

Vortrag

von Prof. H. Kinkelin.

Hochgeehrte Versammlung.

Dem Mathematiker als solchem ist es gleichgültig, ob die Begriffe von Raum und Zeit den Menschen angeboren oder von ihnen durch Erfahrung erworben sind. Es genügt ihm zu wissen, dass sie, soweit die Kunde zeitlich und räumlich reicht, ein gemeinsames Gut aller denkenden Wesen sind. Aber wie verschieden ist ihre Ausbildung bei den einzelnen Individuen und Völkern, von dem bedürfnislosen Wilden, dessen Zählkunst nicht weiter als bis fünf reicht, bis zu dem in die tiefsten Spekulationen sich versenkenden europäischen Forscher!

In der Tat, von so einfacher Natur der Begriff des Raumes an sich ist, so unendlich mannigfach werden seine Beziehungen, wenn er in seine Unterbegriffe: Fläche, Linie, Punkt zerlegt wird. Die Vielgestaltigkeit dieser Beziehungen wird noch grösser, wenn man den Raum mit der Zeit in Verbindung bringt durch Bewegung einzelner Punkte, Linien, Flächen oder Einzelräume. Nimmt man endlich zu den Bewegungen ihre in der Form von Kräften wirkenden Ursachen hinzu, so eröffnet sich der Betrachtung ein unabsehbares Feld,

dessen Inhalt nicht zu erschöpfen ist. Diese Entwicklungsstufen haben die mathematischen Wissenschaften wirklich durchlaufen: zuerst lediglich die Betrachtung der Beziehungen der Punkte, Linien und Flächen unter sich, die Mathematik der Alten; dann die Herbeiziehung der Bewegungen und der Kräfte, die Mathematik der Neuern. Diesen Verlauf nimmt jetzt noch der mathematische Unterricht in der Schule.

Wer kennt sie nicht, die Geometrie des Euklides, mit ihren Dreiecken, Quadraten, Kreisen, deren Ausmessung in Linien, Winkeln und Flächenraum mit den Kunstgriffen des Aufeinanderlegens und der Anwendung von Hilfslinien untersucht wird? Kann sich ihr doch Keiner entziehen, der eine heutige Schule besucht, dieser Wissenschaft des reinen Verstandes, deren Schlüsse niemals fehl gehen und eine durch nichts übertroffene Gewissheit besitzen. Die Werke eines Apollonius, eines Archimedes gehören zu dem Grössten, was menschlicher Scharfsinn geschaffen hat.

Wir wissen, wie die alte Kultur in ihrer weitem Entwicklung unterbrochen wurde: Barbaren haben sie vernichtet. Aber auch ohne die zerstörende Völkerwanderung hätten die mathematischen Wissenschaften ohne Herbeizug neuer Elemente schwerlich einen höhern Grad der Vollkommenheit erreichen können.

Ein unendlicher Geist müsste alle Grössenverhältnisse auf einmal überschauen, sie wären ihm selbstverständlich, weil gleichsam in ihm wohnend. Nicht so der endliche Menscheng Geist. Nur mühsam vermag er das Dunkel zu durchdringen, in das die Tiefen der ihn umgebenden Welt sich hüllen. Der Dinge sind wenige, die sich ihm von selbst erschliessen, die er durch Intuition erkennt. Er ist darauf angewiesen, zusammengesetztere Verhältnisse durch die Analyse auf einfache

Grundbegriffe zurückzuführen. Erst von diesen aus vermag er dann durch die Synthese, sich aufzuschwingen. Der Weg zum Einfachen ist der beschwerlichste. Die einfache Wahrheit ist wie ein Dornröschen im undurchdringlichen Dickicht verborgen, bis der glückliche Prinz kommt, der es erlöst und an's Licht führt.

Die Geschichte jeder Wissenschaft, auch der mathematischen, zeigt, wie sehr der menschliche Geist an die Vergangenheit gebunden ist, wie schwer er sich gewohnten Anschauungen, gewohnter Denkweise entreisst. Neue Gedanken vermag er nur zu fassen, wenn neue Veranlassungen ihn darauf leiten. Zahl und Art der Hilfsmittel zum Betreten und Verfolgen noch unbegangener Wege stehen im Verhältniss zur Menge solcher Veranlassungen. Je weniger derselben, um so weniger Hilfsmittel, um so kleiner der Fortschritt.

Noch mehr. Auch das abstrakte Denken kann der äussern Form nicht entbehren, es ist daran gebunden und kann sich von ihr nicht lösen. Je starrer, je ungenügender diese Form, um so beschränkter wird der Denkerfolg; je biegsamer die Denkform, um so reicher und vielgestaltiger werden die Ergebnisse der mit diesem Werkzeug ausgeführten Geistesarbeit.

