

# Das Complexe als Ausdruck des Zusammenhangs zwischen der elliptischen Polarisirung der Spiegelung und Brechung und der Dispersion der Farben.

Eine Revision der Cauchy'schen Reflexionstheorie.

Von

**Prof. Dr. E. Ketteler.**

-----

Das Complexe wurde zuerst von Fresnel in die Optik eingeführt und in dem von ihm behandelten Falle auch erfolgreich gedeutet. Fresnel<sup>1)</sup> stiess bei seiner Untersuchung der Totalreflexion auf complexe Amplituden. Uebersteigt nämlich in den (auf eine innere Reflexion bezogenen) Intensitätsformeln der dort vorkommende Brechungswinkel den Werth des Gränzwinkels, so erlangt der Schwächungscoefficient der gespiegelten Welle die complexe Form:

$$A + B\sqrt{-1}.$$

Der Umstand, dass für die als Functionen von Index und Einfallswinkel bekannten Grössen A und B die Beziehung besteht:

$$A^2 + B^2 = 1,$$

genügte seinem Scharfblick, die reflectirte Welle als eine Superposition zweier unter sich um eine Viertelwellenlänge differirender Partialwellen zu erkennen, folglich allgemein, wenn unter t die laufende Zeit und unter T die Schwingungsdauer verstanden wird:

---

1) Ann. de chim. t. 46; Pogg. Ann. Bd. 22.

$$\begin{aligned}
 (A + B\sqrt{-1}) \cos \frac{2\pi}{T} t &= A \cos \frac{2\pi}{T} t + B \sin \frac{2\pi}{T} t \\
 &= A' \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \chi \right) \\
 A' &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \chi = \frac{B}{A}
 \end{aligned}$$

zu deuten, so dass  $\sqrt{-1}$  durch  $\tan \frac{2\pi}{T} t$  ersetzt werden dürfte.

Wie es scheint, begnügte sich Fresnel mit dieser seiner Interpretation, ohne auf eine nähere Betrachtung der bezüglichen physikalischen Vorgänge einzugehen. Dass dieselbe auch vor der Erfahrung Stand hält, zeigten seine Versuche mit den nach ihm benannten Glasparallelepiped.

Eine zweite Art complexer Grössen, nämlich complexe Brechungsverhältnisse, wurde zuerst von Cauchy <sup>1)</sup> behandelt. Die berühmten Cauchy'schen Formeln für die Metallreflexion, die durch die Messungen Jamin's <sup>2)</sup> und Quincke's <sup>3)</sup> experimentell bestätigt sind, beruhen nämlich auf der Annahme, dass für Metalle das Snellius-Huyghens'sche Brechungsgesetz eine complexe Form annehme. Cauchy's Conception erscheint um so kühner und grossartiger, als man damals noch keine Substanz kannte, für die das Brechungsverhältniss je nach der Wellenlänge bald reell, bald complex wird, wie man es bei Körpern mit Oberflächenfarbe beobachtet. Im vorliegenden Fall ist es leicht, mit Hülfe bekannter mathematischer Sätze von einer Sinuscurve mit complexem Argument — und nur als Bestandtheil eines solchen kommt ein complexer Brechungsexponent in Betracht — zu einer Summe von solchen mit reellem Argument und einer Exponentialgrösse als Factor überzugehen.

Während nun freilich Cauchy, und mit ihm Beer

1) Compt. rend. t. XIII. p. 560; t. XXVI, p. 86. — Pogg. Ann. Bd. 74, S. 543.

2) Compt. rend. t. XXII, p. 477; t. XXIII, p. 1103. — Ann. de chim. t. XXII, p. 311.

3) Pogg. Ann. Bd. 128, S. 541.

und Andere, den Fehler beging, auf diese Summe ohne stichhaltige Vorprüfung die besprochene Fresnel'sche Regel in Anwendung zu bringen, werden dagegen wir dieselbe wieder zusammenfassen zur Gleichung einer Welle mit complexem Phasenunterschied.

Cauchy that indess schon vorher einen Schritt weiter. Den durch Neumann in die Reflexionstheorie hineingebrachten Dualismus suchte er dadurch zu beseitigen, dass er mit Umgehung der streitigen Deutung des Principes der lebendigen Kräfte die schon von Lagrange allgemein aufgestellten und von Green <sup>1)</sup> in der Theorie des Lichtes angewandten reinen Continuitätsbedingungen für die Gränzen von Körpern aufgriff und fortbildete. Während nämlich Green die in diesen Gleichungen auftretenden sogenannten verschwindenden oder Longitudinal-Strahlen wie eine Wellenbewegung von sehr grosser Fortpflanzungsgeschwindigkeit behandelt, legte ihnen Cauchy <sup>2)</sup> complexe oder vielmehr imaginäre Brechungsverhältnisse, d. h. Schwingungen zu, deren Weite in geometrischer Progression mit ihrem Abstände von der Trennungsfläche abnehmen soll.

Cauchy wie Green gelangten so in der That nicht bloss zu Fresnel's Reflexionsformeln zurück, sondern anscheinend sogar zu einer vollgültigen Erklärung der elliptischen Polarisation der Spiegelung, und die von ihnen hierfür aufgestellten Gesetze haben gleichfalls durch Jamin <sup>3)</sup>, sowie später namentlich durch Kurz <sup>4)</sup> und Quincke <sup>5)</sup> innerhalb der Gränzen der Beobachtungsfehler eine leidliche Bestätigung gefunden.

Von späteren Bearbeitern der Reflexionstheorie erwähne ich nur zwei, Beer und Fr. Eisenlohr.

Beer hat in einer Reihe von Abhandlungen die Cauchy'schen Formeln für durchsichtige Mittel, ferner Näherungsformeln für die Metallreflexion und endlich die

---

1) Cambr. Trans. p. I.

2) Compt. rend. t. IX, p. 729; t. XXVIII, p. 124.

3) Ann. de chim. (3) t. XXIX, p. 263; t. XXXI, p. 16.

4) Pogg. Ann. Bd. 108, S. 582.

5) Ebend. Bd. 128, S. 355.

allgemeinen Formeln für durchsichtige und undurchsichtige Mittel <sup>1)</sup> abgeleitet. Da Beer bezüglich der Fresnel'schen Interpretation complexer Amplitüden eine nähere theoretische Motivirung für erforderlich erachten mochte, und da überdies complexe Brechungsverhältnisse noch keine greifbare Thatsache geworden, so vermeidet er allenthalben das Zeichen des Imaginären ( $\sqrt{-1}$ ) und führt dafür von vornherein reelle Phasenunterschiede ein.

Beer stellt sich ganz und consequent auf den Standpunkt der Green-Cauchy'schen Gränzbedingungen, und das selbst bei der Entwicklung der Metallreflexion, bei der Cauchy sich wenigstens schliesslich mit der blossen Transformation der Fresnel'schen Formeln begnügte. Da indess gerade wegen dieses Verfahrens die wirklichen Brechungswinkel in die Ausdrücke eingehen und sonach diese letzteren für durchsichtige wie für metallische Mittel ihre Verwandtschaft documentiren, so erlangen die Beer'schen Formeln in physikalischer Beziehung ein weit grösseres Interesse, als es die ursprünglichen Formeln Cauchy's thaten, deren Gestalt zwar praktisch bequem, deren Coefficienten jedoch eine ausschliesslich mathematische Bedeutung haben. Beer hat übrigens den wahren Zusammenhang zwischen Absorption und Brechung in den metallischen Mitteln ebenso wenig erkannt wie Cauchy, und überdies sind manche seiner Formeln geradezu unrichtig, resp. approximativ.

Beer's Voraussetzung, Cauchy habe seine Formeln für die Metallreflexion mittelst besonderer tief gehender Speculation gewonnen, „deren Vorenthaltung eine unbegreifliche Zurückhaltung sei“, bestätigte sich kaum. Es zeigte vielmehr Eisenlohr <sup>2)</sup> in möglichst knapper, gedrängter Behandlung, wie man von den Fresnel'schen Intensitätsformeln durch einfache Complexsetzung des Brechungsverhältnisses zu den Cauchy'schen gelange. Die Darstellung Eisenlohr's ging damit wieder von der mehr physikalischen Seite zur mathematischen zurück. Und da zudem zu Gunsten der

---

1) Pogg. Ann. Bd. 91, S. 467 und 561; Bd. 92. S. 402.

2) Ebend. 104, S. 368.

Eleganz die am wenigsten durchsichtigen Coefficienten vorgezogen und auch die Veränderlichkeit des wirklichen Brechungsverhältnisses stillschweigend übergangen wurde, so ist möglicher Weise manchem Physiker, der sich durch die Unbestimmtheit Beer's wie durch den Mangel an Durchsichtigkeit seitens Eisenlohr zurückgestossen fühlte, die Metallreflexion selbst nach ihrer äusseren Seite hin ein mysteriöses Etwas geblieben.

Die Erscheinungen der Absorption haben insbesondere seit Entdeckung und sorgfältigerem Studium der Körper mit Oberflächenfarben ein erhöhtes Interesse gewonnen. An diesen Körpern spiegelt sich das Licht zum Theil wie an Glas, zum Theil wie an Metallen<sup>1)</sup>, und in ihnen bricht es sich mit anomaler Farbenfolge<sup>2)</sup>.

Andererseits gewinnt auch die neuerdings von Bous-sinesq<sup>3)</sup>, Sellmeier<sup>4)</sup> und mir<sup>5)</sup> vertretene Anschauung mehr und mehr Boden, dass man es bei allen dioptrischen Vorgängen weniger mit einer besonderen Constitution des inneren Aethers als mit einem Zusammenschwingen von Körper- und Aethertheilchen zu thun habe, und dass vielmehr der innere Aether, abgesehen etwa von der Existenz der die ponderablen Kerne einschliessenden Aetherhüllen, sowohl nach Elasticität als Dichtigkeit dem äusseren Aether gleich sei. Insbesondere ist es auf Grund dieser Annahme möglich, zunächst für die sogenannten neutralen Mittel eine, wie mir scheint, theoretisch sichere Ableitung der Gleichung der lebendigen Kräfte zu geben, welche Betrachtung, wie ich a. a. O. gezeigt habe, sich auch auf bewegte Mittel ausdehnt.

Nimmt man hinzu, dass die Intensität des an einem bewegten durchsichtigen Mittel reflectirten Lichtes für den

1) Vergl. E. Wiedemann Pogg. Ann. Bd. 151, S. 1.

2) Vergl. Christiansen Pogg. Ann. Bd. 141, S. 570, Bd. 143, S. 250. — Kundt ebendasselbst Bd. 143, S. 259; Bd. 154, S. 128; Bd. 145, S. 164. — Soret Bibl. univ. (1871) p. 280.

3) Journ. de Math. XIII, 313.

4) Pogg. Ann. Bd. 145, S. 399.

5) Astronomische Undulationstheorie, Bonn 1873. Abh. VIII, S. 187. — Berl. Monatsberichte (1874) S. 32.

**Fall** senkrecht auf der Einfallsebene stehender Schwingungen sogar mit einziger Anwendung des Fresnel-Neumann'schen Grundsatzes von der Continuität der Excursionen und Oscillationsgeschwindigkeiten bestimmt werden konnte, dann scheint vielleicht der Augenblick nicht fern, wo es gelingen wird, die gesammte Reflexionstheorie auf einer neuen Grundlage auf- und auszubauen. Ich möchte nun in gegenwärtiger Abhandlung zeigen, dass diese Grundlage wesentlich auf der gedachten Annahme des Mitschwingens der ponderablen Theilchen und speciell auf der einzig durch letztere bedingten Dispersion der Farben beruhen wird.

### Principien und Disposition.

Wir nehmen an, das auf die spiegelnde Fläche auffallende Licht sei geradlinig polarisirt. Die Schwingungsausschläge der Aethertheilchen in der einfallenden, reflectirten und durchgehenden Welle mögen bezeichnet werden durch  $q_E, q_R, q'_R, q_D, q'_D$ , und zwar sollen sich die unaccentuirten Zeichen auf die gewöhnlichen, die accentuirten auf die verschwindenden Strahlen beziehen. Legt man durch irgend einen Einfallspunkt ein Coordinatensystem, dessen X-Axe auf der Trennungsfläche und dessen Z-Axe auf der Einfallsebene senkrecht steht, und zerlegt man die genannten Ausschläge nach diesen Axen, so mögen die bezüglichen Componenten  $\xi, \eta, \zeta$  genannt werden. Die Summe aller  $\xi$ , soweit sie sich auf das erste Mittel bezieht, heisse  $\xi_I$ , die entsprechende für das zweite Mittel  $\xi_{II}$  und analog für die übrigen. Denkt man sich dann das natürlich gegebene, aus Aether- und Körpertheilchen bestehende Aggregat durch ein aequivalentes aus reinem Aether ersetzt, dann verlangt zufolge Cauchy der Grundsatz der Continuität, dass die durch diese Summen als Functionen der Lage der Aetherpunkte repräsentirten Curven für die Theilchen der Gränzschrift nicht bloss an einander stossen, sondern auch stetig in einander überfliessen. Man hat daher die Bedingungs-

$$\left. \begin{aligned} \xi_I &= \xi_{II}, & \eta_I &= \eta_{II}, & \zeta_I &= \zeta_{II} \\ \frac{d\xi_I}{dx} &= \frac{d\xi_{II}}{dx}, & \frac{d\eta_I}{dx} &= \frac{d\eta_{II}}{dx}, & \frac{d\zeta_I}{dx} &= \frac{d\zeta_{II}}{dx} \end{aligned} \right\} x = 0.$$

Wenn Cauchy, von diesen Gleichungen ausgehend, die Schwingungen der einfallenden Welle senkrecht und parrallel zur Einfallsebene zerlegt und für erstere Componente die Bedingungen aufstellt:

$$\zeta_E + \zeta_R = \zeta_D, \quad \frac{d\zeta_E}{dx} + \frac{d\zeta_R}{dx} = \frac{d\zeta_D}{dx},$$

also für den Fall senkrecht zur Einfallsebene schwingenden einfallenden Lichtes die verschwindenden Strahlen von vorn herein vernichtet, so bezeichnen wir das von unserem Standpunkte aus als ersten Missgriff und als eine folgeschwere Verkümmerung der ganzen Reflexionstheorie. Die verschwindenden Strahlen schrumpfen dadurch zu longitudinalen Strahlen zusammen, und die Existenz letzterer, die ohnehin die Erfahrung niemals hat constatiren können, muss von der neuen dioptrischen Vorstellungsweise mit grösster Energie bekämpft werden.

Der praktische Erfolg hat freilich das Cauchy'sche Verfahren scheinbar legitimirt. Er erhielt zwei Gleichungen, deren erste mit der entsprechenden Fresnel-Neumann'schen Continuitätsgleichung, und deren Product mit der Fresnel'schen Form der Gleichung der lebendigen Kräfte zusammenfällt. Statt nun dieses Princip noch ferner zu umgehen, musste der Ausdruck desselben sofort auf die zur Einfallsebene parallelen Componenten angewandt und zur Bestimmung der Charaktere der verschwindenden Strahlen verwerthet werden<sup>1)</sup>.

Dass Cauchy dieses nicht that, vielmehr mit den übrig bleibenden Continuitätsbedingungen selbständig und willkürlich schaltete, scheint uns ein zweiter Missgriff, und

---

1) Als charakteristisch für die erwähnten Continuitätsgrundsätze, resp. ihre Behandlung seitens Beer will ich noch anführen, dass letzterer, der Cauchy's (niemals in extenso publicirte) Behandlung der Metallformeln nicht kannte, die verschwindenden Strahlen anfangs sowohl bei Schwingungen senkrecht als parallel zur Einfallsebene einführte und dieselben erst später für ersteren Specialfall als überflüssig verwarf. In der That ist die Berechtigung ihrer Einführung für beide Specialfälle die gleiche, und wird weiterhin ihre Entbehrlichkeit auch für den andern erwiesen werden.

können wir diese seine ungleiche Behandlung der genannten beiden Specialfälle nur mit Entschiedenheit verwerfen. Wenn wir damit, wenigstens im Cauchy'schen Sinne, auf eine einseitige specifische Oberflächenwirkung, also auch auf seine Art der Begründung der elliptischen Polarisirung der durchsichtigen Mittel verzichten, so geben wir dafür den verschwindenden Strahlen ihre eigentliche Bedeutung zurück, die nämlich, von den Körpertheilchen verschluckt zu werden, um, in Körperschwingungen umgewandelt, zugleich mit den Aetherschwingungen die wahre Gleichung der lebendigen Kräfte zu befriedigen.

Die hypothetischen verschwindenden Strahlen stehen freilich unter dem besonderen Einflusse einer Reactionswirkung der Körpertheilchen der Gränzsicht gegen die Schwingungen des sie einseitig umgebenden Aethers. Wir werden sehen, dass diese letztere auch auf der wirklich gebrochenen transversalen Welle eine vorübergehende Aenderung zu bewirken vermag, die ebenso gut zur Hervorrufung eines Phasenunterschiedes geeignet scheint, und die überdies in ihren Consequenzen der Erfahrung besser genügt als die so gekünstelten Hypothesen Cauchy's und Green's.

Fragt man nunmehr, was denn diese strengere Behandlung von dem ganzen System der Lagrange-Cauchy'schen Continuitätsbedingungen übrig lasse, so ist die Antwort: Nichts als einen leeren Rahmen, der erst durch Einführung des Princip's der lebendigen Kräfte entweder Inhalt und Leben gewinnt oder unter Umständen auch gesprengt wird, der aber ohne dasselbe nur der Willkür anheimfällt.

Was endlich diese Gleichung der lebendigen Kräfte selbst betrifft, so betrachten wir dieselbe als die Grundlage unserer ganzen weiteren Arbeit. Dieselbe muss bei dem Uebergang des Lichtes von einem Mittel in ein anderes sowohl für einen einzelnen Elementarstoss zur Zeit  $t$  als auch für die Summe derselben während einer beliebigen Zeit, etwa der Dauer einer Schwingung, erfüllt sein. Im ersteren Fall mögen die in Betracht kommenden Intensitäten als die

augenblicklichen, im letzteren als die totalen bezeichnet werden.

Wir gehen von den ersteren aus und beziehen das Princip der lebendigen Kräfte zunächst auf die Theilchen der Gränzschrift. Dem entsprechend verstehe man unter  $m_E$ ,  $m_R$ ,  $m_D$  die in der gleichen Zeit in einem Punkte der einfallenden, reflectirten und durchgehenden Welle in Bewegung gesetzten unendlich kleinen Aethervolumina, die unserer Anschauung zufolge den bezüglichlichen Aethermassen proportional sind. Ferner mögen die entsprechenden Schwingungsgeschwindigkeiten durch  $c_E$ ,  $c_R$ ,  $c_D$  bezeichnet werden. Analog endlich seien  $m'_E$ ,  $m'_R$ ,  $m'_D$  die im Raume  $m$  enthaltenen Körpermassen (eingeschlossen ihre etwaigen Aetherhüllen) und  $c'_E$ ,  $c'_R$ ,  $c'_D$  die Schwingungsgeschwindigkeiten derselben.

Sofern die  $c$  und  $c'$  für die einzelnen, in einem und demselben Volum enthaltenen Aether- und Körpertheilchen verschiedene Grösse haben sollten, so verstehe man darunter die Mittelwerthe.

Dies vorausgesetzt, verlangt das Princip der Erhaltung der Kraft für alle Punkte der Trennungsfläche:

$$1. \quad (m_E c_E^2 + m'_E c'^2_E) - (m_R c_R^2 + m'_R c'^2_R) = (m_D c_D^2 + m'_D c'^2_D) \quad x = 0.$$

Die weitere Entwicklung dieser Gleichung knüpft sich selbstverständlich an die Bedingung, unter der das Zusammenschwingen der Aether- und Körpertheilchen Statt hat. Wir machen denn vorab, uns jede etwa erforderliche Verallgemeinerung vorbehaltend, die denkbar einfachste Annahme, dass Aether- und Körpertheilchen, wenn auch nicht die gleiche Amplitude, so doch gleiche Periode und gleiche Phase mit einander gemein haben.

Unter diesen Umständen hat das Schwingungsgesetz derselben im allgemeinen die Form:

$$2. \quad \frac{c}{C} = \frac{c'}{C'} = \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{\lambda}{\omega_E} + \frac{\delta}{\omega} \right) \\ \delta = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

wo nämlich  $c$ ,  $c'$  die mittlere Schwingungsgeschwindigkeit der Theilchen einer Welle zur Zeit  $t$  ist, deren Abstand vom Coordinatenanfangspunkt gleich  $\delta$  ist.  $\lambda$  bedeutet die

Entfernung des letzteren von der erregenden Wellebene (etwa irgend einer früheren Lage der einfallenden);  $C, C'$  sind die mittleren Geschwindigkeitsamplituden,  $T$  ist die Schwingungsdauer und  $\omega$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit; die Länge der gebildeten Welle ( $\omega T$ ) heiße  $\lambda$ . Versteht man endlich unter  $\alpha$  der Reihe nach den Einfallswinkel  $\alpha_E$ , den Spiegelungswinkel  $\alpha_R$  und den Brechungswinkel  $\alpha_D$  und setzt zur Abkürzung  $\frac{J}{\omega_E} = \Theta$ , dann hat man

für alle Punkte der Ebene  $x=0$  die Beziehung:

$$\begin{aligned} & (m_E C_E^2 + m'_E C'^2_E) \cos^2 \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + y \frac{\sin \alpha_E}{\omega_E} \right) \\ & - (m_R C_R^2 + m'_R C'^2_R) \cos^2 \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + y \frac{\sin \alpha_R}{\omega_R} \right) \\ & = (m_D C_D^2 + m'_D C'^2_D) \cos^2 \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + y \frac{\sin \alpha_D}{\omega_D} \right). \end{aligned}$$

Sofern dieselbe für alle  $t$  und alle  $y$  gültig bleibt, so zerfällt sie in die beiden folgenden:

$$3. \quad \frac{\sin \alpha_E}{\omega_E} = \frac{\sin \alpha_R}{\omega_R} = \frac{\sin \alpha_D}{\omega_D}$$

$$(m_E C_E^2 + m'_E C'^2_E) - (m_R C_R^2 + m'_R C'^2_R) = (m_D C_D^2 + m'_D C'^2_D).$$

Die erstere derselben repräsentirt das allgemeine Spiegelungs- und Brechungsgesetz, und ist insbesondere für isotrope Mittel  $\alpha_R = 180^\circ - \alpha_E$ .

Fasst man dagegen zweitens die während einer Schwingungsdauer von der Wellenquelle ausgegangenen und auf die einfallende, gespiegelte und gebrochene Welle übergegangenen Bewegungsmengen in's Auge, so lässt sich wiederum in doppelter Weise verfahren. Man integriert entweder die lebendigen Kräfte, die durch einen beliebigen unendlich dünnen, aber optisch äquivalent genommenen Querschnitt der drei Wellen während der Zeit  $T$  hindurchgehen. Oder man summiert die seitens der Quelle geleisteten Arbeiten, wie sie sich in einem bestimmten Augenblick auf den drei Wellen zwischen je zwei gleichen Schwingungszuständen, also auf der bezüglichen Länge derselben, vorfinden.

Ist nun die Breite der Wellen resp.  $\beta_E, \beta_R, \beta_D$ , die

Dichtigkeit des Aethers = 1, die der Körpertheilchen =  $s$ , so muss sein:

Sowohl erstens:

$$\begin{aligned} & \omega_E \beta_E (C_E^2 + s_E C_E'^2) \int_t^{t+T} \cos^2 2\pi \left( \frac{t'}{T} + \frac{\delta_E}{\lambda_E} \right) dt \\ & - \omega_R \beta_R (C_R^2 + s_R C_R'^2) \int_t^{t+T} \cos^2 2\pi \left( \frac{t'}{T} + \frac{\delta_R}{\lambda_R} \right) dt \\ & = \omega_D \beta_D (C_D^2 + s_D C_D'^2) \int_t^{t+T} \cos^2 2\pi \left( \frac{t'}{T} + \frac{\delta_D}{\lambda_D} \right) dt \end{aligned}$$

als auch zweitens:

$$\begin{aligned} & \beta_E (C_E^2 + s_E C_E'^2) \int_{\delta}^{\delta + \lambda_E} \cos^2 2\pi \left( \frac{t'}{T} + \frac{\delta_R}{\lambda_E} \right) d\delta \\ & - \beta_R (C_R^2 + s_R C_R'^2) \int_{\delta}^{\delta + \lambda_R} \cos^2 2\pi \left( \frac{t'}{T} + \frac{\delta_R}{\lambda_R} \right) d\delta \\ & = \beta_D (C_D^2 + s_D C_D'^2) \int_{\delta}^{\delta + \lambda_D} \cos^2 2\pi \left( \frac{t'}{T} + \frac{\delta_D}{\lambda_D} \right) d\delta, \end{aligned}$$

wo noch  $t$  mit  $\Theta$  zu dem ebenso beliebigen  $t'$  zusammengefasst ist.

