiederholt abbildet)

dass
$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = 1$$

Schneidet man analog die Ebene längs der reellen Axe auf mit Ausnahme der Strecke (-1) bis $(+1)$, so gilt für alle Punkte dieses Gebiets E_0 (excl. die Punkte $\pm 1, \infty$)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_{-p} = 0$$

Die Funktion Φ existiert also in der ganzen Ebene und ist ausser in den 4 Punkten $0, 1, -1, \infty$ überall regulär.

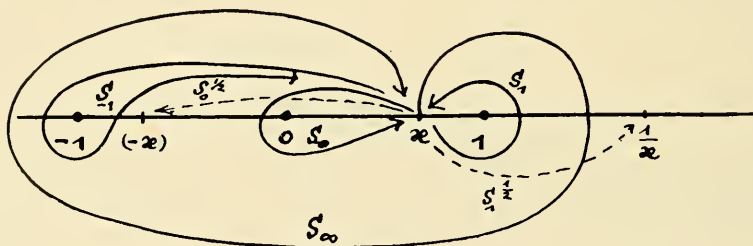


Fig. 2.

Ich wähle nun zunächst einen Punkt x auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 , und definiere die Umläufe um die 4 kritischen Punkte durch die in beistehender Figur gezeichneten Schleifen. Ich denke mir eine solche Schleife z. B. S_0 durch einen geschlossenen Faden realisiert, der, wenn wir nun x beliebig bewegen, so mitgezogen wird, dass kein kritischer Punkt überschritten wird. Für jedes

x definiert dann eine mögliche Lage des Fadens den zu x gehörigen Umlauf S_0 . Die einem Umlauf entsprechende lineare Substitution soll mit demselben Zeichen benannt werden.

Ferner bezeichne ich die Linien $S_0^{1/2}$, $S_1^{1/2}$, die x mit $(-x)$ und $(\frac{1}{x})$ verbinden, als „halbe Umläufe“ von x um 0 und 1. Einem halben Umlauf von x entspricht ein ganzer Umlauf von x_1 um denselben Punkt. Dadurch entsteht aus der Gleichung $\Phi(x) = \frac{1}{2} \Phi(x_1)$:

$$S_0^{1/2} \Phi(x) = \frac{1}{2} S_0 \Phi(x_1) = \frac{1}{2} S_0^2 \Phi(x)$$

Die rechte Seite ist eine lineare Funktion von Φ , also ist das Resultat des halben Umlaufs $S_0^{1/2}$ die Substitution

$$S_0^{1/2} = \frac{1}{2} S_0(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog wird

$$S_1^{1/2} = \frac{1}{2} S_1(2) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

was übrigens auch direkt aus dem logarithmischen Verhalten von Φ bei 0, 1 geschlossen werden könnte. Es gelten also die Gleichungen

$$(26) \quad \Phi(-x) = S_0^{1/2} \Phi(x) \quad ; \quad \Phi\left(\frac{1}{x}\right) = S_1^{1/2} \Phi(x)$$

Macht x den Umlauf S_1 , so führt $(-x)$ den Umlauf S_{-1} aus. Die erste Gleichung (26) geht dadurch über in

$$S_{-1} \Phi(-x) = S_0^{1/2} S_1 \Phi(x) = S_0^{1/2} S_1 S_0^{-1/2} \Phi(-x)$$

Das Resultat des Umlaufs S_{-1} auf Φ ist also die Substitution

$$S_{-1} = S_0^{1/2} S_1 S_0^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1+2h & 2h \\ -2h & 1-2h \end{pmatrix}$$

Führt x dagegen S_0 aus, so beschreibt $\frac{1}{x}$ einen Umlauf um ∞ , der offenbar äquivalent ist mit $S_1 S_\infty S_1^{-1}$. Die zweite Gl. (26) wird somit

$$S_1 S_\infty S_1^{-1} \Phi\left(\frac{1}{x}\right) = S_1^{1/2} S_0 \Phi(x) = S_1^{1/2} S_0 S_1^{-1/2} \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$$

woraus

$$S_\infty = S_1^{-1/2} S_0 S_1^{1/2} = \begin{pmatrix} 1+2h & 2h^2 \\ -2 & 1-2h \end{pmatrix}$$

