Ueber den Kubik- und Oberflächeninhalt der homoëdrischen Formen des Tesseral-Systems,

von

F. Dellmann

in Kreuznach.

Die wunderbare Gesetzmässigkeit, welche das Reich der Krystalle beherrscht, hat in den letzten Jahrzehnten manchen Forscher mit Staunen erfüllt, und gewiss gibt es auch in den Rheinlanden manchen Verehrer der Krystallographie, wesshalb es nicht unpassend erscheinen möchte, in diesem Blatte einige Resultate dieser Wissenschaft den Freunden strenger und einfacher Gesetzmässigkeit in der Natur vorzulegen. Wer sich mehr mit diesem Gegenstande zu beschäftigen wünscht, der findet Stoff genug in dem schon etwas ältern Werke von G. Rose: „Elemente der Krystallographie“ etc., und in dem neuern, wissenschaftlichern von K. F. Naumann: „Anfangsgründe der Krystallographie“ etc. Beide Werke sind billig und gut. Obgleich sie beide eine ziemliche Menge guter Abbildungen liefern, so wird Der, welcher eine recht klare Einsicht jener Gesetzmässigkeit auf diesem Gebiete gewinnen will, doch wohl thun, sich die Formen aus Holz zu schneiden, welches gar nicht mühsam ist und wozu das Holz der Pappeln und Weiden einen recht guten Stoff liefert.

So viel ich weiss, sind die Formeln für den Kubik- und Oberflächeninhatt der homoëdrischen Formen des Tesseralsystems noch nicht bekannt, wesshalb ich die Entwickelung derselben und die speciellen Werthe für die bekannten Fälle hier mittheile.

Ich lege der Betrachtung das Hexakisoktaëder zu Grunde. Dasselbe denke man sich aus 48 Pyramiden bestehend, deren Spitzen in eine Hexaëderecke fallen nnd deren Grundflächen also von einer mittlern Kante, einer halben Oktaëderaxe und der Hälfte derjenigen Axe umschrieben werden, welche nach einer 4seitigen Ecke geht. Dann wird also die Höhe dieser Pyramiden von der halben Kante des Würfels gebildet, welcher in der Form steckt. Als Grundlinie der Grundflächen betrachte man die halbe Octaëderaxe; sie sei = 1. Die Fläche des Krystalls, welche an diese Octaëderaxe stösst und eine Seitenfläche der Pyramide ist, schneide von der 2ten Oktaëderaxe bei gehöriger Erweiterung das Stück m, von der 3ten das Stück n ab. Denken wir uns durch die Oktaëderaxen, welche in der Entfernung 1 u. m vom Mittelpunkte geschnitten werden, eine Ebene gelegt, so hat der Schnitt, so weit er hier in Betracht kommt, die Form der Fig. 1.

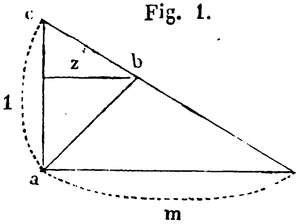

Fig. 1.

Die Linie ab halbire den rechten Winkel, geht also nach einer 4seitigen Ecke und ist eine Seite der Grundfläche der zu berechnenden Pyramide, deren 2te Seite bc und deren Grundlinie ca ist; z sei ein Perpendikel auf ac, also die Höhe der Grundfläche. Hier haben wir die Proportion: $1 : m = 1 - z : z$; folglich $1 + m : m = 1 : z$, also $z = \frac{m}{m+1}$; folglich ist der Inhalt der Grundfläche der Pyramide $\frac{m}{2(m+1)}$.