An der Hand dieser Erfahrungssätze auf den Gang der Wissenschaft zurückblickend, erkennen wir sofort, warum die alte Mathematik keine wesentlichen Fortschritte mehr machen konnte. Den Alten fehlten zwei Hauptbegriffe, die heute unser Eigenthum sind. Der eine ist der der allgemeinen und stetigen Zahl. Sie stellten Zahlen stets durch Linien dar; ein anderes Substrat dafür war ihrer Wissenschaft unbekannt. Dies hängt — ob in Ursache oder in Wirkung, mag hier unerörtert bleiben — damit zusammen, dass sie keine systematische Zahlenschreibung hatten, sondern an ein Ziffer-

system gebunden waren, das eine wissenschaftliche Behandlung schlechterdings nicht zuließ. Waren sie auch im Stande, Zahlen durch Linien darzustellen, so wussten sie doch nicht umgekehrt Linien oder andere Grössen durch Zahlen auszudrücken. Es ist erstaunlich, welche Fülle von Geist und Arbeit Archimedes, der antike Euler, aufwenden musste, um das Verhältniss des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser mit einer Genauigkeit von nur zwei Dezimalen zu berechnen, eine Aufgabe, welche jetzt jeder einigermassen geübte Schüler mit Leichtigkeit löst.

Das zweite, was den Alten fehlte, ist die Einsicht in die Bewegung. Was sich darüber in ihren Schriften findet, darf teilweise als ungeheuerlich bezeichnet werden. Ihre geometrischen Figuren sind starr und unbeweglich wie die Form ihrer Beweise. Ihre Mechanik beschränkt sich auf die Lehre vom Gleichgewicht. Die Möglichkeit, dass Einzelne die Bewegung zur Auffindung von Wahrheiten benutzt haben, ist zwar nicht ausgeschlossen; allein, dass sie dieselbe zur logischen Verarbeitung dieser Wahrheiten nicht heranzogen, ist jedenfalls ein Zeichen, dass diese Denkform keine wissenschaftliche Geltung hatte und daher ein wirksames Hilfsmittel für die Forschung nicht abgeben konnte.

Es ist nicht meine Absicht, Ihnen die Geschichte der Mathematik vorzutragen. Euler's Wirksamkeit kann aber nur verstanden werden, wenn man das wissenschaftliche Erbe kennt, das er antrat. Sie mögen darum entschuldigen, wenn ich etwas weiter aushole, als es zur Darlegung seiner Leistungen vor Fachmännern notwendig wäre.

Der grosse Sturm der Völkerwanderung war verbraust, die Wissenschaft im weströmischen Reiche vernichtet, und auf das oströmische zurückgedrängt. Da

feigten in einem zweiten Völkersturm die Araber die noch übrig gebliebenen Bildungsstätten hinweg. Die antike Kultur lag in Trümmern und hatte ein Obdach nur noch in Byzanz. Jahrhunderte mussten vergehen, bis sich auf dem Trümmerfeld wieder Triebe aus den vergrabenen Samen der untergegangenen Bildung entwickeln konnten. Aber diese Triebe zeigten ein anderes Aussehen als die vorlängst verschwundenen Gestalten. Wohl hatten die Araber, deren Wanderzüge mehr einem religiösen Antrieb entsprungen waren, als dem der Raubsucht, welchem unsere germanischen Vorfahren gehorchten, manche Schätze der alten Wissenschaft bewahrt und sich angeeignet; allein sie bildeten dieselben in ihrer eigenen Weise weiter. Sie waren es, welche zunächst den ersten der an den Griechen nachgewiesenen Mängel ersetzten. Aus ihrer Heimat brachten sie das indische Ziffernsystem mit und verwerteten es praktisch und wissenschaftlich. Das Rechnen, bisher eine grosse Mühsal, wurde eine leichte Verrichtung und vermittelte hiedurch eine deutlichere Einsicht in den Zahlenbegriff. Auf dem Grund der gewonnenen neuen Abstraktion bauten sie eine neue Wissenschaft auf, gaben sie der Geometrie eine neue Form, die nicht ausschliesslich an Figuren klebte, sondern auch mit Zahlen operirte. Aus Nordafrika, Sizilien und Spanien drangen die neuen Kenntnisse in das mittelalterliche Europa ein. Die Araber erfanden die Algebra, die Italiener und die Deutschen bildeten sie fort. Das sechszehnte Jahrhundert ist reich an Entdeckungen, welche bald Gemeingut der wissenschaftlichen Welt wurden.