Andrerseits ist aber

$$S_\infty = S_1^{-1} S_0^{-1} S_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-6h+4h^2 & 4h-4h^2 \\ 2-2h & 1-2h \end{pmatrix}$$

Die Vergleichung der beiden Darstellungen von S_∞ gibt $h=2$ und damit berechnet man

$$(26) \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad S_\infty = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Aus (24) ergibt sich für c der Wert $c = \frac{2}{\pi}$ und damit erhält man nach (20)(22) die folgenden Reihen, von denen die beiden letzten aus der ersten durch Umformung mittelst der Relation $\frac{\psi_0(x_n)}{\psi_0(x)} = 2^n \frac{\psi_1(x_n)}{\psi_1(x)}$ entstehen

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^n x_n (1 - x_n) \psi_0(x_n) \psi_1(x_n) \\ \frac{\Phi(x)}{i} = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-n} x_n (1 - x_n) \psi_1^2(x_n) \\ \frac{i}{\Phi(x)} = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^n x_n (1 - x_n) \psi_0^2(x_n) \end{array} \right.$$

II $\mathbf{x}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x})$

Es gibt hier 4 Fixpunkte 0, 1, ∞ , (-3) bei denen sich $h(x)$ verhält wie $x^{1/2}$, $(x-1)^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{1/2}$, $(x+3)^2$. Zu den Fixpunktpaaren (0, 1), $(\infty, -3)$ kann man sofort 2 Iterationsarten J, J^* definieren, nämlich durch die beiden Bahnen W, W^* der Figur 3. Es gilt dann



Fig. 3.

$$\begin{array}{l} \text{bei } J : \lim_{p \rightarrow \infty} x_p = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x_{-p} = 0 \\ \text{bei } J^* : \lim_{p \rightarrow \infty} x_p = -3, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x_{-p} = \infty \end{array}$$

und zwar jedesmal für alle nicht-kritischen Punkte der schlichten Ebene.

Die Funktion $x_1 = h(x)$ geht durch die folgenden 3 Transformationen, zu denen noch die identische hinzukommt, in sich über :

$$\begin{array}{l} x^* = -\frac{3}{x}, \quad x_1^* = -\frac{3}{x_1} \\ \xi = \frac{3-3x_1}{x_1+3}, \quad \xi_1 = \frac{3-3x}{x+3} \\ \xi^* = \frac{x_1+3}{x_1-1}, \quad \xi_1^* = \frac{x+3}{x-1} \end{array}$$

Sie entsprechen den 4 Möglichkeiten, die 4 Fixpunkte ohne Änderung des Doppelverhältnisses zu vertauschen.

Durch $\xi(x)$ geht eine Iteralfolge von J oder J^* wieder in eine Folge derselben Iterationsart über, wobei sich nur die aufsteigende und die absteigende Folge vertauschen, d. h. die Transformation ist „gegenseitig“. Durch $x^*(x)$, $\xi^*(x)$ vertauschen sich die beiden Iterationsarten und zwar transformiert $x^*(x)$ „gleichsinnig“, $\xi^*(x)$ gegenseitig. Ich beschränke mich daher auf die Festsetzung J .

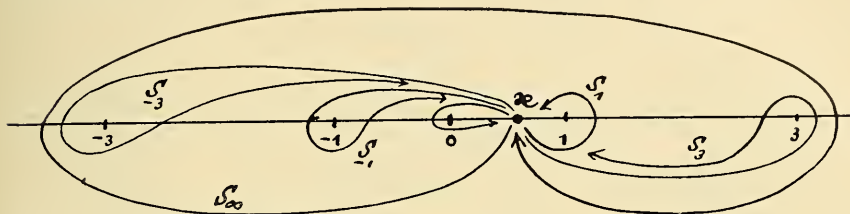


Fig. 4.