Um die Höhe der Pyramide oder die halbe Kante des in der Form steckenden Würfels zu finden, denke man sich erst einen Schnitt durch die Oktaëderaxen gelegt, welche in den Entfernungen m u. n vom Mittelpunkte geschnitten werden, und berechne die Entfernung vom Mittelpunkte, wo eine durch eine Oktaëder- und Hexaëderaxe gehende Kante den Schnitt trifft. In Fig. 2,

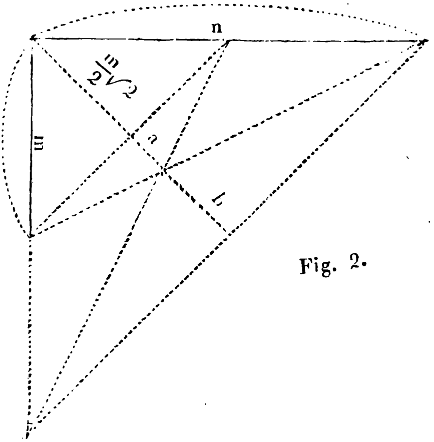

Fig. 2.

wo der rechte Winkel aus bekannten Gründen durch die Linie $\frac{m}{2}\sqrt{2}+a+b$ halbirt wird, wenn man von n ein Stück $= m$ abschneidet (n soll also grössèr sein als m), m bis zu einer Grösse $= n$ verlängert, die Endpunkte kreuzweise durch Gerade verbindet und eine Gerade durch den Durchschnitt von m u. n und den Kreuzungspunkt legt, in dieser Fig. sieht man, dass $m : n = a : b$, also $m : m + n = a : a + b$, folglich $a = \frac{m(a+b)}{m+n}$ ist. Man überzeugt sich aber leicht, dass $a + b = \frac{n}{2}\sqrt{2} - \frac{m}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(n - m)$, folglich $a = \frac{m\sqrt{2}}{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)$ ist; folglich ist die ganze in Betracht kommende Linie $\frac{m}{2}\sqrt{2} + a = \frac{m}{2}\sqrt{2} + \frac{m}{2}\sqrt{2}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)$ $= \frac{mn}{m+n}\sqrt{2}$.

Denkt man sich nun durch eine Oktaëder- und Hexaëderaxe einen Schnitt gelegt, so hat er, wenn man sich die längste Kante verlängert denkt und nur das hier in Betracht Kommende zeichnet, die Form der Fig. 3.

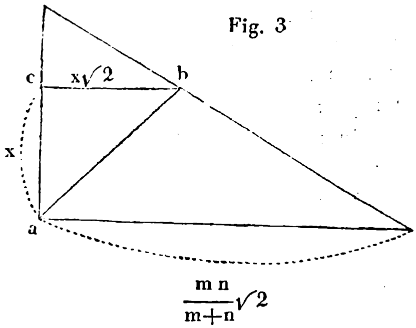

Fig. 3

Hier ist ab die halbe Hexaëderaxe u. x zu berechnen, da es gleich ist der halben Kante des Würfels oder der Höhe der zu berechnenden Pyramide; $cb = x\sqrt{2}$, da es die halbe Diagonale eines Quadrats ist, wovon x die halbe Seite bildet. Wir haben: $\frac{mn}{m+n}\sqrt{2} : 1 = x\sqrt{2} : 1 - x$, also $1 - x = \frac{x(m+n)}{mn}$, folglich $mn - mnx = mx + nx$, und $mn = x(m + n + mn)$, also $x = \frac{mn}{m+n+mn}$; folglich ist der Inhalt der Pyramide: $\frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{mn}{3(m+n+mn)}$ $= \frac{m^2 n}{6(m+1)(m+n+mn)}$, also der Inhalt des Hexakisoktaëders: $\frac{48m^2n}{6(m+1)(m+n+mn)} = \frac{8m^2n}{(m+1)(m+n+mn)}$; setzen wir aber die ganze Oktaëder - Axe $= 1$, so ist er $= \frac{m^2 n}{(m+1)(m+n+mn)}$.