Die Ausführung der Integration ergibt mit Berücksichtigung der Proportion:

$$4. \quad m_E : m_R : m_D = \beta_E \lambda_E : \beta_R \lambda_R : \beta_D \lambda_D$$

in beiden Fällen den gleichen Ausdruck wie in Gl. 3, aber es beziehen sich nunmehr die Massen  $m$  auf beliebig ausgedehnte Volumina.

Setzt man das mittlere Verhältniss der Amplitüden der Körper- und Aethertheilchen  $\frac{C'}{C} = d$  und schreibt:

5.  $m_E C_E^2 (1 + s_R d_E^2) - m_R C_R^2 (1 + s_R d_R^2) = m_D C_D^2 (1 + s_D d_D^2)$ , dann charakterisirt, wie wir zeigen werden, der in den Klammern enthaltene Factor das Brechungs- und Extin-

ctionsvermögen des betreffenden Mittels längs der bestimmten Richtung der Wellennormale; er ist folglich, sofern beide zugleich mit dem Brechungsindex desselben gegeben sind, eine Function von diesem.

Die Volumina  $m$  dagegen sowie die Wellenbreiten  $\beta$  sind ausserdem noch abhängig von der Richtung der sie begränzenden, ihren Wellennormalen zugeordneten Strahlen.

Was nun das Verhältniss betrifft, in dem sich eine gegebene lebendige Kraft auf Aether- und Körperschwingungen vertheilt, so entwickelt sich dasselbe mittelst folgender Erwägung.

Heisst  $c$  die Schwingungsgeschwindigkeit,  $q = \int c dt = f(t, \delta)$  der Schwingungsausschlag einer sich in der Richtung  $\delta$  im reinen Aether fortpflanzenden ebenen Welle zur Zeit  $t$ , dann ist dieses Fortschreiten derselben dem Princip der wellenförmigen Bewegung zufolge geknüpft an die Beziehung:

$$6. \quad f(t + \Delta t, \delta + \Delta \delta) = f(t, \delta), \quad \Delta \delta = v \Delta t,$$

woraus:

$$7. \quad \frac{dq}{dt} = \pm v \frac{dq}{d\delta}$$

oder:

$$c = \pm v \tan \alpha,$$

unter  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und unter  $\alpha$  den Neigungswinkel verstanden, den die Wellenlinie in demjenigen Punkte, durch welchen zur Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $c$  eben hindurchgeht, mit der Richtung der Wellennormale bildet.

Nennt man ferner  $m$  die in einer unendlich dünnen Schicht vom Querschnitt 1 enthaltene Aethermasse und  $e$  die in ihr vorhandene Elasticität, so erhält man mittelst der hier anwendbaren Newton'schen Formel:

$$8. \quad v^2 = \frac{e}{m}$$

die Beziehung:

$$mc^2 = e \tan^2 \alpha$$

als Ausdruck der Aequivalenz der gegebenen, durch einen bestimmten Querschnitt des Aethers hindurchgehenden le-

bendigen Kraft und der von ihr geweckten bestimmten elastischen Triebkraft.

Wendet man sich hiernach vom homogenen Aether zu den ponderablen durchsichtigen Mitteln, so denke man sich in deren Innern den reinen Aether mit Körpermolekülen untermischt, d. h. mit trägen Massen, die, verglichen mit der Stärke der von der Welle ausgehenden Impulse, nur eine verhältnissmässig schwache Einwirkung auf einander und auf die Aethertheilchen ausüben. Wäre diese Einwirkung geradezu gleich Null (wie etwa die feiner in einer Kundt'schen Schallröhre suspendirter Staubtheilchen), so würden die Körpertheilchen vom schwingenden Aether fortgerissen und an den Oscillationen desselben als eine Art von Ballast mit gleicher Schwingungsdauer und Amplitude Theil nehmen. Ist daher in einer unendlich dünnen Schicht des Mittels vom Querschnitt 1 neben der Aethermasse  $m$  die Körpermasse  $m'$  enthalten, so ist bezüglich der Fortpflanzung der durchgehenden Wellen der Effect der gleiche, als ob die Masse  $m'$  mit der Masse  $m$  zu einer Gesamtmasse  $m + m'$  verbunden würde, so dass nunmehr die letztgenannte Beziehung sich schreibt:

$$(m + m')c^2 = e \tan^2 \alpha.$$

Indess selbst dann noch, wenn aus irgend welchen Gründen die einzelnen ponderablen Theilchen  $m'$  für sich besondere Oscillationsgeschwindigkeiten  $c'$  erhielten, würde, abgesehen von der dann nothwendig eintretenden innern Diffusion, der obige Zusammenhang zwischen fortgeleiteter lebendiger Kraft und Neigung der (Aether)-Wellenlinie seine Gültigkeit bewahren. Man hat daher in diesem allgemeineren Fall:

$$9. \quad mc^2 + \Sigma m'c'^2 = e \tan^2 \alpha$$

oder auch, sofern für die verschiedenen Oscillationsgeschwindigkeiten  $c'$  ihr Mittelwerth  $c'$  eingeführt wird:

$$mc^2 \left( 1 + \frac{m'c'^2}{mc^2} \right) = e \tan^2 \alpha.$$

Ersetzt man nun wieder  $c$  und  $\tan \alpha$  durch ihre Differentialquotienten, so dass:

$$10. \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{m(1 + \varsigma d^2)}} \frac{d\varrho}{d\delta},$$

so zieht sich daraus unter Beihülfe der Gleichungen 6 und 7 der Schluss, dass in einem nach unseren Voraussetzungen gebildeten Aggregat von Aether- und Körpertheilchen jeder von aussen her gegebene Impuls dasselbe mit einer Geschwindigkeit durchläuft, die gegeben ist durch:

$$11. \quad \omega^2 = \frac{e}{m(1 + \varsigma d^2)} = \frac{v^2}{1 + \varsigma d^2}.$$

Da übrigens bei Ableitung dieses Ausdrucks die innere Constitution des ponderablen Gefüges selbst eine willkürliche bleibt, so dehnt sich seine Anwendbarkeit auch auf die anisotropen Mittel aus, und es wird für diese das Amplitüdenverhältniss  $d$  eine Function des Orientirungswinkels zu den optischen Axen.

An einem andern Orte <sup>1)</sup> endlich habe ich gezeigt, dass derselbe bewegte wie ruhende Mittel umfasst, und dass insbesondere die Aberrationserscheinungen die Richtigkeit unserer Anschauung dadurch erweisen, dass es mittelst derselben gelingt, die zuerst von Fresnel entdeckte Modification der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in bewegten Mitteln theoretisch zu begründen.

Für alle dioptrischen Mittel und zwar für jede Richtung im Innern derselben besteht sonach die Relation:

$$12. \quad 1 + \varsigma d^2 = n^2,$$

unter  $n$  den absoluten Brechungsindex verstanden. Ich werde diese Gleichung mit Recht als den Grund- und Hauptsatz der Theorie des Mitschwingens der ponderablen Theilchen hinstellen dürfen.

Setzt man jetzt:

$$\mu = m(1 + \varsigma d^2) = m + m'_1,$$

so dass:

$$13. \quad \omega^2 = \frac{e}{\mu},$$

so verhält sich das aus Aether- und Körpertheilchen bestehende zusammengesetzte Mittel für jede Richtung im Innern desselben wie ein reiner Aether, dessen „reducirte Aethermasse“ gleich  $\mu$  ist, und dessen Oscillationsgeschwindig-

---

1) Astr. Und. S. 195 für isotrope und S. 198 für anisotrope Mittel.

keiten die gleichen sind wie die der Aethertheilchen des Aggregates.

Nunmehr erhält die Gleichung der lebendigen Kräfte (5) die folgende, ebenfalls allgemeingültige Form:

$$14. \quad m_E n_E^2 C_E^2 - m_R n_R^2 C_R^2 = m_D n_D^2 C_D^2$$

oder bei Einführung der reducirten Aethermassen:

$$14b. \quad \mu_E C_E^2 - \mu_R C_R^2 = \mu_D C_D^2.$$

Sie ist die gleiche, wie sie Fresnel<sup>1)</sup> aufstellte, welcher  $\frac{\mu}{m}$  als Dichtigkeit des inneren Aethers auffasst.

Neben der reducirten Aethermasse und zwar als analoge Hilfsgrösse lässt sich schliesslich eine „reducirte Aethergeschwindigkeit“ aufstellen, deren Hervorhebung mit besonderer Beziehung auf die Gleichungen Cauchy's und Neumann's von Wichtigkeit erscheint. Setzt man nämlich:

$$15. \quad s d^2 = \frac{c'_1}{c},$$

folglich:

$$\mu = m \frac{c + c'_1}{c} = m \frac{\gamma}{c},$$

so schreibt sich:

$$\omega^2 = \frac{e \frac{c}{\gamma}}{m} = \frac{e \frac{1}{1 + s d^2}}{m}$$

oder kürzer:

$$16. \quad \omega^2 = \frac{\varepsilon}{m}.$$

Es verhält sich also das zusammengesetzte Aggregat auch wie ein reiner Aether von der Masse (m) des Weltäthers, aber von ungleicher Elasticität  $\left(\varepsilon = \frac{e}{n^2}\right)$ , in welchem die Oscillationsgeschwindigkeiten mit den „reducirten Aethergeschwindigkeiten“

1) Fresnel's Annahme über diese Dichtigkeit scheint, wie man mit Recht vermuthen darf, nicht bloss durch die Formel Newton's, sondern auch durch seine Deutung des für die Aberrationstheorie aufgestellten Entrainirungscoefficienten  $\frac{n^2 - 1}{n^2}$  veranlasst.

17.  $\gamma = c + c'_1$

zusammenfallen. Wir werden im Folgenden entsprechend  $\varepsilon$  als „reducirte Elasticität“ bezeichnen.

Bekanntlich unterscheidet man neben der objectiven Stärke einer Wellenbewegung noch ihre subjective Intensität. Dieselbe misst sich (als totale) für ein im reinen Aether aufgestelltes Auge durch das Quadrat der Amplitude  $C$  als das Integral der während der Zeiteinheit der Flächeneinheit zugeführten lebendigen Kräfte. Denkt man sich diese Flächeneinheit als sehr klein und dehnt den Begriff der Intensität auch auf die Schwingungen des intermolekularen Aethers aus, so ist man berechtigt, allgemein zu schreiben:

$$J = C^2.$$

Dies vorausgesetzt, treffen wir für die weitere Arbeit folgende Disposition:

Verfügt man auf Grund der vorangegangenen Untersuchung über eine Gleichung, welche die drei in Betracht kommenden Oscillationsgeschwindigkeiten mittelst der zugehörigen, als bekannt vorauszusetzenden Producte  $mn^2 = \beta \omega n^2 = \frac{\beta}{\omega} v^2$ , d. h. mittelst Functionen, die nur von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und von dem Winkel zwischen Strahl und Wellennormale abhängen, mit einander verknüpft, so lässt sich derselben mit Leichtigkeit eine Continuitätsbedingung hinzufügen, die sich ausschliesslich auf die Oscillationen der Aethertheilchen allein bezieht. Beide Gleichungen lassen sich für alle bekannten Combinationen von homogenen (ruhenden) Mitteln, sofern wenigstens die entsprechenden Vorgänge nicht aus der Ebene des Hauptschnittes heraustreten, durch einander aufdividiren, und die so entstehende dritte Gleichung erscheint als weitere Continuitätsbedingung (sei es im geometrischen oder im mechanischen Sinne), welche für Aether- und Körpertheilchen zugleich erfüllt ist.

Gehen wir nun aus von dem einfachsten Falle, dass nämlich in  $mn^2$  sowohl  $\beta$  als  $\omega$  reell ist, so lässt sich die Aufgabe dadurch erweitern, dass man einmal bei reeller

Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega$  die Wellenbreite  $\beta$  und damit die Richtung des Strahles complex oder imaginär setzt. Andererseits kann dann auch  $\omega$  complex werden, und auch in diesem Falle können Strahl und Wellennormale sich entweder decken oder auseinandertreten.

Dem entsprechend bestimmen wir die Intensität des gespiegelten und gebrochenen Lichtes:

- A) für die sogenannten neutralen isotropen und anisotropen Mittel,
- B) für die mit elliptischer Polarisation begabten (isotropen) Mittel und dieselbe
- C) insbesondere unter den Bedingungen der Totalreflexion,
- D) für die metallisch reflectirenden Mittel ohne Berücksichtigung der Gränzwirkung,
- E) für dieselben unter Berücksichtigung der Gränzwirkung.
- F) Endlich soll gezeigt werden, dass diese hier aufgestellte, bisher übliche Eintheilung der dioptrischen Mittel sich nicht wohl mehr halten lässt, sofern eben jedes Mittel je nach der auffallenden Strahlengattung bald die Eigenschaften der einen, bald die der andern Klasse besitzt.

Im Uebrigen werden wir in jedem einzelnen Falle das Imaginäre eliminiren und die bezüglichlichen Vorgänge nicht nur leicht übersehbar darstellen, sondern dieselben auch auf rein physikalische Ursachen zurückführen.

## A. Das neutrale Mittel.

Jamin, welcher die elliptisch polarisirenden Mittel als positive und negative kennen lehrte, stellte zwischen beide die sogenannten neutralen Mittel, als deren hauptsächlichste Repräsentanten Alaun und Menilit aufgeführt werden. Während eine elliptisch polarisirende Substanz auffallendes geradlinig polarisirtes Licht in elliptisches umwandelt <sup>1)</sup>, vermag das ein neutrales Mittel nie. Auf letz-

1) Das Vorzeichen dieser Umwandlung ist übrigens, wie Quincke hervorhebt, das entgegengesetzte, je nachdem der Uebergang des Lichtes erfolgt vom Weltäther zum Mittel oder vom Mittel zu jenem.

teres wenden sich daher diejenigen einfachen Grundsätze an, die zuerst von Fresnel und Neumann formulirt wurden.

Man denke sich zwei isotrope Mittel — oder auch zwei anisotrope unter der Einschränkung, dass beider Symmetrieebenen mit der Einfallsebene zusammenfallen — durch eine ebne Fläche getrennt. Unterscheiden wir die beiden Fälle, dass die Schwingungen des einfallenden Lichtes entweder erstens auf der Einfallsebene senkrecht stehen oder zweitens derselben parallel sind.

I. In diesem Fall ist die statthabende Spiegelung und Brechung die ordinäre. Versteht man noch wie früher unter  $c$  die variable Oscillationsgeschwindigkeit der Aethertheilchen und beachtet, dass der Oscillationsausschlag  $\varrho$  gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}\varrho &= \int c \, dt = C \int \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{\delta}{\omega} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} C T \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{\delta}{\omega} \right) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{\delta}{\omega} \right),\end{aligned}$$

so besteht zwischen der Geschwindigkeitsamplitude  $C$  und der Ausschlagsamplitude  $A$  die Beziehung:

$$C = 2\pi \frac{A}{T}.$$

Nunmehr lässt sich das Continuitätsprincip in doppelter Weise entweder mit Fresnel und Neumann auf die Schwingungsgeschwindigkeiten oder mit Cauchy auf die Schwingungsausschläge der (Aether-)Theilchen der Gränzschrift anwenden. Dem entsprechend hätte man die beiden Gleichungen:

$$18. \quad \left. \begin{aligned} \varrho_E + \varrho_R &= \varrho_D \\ \frac{d\varrho_E}{dt} + \frac{d\varrho_R}{dt} &= \frac{d\varrho_D}{dt} \end{aligned} \right\} x = 0.$$

Wie ich anderswo gezeigt habe, führen dieselben in der That für bewegte Mittel, für welche  $T_E$ ,  $T_R$ ,  $T_D$  nicht gleich sind, zum Ziele, ohne dass es nöthig wäre, noch andere Principien herbeizuziehen. Wollte man sie dagegen ohne Weiteres auf ruhende Mittel anwenden, so würden beide identisch <sup>1)</sup>.

1) Astron. Undulationstheorie, Zusatz H, S. 221. Durch die that-

Mit jedenfalls grösserer Willkür und nur a posteriori berechtigt ersetzt Cauchy die vorstehenden Gleichungen durch das System der beiden schon genannten folgenden:

$$19. \quad \left. \begin{aligned} \varrho_E + \varrho_R &= \varrho_D \\ \frac{d\varrho_E}{dx} + \frac{d\varrho_R}{dx} &= \frac{d\varrho_D}{dx} \end{aligned} \right\} x = 0.$$

Wenn nämlich diese Gleichungen der Erfahrung auch für ruhende Mittel <sup>1)</sup> und selbst für bewegte, sofern die Reflexion im äusseren Weltäther Statt findet, genügen, so versagen sie ihren Dienst bei der Reflexion im Innern bewegter Mittel. Bei einer solchen inneren Spiegelung haben nämlich einfallende und reflectirte Welle ungleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und darum ungleiche Volumina und ungleiche lebendige Kräfte, und so lässt sich sagen, dass die Cauchy'schen Grundsätze bloss so lange zulässig bleiben, als sie mit der von ihnen umgangenen Forderung der Erhaltung der lebendigen Kraft verträglich bleiben.

Allgemeiner, weil auch in diesem Fall genügend, sind die bekannten Grundsätze Fresnel's und Neumann's. Mittelst Combination des Princip's der Continuität mit dem der Erhaltung der Kraft erhält man bei Anwendung der „reducirten Aethermassen“:

$$20. \quad \left. \begin{aligned} c_E + c_R &= c_D \\ \mu_E(c_E + c_R) &= \mu_D c_D \\ \mu_E(c_E^2 - c_R^2) &= \mu_D c_D^2 \end{aligned} \right\} x = 0.$$

Selbstverständlich steht die mittlere dieser Gleichungen, wenn ihr auch kein so hoher Grad von Evidenz oder äusserer Opportunität zukommen sollte wie den beiden übrigen, an theoretischer Bedeutung ihnen keineswegs nach.

Sie lassen sich folgendermassen aussprechen:

a) Dem Grundsatz der Continuität zufolge muss die

---

sächliche Ausführbarkeit des hier angedeuteten Verfahrens, auf das ich noch in einer späteren Abhandlung zurückzukommen gedenke, halte ich die Frage nach der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes theoretisch für endgültig erledigt.

1) Die bezügliche Entwicklung findet man verallgemeinert in dem Abschnitt über Metallreflexion.

algebraische Summe der in der einfallenden und gespiegelten Welle enthaltenen Verschiebungsgeschwindigkeiten der in der durchgehenden gleich sein.

b) Dem Grundsatz der Aequivalenz der Bewegungsmengen zufolge müssen die in der einfallenden und gespiegelten Welle enthaltenen Bewegungsmengen ( $\mu c$ ) der in der durchgehenden gleich sein, und betrachten wir das Vorzeichen von  $c_R$  als durch a) gegeben.

c) Dem Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kraft zufolge muss die in der einfallenden Welle enthaltene lebendige Kraft sich in der gespiegelten und gebrochenen Welle wiederfinden.

Den vorstehenden Gleichungen stelle ich die folgenden gegenüber, die mittelst bekannter Transformation durch einfache Einführung der „reducirten Elasticität“ und „Aethergeschwindigkeit“ aus ihnen zu gewinnen sind:

$$\begin{aligned} 20b. \quad & \varepsilon_E (\gamma_E + \gamma_R) = \varepsilon_D \gamma_D \\ & m_E (\gamma_E + \gamma_R) = m_D \gamma_D \\ & m_E \varepsilon_E (\gamma_E^2 - \gamma_R^2) = m_D \varepsilon_D \gamma_D^2. \end{aligned}$$

Derjenige freilich, welcher unsere „reducirte“ Elasticität als die wirklich in der Natur vorkommende betrachtet, wird sowohl die erste als dritte dieser Uebergangsbedingungen als unmöglich verwerfen müssen.

Die hier aufgestellten Gleichungen gelten indess nicht bloss für  $x=0$ , sondern bei continuirlicher Wellenbewegung auch für alle Punkte der beiden combinirten Mittel, für welche  $\frac{\delta}{\omega}$  gleich ist einer beliebigen ganzen Zahl  $z$ . Es sind dies Punkte gleicher Phase. Für dieselben lässt sich nun auch die variable Oscillationsgeschwindigkeit  $c$  durch die zugehörige Amplitude  $C$  ersetzen. Wir schreiben daher definitiv:

$$\begin{aligned} & C_E + C_R = C_D \\ 21. \quad & m_E \left( 1 + \frac{m'_E C'_E{}^2}{m_E C_E^2} \right) (C_E - C_R) = m_D \left( 1 + \frac{m'_D C'_D{}^2}{m_D C_D^2} \right) C_D \\ & m(C_E^2 - C_R^2) + m'(C'_E{}^2 - C'_R{}^2) = m_D C_D^2 + m'_D C'_D{}^2. \end{aligned}$$

Damit hören die genannten Beziehungen auf, eigentliche Gränzgleichungen zu sein, als welche man sie gewöhnlich ausschliesslich betrachtet. Gibt man noch den

beiden ersten derselben mit Rücksicht auf ihre weitere Verwendung die Form:

$$C_E + C_R = C_D$$

$$\frac{\beta_E}{\omega_E} (C_E - C_R) = \frac{\beta_D}{\omega_D} C_D,$$

so entwickelt sich mittelst Elimination von  $C_D$ , resp.  $C_R$ :

$$22. \quad C_R = -\frac{\omega_E \beta_D - \omega_D \beta_E}{\omega_E \beta_D + \omega_D \beta_E} C_E, \quad C_D = \frac{2 \omega_D \beta_E}{\omega_E \beta_D + \omega_D \beta_E} C_E.$$

Für neutrale Mittel insbesondere verhalten sich  $\beta_E : \beta_D = \cos \alpha : \cos \alpha_D$ , und daher schreibt sich, wenn noch die Schwächungscoefficienten  $\frac{C_R}{C_E} = R$ ,  $\frac{C_D}{C_E} = D$  eingeführt und  $\alpha = e$ ,  $\alpha_D = r$  gesetzt werden, für diese auch:

$$23. \quad R = -\frac{\sin(e - r)}{\sin(e + r)}, \quad D = \frac{2 \cos e \sin r}{\sin(e + r)}.$$

Wäre das erste der beiden an einander stossenden Mittel der Weltäther, folglich  $e > r$ , so bedeutet bekanntlich das negative Zeichen von  $R$  als der Amplitude einer Sinusoide einen plötzlichen Phasenunterschied von  $\pi$  oder einen plötzlich erlangten Gangunterschied von einer halben Welle. Würde dagegen der Weltäther als zweites Mittel genommen, so hätte man in vorstehenden Ausdrücken  $e$  und  $r$  gegen einander zu vertauschen, um die entsprechenden Coefficienten  $R_i$  und  $D_i$  zu erhalten.

Für beide Combinationen ist folglich:

$$1 + R = D, \quad 1 + R_i = D_i, \quad R_i = -R$$

und daher:

$$24. \quad DD_i = 1 - R^2.$$

II. Sind die Schwingungen des einfallenden Lichtes der Einfallsebene parallel, so ist insbesondere unter der Annahme der Hauptschnitte zweier Krystalle sowohl Spiegelung wie Brechung die extraordinäre.

Die für diesen zweiten Hauptfall von Green und Cauchy aufgestellten, S. 6 angeführten vier Continuitätsbedingungen glaube ich verwerfen zu müssen und zwar aus folgenden besonderen Gründen:

1) Dieselben setzen neben der einfallenden vier Wellen voraus, zwei gespiegelte und zwei gebrochene, während man mit je einer auskommt.

2) Während dieselben, wenn das erste der beiden combinirten Mittel isotrop, das zweite anisotrop genommen wird, zu unbestimmten Intensitätsausdrücken führen, welche die richtigen in sich einschliessen, so werden sie (wenigstens bei der Beschränkung auf fünf Strahlen) unmöglich, wenn umgekehrt das erste Mittel anisotrop und das zweite isotrop ist.

3) Um auch in diesem Falle zu richtigen Formeln zu gelangen, sind die vier Continuitätsgleichungen auf ihre ersten beiden zu beschränken, und sind denselben gewisse fremdartige, durch directe Vergleichung mit der Erfahrung zu entnehmende Annahmen hinzuzufügen.

4) Consequenter Weise sind daher auch bei äusserer Reflexion an Krystallen die zwei letzten Continuitätsbedingungen zu verwerfen, da auch hier dieselben Annahmen mit Beihülfe der beiden ersten zum Ziele führen.

Bezüglich der zu machenden Nebenannahmen verweise ich auf die Darstellung am Schlusse dieses Abschnittes sowie auf SS. 235—245 meines Buches.

