MATHEMATIK.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die therapeutische Statistik und die Statistik überhaupt.

Von

Ed. Hagenbach-Bischoff.

Ende September 1876 theilte mir Herr Prof. Liebermeister in Tübingen eine Arbeit „über Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik" im Manuscript*) zur Einsicht mit. Die Resultate, zu welchen Liebermeister gelangte, waren für mich im höchsten Grade überraschend; ich versuchte desshalb selbstständig von mir aus die gleiche Aufgabe zu lösen und suchte zugleich in möglichst anschaulicher Weise das Verhältniss der Liebermeister'schen Auffassung des Problemes zu der Behandlung des gleichen Problemes und ähnlicher Aufgaben durch andere Auctoren darzustellen. Die nachfolgende Arbeit, die im Auszug am 29. November 1876 der Naturforschenden Gesellschaft mitgetheilt wurde, ist die Folge dieser mathematischen Versuche, sie macht weder Anspruch auf eine wesentlich neue Lösung noch einen abgerundeten Abschluss, sondern bezweckt hauptsächlich nur die verschiedenen Aufgaben begrifflich klar in ihren gegenseitigen Beziehungen festzustellen und die Methoden anzugeben, nach welcher ihre Lösung möglich ist;

*) Seither ist diese Arbeit in der Sammlung klinischer Vorträge von R. Volkmann als Nr. 110 publicirt worden.

ich überlasse es dann gewandteren Analytikern für jeden einzelnen Fall die zum Rechnen bequemsten Formeln aufzustellen.

Wir bezeichnen mit dem Ausdruck *Letalität (Tödtlichkeit)* das Maass für die Gefährlichkeit einer Krankheit oder die Wahrscheinlichkeit zu sterben, wenn man von der Krankheit befallen wird; es hat somit jede Krankheit eine ihr eigenthümliche Letalität. Die mittlere Letalität einer Krankheit ist die Letalität unter mittleren Umständen bei einem Menschen von mittlerer physischer Constitution. Wir können jedoch auch von speciellen Letalitäten reden, die besondern Verhältnissen entsprechen; z. B. von der Letalität des Typhus bei der exspectativen und von der Letalität des Typhus bei der antipyretischen Behandlungsweise, von der Letalität der Lungenschwindsucht im tropischen Klima und der Letalität der Lungenschwindsucht im gemässigten Klima, von der Letalität der Blattern bei Geimpften und der Letalität der Blattern bei Ungeimpften u. s. w.

Unter *Mortalität (Sterblichkeit)* verstehen wir das Verhältniss der bei einer Krankheit beobachteten Todesfälle zu der Gesammtheit der Krankheitsfälle; sie ist somit eine durch die statistische Beobachtung gegebene Zahl.

Die Letalität kann offenbar alle, auch die irrationalen Werthe zwischen 0 und 1 haben, sie wächst stätig; die Mortalität ist ein Verhältniss ganzer Zahlen; sie kann also nur gleich allen zwischen 0 und 1 liegenden rationalen Brüchen sein.

Es ist nun die Aufgabe der therapeutischen Statistik, aus der durch die Beobachtung gegebenen Mortalität Schlüsse zu ziehen auf die der betreffenden Krankheit angehörigen Letalität; und dabei entsteht die Frage, welcher Grad von Wahrscheinlichkeit dem gezogenen Schlusse zukommt.

Die hier für die therapeutische Statistik aufgestellte Aufgabe ist offenbar viel allgemeinerer Natur und bezieht sich auf alle die Fälle, wo aus den durch die Statistik gegebenen Zahlen ein Schluss gezogen werden soll auf die Wahrscheinlichkeit der einwirkenden Ursachen; wir geben aus diesem Grunde, so wie auch um eine grössere Anschaulichkeit zu erlangen, unserer Aufgabe folgende etwas allgemeinere Form:

Wir haben eine Scheibe aus Pappe; auf der einen Seite ist dieselbe (und zwar ganz unregelmässig) zum Theil schwarz und zum Theil weiss; auf der andern Seite ist sie ganz weiss. Die weisse Seite ist nach oben gekehrt und sichtbar; über die Vertheilung von Weiss und Schwarz auf der nach unten gekehrten unsichtbaren Seite ist uns nichts bekannt. Das uns unbekannte Verhältniss der schwarzen Fläche zur ganzen Fläche sei α; es entspricht diess der Grösse, die wir als Letalität bezeichnet haben. Wir stechen nun mit einer Nadel in's Blinde hinein mehrere Male hinter einander in die Fläche. Erst, wenn wir mit dem Stechen fertig sind, kehren wir die Pappscheibe um und finden, dass a Stiche in's Schwarz und b Stiche in's Weiss gegangen sind. Das Verhältniss der Stiche in's Schwarz zu allen Stichen ist dann $\frac{a}{a+b}$; es entspricht dieser Bruch der Grösse, die wir als Mortalität bezeichnet haben. Nun entsteht die Frage: Wie und was können wir aus der Thatsache, dass a, b gestochen wurde, auf die Grösse von α schliessen, d. h. auf das Verhältniss der schwarzen Fläche zur ganzen oder auf die Wahrscheinlichkeit, bei einem Stich schwarz zu stechen; und wie gross ist die Wahrscheinlichkeit solcher Schlüsse?

Wenn wir hier von dem seit Huyghens und Jacob Bernoulli allgemein angenommenen und dadurch klassisch gewordenen Beispiele der aus dem Sack gezogenen weissen und schwarzen Kugeln abgehen und dafür die den Stichen ausgesetzte unten schwarz und weiss bemalte Scheibe nehmen, so geschieht es, um die Wahrscheinlichkeit der einwirkenden Ursache nicht auf rationale Brüche zu beschränken und dadurch das die Anwendung der Integralrechnung bedingende continuirliche Wachsthum gleich in die Voraussetzungen aufzunehmen.

Wir gehen nun an die Lösung der obigen Aufgabe.

Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Stich schwarz zu stechen, ist α; die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Stich weiss zu stechen, $1 - \alpha$. Die Wahrscheinlichkeit, bei a Stichen nur schwarz zu stechen, ist α^a; und die Wahrscheinlichkeit, bei b Stichen nur weiss zu stechen, ist $(1 - \alpha)^b$. Die Wahrscheinlichkeit, zuerst der Reihe nach a mal schwarz und dann der Reihe nach b mal weiss zu stechen, ist $\alpha^a (1 - \alpha)^b$, und die Wahrscheinlichkeit, bei $a + b$ Stichen in beliebiger Reihenfolge im Ganzen a mal schwarz und b mal weiss zu stechen, ist

$$\frac{(a+b)!}{a!\,b!} \cdot \alpha^a (1 - \alpha)^b.$$

Diese Sätze ergeben sich in ganz elementarer Weise aus der Lehre der Permutationen. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, bei dem gegebenen Farbenverhältniss α von $a + b$ beliebigen Stichen a im Schwarz und b im Weiss zu haben, mit $W(\alpha, a, b)$ und haben somit:

$$(1) \qquad W(\alpha, a, b) = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} \cdot \alpha^a (1 - \alpha)^b.$$

Die Function W hängt nun ebenso gut von a und b, d. h. von der Zahl der schwarzen und weissen Stiche, als von α, d. h. von der Farbenvertheilung auf der Fläche, ab.

Die Abhängigkeit von a und b ergiebt sich, wenn wir die Aenderungen von W bei gleichbleibendem α studiren; wir finden durch eine einfache Betrachtung, dass, wenn die Zahl der Stiche zunimmt, die Grösse W abnimmt; es ist diess auch sehr begreiflich, da bei gleicher Farbenvertheilung die Wahrscheinlichkeit eines ganz bestimmten Stichverhältnisses abnehmen muss, sobald die Zahl der Stiche und somit auch die Anzahl der möglichen Combinationen zunimmt.

Was nun die Abhängigkeit der Function W von α betrifft, so ist leicht ersichtlich, dass W gleich null wird für α gleich null und α gleich 1. Ferner wird W ein Maximum für $\alpha = \frac{a}{a+b}$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, a mal schwarz und b mal weiss zu stechen, wird verhältnissmässig am grössten, wenn das Schwarz auf der Fläche den gleichen Antheil hat wie die schwarzen Stiche unter allen Stichen.

