Ueber den Kubik- und Oberflächen-Inhalt der hemiëdrischen Formen des Tesseralsystems;

Von

F. Dellmann.

Auch hier sollen wieder, wie früher[1]) bei den homoëdrischen Formen, die Inhalte ausgedrückt werden durch die Stücke, welche jede Krystallfläche von den 3 Axen abschneidet. Diese Stücke seien wieder bezeichnet durch **1, m u. n**, wo m u. n > 1 u. n > m.

Die Hemiëdrie findet bekanntlich in der Natur, so weit sie bis jetzt beobachtet worden, nur auf zweifache Weise beim Hexakisoktaëder Statt, nach den an den mittleren Kanten gelegenen Flächenpaaren und nach den um die Hexaëderecken liegenden sechszähligen Flächensystemen. Nach der ersten Ableitung erhält man die von K. F. Naumann Dyakisdodekaëder, von G. Rose Hemioktakishexaëder genannte Form; nach der zweiten aber die, welche Naumann Hexakistetraëder, Rose Hemihexakisoktaëder nennt. Es ist schon aus der Anschauung klar, dass diese hemiëdrischen Formen grösser sind, als die homoëdrische, von der sie abgeleitet werden.

Nehmen wir zuerst das Dyakisdodekaëder vor. Hier stossen je zwei Pyramiden, welche man abschneiden muss, um das Hexakisoktaëder zu erhalten, mit zwei Flächen aneinander, welche wir als Grundflächen betrachten wollen; die Spitzen dieser Pyramiden liegen also in 2 verschiedenen Hexaëderecken. Die Höhe dieser Pyramiden ist, wie bei den in der frühern Rechnung vorgekommenen, die halbe Kante des in der Form steckenden Würfels. Es muss also nur noch die Grundfläche berechnet werden.

1) S. den vorigen Jahrgang dieser Zeitschrift S. 32 ff.

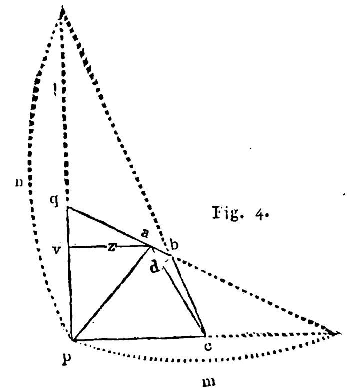

Fig. 4.

In Fig. 4 ist dieselbe mit den Buchstaben a b c verzeichnet. Hier müssen also ac und das Perpendikel bd berechnet werden. Die Grundlinie ac = aq, da ap, wie in Fig. 1, den rechten Winkel halbirt. Wir haben die Proportion: m: z=1: vq, und für z seinen Werth gesetzt: $m : \frac{m}{m+1} = 1 : vq$ folglich $vq = \frac{1}{m+1}$ also $(ac)^2$

$$= (aq)^2 = \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{m+1}\right)^2, \text{ folglich } ac = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}.$$

$$\frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}.$$

Um die Länge des Perpendikels bd zu finden, suche man erst die beiden Coordinaten des Punktes b. Diese sind, da b der Durchschnitt der beiden Geraden $my + x = m$ und $y + nx = n$ ist (weil die erste durch diese Punkte (m, 0) und (0, 1), die zweite durch die Punkte (1, 0) und (0, n) geht.

$$x^1 = \frac{m\,(n-1)}{mn-1}, \quad y^1 = \frac{n\,(m-1)}{mn-1}.$$

Die Linie ac geht durch die Punkte (1, 0) und (0, m), also ist ihre Gleichung $y + xm = m$, folglich die Länge des Perpendikels von jenem Punkte auf sie: $\frac{(n-m)\,(m-1)}{(mn-1)\sqrt{1+m^2}}$, folglich der Inhalt der Grundfläche: $\frac{(n-m)\,(m-1)}{2(mn-1)(m+1)}$, also der Inhalt der Pyramide: $\frac{mn\,(n-m)\,(m-1)}{6\,(mn-1)\,(m+1)\,(mn+m+n)}$, und der Inhalt sämmtlicher 24 Pyramiden, die an den 12 unregelmässigen Ecken liegen: $\frac{4\,mn\,(n-m)\,(m-1)}{(mn-1)\,(m+1)\,(mn+m+n)}$, und wenn die ganze Oktaëderaxe = 1 gesetzt wird:

$\frac{mn\,(n-m)\,(m-1)}{2\,(mn-1)\,(m+1)\,(mn+m+n)}$, folglich der Kubikinhalt des Hemioktakishexaëders:

$$\frac{m^2 n}{(m+1)(mn+m+n)} + \frac{mn(n-m)(m-1)}{2(mn-1)(m+1)(mn+m+n)}$$
$$= \frac{mn(2m^2 n-m+mn-n-m^2)}{2(mn-1)(m+1)(mn+m+n)}.$$

Die speciellen Werthe der bekanntesten Formen sind hier:

1) Hemitetrakishexaëder $a : 2a : \infty a = 1/2$,

2) „ $a : \frac{3}{2}a : \infty a = 2/5$,

3) „ $a : \frac{4}{3}a : \infty a = 5/14$,

4) Hemioktakishexaëder $a : \frac{3}{2}a : 3a = 9/28$,

5) „ $a : 2a : 4a = 20/49$,

6) „ $a : \frac{5}{3}a : 5a = 25/66$.

Die nach der zweiten Art der Hemiëdrie entstehende Form ist der Typus der geneigtflächigen hemiëdrischen Formen, wie die vorige der Repräsentant der parallelflächigen. Ihren Kubikinhalt finden wir leicht auf folgende Weise.

Hier denken wir uns den ganzen Körper wieder in 48 Pyramiden zerlegt, gerade so, wie beim Hexakisoktaëder. Je zwei Pyramiden stossen mit ihren Grundflächen aneinander und diese liegen in der Ebene zweier Oktaëderaxen. Aber die Höhen je zweier mit ihren Grundflächen aneinander stossenden Pyramiden sind nicht gleich; die erweitert gedachten Flächen bedingen eine grössere Höhe für die Pyramiden, welche mit ihren Spitzen an den spitzen 6seitigen Ecken zusammenstossen. Die Pyramiden, welche an den stumpfen 6seitigen Ecken zusammenstossen, sind die des Hexakisoktaëders, haben also zusammen den halben Inhalt dieser Form. Um auch den Inhalt der andern Pyramiden zu finden, braucht man nur noch ihre Höhe zu berechnen. Sie ergibt sich leicht aus Fig. 5, welche das hier in Betracht Kommende eines Schnittes darstellt, der durch 2 Hexaëderaxen gelegt ist.

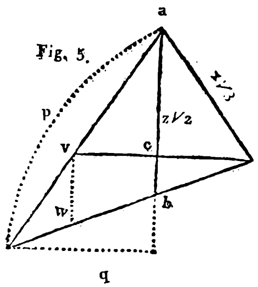

Fig. 5.

Hier ist q die zu berechnende Höhe. Die Linie ab ist dieselbe, wie die in Fig. 1 ebenso bezeichnete; sie ist also $z\sqrt{2}$. Auch $x\sqrt{3}$ ist dieselbe, wie in Fig 3 die Linie ab, da es die halbe Hexaëderaxe eines Würfels bezeichnet, dessen halbe Oktaëderaxe x genannt worden. Hier haben wir also die Proportion: $z\sqrt{2} : vw = p : p-x\sqrt{3}$, u. da $vw = 2(z-x)\sqrt{2}$, so ist $p = \frac{xz}{2x-z}\sqrt{3}$.

Aus der Proportion $x\sqrt{3} : x = \frac{xz}{2x-z}\sqrt{3} : q$ ergibt sich dann $q = \frac{xz}{2x-z}$. Setzen wir für x und z die aus Fig. 3 und Fig. 1 gefundenen Werthe, so haben wir $q = \frac{mn}{mn-m+n}$, folglich ist der Inhalt der Pyramide: $\frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{mn}{3(mn-m+n)}$ $= \frac{m^2 n}{6(m+1)(mn-m+n)}$, also der Inhalt sämmtlicher 24 Pyramiden: $\frac{4m^2 n}{(m+1)(mn-m+n)}$, und wenn die ganze Oktaëderaxe $= 1$ gesetzt wird: $\frac{m^2 n}{2(m+1)(mn-m+n)}$, also der Inhalt des Hemihexakisoktaëders:

$$\frac{m^2 n}{2(m+1)(mn+m+n)} + \frac{m^2 n}{2(m+1)(mn-m+n)}$$
$$= \frac{m^2 n^2}{m^2(n^2-1)+n^2(2m+1)}.$$

Die speciellen Werthe der bekanntesten Formen sind hier:

1) Hemioktaëder a: a: a $= \frac{1}{3}$,
2) Hemiikositetraëder a: 2a: 2a $= \frac{1}{2}$,
3) „ a: 3a: 3a $= \frac{3}{5}$,
4) Hemitriakisoktaëder a a: 2a $= \frac{4}{15}$,
5) Hemihexakisoktaëder a: $\frac{3}{2}$a: 3a $= \frac{3}{8}$,
6) „ a: $\frac{5}{3}$a: 5a $= \frac{25}{63}$.