Indem man die Umläufe um die 6 kritischen Punkte durch die in Figur 4 gezeichneten Schleifen definiert, findet man mit der am vorigen Beispiel erläuterten Methode die Substitutionen:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} -5 & 18 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad S_{-3} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ -8 & 11 \end{pmatrix},$$

$$S_\infty = \begin{pmatrix} -11 & 24 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$$

Sie gehören einer Untergruppe der Modulgruppe an, die charakterisiert ist durch die Kongruenzen

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv 0 \pmod{6}, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{2}$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Elemente einer Substitution bedeuten. Die Konstante h ist hier $= 3$ und damit wird

$$c = \frac{12\sqrt{3}}{\pi}$$

III $x_1 = j(x)$

Fixpunkte sind $0, \varrho, \varrho', \infty$, wobei

$$\varrho = -1 + \sqrt{2}, \quad \varrho' = -1 - \sqrt{2}$$

$j(x)$ verhält sich an diesen Punkten wie $x^{\frac{1}{2}}, (x - \varrho)^2, (x - \varrho')^2, \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$. Zu dem Paar $(0, \varrho)$ gehört eine Iterationsart J (definiert durch eine dazwischen liegende Bahn W analog Fig. 3), für welche in der ganzen Ebene gilt

$$(J) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x_p = \varrho \qquad \lim_{p \rightarrow \infty} x_{-p} = 0$$

Dagegen entspringt aus einer links von q' liegenden Bahn W^* eine Iterationsart J^* , für welche $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p^* = q'$, $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{-p}^* = \infty$ ist. Durch $x^* = -\frac{1}{x}$ gehen diese Folgen in jene zu J gehörigen über. Für die Iteration J definieren wir die Umläufe durch die (bloss schematische)

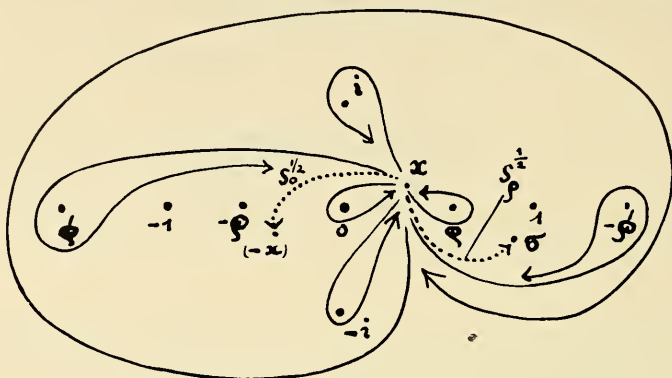


Fig. 5.

Figur 5, in der die Schleifen für die links resp. rechts von (x) gelegenen V -Punkte nach dem Muster von $S_{q'}$, resp. $S_{-q'}$ zu denken sind, und führen noch die halben Umläufe $S_0^{1/2}$, $S_q^{1/2}$ ein, welche x mit den Punkten $(-x)$ und $\sigma(x) = \frac{1-x}{1+x}$ verbinden und denen die gleichnamigen Substitutionen entsprechen

$$S_0^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_q^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$(28a) \quad \Phi(-x) = S_0^{1/2} \Phi(x) \qquad (28b) \quad \Phi(\sigma) = S_q^{1/2} \Phi(x)$$

Führt nun x einen Umlauf S_λ um einen der Punkte $\lambda = q, 1, -q'$ aus, so beschreibt $(-x)$ den Umlauf $S_{-\lambda}$ um $(-q, -1, +q')$. Gl. (28a) wird damit zu

$$(29) \quad S_{-\lambda} \Phi(-x) = S_0^{1/2} S_\lambda \Phi(x) = S_0^{1/2} S_\lambda S_0^{-1/2} \Phi(-x), \quad \text{also ist}$$

$$S_{-\lambda} = S_0^{1/2} S_\lambda S_0^{-1/2} \qquad (\lambda = q, 1, -q')$$

Geht ferner x auf S_μ um die Punkte $\mu = 0, -q, -1, i$ herum, so beschreibt σ die Umläufe $S_{\sigma(\mu)}$ wo $\sigma(\mu) = 1, -q', \infty, -i$ ist. So ergibt sich aus (28b) die Beziehung

$$(30) \quad S_{\sigma(\mu)} = S_q^{1/2} S_\mu S_q^{-1/2} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, -q', -1, i \\ \sigma = 1, -q, \infty, -i \end{pmatrix}$$

Aus den bekannten Substitutionen S_0, S_ϱ folgt damit zunächst

$$S_{-\varrho} = \begin{pmatrix} 1+2h & 2h \\ -2h & 1-2h \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1-2h & 2h^2 \\ -2 & 1+2h \end{pmatrix}$$

