

Ueber die Anzahl der unabhängigen Perioden von eindeutigen Functionen complexen Arguments.

Von

K. VonderMühl.

Zu der sechsten Auflage des elementaren Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung von Lacroix hat Hermite einen kurzen Abriss von der Theorie der elliptischen Functionen hinzugefügt.¹⁾ Im Eingang wird der Satz Jacobis bewiesen, dass eine eindeutige Function einer complexen Veränderlichen nicht mehr als zwei von einander unabhängige Perioden haben kann. Dieser Beweis wird von Hermite rein algebraisch geführt,²⁾ hiebei aber ein Satz über das Minimum einer ternären quadratischen Form als bekannt vorausgesetzt, während im Uebrigen die Note mit dem ganzen Lehrbuch auf Leser berechnet ist, welche nur mit den Elementen vertraut sind. Dagegen setzen die Rechnungen, durch welche Jacobi seinen Satz begründet hat, besondere zahlen-theoretische Kenntnisse nicht voraus; sein Verfahren ist

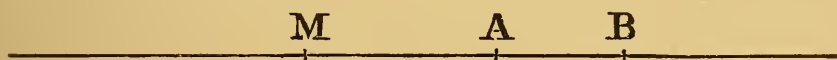
¹⁾ S. F. Lacroix. *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. Sixième édition, revue et augmentée de notes par MM. Hermite et J.-A. Serret. Tome second. Paris 1862. — Note sur la théorie des fonctions elliptiques, par M. Hermite, p. 365—491.

²⁾ L. c. Proposition de Jacobi, p. 369—372.

jedoch etwas weitläufig und wenig durchsichtig.³⁾ Hierin ist wohl der Grund zu finden, warum Hermite jenen andern viel kürzern Weg eingeschlagen hat, der für die meisten Leser nicht gangbar ist. Daher wird es nicht überflüssig erscheinen, von dem genannten Satze eine einfache und ganz elementare, allerdings nicht rein algebraische, sondern auf geometrische Betrachtungen gegründete Ableitung zu geben.

1. Wir betrachten zunächst eine Function von einer reellen Veränderlichen. Die Werthe der Veränderlichen sind dargestellt durch die Punkte einer geraden Linie, eine Periode der Function durch eine Strecke von gegebener Länge auf der Geraden. Soll eine Function der reellen Veränderlichen x periodisch sein um a , wo a dargestellt wird durch die Länge MA , so hat die Function an Stellen, deren Abstand ein ganzes Vielfaches von a beträgt, gleichen Werth. Wenn also die Function gleichzeitig periodisch sein soll um a und um b , so hat sie denselben Werth in dem beliebig angenommenen Punkt M , in A und in B , wenn

$$MA = a, \quad MB = b.$$



Daraus folgt weiter, dass die Function auch periodisch ist um AB , oder um

$$AB - n \cdot MA = MC,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Diese können wir immer so wählen, dass, wenn MA kleiner als MB ist,

$$MC \leq MA.$$

³⁾ C. G. J. Jacobi. De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Crelles Journal, B. 13, p. 55 ff. 1834. — Gesammelte Werke, B. 2, p. 25—31.

Indem wir so weiter gehen, erhalten wir immer kleinere Perioden, und es sind nur zwei Fälle möglich. Entweder findet nach einer endlichen Anzahl von Operationen Gleichheit statt:

$$NP - p. MN = 0,$$

wo p eine ganze Zahl bedeutet; daraus folgt zwischen a und b eine Gleichung von der Form

$$na = mb,$$

wo m und n ganze Zahlen sind; d. h. die beiden Perioden reducieren sich auf die eine

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}.$$

Oder wenn a und b nicht commensurabel sind, so geht das Verfahren unbegrenzt weiter und führt zu immer kleineren Werthen der Periode. Da der Werth unter jede endliche Grösse sinkt, hat die Function in zwei beliebig nahe gelegenen Punkten der Geraden denselben Werth. Die Function wird also constant, wenn sie zwei von einander unabhängige reelle Perioden a und b haben soll.