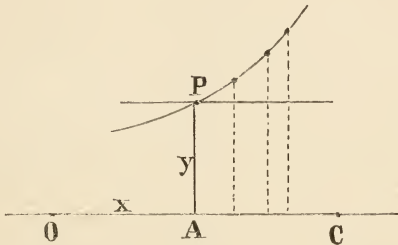
Die Zerstörung von Byzanz, der letzten Stätte altklassischer Kultur, durch die Türken veranlasste die Auswanderung vieler griechischer Gelehrten nach dem Abendland und wurde dadurch für dieses eine Quelle

reichen geistigen Gewinnes. Das Studium der Alten, nicht allein in ihren literarischen, sondern auch in ihren wissenschaftlichen Schriften nahm überhand, das Abendland entwickelte einen wahren Heisshunger nach dieser Nahrung und assimilirte sich dieselbe. Was Wunder, dass in den modernen, von den frühern so verschiedenen Menschen neue Gedanken, neue Denkformen sich bildeten, langsam zwar, aber mit wunderbarer Sicherheit! Kopernikus gebührt das Verdienst, diesem Prozess eine bestimmte Richtung gegeben zu haben. Seine Theorie des Planetensystems regte zum Nachdenken über die Gesetze der Bewegung an. Indem er, der Ueberlieferung entgegen, zeigte, dass die Planeten sich um die Sonne bewegen, veranlasste er Kepler, diese Bewegung näher zu studiren. Dieser fand, dass sie in einer elliptischen Bahn erfolge, während man sie bisher für kreisförmig gehalten hatte. Galiläi untersuchte die Gesetze des freien Falles der Körper und wurde so auf die Begriffe von Geschwindigkeit und Kraft geleitet, welche er in stetiger Arbeit von anfänglich vagen Anschauungen aus zu immer grösserer Klarheit und Vollkommenheit führte. Den grössten Schritt tat endlich Newton, indem er der Ursache nachforschte, welche die Planeten und den Mond in ihren Bahnen hält und diese elliptisch statt kreisförmig werden lässt. Dadurch fand er mit Hilfsmitteln, die ich sofort besprechen werde, die Theorie der Kräfte und ihrer Wirkungen.

Die neuen Hilfsmittel hatte Descartes in seiner genial hingeworfenen Geometrie geschaffen, deren Hauptgedanken Ihnen in Kürze auseinander zu setzen ich mir erlauben muss.

Denken wir uns eine feste Gerade in einer Ebene und auf ihr einen Punkt A. Seine Lage können wir dadurch bestimmen, dass wir seine Entfernung von

einem festen Punkt O auf der angenommenen Geraden angeben. Denn, kenne ich diese Entfernung OA , so kann ich sie mittelst eines Maßstabes abtragen und dadurch die Lage des Punktes A feststellen. Wir bezeichnen den Abstand OA mit x . Errichten wir in A eine Senkrechte zu der Geraden OA und geben ihr eine bestimmte Länge y , so bestimmen wir dadurch einen Punkt P in der Ebene. Umgekehrt: ist irgend ein Punkt P in der Ebene gegeben, so können wir immer sein zugehöriges x und y angeben.



Lässt man nun den Punkt A sich auf der festen Geraden stetig von A bis C bewegen, so ändert sich auch der Wert der Grösse x sprunglos. Man nennt eine solche Aenderung von x ebenfalls eine stetige und sagt, x wachse von einem Anfangswert bis zu einem Endwert, indem es alle Zwischenwerte durchläuft. Auf diese Weise gewinnen wir die Anschauung und den Begriff einer stetig veränderlichen Zahl.

Umgekehrt können wir jede stetig veränderliche Grösse irgend einer Art, z. B. die Zeit, indem wir sie mit ihrer Einheit vergleichen, durch eine veränderliche Zahl ausdrücken, und sodann durch eine Linie OA von veränderlicher Länge darstellen.

Wenn sich der Punkt A auf der Geraden OA fortbewegt, so läuft mit ihm auch die Gerade AP . Hiebei

kann deren Länge $AP = y$ entweder unveränderlich oder veränderlich sein. Im ersten Fall beschreibt P eine Gerade parallel zu OA , im zweiten eine andere gerade oder krumme Linie. Wenn ich nun ein Mittel habe, zu jedem Wert von x den zugehörigen Wert von y zu rechnen, so kann ich die von P beschriebene Linie Punkt für Punkt zeichnen, indem ich zu jedem x das zugehörige y bestimme und mit einem Maßstab auf der Senkrechten AP auftrage. Wenn dies auch wegen der unendlichen Anzahl der in der Linie enthaltenen Punkte physisch als unmöglich erscheint, so ist es in abstrakto doch nicht weniger wahr. Das Mittel, um y zu einem angenommenen x zu berechnen, ist eine Gleichung, in der man sich y als unbekannte Grösse denkt. Der algebraische Ausdruck, vermittelst dessen y aus x gerechnet wird, heisst eine Funktion von x und wird bezeichnet mit

$$y = f(x).$$

$$\text{z. B. } y = \frac{1}{x}, y = \sqrt{x + 4} \text{ u. s. w.}$$

Auf diese Weise haben wir die Grundlage der Anschauung von der Abhängigkeit zweier Grössen x und y von einander gewonnen. Irgend zwei nicht geometrische veränderliche Grössen können an Hand derselben in eine geometrische Abhängigkeit gebracht werden.