W ist die a priori für ein bestimmtes Stichverhältniss abgeleitete Wahrscheinlichkeit; es ist ein Bruch, der zum Zähler die Anzahl der günstigen Stichcombinationen, und zum Nenner die Anzahl aller möglichen Stichcombinationen hat. Es handelt sich nun weiter darum, aus der Wahrscheinlichkeit W eines gegebenen Stichverhältnisses a posteriori die Wahrscheinlichkeit einer angenommenen Vertheilung von Schwarz und Weiss abzuleiten. Man begreift leicht, dass, wenn eine gewisse Farbenvertheilung (d. h. Vertheilung von schwarz und weiss) für das Herauskommen eines bestimmten Stichresultates eine doppelt so grosse Wahrscheinlichkeit ergiebt als eine andere Farbenvertheilung, wir dann sagen dürfen, dass zur Erklärung des bestimmten Stichresultates die Annahme der erstern Vertheilung doppelt so wahrscheinlich sei als die Annahme der zweiten, oder dass der ersten Vertheilung eine doppelt so grosse Wahrscheinlichkeit zukomme als der zweiten. Es wird somit die relative Wahrscheinlichkeit irgend einer Farbenvertheilung bei gegebenem Stichverhältniss proportional sein der Grösse W, und es giebt somit diese Function auch Aufschluss über die Aenderung der den verschiedenen Annahmen von α zukommenden Wahrscheinlichkeiten. Wenn also das Stichresultat a, b heraus kommt, so hat die Annahme, dass $\alpha = \frac{a}{a+b}$ relativ die grösste Wahrscheinlichkeit, allein jede andere Annahme hat auch eine Wahrscheinlichkeit, die nach dem durch die Function W gegebenen Gesetze mit der Entfernung vom Maximalpunkte nach beiden Seiten hin abnimmt und für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ null wird.

Bezeichnen wir nun mit $P(\alpha_1, \alpha_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das vorhandene uns aber unbekannte Verhältniss α zwischen den Grenzen α_1 und α_2 liege, dann wird diese Grösse ausgedrückt werden durch einen Bruch, dessen Zähler gleich ist der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Farbenvertheilungen α, die zwischen α_1 und α_2 liegen, und dessen Nenner gleich ist der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller überhaupt möglichen Farbenvertheilungen, das heisst derer, die zwischen den äussersten Grenzen 0 und 1 liegen. Da α stätig wächst, so wird die Summe repräsentirt durch ein Integral, und wir haben:

$$(2) \qquad P(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} W\, d\alpha}{\int_0^1 W\, d\alpha} = \frac{(a+b+1)!}{a!\, b!} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^a (1-\alpha)^b\, d\alpha$$

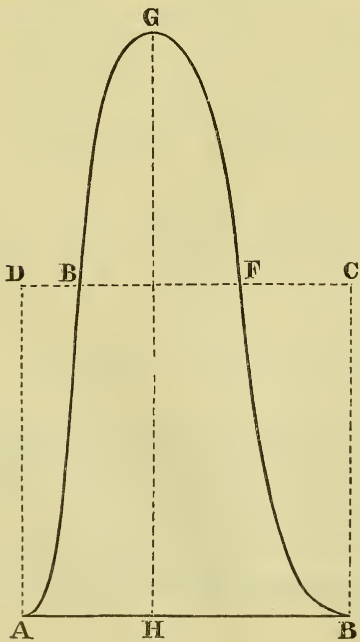
$$= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha)\, d\alpha \text{ wenn } F(\alpha) = \frac{(a+b+1)!}{a!\, b!} \cdot \alpha^a (1-\alpha)^b$$

Auf dem richtigen Studium dieser Function F beruht nun alles Folgende; der grössern Anschaulichkeit wegen wollen wir sie vorerst graphisch darstellen.

Da $F(0)$ und $F(1) = 0$, da $F(\alpha)$ immer positiv und da $\int_0^1 F(\alpha)\, d\alpha = 1$, so umschliesst die durch die Function dargestellte Curve zusammen mit der Abscissenaxe stets die gleich grosse der Einheit gleiche Fläche; wir wollen sie die *Wahrscheinlichkeitsfläche* nennen. Der erste Differentialquotient von F wird 0 für $\alpha = 0$, für $\alpha = 1$ und für $\alpha = \frac{a}{a+b}$; in den beiden ersten Fällen ist der zweite Differentialquotient positiv, in dem letztern ist er negativ. Wir haben also Minima für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ und ein Maximum für $\alpha = \frac{a}{a+b}$. Die Minimalwerthe sind gleich null; es steigt somit auf beiden Seiten die Curve die Abscissenaxe tangirend von 0 auf. Für den Maximalwerth erhalten wir:

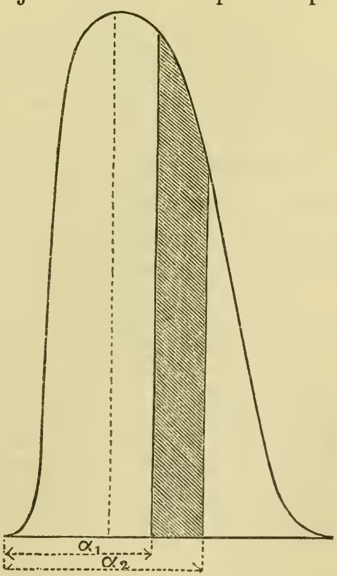
$$F(\alpha)_{max} = \frac{(a+b+1)!\, a^a\, b^b}{a!\, b!\, (a+b)^{a+b}} \tag{3}$$

Die Gleichung $\frac{d^2 F(\alpha)}{d\alpha^2} = 0$ ist in Bezug auf α quadratisch und giebt die Stellen der zwei Wendepunkte zu beiden Seiten des Maximalpunktes. Die Gestalt der Curve wird somit für kleine Werthe von a und b die der beistehenden Figur sein.



Wir müssen nun noch sehen, wie sich die Gestalt dieser Curve ändert, wenn die Werthe von a und b zunehmen; d. h. wenn die Zahl der Stiche (resp. das Beobachtungsmaterial) wächst. Es ist leicht zu sehen, dass der Maximalwerth mit wachsender Stichzahl zunimmt, und zwar bis ins Unendliche. Man überzeugt sich unter Anderem davon sehr leicht, wenn man in dem Ausdruck des Maximalwerthes die Facultäten durch die bekannte Stirling'sche Formel ersetzt.

Die Basis A B unserer Figur bleibt immer gleich 1, und der Flächeninhalt bleibt ebenfalls immer gleich 1, also gleich dem Inhalte des Quadrates A B C D. Für $a = 0$ und $b = 0$ ist offenbar die Wahrscheinlichkeitsfläche nichts anders als dieses Quadrat selbst, in diesem Fall sind die Wahrscheinlichkeiten, wie sich das auch von selbst versteht, für alle Annahmen gleich gross. So wie nun a und b Werthe bekommen und wachsen, so nimmt die Wahrscheinlichkeitsfläche nach und nach die obige Gestalt an, indem sich der Gipfel über die Linie D C erhebt, und die Figur sich dafür seitlich um die gleiche Grösse einschnürt. Je mehr nun die Zahl der Stiche und damit der Maximalwerth zunimmt, um so mehr rücken die Punkte B und F nach innen; d. h. je höher der Gipfel empor steigt, um so schmäler wird die ganze Figur, und da der Maximalwerth in's Unendliche wächst, so ist die Grenzfigur, in welche die Wahrscheinlichkeitsfläche für eine unendliche Stichzahl übergeht, die Gerade A B mit einer in H errichteten Senkrechten, wobei man sich die Basis und die Senkrechte zwar als unendlich dünn, nicht aber als absolute mathematische Linien zu denken hat.



Für den Werth der

Wahrscheinlichkeit $P(\alpha_1, \alpha_2)$ erhalten wir nun eine sehr anschauliche Vorstellung; wir construiren uns mit Hülfe der gegebenen Werthe a und b die Curve $F(\alpha)$ und ziehen die den Werthen α_1 und α_2 entsprechenden Ordinaten; dann ist der Flächeninhalt des Stückes der Wahrscheinlichkeitsfläche, das von diesen beiden Ordinaten, der Curve und der Abscissenaxe umschlossen ist, gleich dem Werth $P(\alpha_1, \alpha_2)$. In der Figur auf der vorigen Seite ist diese Fläche schattirt.