2. Betrachten wir nun Functionen complexen Arguments, so werden die Werthe der Veränderlichen

$$z = x + iy$$

dargestellt durch die Punkte einer Ebene. Die Perioden haben im Allgemeinen complex imaginäre Werthe, dargestellt durch Strecken in der Ebene von gegebener Länge und Richtung. Soll also die Function periodisch sein um

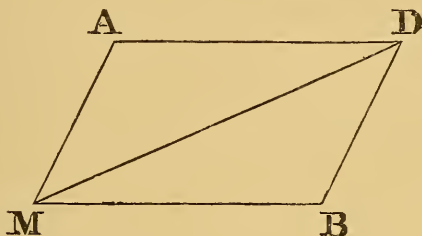
$$a = \alpha + i\beta,$$

wo α und β reelle Grössen bedeuten, und wird die complexe Grösse a dargestellt durch die Strecke MA , so

hat die Function denselben Werth in M und in A . Wird eine zweite Periode

$$b = \beta + i\beta'$$

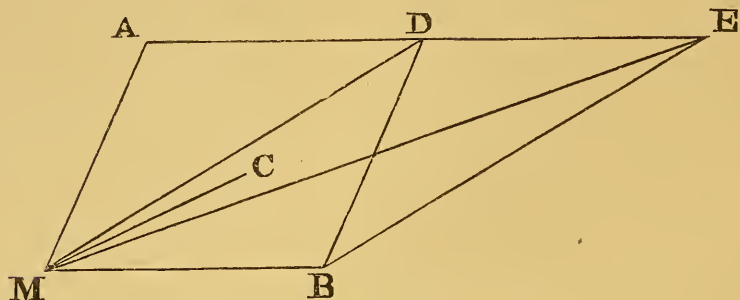
dargestellt durch die Strecke MB , so hat die Function denselben Werth auch in B . Construieren wir dann weiter das Parallelogramm $MADB$ mit den Seiten



MA und MB , so giebt die Diagonale MD eine neue Periode der Function an, abgeleitet aus den beiden andern. Ferner muss die Function an den Stellen innerhalb des Parallelogramms alle Werthe annehmen, welche sie überhaupt erhält; denn wir können von jedem Punkt N der Ebene ausserhalb des Parallelogramms durch Fortschreiten um ganze Vielfache von a in der Richtung MA und um ganze Vielfache von b in der Richtung MB nach einer Stelle im Innern des Parallelogramms gelangen, wo die Function denselben Werth annimmt, wie in N . Wir können endlich statt der beiden Seiten auch die eine derselben und die Diagonale als Perioden der Function nehmen; das Periodenparallelogramm hat denselben Flächeninhalt und die Function erhält innerhalb desselben alle ihre Werthe.

Um nun zu zeigen, dass in diesem Fall die Function nicht mehr als zwei von einander unabhängige Perioden haben kann, nehmen wir an, sie habe die drei Perioden MA , MB und MC . Mit den Seiten MA und MB , welche MC einschliessen, construieren wir das Parallelogramm $MADB$; dann weiter mit der Diago-

nale und der Seite, welche MC einschliessen, hier also MB , ein neues Parallelogramm $MDEB$, u. s. f. immer



mit der Diagonale und derjenigen Seite, welche die Richtung MC einschliessen, ein neues Parallelogramm. Weil der Winkel des folgenden Parallelogramms um einen endlichen Theil kleiner ist, als der des vorhergehenden, muss die Diagonale der Richtung MC näher und näher kommen. Und zwar sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder fällt nach einer endlichen Anzahl von Operationen die Diagonale mit der Richtung MC zusammen, oder dies findet nicht statt.

3. Untersuchen wir zunächst den letztern Fall. Wir gelangen zu Parallelogrammen, deren Seiten die Richtung MC beliebig eng einschliessen; dabei muss die Länge von einer jeden der beiden Seiten über jeden endlichen Werth wachsen. Construieren wir dann ein Parallelogramm mit einer der beiden Seiten und mit MC , so erhält dieses Periodenparallelogramm einen beliebig kleinen Flächeninhalt. Denn dessen Verhältniss zu der endlichen Fläche $MADB$ ist kleiner, als das Verhältniss der endlichen Länge MC zu der Länge der anderen Seite, welche jeden endlichen Werth übersteigt. In umstehender Figur mögen MG und MH die Seiten andeuten, welche MC beliebig eng einschliessen. Dann ist das Verhältniss von dem Flächeninhalt des Parallelo-

gramms $M G G' C$ zu dem Flächeninhalt des Parallelogramms $M G J H$ kleiner, als $M C : M H$.