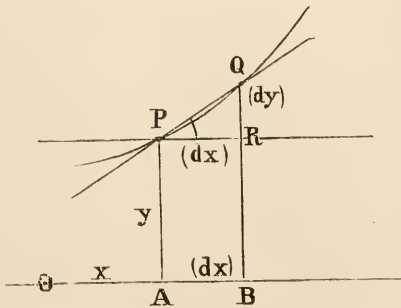
Hierin liegt das Prinzip der Bewegung, der stetigen Veränderlichkeit der Grössen, das den Griechen fehlte. Mit ihm vermag der moderne Mathematiker Höhen der Abstraktion zu gewinnen, die für jene unersteiglich bleiben mussten. In der Tat ist aber die Welt nicht aus unveränderlichen, sondern aus veränderlichen Grössen zusammengesetzt, und unter diesen hebt sich vor allen andern die Zeit

heraus, als ihrem Wesen nach stetig und unabhängig veränderlich.

So weit war die Begriffsentwicklung in der Wissenschaft zu Anfang der zweiten Hälfte des siebenzehnten Jahrhunderts vorgeschritten und hatte deren Aussehen total verändert: Bei den Alten alles fest, bei den Neuern alles veränderlich und mit Hilfe von Gleichungen auf einander beziehbar.

Es blieb noch die letzte Schranke zu übersteigen mit der Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung. Wir verdanken den grossen Schritt zwei Männern, welche, anfangs befreundet, später sich wegen der Priorität der Erfindung in bitterer Fehde bekämpften und den Streit auf ihre Freunde und Schüler übertrugen: Newton und Leibnitz. Es ist jetzt festgestellt, dass beide unabhängig von einander, wenn auch nicht gleichzeitig, die Idee fassten und ihr Gestalt gaben. Sie gingen von folgenden höchst einfachen Gedanken aus.

Wenn es möglich ist zu jedem x den zugehörigen Wert der von ihr abhängigen Funktion $y = f(x)$ zu berechnen, so ist es auch möglich, die Aenderungen von y zu bestimmen, welche dieses erleidet, wenn x um einen bestimmten Betrag wächst. Eine Aenderung AB



von x bringt eine Aenderung QR von y hervor; beide stehen in einem Zahlenverhältnis $\frac{QR}{PR}$, das von dem Winkel QPR so abhängt, dass

$$\frac{QR}{PR} = \text{tang. } QPR.$$

Nun ist klar, dass, wenn die Aenderung PR abnimmt, auch QR abnehmen wird, dass aber die Richtung von PQ sich einer bestimmten Grenzlage nähert, welche durch die geometrische Tangente an die Linie in P dargestellt wird. Es wird sonach der Winkel QPR einen bestimmten Grenzwert haben, folglich ist dies auch der Fall bei dem Verhältnis $\frac{QR}{PR}$ unendlich kleiner

Aenderungen von x und y . Man bezeichnet die letztern nach Leibnitz gewöhnlich mit dx und dy (d der Anfangsbuchstabe von Differenz, Zunahme) und nennt sie Differenziale. Es wird daher $\frac{dy}{dx}$ eine bestimmte

Grösse, wenn eine bestimmte Linie vorliegt. Die Linie ist aber gegeben, sobald man ihre Gleichung, d. h. die Form der Funktion kennt, mit deren Hilfe y aus x gerechnet werden kann. Man sieht sofort weiter, dass der Winkel, den die Tangente in P mit PR bildet, veränderlich wird, wenn man den Punkt P auf der Linie bewegt. Daraus folgt, dass auch das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$ im allgemeinen eine veränderliche Grösse ist und von x abhängt. Demnach ist nicht nur y , sondern auch $\frac{dy}{dx}$ eine Funktion von x . Die letztere wird natürlich von der Form der Funktion

$$y = f(x)$$

abhängen und bestimmt sein, sobald diese gegeben ist. Man schreibt gewöhnlich :

$$\frac{dy}{dx} = f' (x)$$

und nennt $f' (x)$ die abgeleitete Funktion von $f (x)$. Die Aufgabe der Differenzialrechnung ist es dann, aus der Funktion $f (x)$ die abgeleitete $f' (x)$ zu finden, und ihre Auflösung geschieht ziemlich einfach auf direkte Weise durch Subtraktion und Division.

Man kann sich nunmehr die umgekehrte Aufgabe stellen, nämlich: Wenn die abgeleitete Funktion $f' (x)$ gegeben ist, die ursprüngliche Funktion $f (x)$ zu finden. Diese Aufgabe, welche den Gegenstand der Integralrechnung bildet, ist bedeutend schwieriger. Denn es ist klar, dass, wenn wir die abgeleiteten der bekannten Funktionen gerechnet haben und hierauf eine Form der abgeleiteten Funktion $f (x)$ annehmen, die sich nicht unter jenen befindet, alsdann die zu ihr gehörige ursprüngliche Funktion $f' (x)$ sich auch nicht unter den bekannten Funktionen befinden kann, sondern eine neue Funktion sein muss. Dies ist z. B. der Fall bei

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^4}.$$

So wird die Integralrechnung eine unversiegbare Quelle zur Auffindung neuer Funktionen, die in der angewandten Mathematik zur Verwendung kommen.