Was nun die Berechnung des Werthes $P\ (\alpha_1, \alpha_2)$ betrifft, so können, da a und b ganze Zahlen sind, die unbestimmten Integrale $\int F(\alpha)\ d\,\alpha$ und $\int F(\gamma)\ d\,\gamma$, wenn wir $1 - \alpha = \gamma$ setzen, stets in geschlossener Form gefunden werden. Man findet nämlich durch partielle Integration:

$$(4)\quad \int F(\alpha)\,d\,\alpha = (a+b+1)\,!\sum_{m=o}^{m=b}\frac{(1-\alpha)^{b-m}\,.\,\alpha^{a+m+1}}{(b-m)\,!\,(a+m+1)\,!}$$

$$(5)\quad \int F(\gamma)\,d\,\gamma = (a+b+1)\,!\sum_{m=o}^{m=a}\frac{(1-\gamma)^{a-m}\,.\,\gamma^{b+m+1}}{(a-m)\,!\,(b+m+1)\,!}$$

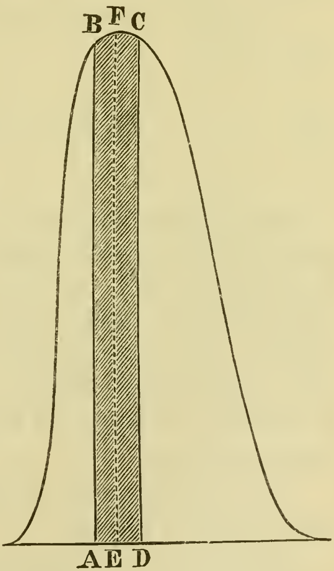
Wenn nun die Grenzen des Integrals gegeben sind, so erhält man durch Einführen und Subtrahiren das bestimmte Integral. Es lässt sich also unter allen Umständen der Werth von $P\ (\alpha_1, \alpha_2)$ berechnen, und zwar ohne alle Vernachlässigung; nur wird die Berechnung umständlich, sobald a und b und somit auch die Zahl der zu summirenden Glieder gross wird; in diesen Fällen muss man sich mit Annäherungen begnügen.

Es ergeben sich nun eine Anzahl verschiedener einzelner Fälle je nach den Werthen, die wir für die Grenzen α_1 und α_2 annehmen; diese Grenzen bestimmen heisst nichts anders als den Schluss genau formulieren, den wir in Betreff der Grösse α aus den gegebenen Stichzahlen a und b ziehen. Wir wollen diess an zwei Beispielen, die den am meisten üblichen Schlussverfahren entsprechen, etwas näher erörtern.

I. *Absolute Schlussform.* Aus den gegebenen Stichzahlen a und b schliessen wir, dass das Verhältniss der schwarzen zu der ganzen Fläche auf der Scheibe gleich $\frac{a}{a+b} \pm \varepsilon$ sei. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses?

Da wir hier ganz bestimmt auf die absolute numerische Grösse von a schliessen, so nennen wir diese Schlussform die *absolute.*

Wir lösen die Aufgabe zuerst graphisch. Die Grenzen des Integrals sind in dem vorliegenden Fall $\frac{a}{a+b} - \varepsilon$ und $\frac{a}{a+b} + \varepsilon$; wir ziehen also rechts und links von dem Maximalwerthe E F in der Distanz ε die zwei Ordinaten A B und D C; der zwischen diesen liegende Theil der Wahrscheinlichkeitsfläche, der in der beistehenden Figur schattirt ist, gibt uns die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Ziehen wir nun in Betracht, was oben über die Aenderung der Gestalt der Wahrscheinlichkeitsfläche bei zunehmender Stichzahl gesagt worden ist, so ergibt sich sogleich, dass bei gleichbleibendem ε in Folge des Steigens der Curve um so mehr zwischen die beiden Parallellinien kommen muss, je grösser die Stichzahl wird; dass also mit steigendem Beobachtungsmaterial die Wahrscheinlichkeit des Schlusses zunimmt. Vermehrt sich die Stichzahl ins Unendliche, so steigt auch die Curve ins



Unendliche, und der gesammte Flächeninhalt wird zwischen die beiden Parallellinien gedrängt; und es wird diess auch dann noch gelten, wenn wir das ε verschwindend klein annehmen. Wird also die Zahl der Stiche unendlich gross, so ist die Wahrscheinlichkeit gleich *eins*, d. h. es ist gewiss, dass das vorhandene Verhältniss von Schwarz zu Weiss auf der Scheibe nur um eine verschwindend kleine Grösse von dem durch die Beobachtung gegebenen Verhältniss der schwarzen Stiche zu allen Stichen abweicht. In die therapeutische Statistik übersetzt heisst das: Bei unendlich grossem Beobachtungsmaterial wird die Mortalität zur Letalität. (Bernoulli'sches Gesetz der grossen Zahlen.)

Wir gehen nun über zu der Berechnung von P nach der Formel:

$$P\left(\frac{a}{a+b} \pm \varepsilon\right) = \int_{\frac{a}{a+b}-\varepsilon}^{\frac{a}{a+b}+\varepsilon} F(\alpha)\, d\alpha \tag{6}$$

Die Ausrechnung kann immer mit der oben angegebenen Summenformel ausgeführt werden. Wenn a und b grosse Zahlen sind, so muss man zur Berechnung convergente Reihen wählen und dieselben wo möglich so umformen, dass wenige Glieder zur Bestimmung genügen. Auch kann man den Werth des Integrals durch Quadratur bestimmen; ein Weg, der besonders bei kleinem ε schnell zum Ziele führt.

Als Zahlenbeispiel für die besprochene Schlussform mag Folgendes dienen:

Liebermeister gibt an, dass im Basler Spital von 692 Kranken, die von acuter croupöser Pneumonie befallen waren, vor Einführung der antipyretischen Behandlung 175 gestorben sind. Es gibt diess eine Mortalität von 0,253. Wenn wir aus dieser Thatsache den Schluss ziehen, dass die Letalität zwischen 0,243 und 0,263 liegt, so kommt, wie die Rechnung zeigt, diesem Schluss nur eine Wahrscheinlichkeit von 0,44, also noch nicht einmal von ein Halb zu. In dem Maasse als wir die Grenzen bei dem gezogenen Schlusse erweitern, nimmt auch die Wahrscheinlichkeit desselben zu; wie folgende Zusammenstellung zeigt:

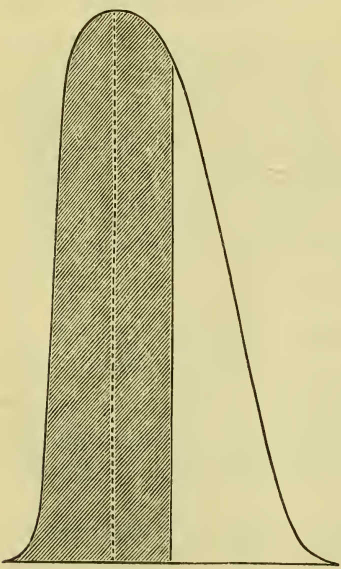
Letalität zwischen:	Wahrscheinlichkeit des Schlusses:
0,263 und 0,243	0,44
0,273 und 0,233	0,75
0,283 und 0,223	0,82
0,293 und 0,213	0,98
0,303 und 0,203	0,99

Sowohl aus der allgemeinen Formel als aus diesem Zahlenbeispiel ist leicht ersichtlich, dass, wenn die auf diese Art gezogenen Schlüsse nicht gar zu weite Grenzen oder eine gar zu geringe Wahrscheinlichkeit haben sollen, ein grosses Beobachtungsmaterial uns zur Verfügung stehen muss.