Folglich muss die Function in einem Theile der Argumentenebene, dessen Inhalt beliebig klein kann gemacht werden, jeden ihrer Werthe mindestens einmal annehmen; sie hat dann überhaupt nur einen Werth, ist also constant.

4. Wollen wir dies noch weiter ausführen und mit Jacobi nachweisen, dass im Fall von drei unabhängigen Perioden ein Index kann gebildet werden, dessen Modul kleiner ist, als jeder endliche Werth, so schliessen wir folgendermaassen:

Die Stelle G liegt der Geraden MC beliebig nahe, ohne in diese selbst zu fallen; denn nehmen wir als Basis des Parallelogramms $M G G' C$ die Periode MC , so ist jener Abstand die Höhe desselben und damit kleiner, als jeder endliche Werth. Verlegen wir nun die Strecke $G G'$ in ihrer Geraden um ein ganzes Vielfaches gegen M hin, so gewinnen wir ein Periodenparallelogramm $M G_1 G_1' C$, wo die Seite $M G_1$ kleiner als MC



ist, und wo entweder diese Seite oder die Diagonale $G_1 C$ kleiner ist als $\frac{1}{2} MC$; denn G_1 liegt zwischen M und C der Geraden MC beliebig nahe. Da sowohl Seite wie Diagonale Perioden der Function darstellen, finden

wir immer einen Index MD , dessen Modul kleiner als $\frac{1}{2} MC$ ist:

$$MD < \frac{1}{2} MC.$$

Denken wir uns nun dasselbe Verfahren wiederholt mit MD als mittlerer Periode und zwei andern, welche sie einschliessen, so folgt ein neuer Index, dessen Modul kleiner als $\frac{1}{2} MD$ ist, u. s. w.

Das Verfahren lässt sich unbegrenzt fortsetzen; sobald man drei von einander unabhängige Perioden wählt, fallen die Richtungen nie zusammen; also wird weder die Seite, noch die Diagonale jemals genau null. Wir können daher immer zu einem Index fortschreiten, dessen Modul kleiner ist als jeder endlich gegebene Werth.

5. Betrachten wir schliesslich den andern Fall, wo nach einer endlichen Anzahl von Operationen die Diagonale in die Richtung MC fällt. Die algebraische Bedingung dafür ist, wenn

$$c = \gamma + i \gamma'$$

gesetzt wird:

$$\frac{m \alpha + n \beta}{m \alpha' + n \beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},$$

wo m und n ganze Zahlen bedeuten. Die Function hat dann die beiden Perioden c und $ma + nb$ in der Richtung MC , und indem wir ebenso, wie bei der Function reellen Arguments schliessen, fragt es sich, ob die beiden complexen Grössen commensurabel sind oder nicht.

Findet das Letztere statt, so muss die Function an allen Stellen der Geraden MC denselben Werth annehmen; sie wird also constant. In dem erstern Falle dagegen sind die drei Perioden nicht von einander unabhängig, sondern sie reducieren sich auf zwei, indem eine Gleichung von der Form besteht:

$$ma + nb + pc = 0,$$

wo m, n, p positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, oder, wenn wir das Reelle und das Imaginäre sondern,

$$m \alpha + n \beta + p \gamma = 0,$$

$$m \alpha' + n \beta' + p \gamma' = 0.$$

Auf den besondern Fall, wo zwei von den drei Richtungen MA, MB, MC zusammenfallen, etwa MA und MB , so dass die Determinante $\alpha \beta' - \alpha' \beta$ verschwindet, braucht nun nicht weiter eingetreten zu werden.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel](#)

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: [9_1893](#)

Autor(en)/Author(s): Mühl-His (Mühl.) Karl von der

Artikel/Article: [Ueber die Anzahl der unabhängigen Perioden von eindeutigen Functionen complexen Arguments 78-85](#)