Da m und n nach den Entdeckungen von Weiss immer rational sind und alle homoëdrischen Formen des Tesseralsystems als Arten des Hexakisoctaëders betrachtet werden können; so müssen deren Kubikinhalte also immer rationale Grössen sein. Aus der Formel ergeben sich folgende Werthe für die bekannten homoëdrischen Formen des Tesseralsystems:

1) Hexaëder $a : \infty a : \infty a = 1$
2) Oktaëder $a : a : a = \frac{1}{6}$
3) Dodekaëder $a : a : \infty a = \frac{1}{4}$
4) Ikositetraëder $a : 2a : 2a = \frac{1}{3}$
5) Ikositetraëder $a : 3a : 3a = \frac{9}{20}$
6) Triakisoktaëder $a : a : 2a = \frac{1}{5}$
7) Triakisoktaëder $a . a : 3a = \frac{3}{14}$
8) Tetrakishexaëder $a : \frac{3}{2}a : \infty a = \frac{9}{25}$
9) Tetrakishexaëder $a : 2a : \infty a = \frac{4}{9}$
10) Tetrakishexaëder $a : \frac{5}{2}a : \infty a = \frac{25}{49}$
11) Tetrakishexaëder $a : 3a : \infty a = \frac{9}{16}$
12) Hexakisoktaëder $a : \frac{3}{2}a : 3a = \frac{3}{10}$
13) Hexakisoktaëder $a : \frac{4}{3}a : 4a = \frac{2}{7}$
14) Hexakisoktaëder $a : 2a : 4a = \frac{8}{21}$
15) Hexakisoktaëder $a : \frac{7}{3}a : 7a = \frac{49}{110}$
16) Hexakisoktaëder $a : \frac{11}{5}a : \frac{11}{3}a = \frac{121}{304}$.

Bei der Anwendung der obigen Formel auf die Fälle, wo m oder n oder beide einen unendlichen Werth erhalten, muss man nicht vergessen, dass gegen das Unendliche jede endliche Grösse, und gegen jedes Unendliche mit grösserm Exponenten jedes Unendliche mit kleinerm Exponenten verschwindet, und dass unendliche Grössen mit gleichen Exponenten sich verhalten, wie ihre Coefficienten, weil Unendliche mit gleichen Exponenten als gleich betrachtet werden müssen. Für die Tetrakishexaëder ist $n = \infty$, also die Formel, wenn durch ∞ aufgehoben wird, $\frac{m^2}{(m+1)^2}$. Auch ist hier leicht ersichtlich, dass die Höhe der Pyramide gleich der Höhe ihrer Gruudfläche, nämlich $\frac{m}{m+1}$ ist. Daraus sieht man, dass die Kubikinhalte dieser Formen Quadrate sein müssen.

Aus dem Kubikinhalte ist nun auch leicht der Oberflächeninhalt zu berechnen, wogegen der umgekehrte Weg schwierig ist.

Wenn man aus dem Anfangspunkt dreier rechtwinkligen Coordinatenaxen auf eine beliebige Ebene sich ein Perpendikel denkt, die Länge desselben p nennt, und die Cosinus der Winkel, die es mit den Axen bildet, durch a, b, c bezeichnet; so erhält man nach einer leichten geometrisch - analytischen Entwickelung *) die Gleichung: $ax + by + cz = p$ für alle Punkte der Ebene, wo also x, y, z die Coordinaten beliebiger Punkte der Ebene bezeichnen. Vermittelst dieser Gleichung kann leicht die Länge des Perpendikels gefunden werden, welches man sich vom Mittelpunkte der Krystallform auf eine Krystallfläche gefällt denkt. Stellt man sich nun vor, dass die Krystallformen aus Pyramiden bestehen, die mit ihrer Spitze im Mittelpunkte zusammenstossen und deren Grundflächen also Krystallflächen sind; so braucht man nur den Kubikinhalt durch ein Drittel jenes Perpendikels zu dividiren, um sofort den Oberflächeninhalt zu bekommen.