Ich berechne nun auf 2 Arten S_i , um h zu bekommen. Dem Weg $S_{-\varrho}$ für x entspricht S_i für x_1 . Dies angewandt auf die Gl. $\Phi(x_1) = 2 \Phi(x)$ liefert

$$S_i = 2 S_{-\varrho} \left(\frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 1+2h & 4h \\ -h & 1-2h \end{pmatrix}$$

Führt x aber S_i aus, so beschreibt x_1 eine Schleife um 1, die äquivalent ist dem Umlauf $S_\varrho^{-1} S_1 S_\varrho$. So findet man

$$S_i = \frac{1}{2} S_\varrho^{-1} S_1 S_\varrho(2) = \begin{pmatrix} 1+2h & h^2 \\ -4 & 1-2h \end{pmatrix}$$

Die Vergleichung ergibt $h = 4$. Durch abwechselnde Anwendung von (29) (30) ergeben sich jetzt ohne Mühe die folgenden 10 Substitutionen:

$$\begin{aligned} S_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{-\varrho} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -7 & 32 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \\ S_{-1} &= \begin{pmatrix} 25 & 32 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}, \quad S_i = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad S_{-i} = \begin{pmatrix} 25 & 16 \\ -12 & -23 \end{pmatrix}, \quad S_{-\varrho'} = \begin{pmatrix} -23 & 72 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}, \\ S_{\varrho'} &= \begin{pmatrix} 49 & 72 \\ -32 & -47 \end{pmatrix}, \quad S_\infty = \begin{pmatrix} -47 & 128 \\ -18 & 49 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die sich übrigens als zweite, vierte oder achte Potenzen einfacherer Substitutionen erweisen. Es sind Modulsstitutionen einer Gruppe, die durch die Kongruenzen

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, 2, 4 \text{ oder } 6 \pmod{8}$$

charakterisiert ist. Für die Konstante c ergibt sich

$$c = \frac{16\varrho^2}{\pi}$$

B. Wir haben im Vorhergehenden für jede der Funktionen g, h, j eine Lösung der Gleichung (2) bestimmt, unter Zugrundlegung einer ganz bestimmten Iterationsart, die ich die *Hauptart* nenne. Diese Lösung gestattet nun das Problem auch für jede andere Iterationsart zu lösen. Ich muss mich indess damit begnügen, für das eine Beispiel $g(x)$ die wesentlichen Resultate zu skizzieren. Ist V eine die Punkte x, x_1 verbindende, von W verschiedene Bahn, so kann man V aus W und einem geschlossenen Weg S zusammensetzen in der Form $V = SW$. Jedem S entspricht einerseits eine Iteralfolge (x_n) , anderseits eine Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der durch (26) definierten Substitutionsgruppe. Ich gehe kurz auf die folgenden 3 Fragen ein:

1. Wann sind die zu zwei Substitutionen S, S' gehörigen Iteralfolgen im Sinn von § 1 C. äquivalent?
2. Existiert zu jeder Iterationsart von $g(x)$ eine Axe?
3. Was lässt sich über die Konvergenz einer zu S gehörigen Iteralfolge (x_n) aussagen?

Ad 1. Soll die Folge (x_n) , die aus der Bahn $V = SW$ entspringt, äquivalent sein der Folge, die zu $V' = S'W$ gehört, so muss ein geschlossener Weg U existieren, so dass, wenn x den Umlauf U ausführt (wobei x_1 einen Umlauf U_1 beschreibt), die (x_n) in die (x'_n) übergehen. *M. a. W.*, die geschlossene Linie $U^{-1}VU_1 V'^{-1}$ umschließt keinen kritischen Punkt. Lässt man also in $\Phi(x)$ die Variable das einemale die Bahn V' , das andremal $U^{-1}VU_1$ beschreiben, so muss der Effekt dieselbe lineare Funktion von $\Phi(x_1)$ sein. Beachtet man, dass für die Substitutionen U, U_1 die Beziehung gilt: $U_1\Phi(x_1) = 2U\Phi(x)$ und setzt noch $U = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$, so erhält man die Relation

$$\begin{pmatrix} 2\alpha' & \beta' \\ 2\gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wenn also in der zu $g(x)$ gehörigen Substitutionsgruppe zu den gegebenen S, S' sich eine dritte Substitution U finden lässt, die dieser Relation genügt, so definieren S, S' dieselbe Iterationsart. Die Diskussion dieser Beziehung führt auf den einfachen

Satz 7. „Die Bahnen $SW, S'W$ sind äquivalent für die Funktion $g(x)$, wenn die quadratischen Formen

$$(\beta', 2\alpha' - \delta', -2\gamma') \quad (\beta, 2\alpha - \delta, -2\gamma)$$

im Sinn der Zahlentheorie eigentlich äquivalent sind.