Die Integralrechnung hat ebenfalls ihre geometrische Bedeutung, die anschaulich gemacht werden kann. In der Tat, es sei

$$\frac{dy}{dx} = f' (x)$$

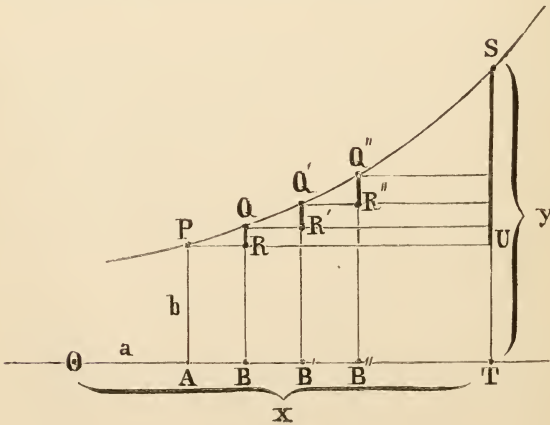
eine gegebene abgeleitete Funktion, so folgt:

$$dy = f' (x) \cdot dx$$

Nimmt man nun für x einen beliebigen Wert a und für das zugehörige y einen Wert b an und trägt beide nach OA und AP ab, so kann man zu der Zunahme $dx = AB$ von x die Zunahme $dy = QR$ von y mit Hilfe obiger Gleichung rechnen. Dadurch kommt man mittelst Auftragens der beiden Zunahmen in der Figur zu einem dem Punkt P nächst gelegenen Punkt Q , dessen $x = OB$ und $y = BQ$ sind. Mit diesen beiden Werten und einem neuen $dx = BB'$ kann man aus der Gleichung ein weiteres dy und damit einen weitem Punkt Q' bestimmen. Die Fortsetzung des Verfahrens gibt nach und nach sämtliche aufeinanderfolgende Punkte der Linie bis zu einem letzten S . Die Summe aller dy aber ist die endliche Strecke SU , d. h. die ganze Zunahme des anfänglich angenommenen Wertes b . So ist man im Stande, zu jedem beliebig angenommenen $x = OT$ das zugehörige $y = ST = b + SU$ zu bestimmen, und schreibt dann

$$y = b + \int dy \quad \text{oder} \quad y = b + \int f'(x).dx$$

wo \int den Anfangsbuchstaben des Wortes Summe bedeutet und Integral gesprochen wird.



In der Weise ist es demnach möglich, durch Summierung ihrer unendlich kleinen Teile die ganze Grösse zu erhalten. Da nun alle Wirkungen der Naturkräfte nicht plötzlich auftreten, sondern sich aus unendlich kleinen, nach bestimmten Gesetzen gebildeten Elementen zusammensetzen, so besitzen wir in der Integralrechnung ein Mittel, um aus solchen Elementen die Gesamtwirkung zu berechnen. Hierin liegt die grosse Bedeutung der Integralrechnung.

Einige weitere Bemerkungen mögen die Darstellung vervollständigen.

Gleichwie eine Grösse y von einer Veränderlichen x abhängen kann, so kann sie auch von zwei Veränderlichen x und z abhängig sein oder von einer noch grössern Anzahl. Es gibt alsdann Differenziale von y , herrührend von den Aenderungen der einzelnen Grössen x und z , . . . , und entsprechende abgeleitete Funktionen, welche man partielle Ableitungen nennt.

Endlich sind in den Aufgaben der Geometrie, Mechanik und Physik, welche zu ihrer Auflösung der Differenzial- und Integralrechnung bedürfen, nicht immer entweder die ursprüngliche Funktion y oder die abgeleitete Funktion $\frac{dy}{dx}$ gegeben, zu der die andere gefunden werden soll, sondern es kommt auch vor — dies ist sogar meistens der Fall — dass lediglich eine durch eine Gleichung dargestellte Beziehung zwischen beiden Funktionen und ihren Ableitungen derselben gegeben ist, aus welcher man y als endliche Funktion von x bestimmen soll, z. B.

$$2x + y^2 = a \cdot \frac{dy}{dx}$$

Solche Gleichungen heissen Differenzialgleichungen. Nach dem Vorigen bedarf es keiner weiteren

Erklärung, was man unter gewöhnlichen und was unter partiellen Differenzialgleichungen zu verstehen hat.