Gesetzt, die halbe Oktaëderaxe sei wieder = 1, die Krystallfläche des Hexakisoktaëders schneide also von den 3 Axen die Stücke 1, m u. n ab. Für alle Punkte der Fläche gilt die obige Gleichung, also auch für die Punkte, wo sie die Axen schneidet. Für den Punkt der 1. Axe sind die Coordinaten 1, 0, 0, also die Gleichung $a = p$; für den Punkt der 2. Axe sind sie 0, m, 0, also die Gleichung: $bm = p$; für den Punkt der 3. Axe 0, 0, n, also die Gleichung: $nc = p$. Zugleich hat man nach einem bekannten stereometrischen Satze die Gleichung: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; aus den 3 frühern Gleichungen aber auch: $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + \frac{p^2}{m^2} + \frac{p^2}{n^2}$ $= \frac{p^2 (m^2n^2 + m^2 + n^2)}{m^2n^2}$, und da also auch dies = 1, so ist $p^2 = \frac{m^2 n^2}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}$, also $p = mn \sqrt{\frac{1}{m^2n^2 + m^2 + n^2}}$,

*) In dem Compendium der höhern Mathematik von Burg ist sie recht verständlich gegeben.

und wenn man die ganze Oktaëderaxe = 1 setzt, $p = \frac{m\,n}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2n^2 + m^2 + n_2}}$. Daraus ergibt sich nach einer einfachen Entwickelung die Formel für die Oberflächeninhalte: $\frac{6m(m^2n^2+m^2+n^2)}{(m+1)(mn+m+n)} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2n^2+m^2+n^2}}$. Ich gebe nun noch die speciellen Werthe hier an:

1) Hexaëder $= 6$
2) Oktaëder $= \sqrt{3}$
3) Dodekaëder $= \frac{3}{2}\sqrt{2}$
4) Ikositetraëder a : 2a : 2a $= \sqrt{6}$
5) Ikositetraëder a : 3a : 3a $= \frac{9}{10}\sqrt{11}$
6) Triakisoktaëder a . a : 2a $= \frac{9}{5}$
7) Triakisoktaëder a : a : 3a $= \frac{3}{7}\sqrt{19}$
8) Tetrakishexaëder a : $\frac{3}{2}$a : ∞ a $= \frac{18}{25}\sqrt{13}$
9) Tetrakishexaëder a : 2a : ∞ a $= \frac{4}{3}\sqrt{5}$
10) Tetrakishexaëder a : $\frac{5}{2}$a : ∞ a $= \frac{30}{49}\sqrt{29}$
11) Tetrakishexaëder a : 3a : ∞ a $= \frac{9}{8}\sqrt{10}$
12) Hexakisoktaëder a : $\frac{3}{2}$a : 3a $= \frac{3}{5}\sqrt{14}$
13) Hexakisoktaëder a : $\frac{4}{3}$a : 4a $= \frac{3}{7}\sqrt{26}$
14) Hexakisoktaëder a : 2a : 4a $= \frac{4}{7}\sqrt{21}$
15) Hexakisoktaëder a : $\frac{7}{3}$a : 7a $= \frac{21}{55}\sqrt{59}$
16) Hexakisoktaëder a : $\frac{11}{5}$a : $\frac{11}{3}$a $= \frac{33}{76}\sqrt{155}$.

Der Oberflächeninhalt ist also nur dann eine rationale Grösse, wenn der unter dem Wurzelzeichen stehende Faktor ein Quadrat ist. Dies ist der Fall:

1) wenn m und n unendlich sind; denn alsdann verschwinden m^2 u. n^2 gegen m^2n^2;

2) wenn $n = m + 1$ ist; denn alsdann ist $m^2n^2+m^2+n^2 = (m^2 + m + 1)^2$.

Der 1. Fall findet beim Hexaëder, der 2te beim Triakisoktaëder a : a : 2a Statt. Der 2. Fall muss auch bei allen Hexakisoktaëdern eintreten, bei denen $n=m+1$ ist; aber solche Hexakisoktaëder sind bis jetzt noch nicht bekannt.

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande

Jahr/Year: 1844-47

Band/Volume: 1

Autor(en)/Author(s): Dellmann F.

Artikel/Article: Ueber den Kubik- und Oberflächeninhalt der homoedrischen Formen des Tesseral-Systems 33-

38