Ad 2. Zu jeder Iterationsart lässt sich eine Axe angeben in Gestalt einer linearen Funktion der zur Hauptart gehörigen Axe $\Phi(x)$. Bezeichnet man den Wert von Φ in x_1 beim Übergang über $V = SW$ mit $\Phi^*(x_1)$, so gilt

$$\Phi^*(x_1) = S\Phi(x_1) = \frac{2\alpha\Phi(x) + \beta}{2\gamma\Phi(x) + \delta}$$

$$\text{Setzt man also } \Omega(x) = \frac{\Phi(x) - \sigma_1}{\Phi(x) - \sigma_2}, \quad \Omega(x_1) = \frac{\Phi^*(x_1) - \sigma_1}{\Phi^*(x_1) - \sigma_2}$$

wo σ_1, σ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$2\gamma\sigma^2 + (\delta - 2\alpha)\sigma - \beta = 0 \quad \text{sind, so ist}$$

$$\Omega(x_1) = a\Omega(x) \quad ; \quad a = \frac{s - \sqrt{s^2 - 8}}{s + \sqrt{s^2 - 8}}, \quad (s = 2\alpha + \delta)$$

Der Regulator a ist ausser bei der Hauptart ($s = 3$) von 2 verschieden. Da aber a bloss von s abhängt, so können 2 zu verschiedenen Iterationen gehörige Axen Ω , Ω^* denselben Regulator besitzen. Der Quotient $\Omega^* : \Omega$ ist aber dann natürlich kein Ring.

Ad 3. Im Fall $s = 1$ sind σ_1 , σ_2 konjugiert komplexe Zahlen und $a = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}$ eine „irrationale“ Einheitswurzel. Daher liegen die zu einem festen Wert von x gehörigen Punkte $z_n = \Omega(x_n)$ in der z -Ebene auf einem Kreis um den Nullpunkt, den sie überall dicht bedecken. Den Kreisen um $z = 0$ entspricht in der y -Ebene ($y = \Phi(x)$) das Kreisbüschel mit den Grundpunkten σ_1 , σ_2 . Dem in der oberen Halbebene liegenden Punkt σ_1 , für den also alle $\Phi(x_n) = \sigma_1$ sind, entspricht im Innern von K_ω ein Punkt x , für den alle $x_n = x$ sind. Dies muss also einer der beiden Fixpunkte vierter Art $\omega = -\frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$ sein, die in § 1. B. erwähnt sind. Da für ein festes x (das von diesen beiden Punkten verschieden ist) die Punkte $y_n = \Phi(x_n)$ einen ganz in die obere Halbebene fallenden Kreis dicht überdecken, so können auch ihre Bildpunkte in K_ω , welche die Iteralfolge (x_n) bilden, nach keiner Seite konvergieren, sondern sie bedecken eine Kurve überall dicht, die einen der genannten Fixpunkte vierter Art umschliesst. *Damit ist also für die Funktion $g(x)$ eine Iterationsart nachgewiesen, deren Iteralfolgen in keinem Punkt konvergieren.*

Im Fall $s > 1$ liegen die Punkte y_n auf einem zur reellen Axe senkrechten Halbkreis und konvergieren für $n = \pm \infty$ gegen die Endpunkte desselben. Das Verhalten der entsprechenden Punkte (x_n) ist dann nicht ohne weiteres zu entscheiden.

§ 4.