Was denn andererseits die von Fresnel und Neumann für diesen zweiten Hauptfall aufgestellten Gränzbedingungen betrifft, so lassen sich dieselben zunächst bei Einführung der „reducirten Aethermassen“ auf die folgende allgemeinste Form bringen:

$$25. \quad \frac{\mu_E}{m_E} c_E \sin \alpha_E + \frac{\mu_R}{m_R} c_R \sin \alpha_R = \frac{\mu_D}{m_D} c_D \sin \alpha_D$$

$$\mu_E c_E \sin \alpha_E + \mu_R c_R \sin \alpha_R = \mu_D c_D \sin \alpha_D$$

$$\mu_E c_E^2 - \mu_R c_R^2 = \mu_D c_D^2.$$

Obwohl bei der Beschränkung auf die Vorgänge im Hauptschnitt, unter der wir hier die Aufgabe durchführen, zwei dieser Gleichungen, etwa die beiden letzten, als principiell gegeben genügen, so bedarf man auch der ersten, wenn man, wie Cornu <sup>1)</sup>, die Intensität des gespiegelten (und durchgehenden) Lichtes allgemein in ihrer Abhängigkeit von der Orientirung zu den Krystallaxen behandelt.

Man kann die aufgestellten Gleichungen wieder völlig transformiren. So wenig einleuchtend nämlich die Form war, welche die Uebergangsbedingungen des ersten Haupt-

1) Ann. de chim. (4) t. XI, p. 283.

falls bei Einführung der „reducirten Elasticität“ und „Aethergeschwindigkeit“ erhielten, so verhältnissmässig befriedigend erscheint ihre Anwendung hier. Man gewinnt so:

$$\gamma_E \sin \alpha_E + \gamma_R \sin \alpha_R = \gamma_D \sin \alpha_D$$

$$25b. \quad m(\gamma_E \sin \alpha_E + \gamma_R \sin \alpha_R) = m_D \gamma_D \sin \alpha_D$$

$$m(\gamma_E^2 \sin^2 \alpha_E - \gamma_R^2 \sin^2 \alpha_R) = m_D \gamma_D^2 \sin^2 \alpha_D,$$

sofern allgemein (d. h. auch im Hauptschnitte anisotroper Mittel) die entsprechenden Volumina der einfallenden und gespiegelten Welle einander gleich sind, folglich:  $m_E = m_R = m$ .

Die erhaltenen sechs Gleichungen lassen sich nun folgendermassen aussprechen:

a) Dem Grundsatz der Aequivalenz der Bewegungsmengen zufolge müssen nicht bloss die Producte aus den in der Richtung des Lothes genommenen Componenten der Verschiebungsgeschwindigkeiten  $c$  in die bezüglichlichen Aetherdichten  $\frac{\mu}{m}$ , sondern auch:

b) die Producte aus den nämlichen Componenten in die reducirten Massen  $\mu$  zu beiden Seiten der Trennungsfläche gleich sein.

c) Die in der einfallenden Welle enthaltene lebendige Kraft muss sich in der gespiegelten und gebrochenen erhalten.

a) Dem Grundsatz der Continuität zufolge muss die algebraische Summe der in der Richtung des Lothes genommenen reducirten Verschiebungsgeschwindigkeiten ( $\gamma$ ) für die einfallende und gespiegelte Welle der Verschiebungsgeschwindigkeit der durchgehenden Welle gleich sein.

b) Dem Grundsatz der Aequivalenz der Bewegungsmengen zufolge müssen die Producte der in der Richtung des Lothes genommenen reducirten Aethergeschwindigkeiten in die Massen  $m$  zu beiden Seiten der Trennungsfläche gleich sein.

c) Die nach dem Lothe genommene Componente der (scheinbaren) lebendigen Kraft der einfallenden Welle muss sich in den entsprechenden Componenten der gespiegelten und gebrochenen Welle erhalten.

Was übrigens das Vorzeichen der zweiten Glieder in den beiden ersten Gleichungen betrifft, so ist es, sofern ihr Product die dritte erzeugen muss, für beide das entgegengesetzte. Im Uebrigen wird dasselbe, abgesehen davon, dass die mittlere der Gleichungen 25 sich für einen speciel- len Fall in eine Continuitätsbedingung umformt, dadurch bestimmt, dass für die normale Incidenz die beiden Haupt- fälle in ihren Forderungen und Resultaten zusammenfallen.

Selbstverständlich werden auch hier die genannten Beziehungen bei continuirlicher Wellenbewegung nicht bloss für die Punkte der Gränzschrift, sondern für alle, die um eine ganze Zahl ihrer bezüglichen Wellenlängen von dem Einfallspunkt abstehen, erfüllt sein.

Wenn wir nunmehr die allgemein aufgestellten Prin- cipien zunächst auf isotrope Mittel beschränken, so wandeln sich die Gleichungen 25 um in:

$$\begin{aligned} & C_E - C_R = C_D n \\ 26. \quad & (C_E + C_R) \cos e = C_D \cos r \\ & (C_E^2 - C_R^2) \cos e = C_D^2 n \cos r. \end{aligned}$$

Die zweite derselben ist die bekannte Fresnel-Neu- mann'sche Continuitätsgleichung, in der das vorhin unbe- stimmt gebliebene Vorzeichen sich nach den eben genann- ten beiden Rücksichten als das positive ausweist. Dem- gemäss erhält man für die Schwächungscoefficienten:

$$27. \quad R = -\frac{\tan(e-r)}{\tan(e+r)}, \quad D = \frac{2 \cos e \sin r}{\sin(e+r) \cos(e-r)}.$$

Werden beide Mittel gegen einander vertauscht, so wechseln wieder  $e$  und  $r$  ihre Rolle.

Bei der extraordinären Spiegelung und Brechung fer- ner im Hauptschnitt anisotroper Mittel hat man zu beach- ten, dass die gleichzeitig in Bewegung gesetzten, sogenann- ten optisch äquivalenten Massen durch die Richtung der Strahlen (anstatt der Wellennormalen) begränzt werden. Ist daher wieder  $\mu$  gleich dem Producte aus Volumen und Dichtigkeit, also:

$$\mu = m \cdot n^2,$$

so verhalten sich die drei Volumina  $m$ , wenn noch die Strahlengeschwindigkeiten mit  $\sigma$  und die Brechungswinkel

der Strahlen mit  $r'$  bezeichnet werden, an der Gränzfläche offenbar wie:

$$28. \quad m_E : m_R : m_D = \sigma_E \cos r'_E : \sigma_R \cos r'_R : \sigma_D \cos r'_D.$$

Oder auch, wenn Strahl und Wellennormale einen Winkel  $\delta$  einschliessen, so dass:

$$\omega = \sigma \cos \delta,$$

wie:

$$\omega_E \frac{\cos r'_E}{\cos \delta_E} : \omega_R \frac{\cos r'_R}{\cos \delta_R} : \omega_D \frac{\cos r'_D}{\cos \delta_D}.$$

Und da selbstverständlich diese Volumina sich auch messen durch die Producte der Wellenbreite  $\beta$  in die darauf gezogene Senkrechte  $\omega$ , so verhalten sich die Wellenbreiten wie:

$$29. \quad \beta_E : \beta_R : \beta_D = \frac{\cos r'_E}{\cos \delta_E} : \frac{\cos r'_R}{\cos \delta_R} : \frac{\cos r'_D}{\cos \delta_D}.$$

Dies vorausgesetzt, erhalten die obigen Gränzgleichungen, wenn zunächst das erste Mittel isotrop, etwa der Welt-raum ist, die Form:

$$C_E - C_R = C_D n$$

$$30. \quad (C_E + C_R) \cos e = C_D \frac{\cos r'}{\cos \delta}$$

$$(C_E^2 - C_R^2) \cos e = C_D^2 n \frac{\cos r'}{\cos \delta}.$$

Man erhält aus ihnen unter Beachtung, dass:

$$r' = r + \delta,$$

bezüglich der Schwächungscoefficienten die Werthe:

$$31. \quad R = - \frac{\sin(e - r) \cos(e + r) + \sin^2 r \tan \delta}{\sin(e + r) \cos(e - r) - \sin^2 r \tan \delta},$$

$$D = \frac{2 \cos e \sin r}{\sin(e + r) \cos(e - r) - \sin^2 r \tan \delta}$$

oder auch:

$$31b. \quad R = - \frac{\cot(e + r) + \frac{\tan \delta}{n^2 - 1}}{\cot(e - r) - \frac{\tan \delta}{n^2 - 1}},$$

$$D = \frac{1}{n} \frac{\cot(e + r) + \cot(e - r)}{\cot(e - r) - \frac{\tan \delta}{n^2 - 1}},$$

welche Ausdrücke für  $\delta = 0$  in die früheren übergehen. An-

dererseits ergibt das Verfahren von Cauchy und Green für R bekanntlich den unbestimmt bleibenden Ausdruck:

$$32. \quad R = -\frac{\cot(e+r) + \tan(\alpha_R^1 + \alpha_D^1)}{\cot(e-r) - \tan(\alpha_R^1 + \alpha_D^1)},$$

in dem nämlich  $\alpha_R^1, \alpha_D^1$  die gänzlich unbekannten Brechungswinkel der beiden hypothetischen Longitudinalwellen bedeuten<sup>1)</sup>.

Bei Einführung ferner von Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenbreite unterscheidet sich die dann entstehende Form:

$$33. \quad R = -\frac{v\beta_E - \omega\beta_D}{v\beta_E + \omega\beta_D}$$

in nichts von der der isotropen Mittel. Und bei Einführung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v=1$  und Strahlengeschwindigkeit  $\sigma$  wird sie zur bekannten Neumann'schen Gleichung:

$$34. \quad R = -\frac{\cos e - \sigma \cos r'}{\cos e + \sigma \cos r'} \quad 2).$$

Werden endlich beide Mittel als anisotrop vorausgesetzt, so schreiben sich, da:

$$n_E \sin \alpha_E = n_R \sin \alpha_R = n_D \sin \alpha_D,$$

die beiden ersten der Gleichungen 25 auch so:

$$C_E n_E - C_R n_R = C_D n_D$$

$$C_E n_E m_E + C_R n_R m_R = C_D n_D m_D,$$

und damit ihr Product:

$$C_E n_E^2 m_E + C_E C_R n_E n_R (m_R - m_E) - C_R^2 n_R^2 m_R = C_D^2 n_D^2 m_D$$

mit der dritten (Gl. 14) übereinstimme, muss wieder sein, wie oben:

$$m_E = m_R,$$

d. h.

$$\frac{\omega_E}{\omega_R} = \frac{\beta_R}{\beta_E} = \frac{\cos r'_R \cos \delta_E}{\cos r'_E \cos \delta_R}.$$

Von der Richtigkeit dieser Beziehung überzeugt man sich in der That durch die Untersuchung der geometrischen Bedingungen der Construction der gespiegelten Welle<sup>3)</sup>.

1) Setzt man z. B.  $\tan(\alpha_R^1 + \alpha_D^1) = \tan r$ , so wird:  $R = -\frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)}$ .

2) Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes. Berlin 1837.

3) Astr. Und. S. 240.

Schreibt man noch wegen der Proportionalität von  $n$  mit  $\beta$  die zweite dieser Gleichungen so:

$$C_E \beta_E + C_R \beta_R = C_D \beta_D,$$

oder:

$$C_E \frac{\cos r'_E}{\cos d_E} + C_R \frac{\cos r'_R}{\cos d_R} = C_D \frac{\cos r'_D}{\cos d_D},$$

so lässt sich dieselbe folgendermassen aussprechen:

Zerlegt man die einfallende, reflectirte und durchgehende Welle in lauter Elemente und denkt sich für den Moment des Aufstossens auf die Trennungsfläche die in denselben enthaltenen Verschiebungsgeschwindigkeiten des Aethers in ihren respectiven Schwerpunkten concentrirt, dann muss die algebraische Summe der in jedem einfallenden und gespiegelten Wellenelemente enthaltenen Verschiebungsgeschwindigkeiten der in dem gebrochenen gleich sein.

Diese Auffassung, die meines Wissens noch von Niemanden ausgesprochen wurde, ist sonach eine allgemeinere und darum berechtigtere als die nur speciell gültige von Fresnel und Neumann. Mit Rücksicht hierauf lassen sich die allgemeinen Uebergangsbedingungen des zweiten Hauptfalles auch so gruppieren:

$$\begin{aligned} & \beta_E C_E + \beta_R C_R = \beta_D C_D \\ 35. \quad & C_E \sin \alpha_E \left( 1 + \frac{m'_E C'^2_E}{m_E C^2_E} \right) - C_R \sin \alpha_R \left( 1 + \frac{m'_R C'^2_R}{m_R C^2_R} \right) \\ & = C_D \sin \alpha_D \left( 1 + \frac{m'_D C'^2_D}{m_D C^2_D} \right) \end{aligned}$$

$(m_E C^2_E + m'_E C'^2_E) - (m_R C^2_R + m'_R C'^2_R) = (m_D C^2_D + m'_D C'^2_D)$ ,  
und in dieser Form sollen sie den für den I. Hauptfall aufgestellten Gleichungen 21 coordinirt werden.

Mittelst der beiden ersten derselben unter der praktisch bequemen Form:

$$\begin{aligned} C_E + \frac{\omega_E}{\omega_R} C_R &= \frac{\beta_D}{\beta_E} C_D \\ C_E - \frac{\omega_E}{\omega_R} C_R &= \frac{\omega_E}{\omega_D} C_D \end{aligned}$$

erhält man schliesslich:

$$36. \quad C_R = -\frac{\omega_E \beta_E - \omega_D \beta_D}{\omega_E \beta_E + \omega_D \beta_D} \frac{\omega_R}{\omega_E} C_E, \quad C_D = \frac{2 \omega_D \beta_E}{\omega_E \beta_E + \omega_D \beta_D} C_E$$

oder z. B.

$$C_R = -\frac{\sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha \tan \delta_E) - \sin \alpha_D (\cos \alpha_D - \sin \alpha_D \tan \delta_D)}{\sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha \tan \delta_E) + \sin \alpha_D (\cos \alpha_D - \sin \alpha_D \tan \delta_D)} \frac{\sin \alpha_R}{\sin \alpha}$$

als eine Erweiterung der Neumann'schen Formel. Die hier abgeleiteten Beziehungen in Verbindung mit den Ausdrücken 22 sind die allgemeinsten, welche die Reflexionstheorie zwischen ausschliesslich reellen Grössen zu liefern vermag.

Dass dieselben, wenn zunächst das erste Mittel der Weltäther und das zweite ein Krystall ist, die oben gewonnenen Schwächungscoefficienten in sich einschliessen, ergibt die unmittelbare Vergleichung.

Und um die Vorgänge an der Hinterfläche eines Krystalles auf die an der Vorderfläche beziehen zu können, denke man sich denselben als planparallele Platte, so dass die Einfallswinkel und Brechungswinkel zu correspondirenden werden. Heissen jetzt die bezüglichen Schwächungscoefficienten  $R_i$  und  $D_i$ , so kommt bei Vertauschung von  $\omega_E$ ,  $\beta_E$  und  $\omega_D$ ,  $\beta_D$ :

$$R_i = \frac{v \beta_E - \omega_D \beta_D}{v \beta_E + \omega_D \beta_D} \frac{\omega_R}{\omega_D}, \quad D_i = \frac{2 v \beta_D}{v \beta_E + \omega_D \beta_D},$$

also bei Vergleichung mit Gl. 33:

$$\frac{\omega_D}{\omega_R} R_i = -R.$$

Man zieht daraus mit Hülfe der zweiten der vorstehenden Uebergangsbedingungen:

$$1 - \frac{\omega_D}{\omega_R} R_i = 1 + R = \frac{\omega_D}{v} D_i$$

und deren Combination mit der für die Vorderfläche gültigen:

$$1 - R = \frac{v}{\omega_D} D$$

den Schluss:

$$D D_i = 1 - R^2,$$

so dass die Beziehung zwischen dem Schwächungscoefficienten einer nach zweimaliger Brechung aus der Hinterfläche der Platte austretenden Welle und dem Schwächungscoefficienten der an der Vorderfläche reflectirten für anisotrope wie isotrope Mittel und zwar für beide Hauptfälle gleich ist.

Es erscheint zweckmässig, gerade an dieser Stelle die aufgestellten Gränzgleichungen 35 in ihrem Verhältniss zu den berühmten Cauchy'schen Continuitätsbedingungen endgültig festzustellen. Zu dem Ende werde zunächst die mittlere derselben, d. h. die erste der Gleichungen 25, durch Benutzung von Relation 15 in eine Continuitätsbedingung zwischen den gemischten Verschiebungsgeschwindigkeiten  $c$  und  $c'$ , umgewandelt. Dieselbe wird (gleich Nr. 1 der Gleichungen 25<sub>b</sub>):

$$(c + c')_E \sin \alpha_E - (c + c')_R \sin \alpha_R = (c + c')_D \sin \alpha_D.$$

Oder wenn allgemein:

$$c' \sin \alpha = c^1 \cos \alpha^1$$

gesetzt und fortan der reflectirten Amplitude das negative Zeichen beigelegt wird:

$$37. \quad (c_E \sin \alpha_E + c_E^1 \cos \alpha_E^1) + (c_R \sin \alpha_R + c_R^1 \cos \alpha_R^1) \\ = (c_D \sin \alpha_D + c_D^1 \cos \alpha_D^1)$$

oder kürzer:

$$(\xi_E + \xi_E^1) + (\xi_R + \xi_R^1) = (\xi_D + \xi_D^1).$$

Beachtet man ferner die Bedeutung der Wellenbreite:

$$\beta = \cos \alpha - \sin \alpha \tan \delta,$$

so dass:

$$c \beta = c \cos \alpha - c \sin \alpha \tan \delta,$$

wofür auch gesetzt werden kann:

$$c \beta = c \cos \alpha - c^1 \sin \alpha^1,$$

so geht die erste der Gleichungen 35 über in:

$$38. \quad (c_E \cos \alpha_E - c_E^1 \sin \alpha_E^1) + (c_R \cos \alpha_R - c_R^1 \sin \alpha_R^1) \\ = (c_D \cos \alpha_D - c_D^1 \sin \alpha_D^1)$$

oder kürzer:

$$(\eta_E + \eta_E^1) + (\eta_R + \eta_R^1) = (\eta_D + \eta_D^1).$$

Es erscheinen so  $\alpha^1$  und  $c^1$  definirt durch die Beziehungen:

$$c^1 \cos \alpha^1 = c \frac{c^1}{c} \sin \alpha = (n^2 - 1) c \sin \alpha$$

$$c^1 \sin \alpha^1 = c \sin \alpha \tan \delta,$$

woraus:

$$39. \quad \tan \alpha^1 = \frac{\tan \delta}{n^2 - 1}, \quad c^1 = c \sin \alpha \sqrt{n^2 - 1 + \tan^2 \delta},$$

und die beiden Gleichungen in  $\xi$  und  $\eta$  fallen mit denen von Cauchy zusammen, sobald man für das erste Mittel

den Weltäther, also wegen  $\delta_E = 0$ ,  $n_E = 1$  sowohl für  $\xi_E^1$  als  $\eta_E^1$  den Werth Null substituirt, nichtsdestoweniger aber die gleichwerthigen  $\xi_R^1$  und  $\eta_R^1$  der unbeschränkten Willkür anheimstellt. — Die beiden weiteren Bedingungen Cauchy's sind nach dieser Einschränkung der ersten entweder überflüssig oder mit letzterer unvereinbar.

Heben wir jetzt zum Schluss die wichtigsten Resultate, welche die Untersuchung der neutralen Mittel ergeben hat, in möglichst bestimmter Weise heraus, so sind es etwa folgende:

Im Innern der neutralen Mittel, d. h. derjenigen, welche beim Uebergang des Lichtes weder die gespiegelte noch die gebrochene Welle in ihrer Phase verändern, ist die augenblickliche objective Intensität in jedem Punkte eine einfach periodische Function von Zeit und Lage. Nämlich:

$$\mu c^2 = \mu C^2 \cos^2 2\pi \left( \frac{t'}{T} + \frac{\delta}{\lambda} \right).$$

Dividirt man ferner den Ueberschuss der totalen subjectiven einfallenden Intensität über die entsprechende reflectirte durch die subjective Intensität des gebrochenen Lichtes, so ist dieses Verhältniss:

$$\frac{C_E^2 - C_R^2}{C_D^2} = \frac{J_E - J_R}{J_D} = \frac{\mu_D}{\mu_E}$$

von der Lage der Schwingungsebene des einfallenden Lichtes unabhängig, also für beide Hauptfälle das gleiche.

## B. Das elliptisch polarisirende Mittel.

Aus unserer Formulirung der für den zweiten Hauptfall geltenden Uebergangsbedingungen geht wohl zur Genüge hervor, dass insbesondere die in der Richtung des Lothes erfolgenden Stösse bei der Umwandlung der einfallenden in eine gespiegelte und gebrochene Transversalwelle eine bedeutsame Rolle spielen. Eine Hinzuziehung

hypothetischer Longitudinalstrahlen hat daher nur den Zweck, das Problem auf Kosten der sich zuerst und unwillkürlich aufdrängenden mechanischen Auffassung in eine Frage der blossen geometrischen Continuität umzustempeln.

Wenn dann Green von diesem Standpunkte aus (für isotrope Mittel) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen als sehr gross gegen die der Transversalwellen annimmt, so ist dagegen, vorausgesetzt, dass auch die lebendige Kraft der ersteren verschwindend klein ist, nichts einzuwenden als die Unmöglichkeit, sie aufzufinden. Green erhält dadurch für  $\tan \alpha^1_R$  und  $\tan \alpha^1_D$  (vergl. Formel 32) imaginäre Werthe, und so lässt sich in derselben setzen:

$$\tan (\alpha^1_R + \alpha^1_D) = \varepsilon \sqrt{-1},$$

wo  $\varepsilon$  eine sich aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ( $\omega^1_R$ ,  $\omega^1_D$ ) zusammensetzende, vom Einfallswinkel unabhängige Constante bedeutet.

Cauchy dagegen, welcher den Longitudinalwellen imaginäre Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zuweist und sie dadurch seitens des Mittels extingirt werden lässt, ist mit Recht der Vorwurf gemacht, dass man durch eine derartige Annahme jedes gewollte Resultat erzielen könne. Diejenigen daher, die mit uns ein ponderables Mittel als Aggregat von mit einander schwingenden Aether- und Körpertheilchen betrachten, dürfen in diesem Vorgehen Cauchy's ein stilles Zugeständniss erblicken, dass man mit einem völlig elastischen, aus reinem Aether construirten Mittel den Anforderungen der Erfahrung nicht immer genügt. Nach Cauchy's Rechnungen <sup>1)</sup> und zwar kraft der genannten Annahme soll es innerhalb der Schicht, deren Gleichung  $x = 0$  ist, sowie oberhalb und unterhalb derselben zu elliptischen Schwingungen kommen, die, unabhängig von den Transversalwellen, zu beiden Seiten im geometrischen Verhältniss ihrer Entfernung von der gedachten Ebne abnehmen und so allmählig verschwinden. Auch nach Cauchy werden  $\tan \alpha^1_R$  und  $\tan \alpha^1_D$  imaginär, aber es ist nahezu:

$$\tan (\alpha^1_R + \alpha^1_D) = \varepsilon \sin e \sqrt{-1},$$

wo wieder  $\varepsilon$  eine Constante bedeutet. Es ist dieselbe, wel-

1) Vergl. Eisenlohr, Pogg. Ann. Bd. 104, S. 355.

cher Jamin den Namen „Ellipticitätscoefficient“ gegeben hat. Die Formeln Green's und Cauchy's lassen sich demnach zusammenfassen in:

$$40. \quad R^p = - \frac{\cot(e + r) + k\sqrt{-1}}{\cot(e - r) - k\sqrt{-1}}.$$

Die so gewonnene Einführung des Imaginären bewirkt für das im zweiten Hauptfall einfallende Licht eine plötzliche und bleibende Verzögerung, während dagegen das im ersten Hauptfall einfallende nach wie vor mit dem Schwächungscoefficienten:

$$R^s = - \frac{\sin(e - r)}{\sin(e + r)},$$

also ohne Aenderung der Phase, reflectirt würde.

Zwischen dem Ellipticitätscoefficienten  $\epsilon$  und den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Transversalstrahlen hat sich bis jetzt noch kein von der Erfahrung bestätigter Zusammenhang auffinden lassen, und an eine etwaige Abhängigkeit von der Dispersion ist wohl kaum gedacht worden. Andererseits hat sich der Cauchy'sche Satz, dass man den relativen Ellipticitätscoefficienten für die Combination zweier Mittel nach Analogie des relativen Brechungscoefficienten aus den beiden absoluten müsse berechnen können, angesichts der Versuche Jamin's und Quincke's nicht bestätigt, und erblickt Ersterer <sup>1)</sup> in diesem Umstande eine eigenthümliche Complication, welche die Theorie Cauchy's nicht hätte voraussehen können.