Bei der von uns angenommenen Schlussart wird zuerst der Schluss in bestimmter Form gezogen und dann durch Rechnung bestimmt, welches die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses ist. Einen etwas andern Weg ist man seit Poisson gewöhnlich bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik gegangen; man postuliert zum Voraus und zwar in ziemlich willkürlicher Weise eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für den Schluss (z. B. nach Poisson $\frac{212}{213}$ oder 0,9953, nach Hirschberg*) 0,9) und bestimmt dann die Grenzen, innerhalb welcher die erschlossene Zahl bei dieser angenommenen Wahrscheinlichkeit sich bewegen darf. Diese Art der Betrachtung hat allerdings den Vortheil, dass man bei grossem Beobachtungsmaterial (aber auch nur in diesem Fall) eine verhältniss-

*) J. Hirschberg. Die mathematischen Grundlagen der medicinischen Statistik. Leipzig 1874, pag. 73.

mässig einfache Formel zur Berechnung erhält; dafür aber wird die ganze Ausdrucksweise etwas gezwungen. Für das Verständniss scheint es uns zweckmässiger, dass man zuerst den Schluss und dabei die (natürlich willkürlich gewählten) Grenzen für die erschlossene Grösse angiebt und dann den Werth des gezogenen Schlusses durch Angabe seiner Wahrscheinlichkeit characterisiert. Gerade so gut wie man durch Messen je nach Umständen zu Grössen mit sehr verschiedenem wahrscheinlichem Fehler gelangt und dieselben weiter wissenschaftlich verwerthet, so ist es auch ganz naturgemäss, dass man je nach den Verhältnissen aus dem statistischen Material Schlüsse von sehr verschiedener Wahrscheinlichkeit zulässt; die Hauptsache ist nur, dass man jedesmal genau den Grad der Wahrscheinlichkeit des gezogenen Schlusses kennt, und diesem Erforderniss kann, wie wir gezeigt haben, durch Berechnung stets entsprochen werden.



II. *Relative Schlussform.* Aus den gegebenen Stichzahlen a und b, wobei b grösser als a ist, schliessen wir, dass auf der Fläche weiss vorherrschend ist, d. h. dass $\alpha < \frac{1}{2}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses?

Da wir hier nicht bestimmt auf die absolute numerische Grösse von α sondern nur im Allgemeinen auf das relative Verhalten dieser Grösse einen Schluss ziehen, so nennen wir diese Schlussform die *relative*.

Wir lösen auch hier das Problem zuerst graphisch und errichten in der Mitte der Basis ein Loth; der links von demselben liegende (in der Figur schattirte) Theil der Fläche repräsentirt die Wahrscheinlichkeit, dass $\alpha < \frac{1}{2}$.

Aus dieser graphischen Darstellung erhellt sogleich in anschaulicher Weise, dass im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeit des relativen Schlusses viel grösser ist als die des absoluten, wenn nicht bei diesem die Grenzen unnatürlich weit genommen werden. Es ist ferner leicht zu sehen, dass bei gleichbleibendem Verhältniss $\frac{a}{a+b}$ mit der wachsenden Zahl von Stichen die Wahrscheinlichkeit unseres Schlusses zunimmt, denn es drängt sich das Material der Fläche der Maximalordinate zu. Ebenso deutlich ergiebt sich aber noch, dass die Wahrscheinlichkeit zunimmt oder der schwarze Theil der Fläche wächst, je weiter $\frac{a}{a+b}$ unter $\frac{1}{2}$ rückt, d. h. je grösser die Differenz von a und b ist. Es kann somit bei diesem relativen Schluss eine kleine Stichzahl bei grosser Differenz von a und b die gleiche Wahrscheinlichkeit geben, wie eine grosse Stichzahl bei einer kleinen Differenz von a und b. Bei dieser Schlussform kann somit unter Umständen auch ein kleines Beobachtungsmaterial zu wissenschaftlich verwerthbaren Schlüssen berechtigen.

Die Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei dieser zweiten Schlussform erhält die Form:

$$(7) \qquad P\left(o, \frac{1}{2}\right) = \frac{(a+b+1)!}{2^{a+b+1}} \cdot \sum_{m=o}^{m=b} \frac{1}{(b-m)!\,(a+m+1)!}$$

$$(8) \quad 1 - P\left(o, \frac{1}{2}\right) = \frac{(a+b+1)!}{2^{a+b+1}} \cdot \sum_{m=o}^{m=a} \frac{1}{(a-m)!\,(b+m+1)!}$$

Wenn a und b klein sind, so lässt sich sehr bequem nach diesen Formeln rechnen; auch bei grossem Beobachtungsmaterial sind sie verwendbar, da man leicht zeigen kann, dass von den beiden Reihen die eine stets convergent ist; die Facultäten kann man bis zu 1200! den Tafeln von Degen*) entnehmen und für höhere Facultäten nach der Stirling'schen Formel berechnen. Noch schneller kommt man gewöhnlich durch Anwendung der Quadratur zum Ziel. Bei grossen Zahlen kann man sich auch der von Laplace**) für diesen Fall entwickelten Formel bedienen.

An einigen Zahlenbeispielen wollen wir noch das Gesagte erläutern:

Ein Geldstück wird 10 Mal in die Höhe geworfen, 3 Mal fällt Kopf, und 7 Mal fällt Schrift. Wir schliessen daraus, dass das häufigere Fallen von Schrift nicht Zufall sei, sondern dass der Grund in einer grösseren Disposition zum Fallen nach dieser Seite zu suchen sei (z. B. in einer unsymmetrischen Gestalt oder Massenvertheilung). Für die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses finden wir 0,7703.

Wenn das Beobachtungsmaterial vermehrt wird oder wenn die beiden Zahlen verhältnissmässig weiter auseinandergehen, so nimmt die Wahrscheinlichkeit des Schlusses gleich in bedeutendem Grade zu, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Würfe.	Schrift.	Kopf.	Wahrscheinlichkeit des Schlusses.
10	7 mal	3 mal	0,7703
20	14 mal	6 mal	0,9508
20	16 mal	4 mal	0,9964
20	18 mal	2 mal	0,999889

*) C. F. Degen. Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium enneas. Hauniæ 1824. — Liebermeister hat in seiner Abhandlung die Logarithmen der Facultäten aus den Degen'schen Tabellen wieder abgedruckt.

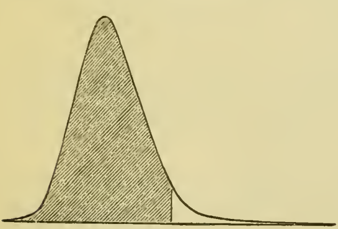
**) Laplace. Théorie analytique des probabilités. Livre II. 28.

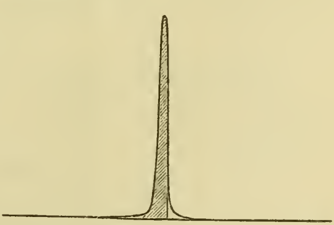
Wir nehmen noch ein anderes Beispiel:

Aus den statistischen Mittheilungen über den Civilstand von Basel-Stadt im Jahre 1875 erfahren wir, dass in diesem Jahre in der Stadt Basel von 1936 Geborenen 1004 männlichen und 932 weiblichen Geschlechtes waren. Wir schliessen daraus, dass dieser Unterschied nicht auf einem nichtssagenden Zufall beruhte, sondern auf günstigern Verhältnissen für die Geburt männlicher Kinder.

Die Rechnung mittelst Quadratur ergiebt für die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses 0,94.

Der zweite Versuch mit der aufgeworfenen Münze giebt somit für den daraus gezogenen Schluss nahezu die gleiche Wahrscheinlichkeit wie die des Schlusses aus der Geburtsstatistik, in dem einen Falle haben wir ein kleines Beobachtungsmaterial und eine grosse Differenz der Zahlen, in dem andern Fall ein bedeutend grösseres Beobachtungsmaterial, aber dafür nur eine kleine Differenz. Die beistehenden Figuren stellen die Wahrscheinlichkeitsflächen für diese beiden Fälle dar, die links stehende für die aufgeworfene Münze und die rechts stehende für die Geburtsstatistik; da es sich um relative Werthe handelt, so sind die Ordinaten verkürzt und zwar so, dass in beiden Fällen die Maximalordinate gleich gross ist.





In Betreff des besprochenen relativen Schlusses ist noch zu bemerken, dass alle Fälle ohne Unterschied als günstig gezählt werden, bei welchen $\alpha < \frac{1}{2}$, also auch die, bei welchen α nur um eine unmerkliche Grösse unter $\frac{1}{2}$ ist. Wenn uns ein solcher Schluss zu wenig befriedigt, so können wir ihn auch dahin abändern, dass wir behaupten, es liege α wenigstens um die Grösse δ unter $\frac{1}{2}$; dann müssen wir zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit die obere Grenze nur bis $\frac{1}{2} - \delta$ nehmen.

Statt zu schliessen, dass $\alpha < \frac{1}{2}$ können wir unter Umständen auch schliessen, dass $\alpha < \frac{1}{3}$ oder überhaupt $< \alpha_1$, wenn wir Veranlassung haben anzunehmen, dass ohne besondere Einwirkung $\alpha = \alpha_1$. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Schlusses müssen wir dann die Grenzen von 0 bis α_1 nehmen.