Die Methode, durch welche in den vorhergehenden Paragraphen die Natur der Funktion Φ erschlossen wurde, bildet den Abschluss einer Gedankenreihe, welche in den Untersuchungen von Gauss über das arithmetisch-geometrische Mittel ihren Ursprung nahm. Sie ist charakterisiert durch die Zuziehung einer linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung (die auch bei unserem „zweiten Beweis“ in § 2 nur formell umgangen wird). Zwar spielen die Eigenschaften dieser Differenzialgleichung weiterhin keine Rolle, nur der Nachweis ihrer Existenz muss, gewissermassen nebenbei, erbracht werden. Der Angelpunkt der Theorie und ihre einzige Schwierigkeit liegt nämlich in dem Nachweis, dass die aus der aufsteigenden Iteralfolge

entspringende Lösung Φ_ω sich auch beim Konvergenzpunkt α der absteigenden Folge wie ein (reziproker) Logarithmus verhält, und hiezu eben bedarf es der zweimaligen Differenziation. So natürlich sich nach unserer Darstellung auch die Differenzialgleichung darbietet, so erscheint doch ihr Eingreifen in einer sonst ganz auf den Iterationsprozess aufgebauten Theorie als Schönheitsfehler. Diese ganze Theorie gewinnt nun an Klarheit, dadurch, dass man sie mit der Theorie der konformen Abbildung in Verbindung bringt. Dies geschieht durch die nachfolgenden allgemeinen Sätze, die sich unmittelbar an die Betrachtungen von § 1 anschliessen. Die vorhin genannte Schwierigkeit wird damit zurückgeführt auf die prinzipiell wichtige Frage nach der Gestalt des Konvergenzbereichs K_ω . Könnte man bei unseren Beispielen zeigen, dass K_ω keine Randlinien besitzt, d. h. dass die Iteralfolge (x_p) bei beliebiger Bewegung von x konvergent bleibt, so würde der linearpolymorphe Charakter von Φ_ω sich ohne weiteres ergeben. Zur Zeit kann jener Nachweis freilich erst geleistet werden (durch das Spiegelungsprinzip), nachdem die Gruppe der Modulsubstitutionen bereits gefunden ist.

Ich nehme an, der Punkt ω sei ein *regulärer Konvergenzpunkt erster oder zweiter Art*, d. h. ein Zweig von $f(x)$ habe in seiner Umgebung eine der beiden Entwicklungen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 - \omega = a(x - \omega)(1 + \dots) \quad |a| < 1 \\ \text{II} & x_1 - \omega = (x - \omega)^a (c_0 + \dots) \quad a = \text{ganze positive Zahl} \end{array}$$

In jedem Fall existiert nach *Koenigs* und *Grévy*¹⁰⁾ eine Lösung der Axgleichung, nämlich

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \Phi_\omega(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{x_p - \omega}{a^p} \right) = (x - \omega)(1 + \text{reg. Reihe}) \\ \text{II} & \Phi_\omega(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(x_p - \omega)}{i \cdot a^p} \right) = \frac{1}{i} \log(x - \omega) + \text{reg. Reihe} \end{array}$$

Ich nehme weiter an, dass ω „*isoliert*“, d. h. keine Häufungsstelle von kritischen Punkten sei. Dann kann in der Umgebung von ω ein (im Fall I schlichtes, im Fall II unendlich oft gewundenes) Ringgebiet G definiert werden, das von kritischen Punkten frei ist und das die Eigenschaft hat, dass von jeder gegen ω konvergierenden Iteralfolge x_n gerade ein Punkt zu G gehört (*Fundamentalbereich* der Iteration). Die durch iterierte Abbildung (mittelst f und \bar{f}) von G entstehenden Gebiete G_n erzeugen ein Flächenstück K_ω , das „zu ω gehörige Konvergenzgebiet“. K_ω enthält in seinem Innern

¹⁰⁾ l. c.

keine kritischen Punkte (auch ω wird im Fall II als Randpunkt betrachtet). Daher sind die sämtlichen Funktionen x_n innerhalb K_ω eindeutig und einwertig. *Diese Eigenschaften übertragen sich nun auf die Funktion Φ_ω .* Dass Φ_ω *eindeutig* ist auf der Fläche K_ω folgt sofort aus ihrer Definition (siehe § 1. D). Ich beweise nun weiter

Satz 8. *Die Funktion Φ_ω nimmt innerhalb K_ω jeden Wert nur einmal an.*

Angenommen es wäre $\Phi_\omega(\xi) = \Phi_\omega(\eta)$, wo $\xi; \eta$ zwei verschiedene Punkte von K_ω bedeuten (deren Projektionen in der Ebene natürlich nicht notwendig auch verschieden sind), so folgt aus der Axengleichung, dass für jedes p

$$\Phi_\omega(\xi_p) = \Phi_\omega(\eta_p) \quad \text{wo auch} \quad \xi_p \neq \eta_p$$

Da die ξ_p, η_p gegen ω konvergieren, so gibt es also in beliebiger Nähe von ω Punkte x, x' , für welche die Differenz $\Phi(x) - \Phi(x')$ gleich Null ist.