Nachdem ich in kurzen Zügen das Feld gezeichnet habe, auf welchem Euler's Arbeiten beginnen sollten, gehe ich zu diesen selbst über. Doch werden Sie von mir nicht verlangen, auch möchte es Ihnen kaum angenehm sein, dass ich die Tätigkeit Euler's in allen seinen Werken schildere. Ist doch deren Anzahl so bedeutend, dass sie bis jetzt unerreicht dasteht. Nicht weniger als 817 Nummern enthält ihr Verzeichnis, von denen fast die Hälfte in die Jahre nach seiner Erblindung im Jahr 1766 fällt. So reich war dieses arbeitsame Leben! Es muss mir heute genügen, das Wesentliche und Charakteristische seiner Wirksamkeit zu schildern und bezüglich des übrigen die Bemerkung beizufügen, dass es keinen Zweig der Mathematik gibt, der ihm nicht die wertvollsten Bereicherungen und zum Teil prinzipale Entdeckungen verdankte.

Euler's Jugend fällt in die Zeit, in der die Begriffe der Differenzial- und Integralrechnung anfangen Gemeingut zu werden. Ich sage ausdrücklich: Begriffe. Einst nannte man sie nur Methoden. Es ist wahr, die mathematische Ausdrucksweise derselben ist in der That nur eine Methode, für welche auch ein anderer Ausdruck denkbar wäre. Allein diese Methode beruht auf philosophischen Begriffen, welche im Wesen der Größen begründet sind, indem sie dieselben im Zustand des Entstehens, des Werdens betrachten. Diese Begriffe hatten keinen Raum in der Denkform der Alten, denen sie unbekannt waren, sie selbst erzeugten eine neue Denkform.

Nicht lange vor Euler's Geburt (1707) hatte Newton sein unsterbliches Werk: die mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie (1687) veröffentlicht,

in welchem die ersten klaren Einsichten in die neuen Begriffe niedergelegt und entwickelt sind, hatte Leibnitz denselben eine bestimmte mathematische Form gegeben als Differenzialrechnung (1684) und als Integralrechnung (1687), hatte das seltene Brüderpaar Jakob I. und Johann I. Bernoulli an der Ausbildung derselben in so hervorragender Weise gearbeitet. Euler wurde das Glück zu teil, Johann Bernoulli selbst zum Lehrer zu haben und von ihm in die Begriffe und Methoden der neuen Rechnungsarten eingeführt zu werden. Er war nicht von Jugend auf an die schwerfällige alte Denkform gebunden worden, er musste sich nicht erst, wie die genannten Männer, zu den neuen Anschauungen durchringen, sondern diese wurden ihm als Angebinde für seine glänzende Laufbahn in die Wiege gelegt. Und wie hat er sie nun in sich aufgenommen und weiter geführt! Es ist für uns höchst interessant und lehrreich, zu beobachten, wie ihm seine Aufgabe von Jahr zu Jahr, ja fast von Tag zu Tag deutlicher vor Augen trat, wie er konsequent und mit klarem philosophischem Bewusstsein an der Erfüllung derselben arbeitete.

Hatten seine Vorgänger die Berechnung gewisser Grössen: der trigonometrischen Linien, der Kreisbögen, der Logarithmen mittelst unendlicher Reihen auf sukzessive algebraische Operationen in Multiplikation und Division zurückgeführt, ohne ihr eigentliches Wesen als Funktionen zu erkennen, so verdanken wir Euler den grossen Fortschritt, dass er jede Grösse y , die von einer andern Grösse x abhängt und aus ihr durch irgend eine Formel, nicht bloß eine algebraische, berechnet werden kann, als Funktion von x erklärte und dadurch das Fundament zu einer allgemeinen Gröszen- und Funktionenlehre legte. Von diesem erhöhten

Standpunkt aus reformirte er die ganze Analysis in allen ihren Theilen und ist als deren eigentlicher Begründer anzusehen. Das Hauptwerk, in welchem dieser Reformprozess abgeschlossen erscheint, ist seine Einleitung in die Analysis des Unendlichen (1748). Es gibt wenige Schriften, die eine gleichartige innere Freiheit und Sicherheit zeigen, die mit solcher eigenen Freudigkeit abgefasst sind, fast spielend die schwierigsten Fragen erörtern und eine Unzahl neuer Entdeckungen enthalten. Das Buch, in seinem ersten Theil die algebraische, im zweiten die geometrische Analysis enthaltend, erregte nach der Aussage von Zeitgenossen eine ungeheure Begeisterung, in ähnlicher Weise wie vor ihm Newton's Prinzipien, nach ihm Lagrange's Mechanik und Gauss' Disquisitionen. Ein solches Gefühl übernimmt jetzt noch den Leser dieses Werkes, einer reifen Frucht langjähriger Vorarbeiten.