Nach Quincke lässt sich, physikalisch genommen, das Ergebniss derselben auch dahin aussprechen, dass das der Einfallsebene parallel schwingende Licht in anderer Weise (bei den verwandten Erscheinungen an Metallen entweder mehr oder weniger tief) in das Mittel eindringt als das zur Einfallsebene senkrecht schwingende. Man könnte in der That in dem continuirlichen Uebergang der ponderablen Theilchen von dem Zustand der einseitigen Begränzung und Einwirkung seitens der übrigen zu dem Zustand ihrer allseitig gleichen Gebundenheit im Innern eine specifische Gränzschrift erblicken, in welcher die Oscillationen der Körper- und Aethertheilchen, sei es nach anderen

1) Ann. de chim. (3) t. XXXI, p. 182.

Gesetzen erfolgen als in grösserer Tiefe oder zwischen zwei bestimmten Gränzwerten variiren. Und wäre das Gesetz dieses Uebergangs bekannt, so würde sich nach dieser Anschauung auch wohl der Weg finden, der eine directe Lösung des Problems der Intensitäten und Phasen ermöglichte.

Ohne hier auf die Berechtigung der besprochenen Ansicht schon einzugehen, möchte ich doch hervorheben, dass es wenigstens vorläufig räthlich erscheint, das von Fresnel, Green und Cauchy eingeschlagene Verfahren nicht ohne Weiteres zu verlassen. Man gelangt nämlich auch von unseren Gleichungen aus durch blosses Complexsetzen einer gewissen Grösse zu Ausdrücken, welche der Erfahrung womöglich besser entsprechen als die von Green und Cauchy, und welche auch in theoretischer Hinsicht mindestens die gleiche Zulässigkeit beanspruchen wie jene.

### 1. Die äussere Spiegelung.

Gehen wir aus von der wohl feststehenden Thatsache, dass die elliptische Reflexion sich nicht bloss an der Oberfläche isotroper, sondern auch anisotroper Mittel vorfindet. Ist dann nach Gl. 31 der Schwächungscoefficient des Lichtes, welches im zweiten Hauptfall an der Oberfläche einer neutralen anisotropen Substanz reflectirt wird:

$$R = \frac{\cot(e+r) + \frac{\tan \delta}{n^2 - 1}}{\cot(e-r) - \frac{\tan \delta}{n^2 - 1}},$$

dann lässt sich der für ein elliptisch polarisirendes Mittel thatsächlich eintretende Gangunterschied am einfachsten dadurch hervorrufen, dass man setzt:

$$\delta = \delta_0 + \kappa \sqrt{-1},$$

oder sofern sowohl  $\delta_0$  als namentlich  $\kappa$  als kleine Grössen betrachtet werden dürfen, deren höhere Potenzen zu vernachlässigen sind:

$$41. \quad \tan \delta = \tan \delta_0 + \kappa \sqrt{-1}.$$

Demgemäss erhält man, wenn noch zur Abkürzung:

$$42. \quad \frac{\kappa}{n^2 - 1} = \varepsilon$$

geschrieben wird:

$$43. \quad R = - \frac{\left( \cot(e+r) + \frac{\tan \delta_0}{n^2 - 1} \right) + \varepsilon \sqrt{-1}}{\left( \cot(e-r) - \frac{\tan \delta_0}{n^2 - 1} \right) - \varepsilon \sqrt{-1}},$$

und ist  $\varepsilon$  ohne Zweifel eine Function des Orientirungswinkels zu den Axen.

Für isotrope Mittel, für welche  $\delta_0 = 0$  ist, würde  $\varepsilon$  eine Constante und man erhielte:

$$44. \quad R = - \frac{\cot(e+r) + \varepsilon \sqrt{-1}}{\cot(e-r) - \varepsilon \sqrt{-1}},$$

welcher Ausdruck mit dem von Green gegebenen übereinstimmt. Dazu erhält man zufolge Gl. 31b:

$$44b. \quad D = \frac{1}{n} \frac{\cot(e+r) + \cot(e-r)}{\cot(e-r) - \varepsilon \sqrt{-1}}.$$

Um also diejenigen isotropen Mittel, die der im zweiten Hauptfall reflectirten Welle eine Verzögerung ertheilen, unter die neutralen Mittel zu subsumiren, resp. die beiderseitigen Vorgänge durch eine und dieselbe Formel zu umfassen, bedarf es nur der Annahme, dass an der Gränze der ersteren aus irgend welchen Gründen der gebrochene Strahl eine von der Wellennormale verschiedene Richtung einschlägt, und dass der Winkel zwischen beiden imaginär werde.

Wenn man nun weiter auf die Uebergangsbedingungen selbst zurückgeht und dieselben (vergl. Gleichungen 30) schreibt:

$$45. \quad \begin{aligned} (1 - R) v &= D \omega n^2 \\ (1 + R) b &= D \beta \\ (1 - R^2) b v &= D^2 \beta \omega n^2, \end{aligned}$$

so nimmt wegen:

$$\beta = \frac{\cos r'}{\cos \delta} = \cos r - \sin r \tan \delta = \cos r - \sin r \cdot \varepsilon \sqrt{-1}$$

sowohl die Wellenbreite  $\beta$  als auch die reducirte Aethermasse  $\mu_D = m_D \cdot n^2$  die complexe Form an.

Will und muss man diese Verhältnisse auf eine gewisse eigenthümliche Anisotropie, sei es der Gränzschicht oder sei es des Innern zurückführen, so hat man jedoch hier ebenso

wenig an doppelte Brechung zu denken, wie etwa bei der Wellenfläche eines bewegten isotropen Mittels, für welches gleichfalls (und zwar in reeller Weise) Strahl und Wellennormale divergiren<sup>1)</sup>.

Der erste gethane Schritt nöthigt indess zu einem zweiten. Sollen wirklich die elliptisch polarisirenden isotropen Mittel sich den neutralen zu- und unterordnen, so verlangen die Grundsätze Fresnel's und Neumann's, dass die gewonnene Form der Gleichung der lebendigen Kräfte zugleich den einen wie den anderen Hauptfall umfasse. Wenn daher die Einführung von  $m_D = \beta \omega$  in die entsprechend vereinfachten Gleichungen 21 dieselben auf die Form bringt:

$$\begin{aligned} 1 + R &= D \\ 46. \quad (1 - R) b v &= D \beta \omega n^2 \\ (1 - R^2) b v &= D^2 \beta \omega n^2, \end{aligned}$$

so wird in ihnen der Wellenbreite  $\beta$  der nämliche complexe Werth zuzulegen sein wie in Gl. 45.

Da uns hier das Imaginäre zum ersten Male entgegentritt, so dürfte es vielleicht nicht überflüssig sein, die Bedeutung desselben für die Reflexionstheorie etwas ausführlicher zu begründen.

Berechnet man  $R$  und  $D$  aus den beiden ersten der Gl. 45 und 46, so werden beide complex, so dass sich schreiben lässt:

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 \sqrt{-1} \\ D &= D_1 + D_2 \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Demgemäss erhält man für den I. Hauptfall:

$$\begin{aligned} 1 + R_1 + R_2 \sqrt{-1} &= D_1 + D_2 \sqrt{-1} \\ 1 - R_1 - R_2 \sqrt{-1} &= \frac{n \cos r}{\cos e} (1 - \kappa \tan g r \sqrt{-1}) (D_1 + D_2 \sqrt{-1}) \\ &= \frac{n \cos r}{\cos e} \left[ (D_1 + D_2 \kappa \tan g r) + \sqrt{-1} (D_2 - D_1 \kappa \tan g r) \right]. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zerfallen in die folgenden vier:

$$\begin{aligned} 47. \quad 1 + R_1 &= D_1 & R_2 &= D_2 \\ 1 - R_1 &= \frac{n \cos r}{\cos e} (D_1 + D_2 \kappa \tan g r), & -R_2 &= \frac{n \cos r}{\cos e} (D_2 - D_1 \kappa \tan g r). \end{aligned}$$

1) Astr. Und. S. 58.

Aus ihnen lassen sich  $R_1, R_2$ ;  $D_1, D_2$  für sich als Functionen bekannter Grössen berechnen.

Analog hat man für den zweiten Hauptfall:

$$1 - R_1 - R_2 \sqrt{-1} = n(D_1 + D_2 \sqrt{-1})$$

$$1 + R_1 + R_2 \sqrt{-1} = \frac{\cos r}{\cos e} \left[ (D_1 + D_2 \kappa \tan r) + \sqrt{-1} (D_2 - D_1 \kappa \tan r) \right],$$

folglich nach der Trennung des Reellen und Imaginären:

$$1 - R_1 = n D_1 \quad - R_2 = n D_2$$

$$48. \quad 1 + R_1 = \frac{\cos r}{\cos e} (D_1 + D_2 \kappa \tan r), \quad R_2 = \frac{\cos r}{\cos e} (D_2 - D_1 \kappa \tan r).$$

Für  $\kappa = 0$  werden auch  $R_2 = D_2 = 0$ , und die Gränzgleichungen fallen mit den Fresnel'schen zusammen.

Man hat nun zu beachten, dass die  $R$  und  $D$  niemals isolirte, selbständige Grössen sind, sondern stets als Amplituden von Sinussoiden betrachtet werden müssen. Vergewärtigt man sich z. B. die Bedeutung der für den I. Hauptfall aufgestellten Continuitätsbedingung unter der allgemeinen, für jeden Zeitmoment gültigen Form:

$$\cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_E}{v} \right) + R \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_R}{v} \right) = D \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_D}{\omega} \right),$$

die für alle Punkte der Ebene  $x = 0$  erfüllt ist, so schreibt sich dafür jetzt:

$$\cos \frac{2\pi}{T} t' + (R_1 + R_2 \sqrt{-1}) \cos \frac{2\pi}{T} t' = (D_1 + D_2 \sqrt{-1}) \cos \frac{2\pi}{T} t'.$$

Das Zeichen des Imaginären ( $\sqrt{-1}$ ), das seinem Wesen nach die gänzliche Trennung der beiden Systeme der Amplituden erzwingt, kann und muss hier offenbar — im Einklang mit der Erklärung Fresnel's — durch  $\tan \frac{2\pi}{T} t'$  ersetzt werden. Man hat so:

$$\cos \frac{2\pi}{T} t' + R_1 \cos \frac{2\pi}{T} t' + R_2 \sin \frac{2\pi}{T} t' = D_1 \cos \frac{2\pi}{T} t' + D_2 \sin \frac{2\pi}{T} t'$$

und demgemäss neben der einfallenden Welle:

$$e_E = \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_E}{v} \right)$$

die beiden reflectirten:

$$e'_R = R_1 \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_R}{v} \right), \quad e''_R = R_2 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_R}{v} \right)$$

und die beiden gebrochenen:

$$e'_D = D_1 \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_D}{\omega} \right), \quad e''_D = D_2 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta_D}{v} \right).$$

In denjenigen Momenten also, in denen der von der einfallenden Welle ausgehende Impuls seinen Maximalwerth erreicht, ist die Bewegung auch in den entsprechenden beiden ersteren Wellen im Maximum, in den beiden letzteren dagegen gleich Null und umgekehrt. Diese letzteren Wellen erscheinen daher als die Folge einer selbständigen Reactionswirkung der Körpertheilchen.

Für die totale subjective Intensität der Superposition der reflectirten Wellen erhält man folgerichtig:

$$49. \quad J_R = R_1^2 + R_2^2 = R_0^2$$

und für den Phasenunterschied der resultirenden Welle gegen die erstgenannte Componente:

$$49_b. \quad \text{tang } \chi_R = \frac{R_2}{R_1}.$$

Analog werden die Ausdrücke für das durchgehende Licht, nämlich:

$$50. \quad J_D = D_1^2 + D_2^2 = D_0^2, \quad \text{tang } \chi_D = \frac{D_2}{D_1}.$$

Ersterer bezieht sich natürlich nur auf die Schwingungen der Aether- und nicht auf die der Körpertheilchen.

Die hier vorgetragene Auffassung gewinnt eine weitere Bestätigung, wenn man die beiden Quadratensummen:

$$R_1^2 + R_2^2, \quad D_1^2 + D_2^2$$

wirklich bildet und das zwischen ihnen bestehende Verhältniss untersucht. Man erhält nämlich durch Multiplication der je unter einander stehenden der vier Gleichungen 47 und 48:

$$1 - R_1^2 = \frac{n \cos r}{\cos e} (D_1^2 + D_1 D_2 \times \text{tang } r)$$

$$- R_2^2 = \frac{n \cos r}{\cos e} (D_2^2 - D_1 D_2 \times \text{tang } r),$$

folglich durch Summation:

$$1 - R_1^2 - R_2^2 = \frac{n \cos r}{\cos e} (D_1^2 + D_2^2),$$

oder:

$$m(1 - R_1^2 - R_2^2) = m_D n^2 (D_1^2 + D_2^2),$$

wenn nämlich:  $m_D = m \frac{\sin r \cos r}{\sin e \cos e}$  gesetzt wird. Da hier

die linke Seite die während der Zeit  $T$  seitens des Mittels aufgenommene (totale) lebendige Kraft repräsentirt, und da diese letztere sich nach wie vor auf Aether- und Körpertheilchen nach dem Verhältniss:

$$51. \quad n^2 - 1 = \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} = \frac{m' (D_1'^2 + D_2'^2)}{m (D_1^2 + D_2^2)}$$

vertheilt, so nimmt die Gleichung der totalen lebendigen Kräfte für die elliptisch polarisirenden Mittel dieselbe Form an wie für die neutralen, nämlich:

$$m(1 - R_0^2) = m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2,$$

und diese Beziehung ist den beiden Hauptfällen gemein.

Zu einem näheren Verständniss der Bedeutung des Imaginären gelangt man jedoch erst dann, wenn man von den totalen Intensitäten zu den augenblicklichen zurückgeht.

Setzt man in der That den obigen Entwicklungen entsprechend:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 \cos \chi_R, & R_2 &= R_0 \sin \chi_R, \\ D_1 &= D_0 \cos \chi_D, & D_2 &= D_0 \sin \chi_D, \end{aligned}$$

ferner zur Abkürzung:

$$52. \quad \frac{2\pi}{T} t' = \varphi, \quad \text{tang } \eta = \kappa \text{ tang } r,$$

so schreiben sich die vier Gleichungen 47 des I. Hauptfalles auch so:

$$\begin{aligned} (1 + R_0 \cos \chi_R) \cos \varphi &= D_0 \cos \chi_D \cos \varphi \\ R_0 \sin \chi_R \sin \varphi &= D_0 \sin \chi_D \sin \varphi \\ (1 - R_0 \cos \chi_R) \cos \varphi &= D_0 \frac{n \cos r}{\cos e \cos \eta} \cos (\chi_D - \eta) \cos \varphi \\ - R_0 \sin \chi_R \sin \varphi &= D_0 \frac{n \cos r}{\cos e \cos \eta} \sin (\chi_D - \eta) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Und man gewinnt durch resp. Addition sowie durch Multiplication der entstehenden Gleichungen:

$$\cos \varphi + R_0 \cos (\varphi - \chi_R) = D_0 \cos (\varphi - \chi_D)$$

$$53. \cos \varphi - R_0 \cos (\varphi - \chi_R) = D_0 \frac{n \cos r}{\cos e \cos \eta} \cos (\varphi - \chi_D + \eta)$$

$$\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2 (\varphi - \chi_R) = D_0^2 \frac{n \cos r}{\cos e \cos \eta} \cos (\varphi - \chi_D) \cos (\varphi - \chi_D + \eta).$$

Wir betrachten diese Beziehungen als die wirklichen, nur reelle Grössen enthaltenden Gränzbedingungen der hier in Rede stehenden Mittel.

Für den II. Hauptfall ergibt sich mittelst Transformation der Gleichungen 48 analog:

$$\cos \varphi - R_0 \cos (\varphi - \chi_R) = D_0 n \cos (\varphi - \chi_D)$$

$$54. \cos \varphi + R_0 \cos (\varphi - \chi_R) = D_0 \frac{\cos r}{\cos e \cos \eta} \cos (\varphi - \chi_D + \eta)$$

$$\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2 (\varphi - \chi_R) = D_0^2 \frac{n \cos r}{\cos e \cos \eta} \cos (\varphi - \chi_D) \cos (\varphi - \chi_D + \eta).$$

Sofern  $\chi_R$  und  $\chi_D$  Verzögerungen sind, welche die reflectirte und durchgehende Welle erfahren, so sind  $R_0 \cos (\varphi - \chi_R)$ , resp.  $D_0 \cos (\varphi - \chi_D)$  die augenblicklichen wirklichen Ausschläge eines Punktes hart an der Trennungsfläche. Mit Rücksicht hierauf würden sich die ersten der Gl. 53 und 54 auch unmittelbar gewinnen lassen. Die beiden andern ergäben sich dann aus der Combination jener mit der Gleichung der lebendigen Kräfte.

Diese letztere, auf welche wir hier das grösste Gewicht legen, und welche den beiden Hauptfällen gemeinsam ist, schreibt sich mit Rücksicht auf die Bedeutung von  $\eta$  auch so:

$$m \left[ \cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2 (\varphi - \chi_R) \right] = (m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2) \sqrt{1 + \kappa^2 \tan^2 r} \times \\ \cos (\varphi - \chi_D) \cos (\varphi - \chi_D + \text{arc tang } (\kappa \tan r))$$

oder bei Auflösung des rechts stehenden Productes:

$$55. \quad m \left[ \cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2 (\varphi - \chi_R) \right] \\ = (m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2) \left[ \cos^2 (\varphi - \chi_D) - \frac{1}{2} \tan \eta \sin 2 (\varphi - \chi_D) \right]$$

Es ist also die in jedem Augenblick durch die Gränzfläche in das Innere des Mittels eintretende lebendige Kraft eine doppelt periodische Function der Zeit. Dieselbe setzt sich zusammen aus einem Gliede von der Periode  $T$ , demselben, wie es neutralen Mitteln entsprechen würde, und aus einem Gliede von der Periode  $\frac{1}{2}T$ , welches letzteres die Gesamt-Intensität<sup>1)</sup> bald über die normale Grösse der neutralen Mittel emporhebt, bald unter dieselbe herabdrückt. Wird daher die vorstehende Gleichung über die Gesamtperiode  $T$  integrirt, so dass:

$$\begin{aligned} m \left[ \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi}{T} t' dt - R_0^2 \int_0^T \cos^2 \left( \frac{2\pi}{T} t' - \chi_R \right) dt \right] \\ = (m_D D_0^2 + m'_D D'_0{}^2) \left[ \int_0^T \cos^2 \left( \frac{2\pi}{T} t' - \chi_D \right) dt \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \kappa \operatorname{tang} r \int_0^T \sin \left( \frac{2\pi}{\frac{1}{2}T} t' - 2\chi_D \right) dt \right], \end{aligned}$$

so fällt dasselbe heraus, und man erhält (wie auf S. 38):

$$56. \quad m(1 - R_0^2) = m_D D_0^2 + m'_D D'_0{}^2$$

oder:

$$\frac{1 - J_R}{J_D} = \frac{\mu_D}{\mu}.$$

Die totale, während einer Schwingungsdauer in das Innere eindringende lebendige Kraft steht folglich zu der Stärke des einfallenden und reflectirten Lichtes in dem nämlichen Verhältniss wie bei den neutralen Mitteln.

Man erkennt aus dieser Darlegung, dass der Schwerpunkt der vorgetragenen Theorie eben in der Annahme

1) Den zeitlichen Verlauf derselben wolle man sich durch eine entsprechende Curve veranschaulichen.

jener doppelt periodischen Bewegung liegt. Ueber das etwa Auffällige der derselben zugesprochenen Schwingungsform will ich vorläufig nur bemerken, dass es die nämliche ist, auf welche die Erscheinungen der Metallreflexion und zwar mit innerer Nothwendigkeit verweisen.

Es drängt sich jetzt die Frage auf, ob die bezeichnete Schwingungsbewegung der Gränzschrift sich ungeändert allen folgenden Schichten mittheilt, oder ob dieselbe nur ihr eigenthümlich und daher bei tieferem Eindringen des Lichtes sich ändert, resp. verschwindet. Im ersteren Fall handelte es sich um eine Oberflächenwirkung, im letztern um eine Folge der ganzen inneren Constitution des Aggregates. Wird demzufolge die augenblickliche, durch ein Volumelement von der Lage  $\delta$  zur Zeit  $t$  hindurchgehende lebendige Kraft mit  $L$  bezeichnet, so dass:

$$L = \frac{m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2}{\cos \eta} \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi_D \right] \times \\ \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi_D + \eta \right],$$

so bleibt zu entscheiden, ob  $\eta$ , welches für die Gränzschrift den Werth  $\text{arc tang}(\kappa \text{ tang } r)$  hat, diesen Werth unabhängig von  $\delta$  behält, oder ob  $\eta$  und mit ihm  $\kappa$  eine Function ist von letzterem, beziehentlich von  $x$  und  $y$ .

Die Beantwortung dieser Frage ist nur möglich, wenn man die in Rede stehenden Vorgänge nicht bloss bei äusserer, sondern auch bei innerer Reflexion oder bei äusserer und innerer Brechung zugleich untersucht.

Bestimmen wir indess zuvor den näheren Zusammenhang zwischen  $R$ ,  $D$ , resp.  $J$ ,  $\chi$ , welche Grössen sich direct experimentell ergeben, und dem Einfallswinkel  $e$ .

Da die in den complex gewordenen Gränzgleichungen 45 und 46 enthaltenen reellen Beziehungen nunmehr erkannt sind, so lässt sich diese Bestimmung auf folgendem kurzem Wege erzielen.