Ein dahin gehörendes Beispiel wäre z. B. folgendes:

Man bestimmt durch die Beobachtung, wie oft ein Ereigniss (z. B. der Eintritt einer Krankheit) während der Nacht (d. h. der gewöhnlichen Zeit des Schlafens von Abends 10 bis Morgens 6 Uhr) und wie oft dasselbe während des Tages eintritt. Wenn wir mehr als ein Drittel Fälle für die Nacht bekommen, so schliessen wir, dass die Nacht das Eintreten begünstige. Die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses ist dann in der angegebenen Weise zu berechnen.

Wir nehmen nun an, dass wir *zwei Scheiben* haben; es führt diess zu Aufgaben der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

Wir stechen ganz willkürlich bald in die erste, bald in die zweite Scheibe und zählen nachher für jede Scheibe besonders die Stiche, die ins Schwarz, und die Stiche, die ins Weiss gegangen sind. Die früher für eine Scheibe gewählten Buchstaben α, a und b gelten nun für die erste Scheibe; für die zweite Scheibe sei β das Verhältniss der schwarzen zur ganzen Fläche, p die Zahl der Stiche ins Schwarz und q die Zahl der Stiche ins Weiss.

Die Wahrscheinlichkeit in der ersten Scheibe im Ganzen a mal schwarz und b mal weiss zu stechen und in der zweiten Scheibe p mal schwarz und q mal weiss, ist dann:

(9) $W(\alpha, a, b; \beta, p, q) = \frac{(a+b)!\,(p+q)!}{a!\,b!\;p!\,q!} \cdot \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q$.

Wir können nun durch einen ganz analogen Gedankengang wie oben von der Wahrscheinlichkeit $W(\alpha, a, b; \beta, p, q)$ d. h. von der Wahrscheinlichkeit a priori, dass bei den Farbenverhältnissen α und β die Stichzahlen a, b, p, q herauskommen, a posteriori auf die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens bestimmter Farbenverhältnisse α und β schliessen, wenn uns die Beobachtung die Stichzahlen a, b, p und q giebt. Bezeichnen wir mit $P(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die bestehenden uns aber unbekannten Farbenverhältnisse auf den beiden Scheiben zwischen den bezüglichen Grenzen α_1 und α_2 sowie β_1 und β_2 liegen, so erhalten wir:

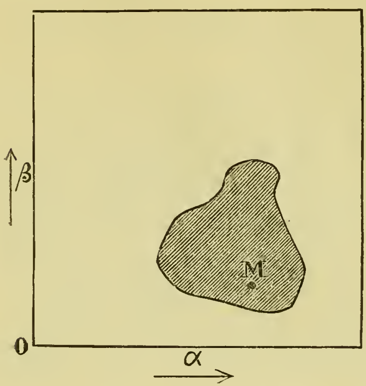
$$(10)\qquad P(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} W\,d\alpha\,d\beta}{\int_0^1\int_0^1 W\,d\alpha\,d\beta}$$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\qquad p!\,q!} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q . d\alpha\,d\beta$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} F(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta$$

wenn $F(\alpha, \beta) = \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\qquad p!\,q!} . \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q$:

Die Function $F(\alpha, \beta)$ spielt nun für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit bei zwei Scheiben genau die gleiche Rolle wie $F(\alpha)$ für die einfache Wahrscheinlichkeit bei einer Scheibe. Auch hier bedienen wir uns vorerst der graphischen Methode, um für die Functionen F und P ein anschauliches Bild zu erhalten; nur müssen wir hier, wo es sich um Constructionen im Raume handelt, die Phantasie etwas mehr in Anspruch nehmen, wobei die schon oben über $F(\alpha)$ und $P(\alpha_1, \alpha_2)$ angestellten Betrachtungen uns behülflich sind.



Wir tragen auf zwei zu einander senkrechten Coordinatenaxen, die in der Ebene des Papieres liegen, vom Anfangspunkte O aus die Werthe von α und β ab und dann in einer dazu senkrechten Richtung nach oben die den Werthen α, β entsprechende Grösse der Function F; auf diese Weise erhalten wir eine Fläche, welche uns $F(\alpha, \beta)$ darstellt. Da für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$, so wie für $\beta = 0$ und $\beta = 1$ $F(\alpha, \beta)$ gleich null wird, und da $F(\alpha, \beta)$ stets positiv ist, so erhebt sich die Fläche von einem Quadrat, dessen Seite gleich 1 ist. Da ferner $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 F(\alpha, \beta)$ gleich eins ist, so umschliesst die Fläche in Verbindung mit der quadratischen Basis stets den gleichen Körper, den *Wahrscheinlichkeitskörper*, dessen Körperinhalt unter allen Umständen die Einheit bleibt. Der Körper hat ferner, wie leicht zu sehen ist, eine Maximalordinate und somit einen höchsten Gipfel, dessen Tangentialebene horizontal ist, über dem Maximalpunkte M, wo $\alpha = \frac{a}{a+b}$ und $\beta = \frac{a}{p+q}$; und läuft am untern Rande tangential in die Basisebene aus. Für α oder β = constans, wird $F(\alpha, \beta) = C. F(\alpha)$, wobei

C eine Constante ist; wir können somit, ausgehend von der oben besprochenen Figur der Wahrscheinlichkeitsfläche, uns leicht eine Vorstellung vom Wahrscheinlichkeitskörper machen, dessen Gestalt sich wohl am besten mit der eines Berges vergleichen lässt.

Wir müssen nun untersuchen, wie mit zunehmendem a und b einerseits und p und q andererseits, d. h. mit zunehmender Stichzahl die Gestalt unseres Wahrscheinlichkeitskörpers sich ändert. Für a, b, p und q gleich null, wird derselbe zu einem Würfel mit der Einheit als Kante. Wenn dann a, b, p und q Werthe erhalten und wachsen, so erhebt sich der Gipfel des Berges über die obere Begrenzungsfläche des genannten Würfels, während sich der Körper seitlich zusammenzieht, unten jedoch immer auf der gleichen quadratischen Basis aufsteht; der Körperinhalt des Gipfels über der obern Fläche des Einheitswürfels ist stets gleich dem Volumen, das in Folge des seitlichen Zusammengehens vom Einheitswürfel genommen worden ist. Das fortwährende Hinansteigen des Gipfels mit Zunahme der Stichzahl ergiebt sich am besten aus der Betrachtung des Maximalwerthes der Function, wir finden nämlich für dieselbe:

$$(11) \quad F_{\max}(\alpha, \beta) = \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b! \qquad\quad p!\,q!} \frac{a^a\, b^b \quad . \quad p^p\, q^q}{(a+b)^{a+b}\,(p+q)^{p+q}}$$

Mit zunehmendem Beobachtungsmaterial nimmt dieser Werth zu; es steigt somit der Berg immer mehr in die Höhe und wird zugleich immer dünner. Wird die Stichzahl unendlich, so geht der Berg über in eine quadratische Fläche, deren Seite gleich 1, mit einer in M errichteten unendlich hohen Senkrechten, wobei man sich die Basis und die Senkrechte als verschwindend dünn zu denken hat. — Wenn nur die Stichzahlen der ersten Scheibe ins Unendliche wachsen, während die der zweiten endlich bleiben, so erhalten wir als letzte Grenze eine unendlich dünne senkrechte Wand, die durch den Punkt M geht und parallel zur β-Axe läuft.

Was nun die Grenzen von α und β betrifft, so werden sie im Allgemeinen eine oder mehrere Curven in der Basisebene bilden, welche die als günstig (d. h. dem Schluss entsprechend) zu betrachtenden Werthe von α und β umschliessen. Im Allgemeinen werden somit die Grenzwerthe von α und β von einander abhängen; im besonderen Falle können sie auch constant sein, es geschieht diess, wenn an die Stelle der Curven Gerade treten, die den Coordinatenaxen parallel sind.

Es ist nun auch sehr leicht, eine geometrische Vorstellung für den Werth von $P(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ zu erhalten; wir denken uns nämlich auf der Grenzcurve eine senkrecht in die Höhe steigende Cylinderfläche errichtet; der Theil des Wahrscheinlichkeitskörpers, der von ihr umschlossen wird, stellt dann den gesuchten Werth der Wahrscheinlichkeit unseres Schlusses dar.