Euler's zweite grosse Leistung in der Grössenlehre sind die Institutionen der Differenzialrechnung (1755), in denen er alles auf diesem Gebiet bis dahin Geleistete zusammenfasst und Neues beiträgt. Sie bilden das erste vollständige Lehrbuch der Differenzialrechnung und ihrer Anwendungen, zugleich den ersten Versuch, dieselbe philosophisch zu begründen. Wenn ihm dieser nicht ganz gelungen ist, so wollen wir erwägen, dass zu seiner Zeit die sogenannten strengen Denkformen der Alten noch nicht ganz aus der wissenschaftlichen Welt verschwunden waren, wie es nunmehr seit Poncelet's und Steiner's geometrischen Arbeiten der Fall ist. Euler versuchte, die neue Begriffswelt mit der alten in Einklang zu bringen, und musste mit einer derartigen Vermittelung scheitern. Ueberzeugt von der Richtigkeit der Ergebnisse und

ganz beschäftigt mit dem Vorwärtsdringen zu weiteren Entdeckungen, hatte er nicht Zeit, mit Ruhe rückwärts und um sich zu schauen. Fügen wir hinzu, dass die Lösung des Rätsels auch andern scharfsinnigen Männern seiner Zeit, wie Lagrange, nicht gelungen ist und erst einem Mathematiker des gegenwärtigen Jahrhunderts, Cauchy, vorbehalten war, obgleich wir einem hochverdienten Schweizer des vorigen, L'Huilier aus Genf, wenigstens die Aufhellung des Dunkels zuschreiben dürfen.

Schon 1763 lag ein drittes Hauptwerk Euler's druckbereit, dessen sofortige Herausgabe jedoch an dem Mangel eines Verlegers scheiterte. Es erschien erst in den Jahren 1768—70 und enthält die Institutionen der Integralrechnung. Wenn wir von Euler sonst nichts hätten, als diese grossartige Arbeit, so müssten wir ihm die Krone der Unsterblichkeit verleihen. Nicht nur fasst er darin Alles zusammen, was seine Vorgänger, seine Zeitgenossen und er selbst geschaffen hatten, sondern er fügt noch so viel Neues und Wichtiges hinzu, dass es ohne Beispiel da steht. Fast auf jeder Seite stossen wir auf neue Ein- und Ausblicke, zeigt er Proben seines reichen Geistes und Scharfsinnes. Hier gibt er uns Gelegenheit, sein innerstes Denken und seine Ziele zu erkennen. Er sagt es, was vor ihm Niemand ausgesprochen hatte, dass die Integralrechnung die eigentliche Quelle sei, aus der die Funktionen fliessen. Das ist ihm nicht nur Phrase, er hat das grosse Wort nicht nur gelassen ausgesprochen, sondern auch gehalten, indem er an Beispielen zeigt, wie die Funktionentheorie studirt werden müsse, und die dabei angewandte Methode ist mustergültig. Er macht als erster darauf aufmerksam, dass man, um eine Klasse von Funktionen zu studiren, sie zunächst auf ihre einfach-

sten Formen zurückführen und aus diesen diejenigen aussuchen müsse, welche wesentliche Verschiedenheiten aufweisen — eine Vorschrift, welche zunächst und nicht lange nachher Legendre an den elliptischen Integralen so trefflich zu befolgen verstanden hat. Euler selbst beschäftigte sich wiederholt mit diesen interessanten und für die angewandte und die theoretische Mathematik so wichtigen Funktionen. Eine andere Klasse von Funktionen, die er in seiner Integralrechnung und in einer grössern Reihe von Abhandlungen untersucht hat, bilden die beiden einander verwandten und nach ihm benannten Integrale, von denen das eine in einem besondern Fall auf die Faktorenfolge $1. 2. 3. \dots n$ führt.

Der Integration der Differenzialgleichungen, sowohl der gewöhnlichen als der partiellen, wandte er ganz besondere Aufmerksamkeit zu und verbesserte ihre Methoden. Noch die heutigen Handbücher der Integralrechnung enthalten über die gewöhnlichen Differenzialgleichungen verhältnissmässig wenig, was nicht schon bei Euler anzutreffen wäre. Wenn er an den partiellen Differenzialgleichungen stehen bleiben musste und nicht alle ihre Geheimnisse zu ergründen im Stande war, so vergesse man nicht, dass ein Mann nicht Alles leisten kann, dass dieser eine Mann aber so viel geleistet hat, als ganze Generationen vor ihm, dass endlich auch dem grössten Geist seine Grenzen gezogen sind.

Soll ich nun noch von Euler's Verdiensten auf dem Gebiet der angewandten Mathematik reden, so will ich meinem verehrten Kollegen Hagenbach nicht vorgreifen und nur einige Arbeiten aus der Mechanik hervorheben. Nachdem Newton in seinen Prinzipien die Grundlagen der Mechanik gegeben hatte, baute sie Euler aus und veröffentlichte 1736 seine Mechanik

des Punktes, in der er die geradlinige und die krummlinige Bewegung eines Punktes im leeren Raum und im widerstehenden Mittel behandelt. Im Jahr 1744 gab er die Theorie der Bewegung der Planeten und Kometen heraus und 1765 die Theorie der Bewegung fester Körper. In dieser ist namentlich die Lehre von der Drehung der Körper in einer meisterhaften Analyse glänzend durchgeführt.