I. Hauptfall. Man erhält zuvörderst unmittelbar:

$$R = - \frac{v\beta - \omega b}{v\beta + \omega b} = - \frac{\sin e (\cos r - \sin r \kappa \sqrt{-1}) - \cos e \sin r}{\sin e (\cos r - \sin r \kappa \sqrt{-1}) + \cos e \sin r}$$

oder :

$$57. \quad R = - \frac{\sin(e-r) - \sqrt{-1} \kappa \sin e \sin r}{\sin(e+r) - \sqrt{-1} \kappa \sin e \sin r}$$

und entsprechend:

$$57b. \quad D = \frac{2 \cos e \sin r}{\sin(e+r) - \sqrt{-1} \kappa \sin e \sin r}.$$

Beide Ausdrücke haben die Form:

$$58. \quad \frac{A + B \sqrt{-1}}{C + D \sqrt{-1}},$$

die sich durch Multiplication von Zähler und Nenner mit  $(C - D \sqrt{-1})$  umbildet in:

$$\frac{(A C + B D) + \sqrt{-1} (B C - A D)}{C^2 + D^2}.$$

Es folgt daraus gemäss den obigen Ausführungen (Gl. 49 und 50) für die Intensität:

$$59a. \quad J = \frac{(A C + B D)^2 + (B C - A D)^2}{(C^2 + D^2)^2} = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}$$

und für den Phasenunterschied:

$$59b. \quad \tan \chi = \frac{B C - A D}{A C + B D}.$$

Diesen Regeln zufolge leitet man ab:

Für das reflectirte Licht:

$$60. \quad J_R = \frac{\sin^2(e-r) + \kappa^2 \sin^2 e \sin^2 r}{\sin^2(e+r) + \kappa^2 \sin^2 e \sin^2 r}$$

$$\tan \chi_R = - \frac{\kappa \sin 2e \sin^2 r}{\sin(e-r) \sin(e+r) + \kappa^2 \sin^2 e \sin^2 r}.$$

Und für das durchgehende:

$$61. \quad J_D = \frac{4 \cos^2 e \sin^2 r}{\sin^2(e+r) + \kappa^2 \sin^2 e \sin^2 r}$$

$$\tan \chi_D = \frac{\kappa \sin e \sin r}{\sin(e+r)}.$$

Oder wenn man statt  $\kappa$  den Ellipticitätscoefficienten  $\varepsilon$  einführt, indem man setzt:

$$\kappa = \varepsilon (n^2 - 1),$$

so gewinnt man die zusammengehörigen Formen:

$$R = - \frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)} \frac{1 - \sqrt{-1} n \varepsilon \sin(e+r)}{1 - \sqrt{-1} n \varepsilon \sin(e-r)}$$

$$D = \frac{2 \cos e \sin r}{\sin(e+r) [1 - \sqrt{-1} n \varepsilon \sin(e-r)]},$$

folglich:

$$60b. \quad J_R = \frac{\sin^2(e-r)}{\sin^2(e+r)} \frac{1 + n^2 \varepsilon^2 \sin^2(e+r)}{1 + n^2 \varepsilon^2 \sin^2(e-r)}$$

$$\text{tang } \chi_R = - \frac{\varepsilon \sin 2e}{1 + \varepsilon^2 (n^2 - 1) \sin^2 e}$$

und :

$$61b. \quad J_D = \frac{4 \cos^2 e \sin^2 r}{\sin^2(e+r) [1 + n^2 \varepsilon^2 \sin^2(e-r)]}$$

$$\text{tang } \chi_D = n \varepsilon \sin(e-r).$$

Fasst man noch die wichtigeren Specialfälle in's Auge, so wird :

1) für  $e = 0$

$$J_R = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2, \quad \text{tang } \chi_R = 0,$$

$$J_D = \frac{4}{(n+1)^2}, \quad \text{tang } \chi_D = 0,$$

2) für  $e = P$ , gleich dem Polarisationswinkel, für welchen  $n = \text{tang } P$  :

$$J_R = \frac{(n^2-1)^2 (1+n^2 \varepsilon^2)}{(n^2+1)^2 + n^2 \varepsilon^2 (n^2-1)^2}, \quad \text{tang } \chi_R = - \frac{2 n \varepsilon}{(n^2+1) + n^2 \varepsilon^2 (n^2-1)}$$

$$J_D = \frac{4}{(n^2+1)^2 + n^2 \varepsilon^2 (n^2-1)^2}, \quad \text{tang } \chi_D = n \varepsilon \frac{n^2-1}{n^2+1},$$

3) für  $e = 90^\circ$

$$J_R = 1, \quad \text{tang } \chi_R = 0,$$

$$J_D = 0, \quad \text{tang } \chi_D = \varepsilon \sqrt{n^2 - 1}.$$

II. Hauptfall. Der obigen allgemeinen Gleichung 36. zufolge hat man :

$$R = - \frac{v b - \omega \beta}{v b + \omega \beta}, \quad D = \frac{2 \omega b}{v b + \omega \beta},$$

folglich hier :

$$62. \quad R = - \frac{\sin e \cos e - \sin r \cos r + \sqrt{-1} \kappa \sin^2 r}{\sin e \cos e + \sin r \cos r - \sqrt{-1} \kappa \sin^2 r}$$

$$D = \frac{2 \cos r \sin e}{\sin e \cos e + \sin r \cos r - \sqrt{-1} \kappa \sin^2 r}.$$

Man erhält daher :

$$63. \quad J_R = \frac{\sin^2(e-r) \cos^2(e+r) + \kappa^2 \sin^4 r}{\sin^2(e+r) \cos^2(e-r) + \kappa^2 \sin^4 r}$$

$$\text{tang } \chi_R = \frac{\kappa \sin 2e \sin^2 r}{\sin(e-r) \sin(e+r) \cos(e-r) \cos(e+r) - \kappa^2 \sin^4 r};$$

$$64. \quad J_D = \frac{4 \cos^2 e \sin^2 r}{\sin^2 (e+r) \cos^2 (e-r) + \kappa^2 \sin^4 r}$$

$$\text{tang } \chi_D = \frac{\kappa \sin^2 r}{\sin (e+r) \cos (e-r)}.$$

Oder bei Einführung von  $\varepsilon$ :

$$R = - \frac{\cot (e+r) + \sqrt{-1} \varepsilon}{\cot (e-r) - \sqrt{-1} \varepsilon}$$

$$D = \frac{1}{n} \frac{\cot (e+r) + \cot (e-r)}{\cot (e-r) - \sqrt{-1} \varepsilon}.$$

Folglich:

$$63b. \quad J_R = \frac{\text{tang}^2 (e-r) \frac{1 + \varepsilon^2 \text{tang}^2 (e+r)}{\text{tang}^2 (e+r) \frac{1 + \varepsilon^2 \text{tang}^2 (e-r)}{1 - \varepsilon^2 \text{tang} (e-r) \text{tang} (e+r)}}}{\text{tang}^2 (e+r) \frac{1 + \varepsilon^2 \text{tang}^2 (e-r)}{1 - \varepsilon^2 \text{tang} (e-r) \text{tang} (e+r)}}$$

$$= \frac{\varepsilon \left( \text{tang} (e-r) + \text{tang} (e+r) \right)}{1 - \varepsilon^2 \text{tang} (e-r) \text{tang} (e+r)}$$

$$= \frac{\varepsilon \sin 2e}{\cos (e-r) \cos (e+r) - \varepsilon^2 (n^2 - 1) \sin^2 r};$$

$$64b. \quad J_D = \frac{4 \cos^2 e \sin^2 r}{\sin^2 (e+r) \cos^2 (e-r)} \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \text{tang}^2 (e-r)}$$

$$\text{tang } \chi_D = \varepsilon \text{tang} (e-r).$$

Die sämmtlichen Ausdrücke sind die nämlichen wie bei Cauchy.

Für die oben genannten Incidenzen insbesondere hat man:

1) für  $e = 0$  dieselben Ausdrücke wie unter I;

2) für diejenige Incidenz  $e = P$ , bei welcher die Intensität des reflectirten Lichtes zu einem Minimum herabsinkt, und zwar als Bedingungsgleichung dafür:

$$e + r = 90^\circ, \quad n = \text{tang } P$$

und in Folge dessen:

$$J_R = \frac{\kappa^2}{4 n^2 + \kappa^2}, \quad \text{tang } \chi_R = - \frac{2 n}{\kappa}$$

oder auch:

$$J_R = \cos^2 \chi_R.$$

Ferner:

$$J_D = \frac{4}{4n^2 + \kappa^2}, \quad \text{tang } \chi_D = \frac{\kappa}{2n}$$

oder :

$$J_D = \frac{1}{n^2} \cos^2 \chi_D = \frac{1}{n^2} \sin^2 \chi_R.$$

Es ergibt sich nämlich :

$$\text{tang } \chi_R \text{ tang } \chi_D = -1,$$

d. h.

$$\chi_D = 90^\circ + \chi_R,$$

so dass die Differenz der beiden Phasenunterschiede des gebrochenen und reflectirten Lichtes  $90^\circ$  beträgt;

3) für  $e = 90^\circ$  dieselben Ausdrücke wie unter I. Auf die Bedeutung dieser Uebereinstimmung werde ich späterhin zurückkommen.

Dies vorausgesetzt, lasse man auf die in Rede stehende Platte unter dem Azimuth von  $45^\circ$  linear polarisirtes Licht fallen. Es werden dann die Componenten desselben senkrecht und parallel zur Einfallsebene, die im einfallenden Lichte gleich sind, im gespiegelten und gebrochenen ungleich geschwächt und ungleich verzögert. Die betreffenden Wellen sind daher im allgemeinen elliptisch polarisirt, und dadurch charakterisiren sich die Mittel mit complexer Wellenbreite vor den früher betrachteten neutralen, die eben niemals geradlinige Schwingungen in elliptische umwandeln.

Die Ellipticität einer Welle bestimmt sich erstens durch den Phasenunterschied  $\chi^p - \chi^s$ , den die beiden sie componirenden Wellen gegen einander gewonnen, und zweitens durch das Verhältniss der Amplitüden dieser letzteren  $\frac{R_0^p}{R_0^s}$ ,  $\frac{D_0^p}{D_0^s} \left( = \sqrt{\frac{J^p}{J^s}} \right)$ , welches Verhältniss bei den Messungen als trigonometrische Tangente eines gewissen Drehungswinkels des Ocularnicols auftritt.

Für den Phasenunterschied hat man :

$$\text{tang } (\chi^p - \chi^s) = \frac{\text{tang } \chi^p - \text{tang } \chi^s}{1 + \text{tang } \chi^p \text{ tang } \chi^s},$$

und in diesen Ausdruck sind die vorhin gefundenen Werthe einzusetzen.

Fasst man zunächst das reflectirte Licht in's Auge, so wird derselbe, sofern nicht etwa die höheren Potenzen von  $\varepsilon$  vernachlässigt werden dürfen, im allgemeinen complicirt. Es rührt das daher, weil die verglichenen beiden Hauptfälle I und II für mittlere Incidenzen einen ganz heterogenen Verlauf nehmen.

Man hat insbesondere diejenige Incidenz, für welche der Phasenunterschied  $\chi^p - \chi^s = 90^\circ$ , für welche also der Gangunterschied  $= \frac{\lambda}{4}$  ist und die elliptische Polarisation in die circulare übergeht, den Haupteinfallswinkel und die zugehörige Stellung des auf Dunkelheit gebrachten Nicols das Hauptazimuth genannt. Die Bedingungsgleichung für den Haupteinfallswinkel wäre sonach:

$$1 + \tan \chi^p \tan \chi^s = 0,$$

d. h.

$$\left[ \cos(e-r) \cos(e+r) - \varepsilon^2 (n^2 - 1) \sin^2 r \right] \left[ 1 + \varepsilon^2 (n^2 - 1) \sin^2 e \right] - \varepsilon^2 \sin^2 2e = 0.$$

Da der Erfahrung zufolge der Unterschied zwischen den neutralen und den elliptisch polarisirenden durchsichtigen Mitteln meistens nur schwach, folglich  $\varepsilon$  eine sehr kleine Grösse ist, so mag es vorab gestattet sein, die vierten Potenzen derselben zu vernachlässigen. Die vorstehende Gleichung schreibt sich dann auch so:

$$\cos(e-r) \cos(e+r) = \varepsilon^2 \left[ \sin^2 2e + (n^2 - 1) \sin^2 r \right]$$

oder:

$$1 - \tan^2 e \tan^2 r = \varepsilon^2 \left( 4 \frac{\sin^2 e}{\cos^2 r} + (n^2 - 1) \frac{\tan^2 r}{\cos^2 e} \right).$$

Wäre  $\varepsilon = 0$ , so entspräche dieselbe dem Brewster'schen Gesetze:

$$65. \quad 1 - \tan e_p \tan r_p = 0,$$

unter  $e_p$  und  $r_p$  die einander entsprechenden Polarisationswinkel verstanden. Werden nun die Hauptwinkel fortan analog durch  $e_H$ ,  $r_H$  bezeichnet, und begnügt man sich bei der Vergleichung derselben mit ersteren mit der oben bezeichneten Genauigkeitsgränze, so darf man in vorstehender Gleichung im Innern der rechts stehenden Klammer

unter  $e$  und  $r$  die Polarisationswinkel verstehen, also setzen:

$$\begin{aligned}\tan e_P = \cot r_P = n, \quad \sin^2 e_P = \cos^2 r_P = \frac{n^2}{n^2 + 1}, \\ \cos^2 e_P = \sin^2 r_P = \frac{1}{n^2 + 1}.\end{aligned}$$

Man erhält dann:

$$1 - \tan^2 e_H \tan^2 r_H = \varepsilon^2 \frac{n^4 + 4n^2 - 1}{n^2}.$$

Andererseits lässt sich setzen:

$$\begin{aligned}\tan e_H \tan r_H &= \tan(e_P + \delta e) \tan(r_P + \delta r) \\ &= \left( \tan e_P + \frac{\delta e}{\cos^2 e} \right) \left( \tan r_P + \frac{\delta r}{\cos^2 r} \right) \\ &= \tan e_P \tan r_P + \delta e \frac{\tan r}{\cos^2 e} + \delta r \frac{\tan e}{\cos^2 r}.\end{aligned}$$

Und wegen:

$$\sin e = n \sin r, \quad \cos e \cdot \delta e = n \cos r \cdot \delta r$$

kann man dafür schreiben:

$$\begin{aligned}\tan e_H \tan r_H &= \tan e_P \tan r_P + \delta e \left( \frac{1}{\cos^2 e} + \frac{1}{\cos^2 r} \right) \tan r \\ &= 1 + \frac{\delta e}{n^3} (n^2 + 1)^2.\end{aligned}$$

Man erhält so bei Vernachlässigung von  $(\delta e)^2$ :

$$-2 \frac{\delta e}{n^3} (n^2 + 1)^2 = \varepsilon^2 \frac{n^4 + 4n^2 - 1}{n^2},$$

und wenn definitiv  $e_P = P$ ,  $e_H = A$  geschrieben wird:

$$66. \quad P = A + \frac{1}{2} n \varepsilon^2 \frac{n^4 + 4n^2 - 1}{(n^2 + 1)^2}.$$

Mag also der Ellipticitätscoefficient positiv oder negativ sein, der Polarisationswinkel ist stets grösser als der Haupteinfallswinkel.

Für die experimentelle Untersuchung wird es indess in Anbetracht der Kleinheit von  $\varepsilon$  meistens genügen, schon die dritten Potenzen desselben ausser Acht zu lassen. Man hat dann:

$$\tan \chi_R^s = -\varepsilon \sin 2e, \quad \tan \chi_R^p = + \frac{\varepsilon \sin 2e}{\cos(e-r) \cos(e+r)},$$

folglich:

$$\text{tang}(\chi_R^p - \chi_R^s) = \varepsilon \sin 2e \frac{1 + \cos(e - r) \cos(e + r)}{\cos(e - r) \cos(e + r)}$$

oder auch, wenn zugleich  $\chi^p - \chi^s = d$  gesetzt wird:

$$67. \quad \text{tang} d_R = \varepsilon \frac{\sin 2e (\cos^2 e + \cos^2 r)}{\cos(e - r) \cos(e + r)}.$$

Man ersieht daraus, dass der Phasenunterschied  $d_R$  bei senkrechter Incidenz  $= 0$  ist, dass er mit wachsendem  $e$  zunimmt, für die Incidenz des Polarisationswinkels, der unter der zugelassenen Vernachlässigung mit dem Haupteinfallswinkel zusammenfällt, den Werth  $\frac{\pi}{2}$  erreicht und schliesslich bei streifendem Einfall bis zu  $\pi$  ansteigt.

Vergleicht man die hier gegebene Formel mit den Ausdrücken Green's und Cauchy's, die Beide  $\chi^s = 0$  nehmen, so ist zufolge Gl. 40:

$$\begin{aligned} \text{tang} d_R = \text{tang} \chi_R^p &= k \left( \text{tang}(e - r) + \text{tang}(e + r) \right) \\ &= \frac{k \sin 2e}{\cos(e - r) \cos(e + r)}. \end{aligned}$$

Während nun Quincke<sup>1)</sup>, welcher der Annahme Cauchy's ( $k = \varepsilon \sin e$ ) folgt, es noch in Anbetracht der Schwierigkeit der Messungen für zulässig hält,  $\text{tang}(e - r)$  gegen  $\text{tang}(e + r)$  zu vernachlässigen, macht namentlich<sup>2)</sup> Kurz darauf aufmerksam, dass die Formel Green's ( $k = \varepsilon$ ) der Erfahrung besser entspreche als die Cauchy's. Diese Verbesserung ist freilich nur eine geringfügige, aber sie deutet darauf hin, dass eine weitere und kräftigere Verlangsamung von  $k$  (als selbst etwa durch die Annahme  $k = \varepsilon \cos e$  zu erzielen wäre) die Uebereinstimmung von Beobachtung und Rechnung herbeiführen werde. Mit Rücksicht hierauf dürfte die von uns gestellte Forderung ( $k = \varepsilon (\cos^2 e + \cos^2 r)$ ) der Erfahrung am treuesten entsprechen.

Was ferner das Verhältniss  $\frac{R_0^p}{R_0^s}$  der wirklichen

1) Pogg. Ann. Bd. 128, S. 365.

2) Ebend. Bd. 108, S. 588.

Amplitüden der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Antheile der resultirenden Schwingungsbewegung betrifft, so hat man zufolge Gl. 60<sub>b</sub> und 63<sub>b</sub> für das Quadrat desselben:

$$68. \quad \frac{J_R^p}{J_R^s} = \frac{\cos^2(e+r) \frac{1+\varepsilon^2 \tan^2(e+r)}{1+n^2 \varepsilon^2 \sin^2(e-r)}}{\cos^2(e-r) \frac{1+\varepsilon^2 \tan^2(e-r)}{1+n^2 \varepsilon^2 \sin^2(e+r)}} \\ = \frac{\cos^2(e+r)}{\cos^2(e-r)} + \frac{\varepsilon^2 \sin 2e \sin 2r}{\cos^4(e+r)} \left( 1 - n^2 \cos^2(e-r) \cos^2(e+r) \right),$$

sofern wieder die vierten Potenzen von  $\varepsilon$  vernachlässigt werden. Dieser Ausdruck reducirt sich für senkrechte und streifende Incidenz auf die Fresnel'sche Form:

$$\frac{\cos^2(e+r)}{\cos^2(e-r)}$$

und vereinfacht sich für den Polarisationswinkel ( $e=P$ ) auf:

$$\frac{J_R^p}{J_R^s} = \varepsilon^2 \frac{(n^2+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} \frac{n^2}{n^2-1} \left( \frac{n^2+1}{n^2-1} \right)^2.$$

Nach Green und Cauchy dagegen, welche:

$$R_0^s = - \frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)}$$

setzen, wird dieses Intensitätsverhältniss:

$$\frac{J_R^p}{J_R^s} = \frac{\cos^2(e+r) + k^2 \sin^2(e+r)}{\cos^2(e-r) + k^2 \sin^2(e-r)} \\ = \frac{\cos^2(e+r)}{\cos^2(e-r)} + \frac{k^2 \sin 2e \sin 2r}{\cos^4(e-r)}.$$

Es gibt dasselbe ( $k=\varepsilon$  genommen) zwar für  $e=0$ ,  $e=P$ ,  $e=90^\circ$  dieselben Werthe, wie Gleichung 68, aber innerhalb der Intervalle von 0 bis P und von P bis  $90^\circ$  nehmen beide einen etwas verschiedenen Verlauf. So z. B. erhält das Green'sche Zusatzglied zur Fresnel'schen Formel durch unsern Factor:

$$1 - n^2 \cos^2(e-r) \cos^2(e+r)$$

innerhalb des ersten Intervalles das negative und innerhalb des zweiten das positive Zeichen. Leider liegen hinlänglich scharfe Messungen, welche diese Unterschiede an der Erfahrung zu vergleichen gestatten, zur Zeit nicht vor.

Wenden wir uns jetzt vom reflectirten Lichte zum gebrochenen, so gestalten sich hier die Verhältnisse einfacher.

Der Phasenunterschied  $\chi_D^p - \chi_D^s = d_D$  der beiden Schwingungsantheile wird zufolge Gl. 61<sub>b</sub> und 64<sub>b</sub>:

$$69. \quad \begin{aligned} \tan d_D &= \varepsilon \tan(e - r) \left( 1 - n \cos(e - r) \right) \\ &= -n \varepsilon \sin(e - r) \tan(e - r) \cot e. \end{aligned}$$

Derselbe steigt von der senkrechten Incidenz, für welche  $e = 0$  ist, allmähig an und sinkt dann für streifenden Einfall wiederum auf Null zurück.

Das zugehörige Intensitätsverhältniss wird:

$$70. \quad \begin{aligned} \frac{J_D^p}{J_D^s} &= \frac{1}{\cos^2(e - r)} \frac{1 + n^2 \varepsilon^2 \sin^2(e - r)}{1 + \varepsilon^2 \tan^2(e - r)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(e - r)} \left[ 1 - \varepsilon^2 \tan^2(e - r) \left( 1 - n^2 \cos^2(e - r) \right) \right]; \end{aligned}$$

es reducirt sich sowohl für  $e = 0$  als  $e = 90^\circ$  auf den ersten (Fresnel'schen) Factor.

Vergleichen wir auch diese Formeln mit den analogen von Green und Cauchy, so sind diese letzteren:

$$\begin{aligned} \tan d_D &= \tan \chi_D^p = k \tan(e - r) \\ \frac{J_D^p}{J_D^s} &= \frac{1}{\cos^2(e - r) + k^2 \sin^2(e - r)} = \frac{1}{\cos^2(e - r)} \left( 1 - k^2 \tan^2(e - r) \right). \end{aligned}$$

Um die hier hervortretende Divergenz recht scharf zu markiren, constatiere ich zunächst, dass übereinstimmend nach unseren beiderseitigen Theorien die in Rede stehenden elliptisch polarisirenden durchsichtigen Mittel (und ich füge hinzu: auch die Metalle) sich bei streifender Incidenz der reflectirten Welle gegenüber ganz als neutrale Mittel verhalten, sofern wie bei diesen:  $J_R^p = J_R^s = 1$  und  $\chi_R^p = \chi_R^s = 0$  ist. Während nun zwar für  $e = 90^\circ$  für die gebrochene Welle, für welche nach obigen Forderungen in jedem der beiden Hauptfälle eine Modification der Amplitude sowie eine Phasenverschiebung bestehen bleibt, eine solche Identität nicht vorliegt, werden doch für dieselbe das Amplitudenverhältniss  $\left( J_D^s : J_D^p = \cos^2(e - r) \right)$  und der Phasenunterschied  $(\chi_D^p - \chi_D^s = 0)$  beider Hauptfälle denen der neutralen Mittel gleich. Nach Cauchy dagegen würden beide sich in dem Masse, als die Incidenz zunimmt, von dieser Uebereinstimmung mit den neutralen Mitteln entfernen.

Die Formeln Cauchy's für das durchgehende Licht

sind von Quincke<sup>1)</sup> geprüft worden. Derselbe fasst die Resultate seiner Versuche dahin zusammen, dass die beobachteten Werthe von  $d_D$  ausserordentlich klein seien und der Mangel an Uebereinstimmung mit den berechneten Werthen in Beobachtungsfehlern seinen Grund haben könne. Jedoch bleibe es sehr auffallend, dass die beobachteten Werthe von  $d_D$  sowohl bei Substanzen mit positiver wie mit negativer Reflexion im dünneren Medium alle positiv seien. Letzteres erklärt sich wohl daraus, dass man, wenn wirklich bei streifender Incidenz  $d_D = 0$  ist, leicht Gefahr läuft, eine Spur Doppelbrechung durch Ungleichartigkeit der benutzten Gläser mit  $d_D$  zu verwechseln.

## 2. Die innere Spiegelung.

Behandeln wir jetzt die Vorgänge an der Hinterfläche einer als planparallel gedachten Platte, so treten an die Stelle der Gränzbedingungen 45 und 46 die folgenden:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} 1 + R_i &= D_i \\ (1 - R_i) \beta \omega n^2 &= D_i b v \end{aligned}$$

und:

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} (1 - R_i) \omega n^2 &= D_i v \\ (1 + R_i) \beta &= D_i b \end{aligned}$$

Die Wellenbreite  $\beta$  hat den Werth:

$$\beta = \cos r - \sin r \kappa' \sqrt{-1},$$

sofern wir vorläufig  $\kappa'$  von dem der Vorderfläche entsprechenden  $\kappa$  unterscheiden.

Beachtet man nun noch, dass sich die zweite dieser Gleichungen (und analog die vierte) auch so schreibt:

$$\begin{aligned} 1 - R &= D \frac{\cos e}{n \cos r} \frac{1}{1 - \kappa' \tan r \sqrt{-1}} \\ 71^a. \quad &= D \frac{\cos e}{n \cos r (1 + \kappa'^2 \tan^2 r)} \left( 1 + \kappa' \tan r \sqrt{-1} \right) \\ &= D \frac{\cos e \cos^2 \eta'}{n \cos r} \left( 1 + \kappa' \tan r \sqrt{-1} \right), \end{aligned}$$

so bringt man obige Gränzbedingungen für den I. Hauptfall ohne Mühe auf die Form:

---

1) Pogg. Ann. Bd. 128, S. 392.

$$\cos \varphi + R_0 \cos (\varphi - \chi_R) = D_0 \cos (\varphi - \chi_D)$$

$$71. \quad \cos \varphi - R_0 \cos (\varphi - \chi_R) = D_0 \frac{\cos e \cos \eta'}{n \cos r} \cos (\varphi - \chi_D - \eta')$$

und analog für den II. Hauptfall. Die beiden gemeinschaftliche Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte ist folglich:

$$\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2 (\varphi - \chi_R) = D_0^2 \frac{\cos e \cos \eta'}{n \cos r} \cos (\varphi - \chi_D) \cos (\varphi - \chi_D - \eta'), \quad 1)$$

oder wenn die Oscillationsamplitude der Körpertheilchen auf der einfallenden Welle durch  $E_0'$  bezeichnet und  $D_0 \cos \eta' = D_0$  gesetzt wird:

$$72. \quad \begin{aligned} & (m_E + m'_E E_0'^2) \cos^2 \varphi - (m_R R_0^2 + m'_R R_0'^2) \cos^2 (\varphi - \chi_R) \\ & = \frac{m_D}{\cos \eta'} D_0^2 \cos (\varphi - \chi_D) \cos (\varphi - \chi_D - \eta'). \end{aligned}$$

Und wenn man über die Zeit einer Schwingungsdauer integrirt, so kommt für die totalen lebendigen Kräfte:

$$74. \quad 1 - R_0^2 = \frac{\cos e}{n \cos r} D_0^2, \quad = \frac{\cos e \cos^2 \eta'}{n \cos r} D_0'^2,$$

welche Beziehung sich von der für die Vorderfläche geltenden durch den Factor  $\cos^2 \eta' = \frac{1}{1 + \kappa'^2 \tan^2 r}$  unterscheidet.