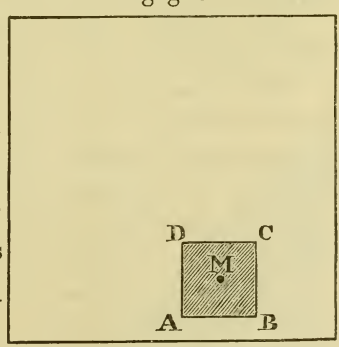
Wir können die ausgesprochenen Sätze durch folgenden Versuch veranschaulichen:

Wir nehmen ein Kilogramm Lehm und formen daraus einen Würfel; wir berechnen dann die Höhe des Berges, d. h. den Maximalwerth ausgedrückt in Einheiten der Würfelkante aus den gegebenen Grössen a, b, p und q, wir bestimmen die Stelle M, über welcher der Gipfel sich senkrecht erhebt, aus der Bedingung $\alpha = \frac{a}{a+b}$ und $\beta = \frac{p}{p+q}$ und formen dann das Material des Würfels zum Berge um; da die Höhe des Berges und die Lage des Gipfels gegeben sind, da wir ferner wissen, dass der Gipfel abgerundet ist, das heisst, dass er eine horizontale Tangentialebene hat, und dass der Berg nach allen vier Seiten sich tangential an die quadratische Basisebene anschliesst, so haben wir hinlänglich Anhaltspunkte, um wenigstens annäherungsweise die richtige Form des Berges herauszubringen. Nun zeichnen wir ferner die Grenzcurve auf der Basis ein und schneiden längs der dieser Curve entsprechenden Cylinderfläche ein Stück heraus; das Gewicht dieses Stückes in Kilogrammen ausgedrückt ist dann gleich der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Was nun die Berechnung von $P(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ betrifft, so folgt aus dem früher Gesagten, dass die erste Integration immer ausgeführt werden kann. Sind die Grenzen von einander unabhängig, so gilt das gleiche von der zweiten Integration. Sind jedoch die Grenzen von einander abhängig, so können wir möglicher Weise durch Einführung der Grenzen nach der ersten Integration eine Function bekommen, deren Integral nicht in geschlossener Form zu erhalten ist; wir müssen uns dann durch eine der bekannten Methoden der Quadratur oder durch Reihenentwicklung helfen.

Wir wollen auch hier wieder als besondere Beispiele zwei Schlussformen etwas näher betrachten.

I. *Absolute Schlussform.* Aus den gegebenen Stichzahlen a und b auf der ersten, p und q auf der zweiten Scheibe schliessen wir, dass der Antheil von Schwarz auf der ersten Scheibe α gleich $\frac{a}{a+b} \pm \varepsilon$ und der auf der zweiten Scheibe β gleich $\frac{p}{p+q} \pm \varepsilon$ sei. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses?



Die Grenzen sind hier gegeben durch das Quadrat A B C D, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind und nach den vier Seiten um die Grösse ε von dem Maximalpunkte M abstehen. Wenn wir nach diesem Viereck durch unsern Wahrscheinlichkeitskörper senkrecht durchschneiden, so erhalten wir ein quadratisches Prisma, das in der Mitte den Gipfel des Berges aufgesetzt hat, und das in seiner Projection auf der Zeichnung der vorigen Seite schattirt ist. Der Cubikinhalt dieses ausgeschnittenen Prisma's ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie die, welche wir für den absoluten Schluss bei einfacher Wahrscheinlichkeit angestellt haben, kommen wir auch hier zu dem Resultat, dass mit wachsender Stichzahl (resp. mit wachsendem Beobachtungsmaterial) die Wahrscheinlichkeit zunimmt, und dass die Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit wird, wenn die Zahl der Stiche ins Unendliche wächst.

Was nun die Berechnung des Werthes

$$P\left(\frac{a}{a+b}\pm\varepsilon\,,\,\frac{p}{p+q}\pm\varepsilon\right)$$

betrifft, so wäre die Ausführung derselben nach den Summenformeln (4) und (5) etwas umständlich; wenn ε klein ist, so kann man schnell durch Cubatur ein hinlänglich angenähertes Resultat erhalten.

Das folgende Zahlenbeispiel mag die Anwendung dieser Schlussform erläutern:

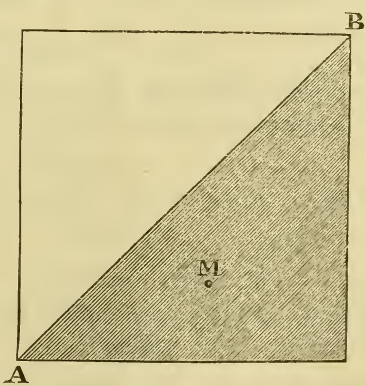
Wir haben oben gesehen, dass nach einer Angabe Liebermeister's im Basler Spital von 692 Kranken, die von acuter croupöser Pneumonie befallen waren, vor Einführung der antipyretischen Behandlung 175 gestorben sind; nach demselben Auctor starben bei Anwendung der antipyretischen Methode auf 230 nur 38.

Ziehen wir hieraus den Schluss, dass durch Einführung der antipyretischen Behandlung die Letalität von 0,2529 ± 0,02 auf 0,1652 ± 0,02 gefallen ist, so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses nur 0,3625; das heisst, wenn wir gestützt auf das statistische Material die obige Behauptung aufstellen, so kann man nahezu

2 gegen 1 wetten, dass sie unrichtig ist. Erweitern wir die Grenzen der erschlossenen Letalität auf 0,2529 $\pm$ 0,04 und 0,1652 $\pm$ 0,04, so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit des Schlusses 0,65; was erst ein wenig mehr als ein Halb.

Aus diesem Beispiel geht deutlich hervor, dass wenn wir in obiger Weise *absolut* die Ueberführung einer bestimmten Zahl in eine andere bestimmte Zahl erschliessen und dabei die zugegebenen Grenzen nicht unnatürlich gross nehmen wollen, ein kleines Beobachtungsmaterial nur eine verhältnissmässig kleine Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Schlusses giebt; bei dieser absoluten Schlussform ist es also ganz gerechtfertigt, wenn man vor Allem zur wissenschaftlichen Verwerthung ein grosses Beobachtungsmaterial verlangt.

II. *Relative Schlussform.* Aus den gegebenen Stichzahlen a, b, p und q, wobei sich ergibt, dass $\frac{p}{p+q} < \frac{a}{a+b}$, d. h. dass wir auf der zweiten Scheibe verhältnissmässig seltener schwarz getroffen haben, schliessen wir, dass auf der zweiten Scheibe das Schwarz verhältnissmässig weniger Platz einnimmt, oder dass $\beta < \alpha$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses?



Alle Punkte, die rechts von der Diagonale A B liegen, genügen der Bedingung, dass $\beta < \alpha$. Die Wahrscheinlichkeit des Schlusses ist somit gleich dem rechts vom Diagonalschnitt A B liegenden, den Gipfel enthaltenden Theil des Wahrscheinlichkeitskörpers. Die Projection dieses Abschnittes ist in der Figur schattirt. Es ist leicht zu sehen, dass, wenn nicht das ε unnatürlich gross genommen wird, bei gleichem statistischem Material die relative, d. h. nur das Verhältniss von α und β berührende Schlussform eine bedeutend grössere Wahrscheinlichkeit gibt, als die oben besprochene absolute Schlussform. Auch findet man leicht, dass bei der relativen Schlussform die Wahrscheinlichkeit ebenso gut gesteigert wird, wenn bei gleicher Lage des Maximalpunktes, d. h. bei gleichen Verhältnissen $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{p}{p+q}$ das Beobachtungsmaterial wächst, als wenn bei gleich bleibender Grösse des Beobachtungsmaterials der Maximalpunkt oder der Gipfel unseres Wahrscheinlichkeitskörpers von der trennenden Diagonalebene weiter ins Schwarze hinein geschoben wird. Es ist also auch hier bei der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit richtig, dass bei der relativen Schlussform zwei ganz verschieden grosse Beobachtungsreihen die gleiche Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Schlusses geben können, wenn in der einen Beobachtungsreihe das Beobachtungsmaterial gross und die Differenz von $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{p}{p+q}$ klein, in der andern hingegen das Beobachtungsmaterial klein und die Differenz von $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{p}{p+q}$ gross ist.