Im Fall I ist aber der Quotient $\frac{\Phi(x) - \Phi(x')}{x - x'}$ in genügend kleiner Umgebung von ω beliebig wenig von 1 verschieden, kann also nicht = 0 werden.

Im Fall II ist $e^{i\Phi(x)} = (x - \omega)(\gamma_0 + \dots)$, ($\gamma_0 \neq 0$) und also in genügender Nähe von ω aus demselben Grunde einwertig. q. e. d.

Damit ergibt sich jetzt der wichtige

Satz 9. *Durch die Funktion $y = \Phi_\omega(x)$ wird das Innere der Fläche K_ω umkehrbar eindeutig und konform abgebildet*

im Fall I: auf die schlichte Vollebene (excl. den Punkt ∞)

im Fall II: auf die obere Halbebene (excl. die reelle Axe).

Beweis. I. Ein Kreis C um ω , der ganz in K_ω liegt, wird durch $\Phi(x)$ auf ein einfach zusammenhängendes, schlichtes Gebiet I' der y -Ebene abgebildet, das den Nullpunkt im Innern enthält. Sei y ein beliebiger endlicher Punkt, so gibt es eine positive Zahl p , für die der Punkt $y_p = a^p y$ innerhalb I' fällt (weil $|a| < 1$). Diesem y_p entspricht eindeutig ein Punkt x innerhalb C , für den $\Phi(x) = y_p$ ist. Dann existiert aber in K_ω der Punkt x_p , für den $\Phi(x_p) = a^{-p}$, $\Phi(x) = a^p y_p = y$ ist. Also nimmt in der Tat $\Phi(x)$ in K_ω jeden endlichen Wert gerade einmal an.

II. Der Windungskreis C wird durch den logarithmischen Teil von Φ_ω abgebildet auf den Teil der Ebene oberhalb einer Parallelen

zur reellen Axe, durch die Funktion Φ_ω also auf ein Gebiet I' , das sich von jenem mit abnehmendem C beliebig wenig unterscheidet. Jedenfalls lässt sich in der oberen Halbebene eine Parallele zur reellen Axe ziehen, so dass der obere Teil der Ebene (excl. ∞) ganz zu I' gehört. Ist y ein beliebiger Punkt der oberen Halbebene, so gibt es einen Exponenten p , für den $y_p = a^p y$ in I' liegt (da a reell > 1). Ist $\Phi(x) = y_p$ so ist $\Phi(x_{-p}) = y$, womit der Satz bewiesen ist.

Wir betrachten jetzt die *Umkehrfunktion* $x = \overline{\Phi}(y)$, über welche wir sofort folgende Aussagen machen können.

Im *Fall I* gilt:

Satz 9. $\Phi(y)$ ist eine in der ganzen Ebene eindeutige analytische Funktion, die höchstens im Punkt ∞ eine wesentlich singuläre Stelle besitzt. Je nachdem also der Punkt $x = \infty$ innerer Punkt von K_ω ist oder nicht, ist $\Phi(y)$ eine ganze oder eine meromorphe Funktion. Sie genügt der Gl.

$$(32) \quad \overline{\Phi}(ay) = f \overline{\Phi}(y)$$

d. h. die Gleichung $x_1 = f(x)$ lässt sich dadurch uniformisieren, dass man setzt $x = \overline{\Phi}(y)$, $x_1 = \overline{\Phi}(ay)$.