Fragen wir nun zunächst, wie sich die experimentellen Ergebnisse zu diesen Forderungen verhalten. Damit dieselben überhaupt mit der Erfahrung übereinstimmen, dazu ist nöthig, dass:

$$74. \quad \kappa' = -\kappa, \quad \eta' = -\eta$$

genommen werde. Denn dann erhält man für das reflectirte Licht:

1) Wollte man der zweiten der Gränzgleichungen vor ihrer Multiplication mit der ersten die Gestalt geben:

$$\cos (\varphi + \eta^1) - R_0 \cos (\varphi - \chi_R + \eta^1) = D_0 \frac{\cos e \cos \eta'}{n \cos r} \cos (\varphi - \chi_D),$$

so erhielte man die unsymmetrische Beziehung:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos (\varphi + \eta^1) - R_0^2 \cos (\varphi - \chi_D) \cos (\varphi - \chi_D + \eta') - R_0 \sin \chi_R \sin \eta \\ = D_0^2 \frac{\cos e \cos \eta'}{n \cos r} \cos^2 (\varphi - \chi_D). \end{aligned}$$

$$75. \quad R_i^s = \frac{\sin(e-r) + \sqrt{-1} \kappa \sin e \sin r}{\sin(e+r) + \sqrt{-1} \kappa \sin e \sin r},$$

$$R_i^p = \frac{\sin e \cos e - \sin r \cos r - \sqrt{-1} \kappa \sin^2 r}{\sin e \cos e + \sin r \cos r + \sqrt{-1} \kappa \sin^2 r},$$

folglich für die Intensitäten und das Intensitätsverhältniss die gleichen und für die Verzögerungen und den Phasenunterschied die entgegengesetzten Werthe wie bei den Vorgängen an der Vorderfläche. Nach Quincke, dessen Versuche diesen Satz bestätigen, kehrt sich in der That für eine sogenannte positive Substanz die elliptische Polarisation des gespiegelten Lichtes aus der positiven in die negative um, wenn die Reflexion erst an der äussern, dann an der inneren Fläche Statt hat. Ebenso umgekehrt für sogenannte negative Substanzen, und ist daher überhaupt bei dieser von Jamin gegebenen Eintheilung stets äussere Reflexion vorzusetzen.

Was ferner das gebrochene Licht betrifft, so erhält man die Beziehungen:

$$76. \quad D_i^s = 2 \frac{\sin e \cos r + \sqrt{-1} \kappa \sin e \sin r}{\sin(e+r) + \sqrt{-1} \kappa \sin e \sin r},$$

$$D_i^p = 2n \frac{\sin r \cos r + \sqrt{-1} \kappa \sin^2 r}{\sin e \cos e + \sin r \cos r + \sqrt{-1} \kappa \sin^2 r}$$

und daraus:

$$77. \quad (J_D^s) = \frac{4 \cos^2 r \sin^2 e (1 + \kappa^2 \tan^2 r)}{\sin^2(e+r) + \kappa^2 \sin^2 e \sin^2 r},$$

$$(J_D^p) = \frac{4 \cos^2 r \sin^2 e (1 + \kappa^2 \tan^2 r)}{\sin^2(e+r) \cos^2(e-r) + \kappa^2 \sin^4 r}.$$

Das Verhältniss derselben ist das gleiche wie für die Brechung an der Vorderfläche und daher mit Gleichung 70 identisch.

Für die Verzögerungen findet man:

$$77b. \quad \tan \chi_D^s = \frac{\kappa \cos e \sin^2 r}{\cos r \sin(e+r)} = \varepsilon \sin(e-r) \frac{\cos e}{\cos r}$$

$$\tan \chi_D^p = \frac{n \kappa \cos e \sin^2 r}{\cos r \sin(e+r) \cos(e-r)} = n \varepsilon \tan(e-r) \frac{\cos e}{\cos r}.$$

Folglich für den Phasenunterschied:

$$78. \quad \text{tang } d_D = \varepsilon \text{ tang } (e - r) \left( n - \cos (e - r) \right) \frac{\cos e}{\cos r}.$$

$$= + n \varepsilon \sin (e - r) \text{ tang } (e - r) \cot e.$$

Er hat den gleichen, aber entgegengesetzten Werth wie für die Brechung an der Vorderfläche.

Berechnet man noch die Summe von Verzögerungen, die ein nach zweimaliger Brechung aus einer planparallelen Platte austretender Strahl in Folge dieses Durchgangs erfährt, so findet man:

79.  $\chi^a_s + \chi^i_s = \chi^a_p + \chi^i_p = \varepsilon (n^2 - 1) \text{ tang } r = \kappa \text{ tang } r = \text{tang } \eta$ , und ist diese Verzögerung für beide Hauptfälle gleich. Lässt man daher auf die Vorderfläche unter beliebiger Incidenz und beliebigem Azimuth Licht auffallen, so wird die durchgehende Welle immer geradlinig polarisirt austreten, gerade so als wenn sie ein neutrales Mittel durchsetzt hätte.

Auch dieser Satz wird von der Erfahrung bestätigt. Es ist nämlich Quincke <sup>1)</sup> „trotz der grössten Sorgfalt“ niemals gelungen, bei sehr vollkommenen planparallelen Platten elliptische Polarisation der durchgegangenen Strahlen aufzufinden. Nach Cauchy dagegen, für welchen die Formel 64b, nämlich:

$$\text{tang } d_D = k \text{ tang } (e - r)$$

auch für die Hinterfläche ihre Gültigkeit behält, wenn  $k$  gegen  $-k$  vertauscht und unter  $e$  nach wie vor der Einfallswinkel verstanden wird, müsste  $d_D$  für den Uebergang aus Glas in Luft ( $e < r$ ) denselben Werth haben wie für den Uebergang aus Luft in Glas ( $e > r$ ).

Wenn wir uns hiernach zur oben angeregten Frage, ob nämlich die Umwandlung geradliniger Schwingungen in elliptische eine Wirkung der Oberfläche oder des inneren Gefüges ist, zurückwenden, so erscheint es zweckentsprechend, die behandelten Vorgänge kurz zu recapituliren.

Eine auf die Vorderfläche (d. h. auf die Fläche  $x=0$ ) fallende, einfach periodische Schwingungsbewegung zerfällt

1) l. c. S. 393.

an derselben in eine verzögerte, gleichfalls einfach periodische Bewegung, die sich in der gespiegelten Welle constant erhält, und in eine doppelt periodische Schwingungsbewegung, die als gebrochene Welle in das Innere eintritt. Dieselbe hat die Form:

$$80. \quad L = \frac{m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2}{\cos \eta} \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi_D \right] \times \\ \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi_D + \eta \right].$$

Sie erscheint dann an der Hinterfläche (d. h., da wir uns durch dieselbe ein zweites Cauchy'sches Coordinatensystem gelegt denken, wiederum an einer Fläche  $x = 0$ ) zufolge Gleichung 72 auf eine einfach periodische Bewegung reducirt. Wie diese Umwandlung der einen in die andere Form bewerkstelligt wird, darüber vermögen die Gränzgleichungen keinen Aufschluss zu geben. Man kann sich denken, dass  $\eta$  etwa nach dem Gesetze:

$$81. \quad \eta = \text{arc tang} \left( \kappa e^{-f^2 x} \text{tang } r \right)$$

mit der Entfernung  $x$  von der Trennungsfläche abnehme, so dass in Wirklichkeit schon in geringer Entfernung von derselben die secundäre Bewegung vernichtet wird.

An der Austrittsfläche ist, abgesehen vom entgegengesetzten Vorzeichen ( $\chi_R^i = -\chi_R$ ) der Verzögerung der reflectirten Welle, das Verhältniss derselben zur einfallenden genau das gleiche wie an der Eintrittsfläche. Diese Verzögerung erscheint wiederum bedingt durch eine doppelt periodische Bewegung der durchgehenden Welle, deren augenblickliche lebendige Kraft für einen Punkt von der Lage  $\delta$  durch den Ausdruck:

$$L_i = \frac{m^i_D D_0^2}{\cos \eta} \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t'' + \frac{\delta}{v} \right) - \chi \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t'' + \frac{\delta}{v} \right) - \chi + \eta \right]$$

repräsentirt wird. Die gebrochene Welle befindet sich im Weltäther, und hinsichtlich ihres weiteren Verlaufes ist eine doppelte Annahme möglich.

Man könnte glauben, dass die gegebene lebendige Kraft derselben sich in jedem Augenblick unverändert erhält, dass sie folglich wegen der Constanz von  $\eta$  nicht aufhört, eine doppeltperiodische Bewegung zu bleiben, die

während der Zeit einer Schwingungsdauer die Intensität  $D_0^2 = D_0^2 \cos^2 \eta$  entwickelt.

Es erscheint indess diese Ansicht schon darum unwahrscheinlich, weil sie ein gänzlich verschiedenes Verhalten der beiden Gränzflächen involviren würde. Supponiren wir vielmehr hier, wie an der Vorderfläche, eine unterhalb der Ebne  $x=0$  continuirlich verlaufende Oberflächenschicht, längs deren Dicke  $\eta$  nach dem nämlichen Gesetz, wie oben, mit der Entfernung von jener Ebne abnimmt, so geht die doppelt periodische Bewegung nach und nach in die einfach periodische über.

Zugleich verlangt aber dann die Erhaltung der Kraft, dass die totale, während der Dauer der Periode auf der Ebne  $x=0$  producirte lebendige Kraft sich ungeschwächt auf allen folgenden Schichten und selbst im freien Aether wiederfinde. Diese totale, constante Intensität ist aber nach wie vor:

$$83. \quad J_D = D_0^2 = \frac{D_0^2}{1 + \kappa^2 e^{-2\frac{1}{f}x} \tan^2 r},$$

so dass man für die beiden Hauptfälle anstatt der Intensitäten ( $J_D^s$ ), ( $J_D^p$ ) der S. 53, die sich hiernach als bloss scheinbare herausstellen, die beiden wirklichen erhält:

$$77a. \quad J_D^s = \frac{4 \cos^2 r \sin^2 e}{\sin^2(e+r) + \kappa^2 \sin^2 e \sin^2 r},$$

$$J_D^p = \frac{4 \cos^2 r \sin^2 e}{\sin^2(e+r) \cos^2(e-r) + \kappa^2 \sin^4 r},$$

welche, wie die der neutralen Mittel, die Gleichung:

$$84. \quad J_D J_D^i = (1 - J_R)^2$$

befriedigen, und deren Verhältniss das obige bleibt. — Eine ähnliche Gränzschiebt kommt übrigens, wie weiterhin gezeigt werden soll, selbst den neutralen Mitteln zu, wenn nämlich die Bedingungen der Totalreflexion erfüllt sind.

Bevor wir hiermit die Theorie der elliptisch polarisirenden Mittel abbrechen, möge noch in Kürze der allgemeine Fall besprochen werden, dass zwei verschiedene solcher Mittel sich in einer ebenen Trennungsfläche berühren. Wird hier zwar das bisher eingeschlagene Verfahren aus weiter zu erörternden Gründen unmöglich, so führe ich doch des

Gegensatzes wegen die Rechnung aus. Sie gibt wenigstens eine Zusammenfassung aller Formeln, die bisher für die Spiegelung und Brechung an einem optisch dichteren und dünneren Mittel gesondert erhalten wurden.

Das Brechungsverhältniss der Combination der beiden Mittel heisse nach wie vor  $n$ , und das erstere derselben sei in seiner Berührung mit dem zweiten charakterisirt durch den Gränzcoefficienten  $\kappa_1$ , das zweite in seiner Berührung mit dem ersten durch den Gränzcoefficienten  $\kappa_2$ . Ich nehme an, dass jedes Mittel für sich in Berührung mit dem Weltäther und bei äusserer Reflexion positiv sei, d. h. dass ihm dann ein positiver Ellipticitätscoefficient zukomme, und dass, wie auch der absolute Werth dieses letzteren durch die gegenseitige Beeinflussung der Gränzschichten modificirt werde, das Vorzeichen desselben auch bei der Combinirung das gleiche bleibe.

Dies vorausgesetzt, hätte man die Oscillationsamplitüden:

$$85. \quad C_R = - \frac{\sin(e-r) - \sqrt{-1}(\kappa_2 + \kappa_1) \sin e \sin r}{\sin(e+r) - \sqrt{-1}(\kappa_2 - \kappa_1) \sin e \sin r} C_E$$

$$C_D = \frac{2 \cos e \sin r (1 + \sqrt{-1} \kappa_1 \tan e)}{\sin(e+r) - \sqrt{-1}(\kappa_2 - \kappa_1) \sin e \sin r} C_E$$

und daraus z. B. die genäherten Werthe der Verzögerungen:

$$\tan X_R = - \left( \kappa_1 \sin e \cos r + \kappa_2 \cos e \sin r \right) \frac{2 \sin e \sin r}{\sin(e-r) \sin(e+r)}$$

$$\tan X_D = \left( \kappa_1 \sin e \cos r + \kappa_2 \cos e \sin r \right) \frac{\tan e}{\sin(e+r)}.$$

Ferner für den zweiten Hauptfall:

$$86. \quad C_R = - \frac{\sin(e-r) \cos(e+r) + \sqrt{-1}(\kappa_2 \sin^2 r + \kappa_1 \sin^2 e)}{\sin(e+r) \cos(e-r) - \sqrt{-1}(\kappa_2 \sin^2 r + \kappa_1 \sin^2 e)} C_E$$

$$C_D = \frac{2 \cos e \sin r (1 + \sqrt{-1} \kappa_1 \tan e)}{\sin(e+r) \cos(e-r) - \sqrt{-1}(\kappa_2 \sin^2 r - \kappa_1 \sin^2 e)} C_E$$

und die Phasenverschiebungen:

$$\tan X_R = \frac{(\kappa_1 \sin e \cos r + \kappa_2 \cos e \sin r) \sin e \sin r}{\sin(e-r) \sin(e+r) \cos(e-r) \cos(e+r)}$$

$$\tan X_D = \frac{(\kappa_1 \sin e \cos r + \kappa_2 \cos e \sin r) \sin e \sin r}{\sin e \cos e \sin(e+r) \cos(e-r)}.$$

Für  $\kappa_1 = 0$  fallen sämmtliche Ausdrücke mit den für

$$1 + R = D$$

$$1 - R = D n \frac{\cos r - \sin r \kappa \sqrt{-1}}{\cos e} \\ = D \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 e} - \sqrt{-1} \kappa \sin e}{\cos e}.$$

Und wenn statt  $n$  der reciproke Werth desselben  $\nu = \frac{1}{n}$  eingeführt wird, so schreibt sich die letztere:

$$1 - R = D \frac{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 e} - \sqrt{-1} \nu \kappa \sin e}{\nu \cos e}.$$

Nun sinkt  $\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 e}$  von  $e = 0$  bis  $e = \frac{1}{\nu}$  auf 0 herab, um bei noch grösseren Incidenzen imaginär zu werden. Man hat daher für alle zwischen  $e = \frac{1}{\nu}$  und  $e = 90^\circ$  liegenden Einfallswinkel:

$$1 - R = D \frac{\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} - \nu \kappa \sin e}{\nu \cos e} \sqrt{-1} = D \frac{u}{\nu} \sqrt{-1},$$

wenn nämlich noch zur Abkürzung die Function  $u$  eingeführt wird. Demnach schreiben sich die Gränzbedingungen beider Hauptfälle:

$$\begin{array}{ll} 87. & \text{I.} \quad 1 + R = D \\ & 1 - R = D \frac{u}{\nu} \sqrt{-1} \\ & \text{II.} \quad 1 - R = D \frac{1}{\nu} \\ & 1 + R = D u \sqrt{-1}. \end{array}$$

Verfolgen wir zunächst die ersteren. Durch Einführung von:

$$R = R_1 + R_2 \sqrt{-1}, \quad D = D_1 + D_2 \sqrt{-1}$$

zerfallen sie in folgende vier:

$$\begin{array}{ll} 88. & 1 + R_1 = D_1, \quad R_2 = D_2 \\ & 1 - R_1 = -D_2 \frac{u}{\nu}, \quad -R_2 = D_1 \frac{u}{\nu}. \end{array}$$

Man zieht daraus:

$$1 - R_1^2 - R_2^2 = 1 - R_0^2 = 0,$$

d. h. die in der einfallenden und reflectirten Welle enthaltenen (totalen) lebendigen Kräfte sind gleich.

Dasselbe Resultat ergibt sich für den II. Hauptfall mittelst der analogen Gleichungen:

$$89. \quad \begin{aligned} 1 + R_1 &= -D_2 u, & R_2 &= D_1 u \\ 1 - R_1 &= D_1 \frac{1}{v}, & -R_2 &= D_2 \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

Zugleich ersieht man, wie die um eine Viertelundulation von einander abstehenden Amplitüden  $R_1$  und  $R_2$ , resp.  $D_1$  und  $D_2$  mit dem Einfallswinkel variiren.

Setzt man ferner wie früher:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 \cos \chi_R & D_1 &= D_0 \cos \chi_D \\ R_2 &= R_0 \sin \chi_R & D_2 &= D_0 \sin \chi_D, \end{aligned}$$

so schreiben sich z. B. die Uebergangsbedingungen des I. Hauptfalles auch so:

$$90. \quad \begin{aligned} \cos \varphi + R_0 \cos(\varphi - \chi_R) &= D_0 \cos(\varphi - \chi_D) \\ \cos \varphi - R_0 \cos(\varphi - \chi_R) &= D_0 \frac{u}{v} \sin(\varphi - \chi_D). \end{aligned}$$

Durch ihre Multiplication erhält man die beiden Hauptfällen gemeinsame Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte, nämlich (für  $x = 0$ ):

$$91. \quad \cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R) = D_0^2 \frac{u}{v} \sin(\varphi - \chi_D) \cos(\varphi - \chi_D),$$

die sich, da  $v \cos e = \frac{n_1}{n_2} \cos e = \frac{n_1^2 \omega_1 \cos e}{n_2^2 \omega_2} = \frac{n_1^2 V_1}{n_2^2 \omega_2}$  gesetzt werden kann, auch auf die Formen bringen liesse:

$$\begin{aligned} V_1 n_1^2 \left[ \cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R) \right] &= V_2 n_2^2 \frac{1}{2} \tan \vartheta \sin 2(\varphi - \chi_D) \\ (m_E + m'_E E'_0{}^2) \cos^2 \varphi - (m_R R_0^2 + m'_R R'_0{}^2) \cos^2(\varphi - \chi_R) \\ &= (m_D D_0^2 + m'_D D'_0{}^2) \tan \vartheta \sin(\varphi - \chi_D) \cos(\varphi - \chi_D), \end{aligned}$$

sofern man dem Volumen  $V_1$  im ersten Mittel ein gewisses Volumen:

$$V_2 = \left( \sqrt{v^2 \sin^2 e - 1} \mp v x \sin e \right) \omega_2 \cot \vartheta$$

im zweiten Mittel als äquivalent zuordnet, welches von den Massen  $m_D$ ,  $m'_D$  erfüllt wird.

Vergleicht man nun vorstehende Beziehung mit der analogen früheren (Gl. 55), so unterscheidet sie sich von jener dadurch, dass für den „gebrochenen“ Antheil der Bewegung das frühere Glied  $\cos^2(\varphi - \chi_D)$  fehlt, und dass das in Bewegung gesetzte Volumen unter aussergewöhnlicher Form auftritt.

Ersteres hat zur Folge, dass bei der Integration

der lebendigen Kräfte über die Zeit einer Schwingungsdauer die totale Intensität des „gebrochenen“ Lichtes auf Null herabsinkt, und dass man daher wie oben erhält:

$$92. \quad 1 - R_0^2 = 0, \quad J_R = 1.$$

Letzteres dagegen weist darauf hin, dass auch die augenblicklichen Intensitäten desselben nicht in das Innere des zweiten Mittels eindringen, sondern ihre Oscillationen auf die Gränzschrift beschränken. Bevor wir indess hierauf zurückkommen, wenden wir uns zur Combination Activ-Neutral.

Die Gränzbedingungen des I. Hauptfalles schreiben sich für dieselbe nach Analogie der Gleichungen 71a:

$$1 + R = D$$

$$1 - R = D \frac{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 e}}{\nu (\cos e + \sin e \kappa \sqrt{-1})}$$

$$= D \frac{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 e}}{\nu \cos e (1 + \kappa^2 \tan^2 e)} (1 - \kappa \tan e \sqrt{-1})$$

und sonach innerhalb des Gebietes der Totalreflexion:

$$1 + R = D$$

$$1 - R = D \frac{u'}{\nu} (1 - \kappa \tan e \sqrt{-1}) \sqrt{-1}.$$

Hier besteht die rechte Seite der zweiten Gleichung, im Widerspruch zum Verhalten der Combination Neutral-Activ, aus einem imaginären nebst einem reellen Gliede, und kann daher  $R_0$  nicht  $= 1$ , also die Reflexion keine vollständige werden.

Um dieser Auffälligkeit zu entgehen, könnte man zunächst die Annahme machen, dass bei der Totalreflexion derjenige Unterschied der Schichten, welcher die elliptische Polarisation beim wirklichen Durchgang des Lichtes hervorruft, sich nicht bemerklich zu machen vermöge, dass folglich der frühere Phasenunterschied  $\eta$  verschwinde und damit die elliptisch polarisirenden Mittel für die behandelten Incidenzen sich nicht anders verhalten wie die neutralen Mittel. Dem entsprechend wäre zu setzen:

$$\tan \vartheta = 0, \quad V_2 = \beta_2 \omega_2 = \omega_2 \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}, \quad u = \frac{\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}}{\cos e}.$$

Was nun im Einklang hiermit die Tiefe des Eindringens des gebrochenen Lichtes betrifft, so schreibt sich das Schwingungsgesetz der durchgehenden Welle, welches im allgemeinen die Form hat:

$$\varrho = D \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x \cos r + y \sin r}{\omega_2} \right),$$

in Rücksicht auf den imaginären Werth von  $\cos r$  auch, so:

$$93. \quad \varrho = D \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} \sqrt{-1} + y \nu \sin e}{\omega_2} \right)$$

oder bei Auflösung der Klammer nach bekanntem Satze:

$$93^b. \quad \varrho = \frac{D}{2} \left\{ \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}} - \frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} \right) \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + y \frac{\sin e}{\omega_1} \right) \right. \\ \left. + \sqrt{-1} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}} - \frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} \right) \sin \frac{2\pi}{T} \left( t' + y \frac{\sin e}{\omega_1} \right) \right\},$$

wobei  $\omega_2 T = \lambda_2$ ,  $\omega_1 T = \lambda_1$  ist. Auf diesen Ausdruck bringt nun Cauchy noch die Fresnel'sche Regel:

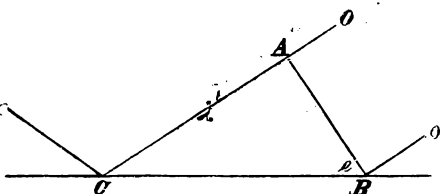
$$A \sqrt{-1} \sin \varphi = A \cos \varphi$$

zur Anwendung, so dass er erhält:

$$93^c. \quad \varrho = D e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}} \cos 2\pi \left( \frac{t'}{T} + y \frac{\sin e}{\lambda_1} \right).$$

In der That führt das von ihm eingeschlagene Continuitätsverfahren (Gränzbedingungen Gl. 19) mit Benutzung des vorstehenden Ausdrucks wenigstens für den I. Hauptfall zu den bezüglichen Intensitätsformeln zurück.

So erscheint denn nach Cauchy der Wurzelwerth  $\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} = \beta_2$  als Absorptions- oder Extinctionscoefficient der gebrochenen Welle, und wäre demselben aus diesem Grunde stets und ausschliesslich das negative Zeichen beizulegen. Und was diese Welle selbst betrifft, so seien in nebenstehender Figur OA und OB zwei soweit von einander abstehende Normalen der einfallenden Welle, dass  $AC = \lambda_1$  ist:



der lebendigen Kräfte über die Zeit einer Schwingungsdauer die totale Intensität des „gebrochenen“ Lichtes auf Null herabsinkt, und dass man daher wie oben erhält:

$$92. \quad 1 - R_0^2 = 0, \quad J_R = 1.$$

Letzteres dagegen weist darauf hin, dass auch die augenblicklichen Intensitäten desselben nicht in das Innere des zweiten Mittels eindringen, sondern ihre Oscillationen auf die Gränzschrift beschränken. Bevor wir indess hierauf zurückkommen, wenden wir uns zur Combination Activ-Neutral.