Aus den beiden allgemeinen Ausdrücken ergibt sich, dass auch die Kubikinhalte sämmtlicher hemiëdrischen Formen des Tesseralsystems rationale Grössen sind. Die Uebersichten der speciellen Werthe zeigen, dass sie durch einfache numerische Werthe ausgedrückt werden können.

Aus dem Kubikinhalte ist hier in derselben Weise der Oberflächeninhalt zu berechnen, wie es früher bei den homoëdrischen Formen geschehen ist. Die Formel für das Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Krystallfläche ist nach dem Früheren (S. 37 und 38 des vor. Jahrganges): $p = \frac{mn}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}$. Daraus und aus dem Vorigen ergibt sich für die Oberflächeninhalte der parallelflächigen hemiëdrischen Formen:

$$\frac{3 (m^2 n^2 + m^2 + n^2) (2m^2 n - m + mn - n - m^2)}{(mn-1) (m+1) (mn+m+n)} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}};$$

und für die geneigtflächigen hemiëdrischen Formen:

$$\frac{6 mn (m^2 n^2 + m^2 + n^2)}{m^2 (n^2-1) + n^2 (2m+1)} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}.$$

Wir geben nun noch die speciellen Werthe hier an.

ac) Parallelflächige hemiëdrische Formen.

1) Hemitetrakishexaëder $a : 2a : \infty a = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

2) „ $a : \frac{3}{2}a : \infty a = \frac{4}{5}\sqrt{13}$

3) Hemitetrakishexaëder $a : \frac{4}{3}a : \infty a = \frac{120}{49}$

4) Hemioktakishexaëder $a : \frac{3}{2}a : 3a = \frac{3}{7}\sqrt{31}$

5) „ $a : 2a : 4a = \frac{30}{49}\sqrt{21}$

6) „ $a : \frac{5}{3}a : 5a = \frac{5}{11}\sqrt{35}$.

b) Geneigtflächige hemiëdrische Formen.

1) Hemioktaëder $a : a : a = 2\sqrt{3}$

2) Hemiikositetraëder $a : 2a : 2a \; \frac{3}{2}\sqrt{6}$

3) „ $a : 3a : 3 = \frac{6}{5}\sqrt{11}$

4) Hemitriakisoktaëder $a : a : 2a = \frac{12}{5}$

5) Hemihexakisoktaëder $a : \frac{3}{2}a : 3a = \frac{1}{2}\sqrt{31}$

6) „ $a : \frac{5}{3}a : 5a = \frac{10}{21}\sqrt{35}$.

Der Oberflächeninhalt ist also nur dann eine rationale Grösse, wenn der Bruch $\frac{1}{m^2 \; n^2 + m^2 + n^2}$, oder wenn dessen Nenner $m^2 \; n^2 + m^2 + n^2$ ein Quadrat ist. Dies ist der Fall:

1) Wenn m und n unendlich sind, welches bei hemiëdrischen Formen nicht vorkommt;

2) Wenn bloss n unendlich und $m^2 + 1$ ein Quadrat ist. Dann verschwindet m^2 aus der Summe und sie wird zu $(m^2 + 1) \; n^2$. Dieser Fall findet beim Hemitetrakishexaëder $a : \frac{4}{3 \; a} : \infty \; a$ Statt;

3) Wenn $n = m + 1$ ist. Dann ist $m^2 n^2 + m^2 + n^2 = (m^2 + m + 1)$. Dieser Fall findet sich beim Hemitriakisoktaëder $a : a : 2a$. Derselbe muss also auch bei allen Hemihexakisoktaëdern Statt finden, bei denen $n = m + 1$ ist; aber solche Formen sind, so viel ich weiss, noch nicht bekannt.

Da die drei Formeln für die Oberflächeninhalte der Formen des Tesseralsystems mit demselben unter dem Wurzelzeichen stehenden Faktor behaftet sind, so muss also, wenn die Grösse der Oberfläche einer homoëdrischen oder hemiëdrischen Form rational oder irrational ist, die Grösse der entsprechenden hemiëdrischen oder homoëdrischen Form ebenfalls rational oder irrational sein.

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande

Jahr/Year: 1844-47

Band/Volume: 2

Autor(en)/Author(s): Dellmann F.

Artikel/Article: Ueber den Kubik- und Oberflächen-Inhalt der hemiedrischen Formen des Tesseralsystems 69-74