Anmerkung. Einen Konvergenzpunkt ω kann man mit einem Kreis C umgeben, in dem nicht nur die Reihe für x_1 , sondern auch die p -mal iterierte Reihe konvergiert. Wenn nun ω Häufungsstelle kritischer Punkte ist, so können dies nur Verzweigungspunkte der inversen Funktion \overline{f} sein. Ist also $\overline{f}(x)$ eine eindeutige, speziell eine rationale Funktion, so ist jeder Konvergenzpunkt von f sicher isoliert und folglich die zugehörige Funktion Φ (im Fall I) i. A. meromorph. Diesen Spezialfall des obigen Satzes hat bereits Poincaré¹¹⁾ bemerkt und in anderer Richtung verallgemeinert.

Im *Fall II* ist nach Satz 8 $\Phi(y)$ innerhalb der oberen Halbebene eindeutig und bis auf Pole regulär. Was das Verhalten auf der reellen Axe betrifft, so sind 2 Möglichkeiten vorhanden. Besitzt K_ω Randlinien, über die man $\Phi(x)$ fortsetzen kann, so lässt sich auch $\overline{\Phi}(y)$ in die untere Halbebene fortsetzen und man kann mit Hilfe des Spiegelungsprinzips weitere Schlüsse ziehen. Ist aber $\Phi(x)$ nicht fortsetzbar, so ist die reelle Axe für $\overline{\Phi}(y)$ natürliche Grenze. Speziell gilt

Satz 10. Ist K_ω bloss von diskreten Punkten oder offenen Linien begrenzt, so ist der Existenzbereich von $\overline{\Phi}(y)$ die obere Halb-

¹¹⁾ Poincaré. Journal de Math. (4) 6. 1890.

ebene. $\overline{\Phi}$ besitzt im Innern derselben den Charakter einer rationalen Funktion, ist um 2π periodisch, und genügt der Gleichung (32).

(Ich bemerke, dass auch für isolierte Fixpunkte dritter Art analoge Sätze existieren. Bei nicht-isolierten Fixpunkten sind hingegen die Funktionen $\overline{\Phi}$ nicht mehr eindeutig.)

In allen Fällen, wo man nun die Gestalt der Konvergenzbereiche feststellen kann, lassen sich mittelst der Sätze über konforme Abbildung weitere Aufschlüsse gewinnen. Zum Beispiel:

1. Die Theorie der Funktionen g, h, j wird sehr einfach, sobald man weiss, dass der Bereich K_ω keine Randlinien besitzt. Man sieht dann leicht ein, dass die Fläche K_ω regulär-verzweigt ist, woraus sich der linear-polymorphe Charakter von $\Phi(x)$ von selbst ergibt. Die Substitutionen S findet man mit der Methode von § 3 A.
2. Kennt man 2 isolierte Konvergenzpunkte α und ω der gleichen Art und kann man zeigen, dass die zugehörigen Gebiete K_α, K_ω identisch sind, so folgt, dass jede der Axen Φ_α, Φ_ω eine lineare Funktion der andern ist. Denn durch die Gleichungen $y = \Phi_\omega(x), \overline{y} = \Phi_\alpha(x)$ wird die ganze resp. die halbe y -Ebene ein-eindeutig und konform auf sich selbst bezogen. (α und ω können entweder „unterer“ und „oberer“ Konvergenzpunkt derselben Iteralfolge sein oder zu verschiedenen Iterationsarten derselben oder verschiedener Funktionen f gehören.)
3. Ähnliche Schlüsse können gemacht werden falls ω von der ersten, α von der zweiten Art ist und K_α ganz zu K_ω gehört. Man betrachte etwa das Beispiel $x_1 = \sqrt{x}$, für welche die Konvergenzgebiete K_0, K_∞ das Innere resp. Aeusserer des Einheitskreises (unendlich oft) überdecken und sich zur logarithmischen Windungsfläche K_1 ergänzen. Es ist hier $\Phi_1 = \Phi_0 = \Phi_\infty = \log x$.

Die Frage nach der Begrenzung der Bereiche K_ω gehört in das Gebiet des Picard'schen Satzes. Ein Fortschritt in dieser Richtung wird also auch der vorliegenden Theorie zugute kommen.

Manuskript eingegangen den 17. März 1917.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel](#)

Jahr/Year: 1917

Band/Volume: [28_1917](#)

Autor(en)/Author(s): Spiess O.

Artikel/Article: [Über eine Klasse von Funktionalgleichungen 1410-1435](#)