Die Gränzbedingungen des I. Hauptfalles schreiben sich für dieselbe nach Analogie der Gleichungen 71a:

$$1 + R = D$$

$$1 - R = D \frac{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 e}}{\nu (\cos e + \sin e \kappa \sqrt{-1})}$$

$$= D \frac{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 e}}{\nu \cos e (1 + \kappa^2 \tan^2 e)} (1 - \kappa \tan e \sqrt{-1})$$

und sonach innerhalb des Gebietes der Totalreflexion:

$$1 + R = D$$

$$1 - R = D \frac{u'}{\nu} (1 - \kappa \tan e \sqrt{-1}) \sqrt{-1}.$$

Hier besteht die rechte Seite der zweiten Gleichung, im Widerspruch zum Verhalten der Combination Neutral-Activ, aus einem imaginären nebst einem reellen Gliede, und kann daher  $R_0$  nicht  $= 1$ , also die Reflexion keine vollständige werden.

Um dieser Auffälligkeit zu entgehen, könnte man zunächst die Annahme machen, dass bei der Totalreflexion derjenige Unterschied der Schichten, welcher die elliptische Polarisation beim wirklichen Durchgang des Lichtes hervorruft, sich nicht bemerklich zu machen vermöge, dass folglich der frühere Phasenunterschied  $\eta$  verschwinde und damit die elliptisch polarisirenden Mittel für die behandelten Incidenzen sich nicht anders verhalten wie die neutralen Mittel. Dem entsprechend wäre zu setzen:

$$\tan \vartheta = 0, \quad V_2 = \beta_2 \omega_2 = \omega_2 \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}, \quad u = \frac{\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}}{\cos e}.$$

Was nun im Einklang hiermit die Tiefe des Eindringens des gebrochenen Lichtes betrifft, so schreibt sich das Schwingungsgesetz der durchgehenden Welle, welches im allgemeinen die Form hat:

$$\varrho = D \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x \cos r + y \sin r}{\omega_2} \right),$$

in Rücksicht auf den imaginären Werth von  $\cos r$  auch so:

$$93. \quad \varrho = D \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} \sqrt{-1} + y \nu \sin e}{\omega_2} \right)$$

oder bei Auflösung der Klammer nach bekanntem Satze:

$$93^b. \quad \varrho = \frac{D}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}} - \frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} \right) \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + y \frac{\sin e}{\omega_1} \right) \\ & + \sqrt{-1} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}} \right) \sin \frac{2\pi}{T} \left( t' + y \frac{\sin e}{\omega_1} \right) \end{aligned} \right\},$$

wobei  $\omega_2 T = \lambda_2$ ,  $\omega_1 T = \lambda_1$  ist. Auf diesen Ausdruck bringt nun Cauchy noch die Fresnel'sche Regel:

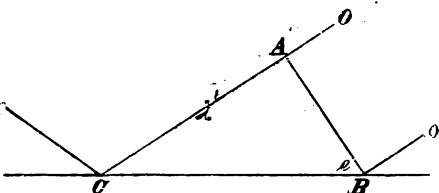
$$A \sqrt{-1} \sin \varphi = A \cos \varphi$$

zur Anwendung, so dass er erhält:

$$93c. \quad \varrho = D e^{\frac{2\pi}{\lambda_2} x \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}} \cos 2\pi \left( \frac{t'}{T} + y \frac{\sin e}{\lambda_1} \right).$$

In der That führt das von ihm eingeschlagene Continuitätsverfahren (Gränzbedingungen Gl. 19) mit Benutzung des vorstehenden Ausdrucks wenigstens für den I. Hauptfall zu den bezüglichen Intensitätsformeln zurück.

So erscheint denn nach Cauchy der Wurzelwerth  $\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} = \beta_2$  als Absorptions- oder Extinctionscoefficient der gebrochenen Welle, und wäre demselben aus diesem Grunde stets und ausschliesslich das negative Zeichen beizulegen. Und was diese Welle selbst betrifft, so seien in nebenstehender Figur OA und OB zwei soweit von einander abstehende Normalen der einfallenden Welle, dass  $AC = \lambda_1$  ist:



und die beiden Punkte der Trennungsfläche B und C sich stets in gleichen Schwingungszuständen befinden. Es ist dann :

$$\frac{\sin e}{\lambda_1} = \frac{1}{BC}.$$

Fällt also Licht unter den Bedingungen der Totalreflexion auf die Trennungsfläche auf, so wird sich nach der Vorstellung Cauchy's vor Herstellung des stationären Zustandes im optisch dünneren Mittel und zwar parallel der Trennungsfläche eine Schwingungsbewegung entwickeln, die periodisch ist nach BC, und deren Amplitude sich im geometrischen Verhältnisse des Abstandes von der Trennungsfläche ändert, d. h. mit diesem abnimmt. Wäre dann der stationäre Zustand einmal gebildet, so übertrüge sich die lebendige Kraft der einfallenden Welle mit Beihülfe der besprochenen (in Wirklichkeit nur dünnen) Schicht auf die reflectirte, ohne dass in das dünnere Mittel hinein Licht verloren ginge.

Unsererseits acceptiren wir diese Erklärung insoweit, als wir Gl. 93 durch Aufstellung unserer Gleichung der lebendigen Kräfte 91 für hinreichend interpretirt halten.

Wie indess weiterhin bei den Metallen (vergl. d. folg. Abschnitt, Theil 2), so erscheint auch hier die Auffassung Cauchy's (Gl. 93<sup>c</sup>), die eben auf einer zu freien Deutung des complex gewordenen Schwingungsgesetzes beruht, als keineswegs haltbar.

Wäre wirklich für unsere Combination I in Gl. 91 das Glied  $\nu \chi \sin e$  zu verwerfen, so machte der Phasenunterschied ( $\chi_R$ ) derselben für die Incidenz  $\sin e = \frac{1}{\nu}$  einen plötzlichen Sprung, und er wäre für zwei um unendlich wenig kleinere und grössere Einfallswinkel um einen endlichen Betrag verschieden. Gibt man das nicht zu, so kann aber auch andererseits unmöglich  $\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}$  zu dem völlig verschiedenen  $\nu \chi \sin e$  in das Coordinationsverhältniss der Function u eintreten, so lange man diesen Wurzelwerth als Extinctionscoefficienten auffasst. Und was die Combination II betrifft, so bleibt immer zu beachten, dass complexen

Beziehungen nur insoweit Bedeutung zuzumessen ist, als sich dieselben in annehmbare Bedingungen zwischen reellen Grössen umformen lassen. Wenn daher die Gränzgleichungen der elliptisch polarisirenden Mittel für innere und äussere Reflexion erst nach ihrer Umformung im wesentlichen identisch wurden, so wird man auch jetzt diese Identität festhalten und Combination II und I als nur durch das Vorzeichen von  $\kappa$  verschieden ansehen.

Gränzwirkung und Totalreflexion nähmen so in der gleichen dünnen Schicht ihren gemeinschaftlichen Ursprung. Und wenn bei jener die Wellenbreite  $\beta$  mit dem Winkel zwischen Strahl und Wellennormale complex wurde, während sie hier kraft des Brechungsgesetzes imaginär wird, so ist in beiden Fällen, physikalisch genommen, der Erfolg wenigstens qualitativ der gleiche.

Was nun zum Schluss die Amplitüden selbst betrifft, so erhält man entweder aus den Gränzgleichungen 87 direct oder durch Imaginärsetzen von  $\cos r$  in den Ausdrücken 57 und 62 die folgenden Werthe:

Für den I. Hauptfall:

$$94. \quad R = - \frac{-\nu \cos e + \sqrt{-1} (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}{\nu \cos e + \sqrt{-1} (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}$$

und daraus:

$$J_R = 1$$

$$94b. \quad \tan \chi_R = - \frac{2 \nu \cos e (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}{-\nu^2 \cos^2 e + (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)^2}$$

sowie:

$$95. \quad D = \frac{2 \nu \cos e}{\nu \cos e + \sqrt{-1} (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}$$

$$95b. \quad J_D = \frac{4 \nu^2 \cos^2 e}{\nu^2 \cos^2 e + (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)^2}$$

$$\tan \chi_D = - \frac{\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + (\nu \kappa \sin e)}{\nu \cos e}$$

Ebenso für den II. Hauptfall:

$$96. \quad R = - \frac{\cos e - \sqrt{-1} \nu (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}{\cos e + \sqrt{-1} \nu (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}$$

$$J_R = 1$$

$$96b. \quad \text{tang } \chi_R = - \frac{2 \nu \cos e (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}{\cos^2 e - \nu^2 (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)^2}$$

$$97. \quad D = \frac{2 \nu \cos e}{\cos e + \sqrt{-1} \nu (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}$$

$$J_D = - \frac{4 \nu^2 \cos^2 e}{\cos^2 e + \nu^2 (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)^2}$$

$$97b. \quad \text{tang } \chi_D = - \frac{\nu (\sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e)}{\cos e}.$$

Ist sonach das auf die Trennungsfläche auffallende Licht unter dem Azimuth von  $45^\circ$  linear polarisirt, so erhält man bezüglich der Componenten der entstehenden elliptischen Schwingungen und zwar für die reflectirte Welle:

$$\frac{R_{0p}}{R_{0s}} = 1,$$

$$98. \quad \text{tang } d_R = \frac{2 \nu \cos e w (\nu^2 - 1) (w^2 + \cos^2 e)}{(\nu^2 - 1)^2 w^2 \cos^2 e - \nu^2 (w^2 + \cos^2 e)^2},$$

wo der Abkürzung wegen gesetzt ist:

$$w = \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1} + \nu \kappa \sin e.$$

Da indess das  $\kappa$  enthaltende Glied wegen seiner Kleinheit nur für die Nähe des Gränzwinkels zur Wirkung kommt, so darf man es im allgemeinen vernachlässigen, so dass man einfacher hat:

$$98b. \quad \text{tang } d_R = - \frac{2 \nu \cos e \sin^2 e \sqrt{\nu^2 \sin^2 e - 1}}{1 - (\nu^2 + 1) \sin^2 e + 2 \nu^2 \sin^4 e}.$$

Analog erhält man für die „gebrochene“ Welle:

$$99. \quad \frac{D_{0p}}{D_{0s}} = \frac{1}{\sqrt{(\nu^2 + 1) \sin^2 e - 1}},$$

$$\text{tang } d_D = - \cot e \sqrt{1 - \frac{n^2}{\sin^2 e}}.$$

Die beiden ersteren Ausdrücke sind zwar schon von Fresnel gegeben, indess blieben die physikalischen Vorgänge der Totalreflexion ihrem Wesen nach bisher unerörtert. Ich glaube in Vorstehendem gezeigt zu haben, dass diese Vorgänge nahe verwandt und theilweise selbst iden-

tisch sind mit denen, welche die elliptisch polarisirenden Mittel beim wirklichen Durchgang des Lichtes bieten.

Auf die specifische Bedeutung des Ellipticitätscoefficienten kann ich erst später zurückkommen.

#### D. Das metallische Mittel.

Wenn ich nunmehr zu den metallischen Mitteln übergehe, so sehe ich zunächst wieder von einer etwaigen Gränzwirkung analog der unter B besprochenen ab und betrachte nur solche, für welche Strahl und Wellennormale — wenngleich sie eine complexe Richtung einschlagen — wie bei den neutralen durchsichtigen Mitteln in Coincidenz verbleiben. Die so gestellte Aufgabe lässt sich am besten auf folgendem Wege durchführen.

Wir entwickeln zunächst die Formeln Cauchy's, aber in einer mehr übersichtlichen Weise, als dies von Cauchy selbst geschehen ist. Dazu bietet die charakteristische Auffassung desselben, welche die Metalle wesentlich als absorbirende Mittel ansieht, ein bisher unbeachtet gebliebenes Hilfsmittel, die wirkliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der in das Metall eindringenden Wellen in ihrer vollen Abhängigkeit vom Einfallswinkel kennen zu lernen.

Sodann soll an der Hand der Theorie des Mitschwingens der Körpertheilchen gezeigt werden, dass Cauchy, wenn er den Brechungsindex der Metalle als das Verhältniss der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels complex setzte, nur einen ersten Schritt gethan hat, dem noch ein zweiter folgen muss. Sofern nämlich mit dem Index auch die brechende Kraft, d. h. der Ueberschuss des Quadrates desselben über die Einheit, als das Verhältniss der lebendigen Kräfte, in welchem die eindringende Wellenbewegung sich auf Körper- und Aethertheilchen vertheilt, gleichzeitig complex wird, so werden fortan — anders als in den früheren Abschnitten — die Amplituden der Körper- und die der Aethertheilchen je gesondert für sich zu behandeln sein.

Die Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion gehen, analog denen der Totalreflexion, und wie oben gezeigt, denen der elliptischen Reflexion der durchsichtigen Mittel, unmittelbar aus den Fresnel'schen Ausdrücken für die Amplitude des gespiegelten (und gebrochenen) Lichtes hervor, sofern man den Brechungswinkel durch Einfallswinkel und Brechungsverhältniss ausdrückt und letzteres als:

$$n = a + b\sqrt{-1}$$

complex setzt. Natürlich führt auch die directe Behandlung mittelst der vollständigen Cauchy'schen Continuitätsgrundsätze, wie sie Beer durchführte, zu dem gleichen Resultat; nur sind dann die wiederum auftretenden verschwindenden Strahlen, die völlig identisch sind mit denen der übrigen Mittel, aus den Endformeln zu entfernen. Will man dieselben umgehen, so genügt auch die Benutzung der Cauchy'schen Grundsätze für den I. Hauptfall, um zur Gleichung der lebendigen Kräfte und von dieser durch Combination mit der Fresnel-Neumann'schen Continuitätsbedingung zum gewünschten Ziele zu gelangen.

Da die weiteren Operationen fast nur mit complex gewordenen Coefficienten auszuführen sind, so erscheint es wesentlich, dazu gerade nur solche, deren physikalische Bedeutung unvermittelt erkannt wird, zu verwenden und ihnen vor anderen, Producten oder Quotienten von jenen, selbst auf Kosten der Eleganz den Vorzug zu geben.

Man gelangt zu diesen passendsten Werthen, wenn man, wie billig, die Interpretation des Schwingungsgesetzes einer Substanz mit complexem Brechungsverhältniss an die Spitze stellt. Hat dieses zunächst die Form:

$$e = A \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{\delta}{\omega} \right) = A \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x n \cos r + y n \sin r}{v} \right),$$

folglich für ein complexes  $n$ :

$$e = A \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x (a + b\sqrt{-1}) \cos r + y \sin e}{v} \right),$$

und setzt man in Anbetracht des Umstandes, dass auch  $\cos r$  complex wird:

$$100. \quad (a + b\sqrt{-1}) \cos r = p + q\sqrt{-1},$$

so hat man:

$$101. \quad \varrho = A \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x p + y \sin e}{v} + x \frac{q}{v} \sqrt{-1} \right)$$

oder wieder nach bekannter Umformung:

$$101_b. \quad \begin{aligned} \varrho = & \frac{A}{2} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda} q x} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q x} \right) \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x p + y \sin e}{v} \right) \\ & + \sqrt{-1} \frac{A}{2} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda} q x} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q x} \right) \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x p + y \sin e}{v} \right). \end{aligned}$$

Soweit ferner die Anwendbarkeit der Fresnel'schen Interpretation einer imaginären Amplitude auf vorstehenden Ausdruck erwiesen werden kann (vergl. Theil 2 dieses Abschnittes), lässt sich dafür mit Cauchy auch setzen:

$$101_c. \quad \varrho = A e^{\frac{2\pi}{\lambda} q x} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x p + y \sin e}{v} \right).$$

Die so von Cauchy angenommene „Extinction“ geht demnach vor sich in der Richtung des Lothes, und es erscheint  $q$  als „Extinctionscoefficient“. Setzt man schliesslich unter Einführung zweier neuer Constanten  $\nu$  und  $r'$ :

$$102. \quad p = \nu \cos r', \quad \sin e = \nu \sin r',$$

woraus:

$$103. \quad p^2 + \sin^2 e = \nu^2 = \frac{v^2}{\omega'^2}, \quad \tan r' = \frac{\sin e}{p},$$

so schreibt sich noch:

$$101_a. \quad \varrho = A e^{\frac{2\pi}{\lambda} q x} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x \cos r' + y \sin r'}{\omega'} \right).$$

Wir ziehen vorläufig zur Abkürzung und ohne jedes Präjudiz die kürzere Gleichung 101<sub>c</sub>, resp. 101<sub>a</sub> der längeren 101<sub>b</sub> vor. Jedenfalls beziehen sich beide, wenn man sie auch nicht für physikalisch identisch hält, auf parallele Wellen von gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Da  $r'$  und  $\omega'$  reell sind, so wird das Metall von Wellen durchsetzt, die ( $v = 1$  gedacht) mit einer Geschwindigkeit:

$$\frac{\omega'}{\cos r'} = \frac{1}{p}$$

durch die Richtung des Lothes hindurchziehen. Diese Wellen sind sonach durch ihren Extinctionscoefficienten  $q$  und durch den reciproken Werth ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit  $p$ , beide auf die Richtung des Lothes bezogen, völlig bestimmt.

$p$  und  $q$  lassen sich nun auch weiter als Functionen vom Einfallswinkel  $e$  und von den Constanten  $a$ ,  $b$  des Brechungsverhältnisses ermitteln. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} n \cos r &= \sqrt{n^2 - \sin^2 e} \\ p + q \sqrt{-1} &= (a + b \sqrt{-1}) \cos r \\ &= \sqrt{(a + b \sqrt{-1})^2 - \sin^2 e}, \end{aligned}$$

folglich:

$$p^2 - q^2 + 2 p q \sqrt{-1} = a^2 - b^2 - \sin^2 e + 2 a b \sqrt{-1},$$

woraus:

$$104. \quad p^2 - q^2 = a^2 - b^2 - \sin^2 e, \quad p q = a b,$$

und so erhält man:

$$105. \quad p^2 = \frac{1}{2} \left[ (a^2 - b^2 - \sin^2 e) + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2 e)^2 + 4 a^2 b^2} \right],$$

wo das positive Wurzelzeichen zu nehmen ist und sonach für  $e=0$  sich  $p=a$  ergibt.  $p$  erscheint so als Brechungsverhältniss ( $\nu_0$ ) für die normale Incidenz.

Da sich übrigens schreiben lässt:

$$p^2 = \frac{1}{2} (p^2 - q^2) + \frac{1}{2} (p^2 + q^2),$$

so leitet man noch ab:

$$106. \quad p^2 + q^2 = \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2 e)^2 + 4 a^2 b^2}.$$

Für das allgemeine Brechungsverhältniss  $\nu$  erhält man zufolge Gl. 103 und 104:

$$107. \quad \nu^2 - q^2 = a^2 - b^2.$$

$$108. \quad \nu^2 = \frac{1}{2} \left[ (a^2 - b^2 + \sin^2 e) + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2 e)^2 + 4 a^2 b^2} \right].$$

Man ersieht daraus, dass dieses Brechungsverhältniss bei den Metallen, wie bei den anisotropen durchsichtigen Mitteln, mit dem Einfallswinkel variirt; das Gleiche gilt vom „Extinctionscoefficienten“:

$$q = \frac{a b}{p}.$$

Wäre insbesondere, wie das am nächsten beim Silber der Fall scheint,  $a = 0$ , so hätte man:

$$\nu = \sin e, \quad q = b, \quad \sin r' = \frac{\sin e}{\nu} = 1, \quad r' = 90^\circ.$$

Noch auf Eins möchte ich hier aufmerksam machen. Wie den elliptisch polarisirenden durchsichtigen Mitteln, so kommt auch den metallischen Mitteln neben dem weiterhin zu besprechenden Haupteinfallswinkel ein Polarisationswinkel zu, der charakterisirt ist durch die Brewster'schen Relationen:

$$\nu = \tan P, \quad \cos^2 P = \frac{1}{\nu^2 + 1}, \quad \sin^2 P = \frac{\nu^2}{\nu^2 + 1}.$$

Ersetzt man nun in Gleichung 107  $q$  durch seinen Werth  $\frac{a b}{p}$ , so schreibt sich dieselbe auch so:

$$\nu^2 = a^2 - b^2 + \frac{a^2 b^2}{\nu^2 \cos^2 r'}.$$

Und da für die Incidenz des Polarisationswinkels  $\cos^2 r' = \sin^2 P = \frac{\nu^2}{\nu^2 + 1}$ , so ist das entsprechende Brechungsverhältniss geknüpft an die Auflösung der kubischen Gleichung:

$$109. \quad \nu_P^6 - \nu_P^4 (a^2 - b^2) - (\nu_P^2 + 1) a^2 b^2 = 0.$$

Die vorstehenden Ausdrücke vereinfachen sich natürlich auch dann, wenn  $b$  so klein genommen wird, dass schon die vierten Potenzen desselben vernachlässigt werden dürfen. In diesem Falle liesse sich innerhalb der Klammer:

$$b^2 \left( \frac{a^2}{\nu^2 \cos^2 r'} - 1 \right)$$

näherungsweise  $\nu = a$  setzen, und man erhielte dann die approximativen Beziehungen:

$$110. \quad \begin{aligned} \nu^2 &= a^2 + b^2 \tan^2 r' \\ p^2 &= a^2 \cos^2 r' + b^2 \sin^2 r'. \end{aligned}$$

Der Polarisationswinkel endlich wäre gegeben durch:

$$\nu^2 (\nu^2 - a^2) = b^2,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$a^2 (\nu_P^2 - a^2) = b^2,$$

so dass:

$$\nu_F^2 = a^2 + \frac{b^2}{a^2}.$$

Da dem Bisherigen zufolge  $\nu$  mit zunehmender Incidenz wächst, und da die Reflexion an Silber einen Werth  $a < 1$  gibt, so kann man mit Quincke die Frage aufwerfen, bei welcher Incidenz das Brechungsverhältniss des Silbers  $= 1$  werde. Setzt man zu dem Zwecke in Gleichung:

$$\nu^2 = a^2 - b^2 + \frac{a^2 b^2}{\nu^2 - \sin^2 e}$$

$\nu = 1$ , so erhält man:

$$111. \quad \cos^2 e = \frac{a^2 b^2}{1 - (a^2 - b^2)}.$$

Quincke<sup>1)</sup> hat in der That an gewissen dünnen durchsichtigen Silberblättchen mittelst der Interferentialmethode für senkrechte Incidenz ein kleineres Brechungsverhältniss als 1 erhalten; dasselbe wuchs bei Zunahme derselben und ging für einen gewissen Werth von  $e$  in 1 über. Die dort mitgetheilten numerischen Resultate sind indess insofern unbrauchbar, als Quincke, von den beiden unrichtigen Formeln Beer's:

$$q^2 = q_0^2 + \sin^2 e$$

$$\nu^2 = \nu_0^2 + \sin^2 e$$

ausgehend, nur die letztere verwerthet und neben dem Werthe von  $a$  den von  $b$  nicht angibt.

## 1. Die Intensitätsformeln für die Metalle.

Nach diesen Vorbemerkungen, deren Inhalt meines Wissens noch von Niemanden correct dargelegt ist, schreiten wir sofort zur Bildung der Intensitätsformeln, und zwar werden wir uns nicht, wie Cauchy und Beer, mit denen des gespiegelten Lichtes begnügen, sondern auch das durchgehende hinzuziehen. Die in Betracht kommenden Ausdrücke sind die nämlichen wie für neutrale durchsichtige Mittel, also die Gleichungen 22 und 36, sofern man in ihnen die folgenden Beziehungen substituirt:

---

1) Pogg. Ann. Bd. 119, S. 368; Bd. 120, S. 599.

$$\begin{aligned}\omega_E : \omega_D &= \sin e : \sin r \\ &= (a + b\sqrt{-1}) : 1 \\ \beta_E : \beta_D &= \cos e : \cos r \\ &= \cos e : \frac{p + q\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}.\end{aligned}$$

„

I. Hauptfall. Für denselben erhält man, wenn noch der wirkliche, bisher mit  $r'$  bezeichnete Brechungswinkel fortan unaccentuirt gelassen wird:

$$112. \quad R = \frac{\cos e - p - \sqrt{-1} q}{\cos e + p + \sqrt{-1} q}$$

oder:

$$R = - \frac{\sin(e - r) + \sqrt{-1} q \sin r}{\sin(e + r) + \sqrt{-1} q \sin r}$$

oder auch:

$$R = - \frac{\nu \sin(e - r) + \sqrt{-1} a b \tan r}{\nu \sin(e + r) + \sqrt{-1} a b \tan r},$$

je nachdem man eine Function von  $p$ ,  $q$ ,  $e$ , von  $q$ ,  $e$ ,  $r$  oder von  $\nu$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $r$  vorzieht.