Wir gehen nun über zu der Berechnung der Wahrscheinlichkeit unseres relativen Schlusses und finden:

$$(12) \qquad P(\beta<\alpha)=\int\limits_{\alpha=o}^{\alpha=1}\int\limits_{\beta=o}^{\beta=\alpha} F(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta=\int\limits_{\beta=o}^{\beta=1}\int\limits_{\alpha=\beta}^{\alpha=1} F(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$(13) \quad 1-P(\beta<\alpha)=\int\limits_{\alpha=o}^{\alpha=1}\int\limits_{\beta=\alpha}^{\beta=1} F(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta=\int\limits_{\beta=o}^{\beta=1}\int\limits_{\alpha=o}^{\alpha=\beta} F(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

oder, wenn wir den Werth von $F(\alpha,\beta)$ einführen:

(14) $P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int\limits_{\beta=0}^{\beta=\alpha} \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\beta=0}^{\beta=1} \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\beta} \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q\,d\alpha\,d\beta$$

(15) $1 - P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int\limits_{\beta=\alpha}^{\beta=1} \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\beta=0}^{\beta=1} \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\beta} \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q\,d\alpha\,d\beta$$

oder, wenn wir durch Aenderung der Veränderlichen Alles auf die gleichen Grenzen bringen:

(16) $P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int\limits_{\beta=0}^{\beta=\alpha} \alpha^a\,(1-\alpha)^b\,\beta^p\,(1-\beta)^q\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int\limits_{\beta=0}^{\beta=\alpha} \alpha^q\,(1-\alpha)^p\,\beta^b\,(1-\beta)^a\,d\alpha\,d\beta$$

(17) $1 - P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int\limits_{\beta=0}^{\beta=\alpha} \alpha^b\,(1-\alpha)^a\,\beta^q\,(1-\beta)^p\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,.\,p!\,q!} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int\limits_{\beta=0}^{\beta=\alpha} \alpha^p\,(1-\alpha)^q\,\beta^a\,(1-\beta)^b\,d\alpha\,d\beta$$

Vertauschen wir a mit b und p mit q, so heisst das: die Farben vertauschen; vertauschen wir a mit p und b mit q, so heisst das: die Scheiben vertauschen, es folgt somit aus Obigem (was sich überdiess von selbst versteht):

P verwandelt sich in $1-P$ und umgekehrt, wenn man entweder nur die Farben oder nur die Scheiben vertauscht;

P und $1-P$ bleiben sich gleich, wenn man zugleich beides vertauscht.

Wenn wir nun zuerst nach β integrieren, dann die Grenzen einführen, dann nach α integrieren und wieder die Grenzen einführen und zugleich die Sätze über den Tausch anwenden, so erhalten wir:

(18) $P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{p!\,q!\,(a+b+p+q+2)!} \sum_{m=0}^{m=a} \frac{(p+a-m)!}{(a-m)!} \frac{(q+b+m+1)!}{(b+m+1)!}$$

(19) $1-P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{p!\,q!\,(a+b+p+q+2)!} \sum_{m=0}^{m=b} \frac{(q+b-m)!}{(b-m)!} \frac{(p+a+m+1)!}{(a+m+1)!}$$

(20) $P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,(a+b+p+q+2)!} \sum_{m=0}^{m=q} \frac{(b+q-m)!}{(q-m)!} \frac{(a+p+m+1)!}{(p+m+1)!}$$

(21) $1-P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{a!\,b!\,(a+b+p+q+2)!} \sum_{m=0}^{m=p} \frac{(a+p+m)!}{(p-m)!} \frac{(b+q+m+1)!}{(q+m+1)!}$$

Sobald von den Zahlenwerthen a, b, p, q einer klein ist, so rechnen wir nach der Summenformel, bei der diese kleine Zahl die obere Grenze bildet; wir haben dann nur wenige Glieder zu addiren. Wenn jedoch alle vier gegebenen Zahlen gross sind, dann hat jede der vier Reihen viele Glieder, und wir müssen dann suchen mit einer convergenten Reihe zu rechnen. Der Quotient Q der Reihe, das heisst das Verhältniss eines Gliedes der Reihe zum nächstvorangehenden, ist für die 4 obigen Reihen:

$$Q_1 = \frac{(q+b+m+2)}{(b+m+2)} \cdot \frac{(a-m)}{(p+a-m)} \cdot \frac{1+\frac{q}{b-m+2}}{1+\frac{p}{a-m}}$$

$$Q_2 = \frac{(p+a+m+2)}{(a+m+2)} \cdot \frac{(b-m)}{(q+b-m)} \cdot \frac{1+\frac{p}{a+m-2}}{1+\frac{q}{b-m}}$$

$$Q_3 = \frac{(a+p+m+2)}{(p+m+2)} \cdot \frac{(q-m)}{(b+q-m)} \cdot \frac{1+\frac{a}{p+m-2}}{1+\frac{b}{q-m}}$$

$$Q_4 = \frac{(b+q+m+2)}{(q+m+2)} \cdot \frac{(p-m)}{(a+p-m)} \cdot \frac{1+\frac{b}{q+m-2}}{1+\frac{a}{p-m}}$$

Diese Quotienten nehmen alle mit wachsendem m ab; wenn desshalb einer dieser Quotienten für $m = o$ ein ächter Bruch ist, so ist die entsprechende Reihe convergent, wenn also:

$\frac{p}{a} > \frac{q}{b+2}$, so ist die erste Reihe convergent;

$\frac{q}{b} > \frac{p}{a+2}$, so ist die zweite Reihe convergent;

$\frac{b}{q} > \frac{a}{p+2}$, so ist die dritte Reihe convergent;

$\frac{a}{p} > \frac{b}{q+2}$, so ist die vierte Reihe convergent.

Sind nun die vier Zahlen a, b, p, q ganz willkürlich gegeben, so ist unter allen Umständen, wie man sich leicht überzeugen kann, entweder die erste und dritte oder die zweite und vierte Reihe convergent; es kann somit die Wahrscheinlichkeit $P(\beta < \alpha)$ immer wenigstens auf zwei Arten durch convergente Reihen berechnet werden.

Die aufgestellten Formeln lassen sich noch auf eine andere wegen der schnellen Convergenz der Reihen bequeme Form bringen.

Wir geben dazu der Formel (18) folgende Form:

(22) $P(\beta < \alpha)$

$$= \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!}{(a+b+p+q+2)!} \sum_{m=o}^{m=a} \binom{p+a-m}{p} \cdot \binom{q+b+m+1}{q}$$

wo das Symbol $\binom{r}{s}$ den Coefficienten von x^s in der Entwicklung des Ausdrucks $(1 + x)^r$ nach Potenzen von x bedeutet.

Nun hat H. Kinkelin*) in eleganter einfacher Weise bewiesen, dass

$$\sum_{m=o}^{m=a} \binom{p+a-m}{p} \cdot \binom{q+b+m+1}{q} = \sum_{m=o}^{m=q} \binom{a+p+1}{p+m+1} \binom{b+q+1}{b+m+1}$$

Mit Anwendung dieser Transformation erhalten wir:

$$(23) \quad P(\beta < \alpha) = \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!\,(a+p+1)!\,(b+q+1)!}{a!\,(b+1)!\,(p+1)!\,q!\,(a+b+p+q+2)!}$$
$$\times \Big(1 + \frac{a\,q}{(b+2)(p+2)} + \frac{a(a-1)\,q(q-1)}{(b+2)(b+3)(p+2)(p+3)}$$
$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\,q(q-1)(q-2)}{(b+2)(b+3)(b+4)(p+2)(p+3)(p+4)} + \cdots\Big)$$

$$(24) \quad 1 - P(\beta < \alpha) = \frac{(a+b+1)!\,(p+q+1)!\,(a+p+1)!\,(b+q+1)!}{(a+1)!\,b!\,p!\,(q+1)!\,(a+b+p+q+2)!}$$
$$\times \Big(1 + \frac{b\,p}{(a+2)(q+2)} + \frac{b(b-1)\,p(p-1)}{(a+2)(a+3)(q+2)(q+3)}$$
$$+ \frac{b(b-1)(b-2)\,p(p-1)(p-2)}{(a+2)(a+3)(a+4)(q+2)(q+3)(q+4)} + \cdots\Big)$$

Wenn $\frac{(a+1)(q+1)}{(b+1)(p+1)} < 1$, so ist (23) stark convergirend;

wenn $\frac{(a+1)(q+1)}{(b+1)(p+1)} > 1$, so ist (24) stark convergirend;

es wird somit immer eine der beiden Reihen sich zur Berechnung eignen.