Euler verschmähte nicht sich auch Anfängern nützlich zu machen. So schrieb er 1738 auf Ersuchen der russischen Regierung eine Einleitung in die Arithmetik, welche das Zifferrechnen mit reinen und benannten Zahlen behandelt. Die Anleitung zur Algebra (1770) ist nicht nur um ihrer selbst willen berühmt, indem darin u. a. die ersten Elemente der Zahlentheorie unter dem Namen der unbestimmten Analytik gelehrt werden, sondern ebenso sehr durch die Zusätze seines scharfsinnigen Rivalen und Freundes Lagrange. Sie ist jetzt noch, nachdem eine Legion von Lehrbüchern der elementaren Algebra erschienen ist, dasjenige, das den Anfänger am leichtesten in ihre Lehren einführt.

Sämtliche Schriften Euler's, die kleinen wie die grossen, sind von einer lichtvollen Klarheit. Offen liegt sein Gedankengang da. Der Leser hat das Gefühl, dass der Verfasser so gedacht hat, wie er es vorbringt. Da ist nichts von Versteckensspielen oder geistreicher Dunkelheit anzutreffen, durch welche sich vor und nach ihm so manche unter den grossen und grössten Mathematikern auszeichnen. Man kann seine Ideen verfolgen, man sieht sie in fast selbstverständlicher Weise entstehen: So und nicht anders mussten sie werden. Diese Durchsichtigkeit war nur zu erreichen durch eine vorgegangene tiefe Analyse des zu behandelnden Gegenstandes, welche ihn den Kernpunkt finden liess, aus

dem das andere sich ableitet. Hatte er den Gipfel erklimmt, von dem aus er das ganze Gebiet übersah, so kehrte er um und entwickelte mit bewundernswürdiger Leichtigkeit, mit Ueberwindung aller Hindernisse und mit einer souveränen Ueberlegenheit seine Gedanken und Rechnungen. In Euler's Werken gibt es keine Sprünge, es herrscht darin eine musterhafte systematische Ordnung, wie sie vielleicht bei keinem Andern als bei Archimedes gefunden wird. Der Leser wird förmlich mitgerissen. Als Lehrer ein Vorbild, versteht es Euler, mit den einfachsten Mitteln seinen Gedanken einen zutreffenden Ausdruck zu geben und mit zweckmässig gewählten Bezeichnungen übersichtliche Formeln zu schaffen, die nicht nur das Verständnis und die Uebersicht erleichtern, sondern wieder neue Ideen wecken. Seither im Gebrauch geblieben ist u. a. die Weise, wie er die Seiten und Winkel eines Dreiecks, in den Differenzialgleichungen die Koeffizienten der Glieder und partielle Ableitungen mit einzelnen bestimmten Buchstaben bezeichnet hat. Bekannt ist die Anekdote, wie er als Blinder einem ungebildeten Schneidergesellen seine Algebra diktirte, und dieser nach kurzer Zeit ohne andern Unterricht vollkommen im Stande war, die darin vorkommenden Rechnungen selbst zu lösen.

Aus der Art, wie Euler arbeitete, ist es erklärlich, dass sich in seinen Schriften kein sogenannter gelehrter Apparat und nur wenige Zitate finden. Er hat eben Alles aus sich selbst herausgeschaffen. Auch wenn er fremdes mitbenützte, so hat er ihm so viel eigenes bei- und eingefügt, dass es in dem neuen Gewande kaum mehr zu erkennen war. Doch wusste er Anderer Verdienste hoch zu schätzen und zu fördern. Am schönsten zeigt sich dies in solchen wichtigen Fra-

gen, in denen er selbst vorher gearbeitet hatte, ohne zu einem endgültigen Abschluss zu kommen, und einem Andern den Königsschuss lassen musste. Da weiss er dessen Anerkennung und der eigenen Bescheidenheit kaum zu genügen und übergibt neidlos und freudig seinem Mitbewerber den Kranz, wie er es dem Erfinder der Variationsrechnung, Lagrange, gegenüber in so liebenswürdiger Weise bewiesen hat. Seinem die Verdienste Anderer anerkennenden Wort gelang auch die Versöhnung der kontinentalen und der englischen Mathematiker, die seit dem erwähnten Prioritätsstreit von Newton und Leibnitz einander feindlich gesinnt waren.

So steht denn Euler da als geistiger Heros in Tugend, Arbeitskraft, Fruchtbarkeit und Scharfsinn, dem keine Aufgabe zu schwer war, der überall mit der Fackel seines Wissens und Könnens hineinleuchtete, auf allen Gebieten der mathematischen Wissenschaft Neues entdeckte, Neues schuf, als der grösste unter den Mathematikern, die unsere Stadt gezeugt hat, als der grösste unser seinen Zeitgenossen, ein viel bewunderter und verehrter Sohn unseres Landes, eine Zierde des Menschengeschlechts!

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel](#)

Jahr/Year: 1885

Band/Volume: [7_1885](#)

Autor(en)/Author(s): Kinkelin Hermann

Artikel/Article: [Vortrag 1051-1071](#)