Die Facultäten kann man bei der numerischen Berechnung den Tafeln von Degen entnehmen und die höhern nach der Stirling'schen Formel berechnen.

Die Formeln (23) und (24) sind die gleichen, welche Liebermeister auf andere Weise in der Arbeit abgeleitet hat, welche die Veranlassung zu der vorliegenden Untersuchung bildet. Er hat auch nach dieser Formel eine

---

*) Hermann Kinkelin. Kleinere mathematische Mittheilungen. IV. im Bericht der Gewerbeschule zu Basel 1876/77 pag. 11.

grössere Zahl von Zahlenbeispielen gerechnet, wir heben davon nur das schon oben besprochene Beispiel von der Mortalität der acuten croupösen Pneumonie im Basler Spital hervor; aus den schon gemachten Angaben ziehen wir jetzt den qualitativen Schluss, dass die Verringerung der Mortalität nicht zufällig, sondern durch die antipyretische Behandlung herbeigeführt war; wir erhalten dann für $P(\beta < \alpha)$ den Werth 0,99713. Es ist diess allerdings eine sehr grosse Wahrscheinlichkeit, und besonders gross, wenn wir sie mit der verhältnissmässig kleinen Wahrscheinlichkeit bei der absoluten Schlussform zusammenhalten. Diese grosse Verschiedenheit der beiden Wahrscheinlichkeiten erklärt sich aber sogleich, wenn man bedenkt, dass bei der absoluten Schlussform die Wahrscheinlichkeit nur repräsentirt ist durch ein mehr oder weniger dünnes aus dem Wahrscheinlichkeitskörper herausgeschnittenes Prisma, bei der relativen Schlussform aber durch einen grossen, den Gipfel enthaltenden Abschnitt. Und dieser Abschnitt wird darum gross, weil die Differenz von $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{p}{p+q}$ bedeutend ist und somit der Gipfel und mit ihm das meiste Material des Wahrscheinlichkeitskörpers weit über den Diagonalschnitt hinausgedrängt wird. Die relative Schlussform liefert allerdings ein nicht so viel sagendes Resultat als die bestimmtere absolute Schlussform; allein es ist kein Grund vorhanden, wesshalb die Wahrscheinlichkeit der relativen Schlussform, auch wenn sie bei geringem Beobachtungsmaterial durch eine starke Differenz der beiden Mortalitätsverhältnisse hervorgebracht war, mehr subjectiv und desshalb von geringerem Werth sein sollte, wie das Hirschberg*) anzunehmen scheint. Es ist allerdings

*) J. Hirschberg. Kritik der Liebermeister'schen Arbeit in der Berliner klinischen Wochenschrift 1877 Nr. 21 pag. 297. Es heisst unter anderm: „Man erkennt bei so kleinen Reihen so

ganz richtig, dass bei einer kleinen Beobachtungsreihe neue hinzukommende Beobachtungen auf die Wahrscheinlichkeit des Schlusses einen bedeutenderen Einfluss ausüben, als wenn schon eine grosse Zahl von Beobachtungen vorliegt; aber wenn überhaupt nur wenige Fälle vorliegen — und das wird eben stattfinden, wenn man aus guten Gründen nicht mehr haben kann oder will — so hat dann jeder Fall einen verhältnissmässig grössern Werth; der Grund, warum die gleichen wenigen Beobachtungen, die zu einer kleinen Zahl hinzutreten, auf das Resultat einen bedeutendern Einfluss ausüben, als wenn schon viele Beobachtungen gemacht sind, ist derselbe, weshalb ein paar Tropfen, die in ein volles Fass gegossen werden, das Gewicht kaum ändern, während die gleichen Tropfen einen merklichen Zuwachs für die in einer kleinen Schaale enthaltene Flüssigkeit geben; sollte desshalb das Gewicht der Flüssigkeit in der kleinen Schaale auch nur ein Gewichtsbegriff von subjectiver Natur sein? Das Auffallende der von Liebermeister erhaltenen Resultate verschwindet am meisten, wenn wir die beiden Schlussformen bei zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit mit den entsprechenden Schlussformen bei einfacher Wahrscheinlichkeit vergleichen. Liebermeister hat für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit das gleiche Beispiel gelöst, das Laplace schon vor mehr als einem halben Jahrhundert für die einfache Wahrscheinlichkeit behandelte; dieser berechnete nämlich, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass die Zahl von 393386 während 40 Jahren in Paris gebornen Knaben gegenüber 377555 Mädchen auf keinem Zufall beruhe, sondern einem die Geburt der Knaben begün-

recht die subjective Natur des Wahrscheinlichkeitsbegriffes." — „Es wäre nicht wünschenswerth, das vorsichtige empirische Tasten durch Rechnung mit einem glänzenden Schein von höherer Sicherheit zu umkleiden."

stigenden Umstande zuzuschreiben sei, und schon damals stiess er auf eine ganz ausserordentlich grosse Wahrscheinlichkeit. Dabei ist nur eigenthümlich, dass Laplace die Aufgabe nur für grosse Zahlen gelöst hat, während, wie wir oben gezeigt haben, es gerade das Charakteristische der relativen Schlussform ist, dass sie unter Umständen schon bei kleinem oder doch mittelmässig grossem Beobachtungsmaterial ganz annehmbare Wahrscheinlichkeiten liefert. Diess auch für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit recht deutlich gezeigt zu haben, ist nach unserer Ansicht das wesentliche Verdienst der sorgfältigen Untersuchung Liebermeister's.

Wir bemerken noch, dass, wenn man nicht sich mit dem Schlusse begnügen will, dass $\beta < \alpha$, sondern verlangt, dass $\beta < \alpha - \delta$, das heisst, dass β wenigstens um die Grösse δ kleiner sei als α, oder wenn man schliesst, dass $\beta < 2\,\alpha$ oder $3\,\alpha$ u. s. w., dann die Formel leicht so abgeändert werden kann, dass sie auch für diese Schlüsse den Grad der Wahrscheinlichkeit gibt.

Das hauptsächlichste Resultat der vorliegenden Untersuchung können wir in folgender Weise zusammenfassen:

Aus den Zahlen der unter gegebenen Umständen beobachteten günstigen und ungünstigen Fälle können wir entweder auf den *absoluten* Werth der einwirkenden Ursachen oder nur auf den *relativen* Werth derselben schliessen; und zwar gilt diess ebenso wohl, wenn wir nur eine Reihe von Fällen haben, für welche alle wir gleiche Umstände voraussetzen *(einfache Wahrscheinlichkeit)*, als wenn zwei oder mehrere Reihen von Fällen vorliegen, bei welchen die Umstände für die Fälle einer Reihe gleich, aber für die einzelnen Reihen verschieden angenommen werden *(zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit)*.

Bei der *absoluten* Schlussform müssen immer Grenzen gesetzt werden, innerhalb welchen die erschlossene Zahl sich bewegen darf. Nur bei unendlich vielen Beobachtungsfällen dürfen die Grenzen unendlich nah gerückt werden. Wenn der Abstand der Grenzen nicht unnatürlich gross genommen wird, so kann bei der absoluten Schlussform eine grosse Wahrscheinlichkeit nur erreicht werden, wenn ein grosses Beobachtungsmaterial vorliegt. Für den absoluten Schluss sind also kleine Beobachtungsreihen nicht verwerthbar.

Bei der *relativen* Schlussform kann eine grosse annehmbare Wahrscheinlichkeit nicht nur erreicht werden mit einem grossen Beobachtungsmaterial, sondern auch mit wenigen Beobachtungen, wenn dieselben eine grosse Abweichung zeigen. Geben jedoch wenige Beobachtungen nur eine kleine Abweichung, so geben sie auch bei dieser Schlussform kein Resultat von bedeutender Wahrscheinlichkeit.

Den allgemeinen Resultaten können wir noch als Ergebniss der Untersuchung die folgenden praktischen Regeln beifügen:

Es ist sehr nothwendig, den Schluss, den man aus einem statistischen Material zieht, genau zu formuliren, damit man deutlich sieht, ob man es mit einer absoluten oder relativen Schlussform zu thun hat; im erstern Falle sind stets die für die erschlossene Grösse zugelassenen Grenzen anzugeben.

Jedem aus statistischem Material abgeleiteten Schluss sollte stets der Grad der Wahrscheinlichkeit beigesetzt werden, damit man daraus deutlich den wissenschaftlichen Werth des erschlossenen Resultates ersehen kann.