Man erhält daraus z. B.:

$$113. \quad J_R = \frac{(\cos e - p)^2 + q^2}{(\cos e + p)^2 + q^2}$$

oder auch:

$$J_R = \frac{\sin^2(e - r) + q^2 \sin^2 r}{\sin^2(e + r) + q^2 \sin^2 r},$$

welch letzterer Ausdruck mit dem von Beer gegebenen übereinstimmt, wenn auch Beer über die Abhängigkeit des  $q$  von  $a$ ,  $b$ ,  $\nu$  es nicht zur Klarheit gebracht hat.

Setzt man noch nach dem Vorgange Cauchy's:

$$\frac{1 + J}{1 - J} = \tan f, \quad J = \frac{\tan f - 1}{\tan f + 1} = \tan(f - 45^\circ),$$

so erhält man z. B. in  $p$ ,  $q$ ,  $e$ :

$$114. \quad \cot f = \frac{2 p \cos e}{p^2 + q^2 + \cos^2 e}.$$

Der Phasenunterschied der resultirenden Welle wird entsprechend:

$$\begin{aligned}
 \text{tang } \chi_R &= \frac{2 q \cos e}{p^2 + q^2 - \cos^2 e} \\
 115. \quad &= \frac{2 q \cos e \sin^2 r}{\sin(e-r) \sin(e+r) + q^2 \sin^2 r} \\
 &= \frac{a b \sin 2 e \text{ tang } r}{v^2 \sin(e-r) \sin(e+r) + a^2 b^2 \text{ tang}^2 r}
 \end{aligned}$$

Für das gebrochene Licht erhält man endlich:

$$116. \quad D = \frac{2 \cos e}{\cos e + p + \sqrt{-1} q}$$

und dem entsprechend:

$$\begin{aligned}
 117. \quad J_D &= \frac{4 \cos^2 e}{(\cos e + p)^2 + q^2} = \frac{4 \cos^2 e \sin^2 r}{\sin^2(e+r) + q^2 \sin^2 r} \\
 \text{tang } \chi_D &= - \frac{q}{\cos e + p} = - \frac{q \sin r}{\sin(e+r)}.
 \end{aligned}$$

II. Hauptfall. Für denselben erhält man, wenn noch zur Abkürzung:

$$(a + b \sqrt{-1})^2 = v + w \sqrt{-1},$$

folglich:

$$a^2 - b^2 = v, \quad 2ab = w$$

gesetzt wird:

$$118. \quad R = \frac{p - v \cos e + \sqrt{-1} (q - w \cos e)}{p + v \cos e + \sqrt{-1} (q + w \cos e)}$$

oder auch bei Einführung vorstehender Werthe und Beachtung der Beziehungen 103 und 107:

$$R = \frac{[\text{tang } e \cot r - (a^2 - b^2)] \cos e + \sqrt{-1} q (1 - \sin 2e \cot r)}{[\text{tang } e \cot r + (a^2 - b^2)] \cos e + \sqrt{-1} q (1 + \sin 2e \cot r)}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt für die Intensität:

$$\begin{aligned}
 J_R &= \frac{(p - v \cos e)^2 + (q - w \cos e)^2}{(p + v \cos e)^2 + (q + w \cos e)^2} \\
 &= \frac{p^2 + q^2 - 2 \cos e (vp + wq) + (v^2 + w^2) \cos^2 e}{p^2 + q^2 + 2 \cos e (vp + wq) + (v^2 + w^2) \cos^2 e}
 \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
 vp + wq &= (a^2 - b^2)p + 2abq = p(a^2 - b^2 + 2q^2) \\
 &= p(p^2 - q^2 + \sin^2 e + 2q^2) \\
 &= p(\sin^2 e + p^2 + q^2)
 \end{aligned}$$

und:

$$v^2 + w^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Folglich kommt:

$$119. J_R = \frac{p^2 + q^2 - 2p \cos e (p^2 + q^2 + \sin^2 e) + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}{p^2 + q^2 + 2p \cos e (p^2 + q^2 + \sin^2 e) + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}$$

und einfacher, wenn wiederum  $J_R = \tan(g - 45^\circ)$  gesetzt wird:

$$120. \cot g = \frac{2p \cos e (\sin^2 e + p^2 + q^2)}{p^2 + q^2 + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}.$$

Ebenso ergibt sich diese Intensität aus Gl. 118<sub>b</sub> zu:

$$J_R = \frac{[\tan e \cot r - (a^2 - b^2)]^2 \cos^2 e + q^2 (1 - \sin 2e \cot r)^2}{[\tan e \cot r + (a^2 - b^2)]^2 \cos^2 e + q^2 (1 + \sin 2e \cot r)^2}$$

welcher Ausdruck bei Beachtung der Gl. 108 insbesondere für die Incidenz des Polarisationswinkels ( $e = P$ ) übergeht in:

$$121. J_R^P = \frac{q^2 (\cos^2 2e + q^2 \cos^2 e)}{(2\nu^2 - q^2)^2 \cos^2 e + q^2 (1 + 2\sin^2 e)^2}.$$

Allgemein dagegen wandelt er sich um in:

$$J_R = \frac{[\sin(e-r)\cos(e+r) - q^2 \cot e \sin^2 r]^2 \sin^2 e + q^2 \sin^4 r (1 - \sin 2e \cot r)^2}{[\sin(e+r)\cos(e-r) - q^2 \cot e \sin^2 r]^2 \sin^2 e + p^2 \sin^4 r (1 + \sin 2e \cot r)^2}.$$

Und bei Ausführung der angedeuteten Quadrationen und Benutzung der identischen Gleichung:

$$q^2 \sin^2 r [\sin^2 r (1 + \sin 2e \cot r)^2 - \sin 2e \sin(e+r) \cos(e-r)] \\ = q^2 \sin^2 r [\cot^2 e \sin^2(e+r) + \cos^2(e+r)] \sin^2 e$$

gewinnt man daraus die endgültige Form:

$$122. J_R = \frac{\cos^2(e+r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r}{\cos^2(e-r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r} \frac{\sin^2(e-r) + q^2 \sin^2 r}{\sin^2(e+r) + q^2 \sin^2 r}.$$

Dieselbe stimmt wieder mit der von Beer gegebenen überein, wenn aus letzterer die auf die verschwindenden Strahlen bezüglichen Glieder fortgelassen werden.

Für den Phasenunterschied erhält man:

$$\tan \chi_R = \frac{2(\nu q - w p) \cos e}{p^2 + q^2 - (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}.$$

Oder auch, da mittelst einer der obigen analogen Rechnung:

$$\nu q - w p = q \left( \sin^2 e - (p^2 + q^2) \right)$$

gefunden wird:

$$123. \quad \text{tang } \chi_R = \frac{2 q \cos e \left( \sin^2 e - (p^2 + q^2) \right)}{p^2 + q^2 - (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}.$$

Wollte man dagegen  $r$  und  $\nu$  einführen, so ergäbe sich der complicirte Ausdruck:

$$\text{tang } \chi_R = \frac{2 q \cos e (\sin^2 e \cos 2r + q^2 \sin^2 r)}{\nu^2 (\sin^2 e \cos^2 e - \sin^2 r \cos^2 r) - q^2 (\sin^2 r - 2 \sin^2 e \cos^2 e \cos 2r) + q^4 \cos^2 e \sin^2 r}.$$

Was endlich das durchgehende Licht betrifft, so findet sich:

$$124. \quad D = \frac{2 \cos e (a + b \sqrt{-1})}{(p + \nu \cos e) + \sqrt{-1} (q + w \cos e)}$$

und daraus mittelst bekannter Transformation:

$$(J_D) = \frac{4 \cos^2 e (a^2 + b^2)}{p^2 + q^2 + 2 p \cos e (p^2 + q^2 + \sin^2 e) + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}$$

$$125. \quad \text{tang } \chi_D = \frac{b [p - \cos e (a^2 + b^2)] - a q}{a [p + \cos e (a^2 + b^2)] + b q}$$

Wir führen noch neben  $(J_D)$  eine neue Grösse  $J_D$  ein, die defint sei durch die Beziehung:

$$J_D = (J_D) \frac{p^2 + q^2 + \sin^2 e}{a^2 + b^2}$$

und auf deren Bedeutung wir zurückkommen werden. Für diese folgt daher:

$$125b. \quad J_D = \frac{4 \cos^2 e (p^2 + q^2 + \sin^2 e)}{p^2 + q^2 + 2 p \cos e (p^2 + q^2 + \sin^2 e) + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}$$

$$= \frac{1}{\nu^2 [\cos^2 (e-r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r] [\sin^2 (e+r) + q^2 \sin^2 r]}$$

Wird nunmehr das einfallende Licht unter dem Azimuth von  $45^\circ$  polarisirt gedacht und der reflectirte elliptisch schwingende Strahl der Prüfung unterworfen, so ist wieder das Verhältniss der wirklichen Amplituden sowie die Differenz der oben betrachteten Phasenunterschiede festzustellen. Während nun jenes aus den schon gebildeten Ausdrücken ohne Weiteres abzuleiten ist, würde bezüglich der Gangunterschiede das gewöhnliche Verfahren zu Weiterungen führen, die sich folgendermaassen vermeiden lassen. Nach dem Vorgang von Eisenlohr setzen wir in der be-

züglichen, für neutrale Mittel geltenden Fresnel'schen Formel:

$$\frac{\cos(e + r)}{\cos(e - r)}$$

für  $\cos r$  und  $\sin r$  die Werthe:

$$\cos r = \frac{p + q\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}, \quad \sin r = -\frac{\sin e}{a + b\sqrt{-1}}.$$

Dieselbe wird dadurch:

$$126. \quad \frac{R^p}{R^s} = \frac{(p \cos e - \sin^2 e) + \sqrt{-1} q \cos e}{(p \cos e + \sin^2 e) + \sqrt{-1} q \cos e},$$

und man erhält für den Quotienten des Quadrates der wirklichen Amplitüden:

$$127. \quad \left(\frac{R_0^p}{R_0^s}\right)^2 = \tan^2 h = \frac{(p \cos e - \sin^2 e)^2 + q^2 \cos^2 e}{(p \cos e + \sin^2 e)^2 + q^2 \cos^2 e}$$

oder einfacher:

$$128. \quad \cos 2h = \frac{2p \cos e \sin^2 e}{(p^2 + q^2) \cos^2 e + \sin^4 e}.$$

Ersterer Ausdruck setzt sich bei Einführung von  $\nu$  und  $r'$  (welches wieder unaccentuirt geschrieben werden soll) um in:

$$129. \quad \frac{J_R^p}{J_R^s} = \frac{\cos^2(e + r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r}{\cos^2(e - r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r},$$

welch letzterer sich bei Ausführung der angedeuteten Division unmittelbar gefunden hätte.

Der jetzige Phasenunterschied, die Differenz der früheren, wird:

$$130. \quad \begin{aligned} \tan d_R &= \frac{2q \cos e \sin^2 e}{(p^2 + q^2) \cos^2 e - \sin^4 e} \\ &= \frac{1}{\nu^2} \frac{2q \cos e \sin^2 e}{\cos(e - r) \cos(e + r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r} \end{aligned} \quad 1)$$

1) Wäre insbesondere  $b$  und folglich auch  $q$  so klein, dass bereits das Quadrat desselben vernachlässigt werden dürfte, so liesse sich schreiben:

$$\tan d_R = \frac{b}{\nu^2} \frac{\sin 2e \sin e}{\cos(e - r) \cos(e + r)}.$$

Es würde dann der Gangunterschied der von Cauchy für die elliptisch polarisirenden durchsichtigen Mittel aufgestellten Forderung:

$$k = \epsilon \sin e$$

absolut genau entsprechen. (Vergl. S. 48.)

Was ebenso das gebrochene Licht betrifft, so erfährt die entsprechende Fresnel'sche Formel:

$$\frac{1}{\cos(e - r)}$$

folgende Umbildung:

$$131. \quad \frac{D^p}{D^s} = \frac{a + b \sqrt{-1}}{(p \cos e + \sin^2 e) + \sqrt{-1} q \cos e},$$

woraus:

$$132. \quad \begin{aligned} \frac{(J_D^p)}{J_D^s} &= \frac{a^2 + b^2}{(p \cos e + \sin^2 e)^2 + q^2 \cos^2 e} \\ \text{tang } d_D &= \frac{b(p \cos e + \sin^2 e) - a q \cos e}{a(p \cos e + \sin^2 e) + b q \cos e} \\ &= \frac{b \sin e \cos(e - r) - a q \cos e \sin r}{a \sin e \cos(e - r) + b q \cos e \sin r}. \end{aligned}$$

Oder bei Einführung von  $J_D^p$  (vergl. Gl. 125<sub>b</sub>) statt  $(J_D^p)$ :

$$132b. \quad \begin{aligned} \frac{J_D^p}{J_D^s} &= \frac{p^2 + q^2 + \sin^2 e}{(p \cos e + \sin^2 e)^2 + q^2 \cos^2 e} \\ &= \frac{1}{\nu^2 \cos^2(e - r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r}. \end{aligned}$$

Doch kehren wir einen Augenblick zu den Ausdrücken 128 und 130 für das reflectirte Licht zurück. Aus ihnen lassen sich Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\frac{1}{p}$  und „Extinctions-coefficient“  $q$  für eine beliebige Incidenz  $e$ , sobald nur die entsprechenden  $d$  und  $h$  bekannt sind, gesondert berechnen. Da die bezüglichlichen Operationen umständlich, aber ohne Schwierigkeit durchzuführen sind, so schreibe ich sofort die Resultate hin. Man findet:

$$133. \quad \begin{aligned} p &= \frac{\sin e \text{ tang } e \cos 2h}{1 - \cos d \sin 2h} \\ q &= \frac{\sin e \text{ tang } e \sin d \sin 2h}{1 - \cos d \sin 2h}, \end{aligned}$$

woraus:

$$p^2 + q^2 = \sin^2 e \text{ tang}^2 e \frac{1 + \cos d \sin 2h}{1 - \cos d \sin 2h}, \quad \frac{p}{q} = \sin d \text{ tang } 2h.$$

Und aus der Verbindung dieser Ausdrücke mit Gl. 107 und 104 erhält man unmittelbar die beiden charakteristischen Constanten  $a$  und  $b$  sowie das zugehörige  $\nu$ .

Bezeichnen wir nun fortan den Haupteinfallswinkel, d. h. denjenigen, für welchen der Phasenunterschied des gespiegelten Lichtes  $d_R = 90^\circ$  und der Gangunterschied  $= \frac{\lambda}{4}$  wird, mit  $A$  und das zugehörige Hauptazimuth mit  $H$ , dann wird entsprechend:

$$\begin{aligned} p_H &= \sin A \tan A \cos 2H \\ q_H &= \sin A \tan A \sin 2H \\ 134. \quad \frac{q_H}{p_H} &= \tan 2H. \end{aligned}$$

Nachdem so auch die Hauptincidenz definirt und in ihrer Beziehung zu den allgemeinen Variablen  $p$  und  $q$  festgestellt worden, dürfte es sich im Interesse der Uebersichtlichkeit empfehlen, auf die bisher gewonnenen Formeln einen kurzen Rückblick zu werfen und insbesondere die wichtigsten Specialfälle herauszuheben.

1) Für  $e = 0$  wird  $\nu = p = a$ ,  $q = b$  und daher:

$$J_R^s = J_R^p = \frac{(a-1)^2 + b^2}{(a+1)^2 + b^2}, \quad \tan \chi_R^s = \tan \chi_R^p = \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1}$$

$$J_D^s = J_D^p = \frac{4}{(a+1)^2 + b^2}, \quad \tan \chi_D^s = \tan \chi_D^p = -\frac{b}{a+1}.$$

2) Für  $e = A$  findet man bei Einführung von  $A$  und  $H$ :

$$J_R^s = \frac{\cos^4 A - 2 \sin^2 A \cos^2 A \cos 2H + \sin^4 A}{\cos^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A \cos 2H + \sin^4 A}$$

$$\tan \chi_R^s = -\frac{1}{2} \sin 2A \tan 2A \sin 2H;$$

$$J_R^p = \frac{(a^2 + b^2)^2 + \tan^4 A (1 - 2 \cos 2H)}{(a^2 + b^2)^2 + \tan^4 A (1 + 2 \cos 2H)}$$

$$\tan \chi_R^p = \frac{2 \cos 2A \sin 2H}{1 - (a^2 + b^2)^2 \cot^4 A}.$$

Ferner:

$$J_D^s = \frac{4 \cos^4 A}{\cos^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A \cos 2H + \sin^4 A}$$

$$\tan \chi_D^s = -\frac{\sin^2 A \sin 2H}{\cos^2 A + \sin^2 A \cos 2H};$$

$$J_D^p = \frac{4 \tan^2 A}{(a^2 + b^2)^2 + \tan^4 A (1 + 2 \cos 2H)}$$

$$\tan \chi_D^p = \frac{b [\sin^2 A \cos 2H - \cos^2 A (a^2 + b^2)] - a \sin^2 A \sin 2H}{a [\sin^2 A \cos 2H + \cos^2 A (a^2 + b^2)] + b \sin^2 A \sin 2H}$$

Selbstverständlich gehen für  $b = H = 0$  alle diese Ausdrücke in die für den Polarisationswinkel der neutralen Mittel geltenden über. Dabei erhält freilich  $\tan \chi_R^p$  den unbestimmten Werth  $\frac{0}{0}$ .

Was andererseits die Incidenz des Polarisationswinkels betrifft, so behält dieselbe zwar für den II. Hauptfall ihre volle theoretische Bedeutung, indess werden die bezüglichen Ausdrücke zu complicirt, und tritt dieselbe daher besonders der experimentellen Forschung gegenüber völlig gegen den Hauptwinkel zurück.

3) Für  $e = 90^\circ$  wird:

$$J_R^s = J_R^p = 1, \quad \tan \chi_R^s = \tan \chi_R^p = 0 \\ J_D^s = J_D^p = 0,$$

$$\tan \chi_D^s = -\frac{q}{p} = -q \tan r, \quad \tan \chi_D^p = \frac{b \cot r - a q}{a \cot r + b q},$$

so dass sich bei streifender Incidenz und zwar für reflectirtes Licht die Metalle verhalten wie die neutralen und elliptisch polarisirenden durchsichtigen Mittel, für gebrochenes Licht dagegen sich von letzteren dadurch unterscheiden, dass die Verzögerungen für beide Hauptfälle verschieden gross sind. Die Differenz derselben, der resultirende Phasenunterschied  $d_D$ , wird Gl. 132 zufolge:

$$\tan d_D = \frac{b}{a}.$$

Die Kenntniss der Hauptincidenz in ihren Elementen  $A$  und  $H$  ermöglicht nun ferner die verhältnissmässig einfachste und sicherste numerische Bestimmung der beiden Constanten  $a$  und  $b$  der Metallreflexion.

Wegen Gl. 104, woraus:

$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2 - \sin^2 A \\ = \sin^2 A \tan^2 A \cos 4 H,$$

ergibt sich nämlich zunächst für die Differenz der Quadrate von  $a$  und  $b$ :

$$135_a. \quad a^2 - b^2 = \tan^2 A (1 - 2 \sin^2 A \sin^2 2 H).$$

Und da andererseits auch ihr Product:

$$135_b. \quad 2 a b = \sin A \tan A \sin 4 H$$

in  $A$  und  $H$  gegeben ist, so genügen diese Gleichungen zur Einzelberechnung von  $a$  und  $b$ .

Diese Berechnung lässt sich indess mit Hülfe folgender Entwicklung noch vereinfachen. Es ist:

$$\begin{aligned}\sin^2 e - (p^2 + q^2) &= a^2 - b^2 - (p^2 - q^2) - (p^2 + q^2) = a^2 - b^2 - 2p^2 \\ [\sin^2 e - (p^2 + q^2)]^2 &= (a^2 - b^2)^2 - 4p^2(p^2 - q^2 + \sin^2 e) + 4p^4 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - 4p^2 \sin^2 e\end{aligned}$$

und analog:

$$[\sin^2 e + (p^2 + q^2)]^2 = (a^2 + b^2)^2 + 4q^2 \sin^2 e.$$

Folglich kommt:

$$\left( \frac{\sin^2 e - (p^2 + q^2)}{\sin^2 e + (p^2 + q^2)} \right)^2 = \frac{1 - 4p^2 \frac{\sin^2 e}{(a^2 + b^2)^2}}{1 + 4q^2 \frac{\sin^2 e}{(a^2 + b^2)^2}},$$

und da die linke Seite zufolge Gl. 134 für die Hauptincidenz  $= \cos^2 2A$  wird, so gewinnt sich daraus ein Ausdruck für  $a^2 + b^2$ , und so berechnen sich  $a$  und  $b$  mittelst der beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned}136. \quad a^2 - b^2 &= \tan^2 A (1 - 2 \sin^2 A \sin^2 2H) \\ a^2 + b^2 &= \tan^2 A \sqrt{1 - \sin^2 2A \sin^2 2H}.\end{aligned}$$

Wäre insbesondere (wie nahezu beim Silber)  $H=45^\circ$ , so hätte man:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= \tan^2 A \cos 2A \\ a^2 + b^2 &= -\tan^2 A \cos 2A.\end{aligned}$$

und daher  $a=0$ . — Für Azimuthalwerthe  $H=45^\circ + \beta$  bei gleichem  $A$  würden die entsprechenden  $a$  und  $b$  einander gleich.

Noch erwähne ich, dass aus den Gleichungen 103 und 133 sich ableitet:

$$v^2 = \sin^2 e \left( 1 + \frac{\tan^2 e \cos^2 2h}{1 - \cos d \sin 2h} \right).$$

Man hat also insbesondere für die Hauptincidenz, wenn das entsprechende Brechungsverhältniss mit  $N$  bezeichnet wird:

$$N^2 = \sin^2 A (1 + \tan^2 A \cos^2 2H),$$

oder auch:

$$137. \quad N^2 = \tan^2 A (1 - \sin^2 A \sin^2 2H)$$

als Analogon zum Brewster'schen Gesetze, das für  $b=q=H=0$ , also für durchsichtige Mittel, mit diesem selbst zusammenfällt.

Was nun zum Schluss die bezüglichen, anders gebau-  
ten Formeln von Cauchy und Eisenlohr betrifft, so  
setzen dieselben:

$$138. \quad a = \mathfrak{J} \cos \varepsilon, \quad b = \mathfrak{J} \sin \varepsilon.$$

Führt man ferner zwei neue Constanten  $c$  und  $u$  ein,  
die definirt sind durch die Beziehungen:

$$p = c \mathfrak{J} \cos (\varepsilon + u)$$

$$139. \quad q = c \mathfrak{J} \sin (\varepsilon + u)$$

$$\frac{p}{q} = \tan (\varepsilon + u), \quad p^2 + q^2 = c^2 \mathfrak{J}^2,$$

also:

$$\cos (\varepsilon + u) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \sin (\varepsilon + u) = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

so schliessen dieselben die folgenden Bedingungen in sich  
ein:

$$140. \quad \frac{\cos (\varepsilon - u)}{\cos (\varepsilon + u)} = \frac{p^2 + q^2 + \sin^2 e}{\mathfrak{J}^2}$$

$$\frac{\sin (\varepsilon - u)}{\sin (\varepsilon + u)} = \frac{p^2 + q^2 - \sin^2 e}{\mathfrak{J}^2}$$

und folglich:

$$\frac{\tan (\varepsilon - u)}{\tan (\varepsilon + u)} = \frac{c^2 \mathfrak{J}^2 - \sin^2 e}{c^2 \mathfrak{J}^2 + \sin^2 e}.$$

In der That gehen die von uns für Intensität und  
Phasenunterschied des reflectirten Lichtes aufgestellten sechs  
Ausdrücke dadurch in nachstehende über:

Für den ersten Hauptfall:

$$141. \quad \cot f = \cos (\varepsilon + u) \sin 2 \arctan \left( \frac{\cos e}{c \mathfrak{J}} \right)$$

$$\tan \chi^s = \sin (\varepsilon + u) \tan 2 \arctan \left( \frac{\cos e}{c \mathfrak{J}} \right)$$

und für den zweiten:

$$142. \quad \cot g = \cos (\varepsilon - u) \sin 2 \arctan \left( \frac{c}{\mathfrak{J} \cos e} \right)$$

$$\tan \chi^p = \sin (\varepsilon - u) \tan 2 \arctan \left( \frac{c}{\mathfrak{J} \cos e} \right).$$

Analog endlich für die resultirende Welle:

$$143. \quad \cos 2 h = \cos (\varepsilon + u) \sin 2 \arctan \left( \frac{\sin^2 e}{c \mathfrak{J} \cos e} \right)$$

$$\tan d_R = \sin (\varepsilon + u) \tan 2 \arctan \left( \frac{\sin^2 e}{c \mathfrak{J} \cos e} \right).$$

Und da dieselben sich mit den Eisenlohr'schen decken, so können zwischen den beiderseitigen Ableitungen nirgends Widersprüche vorliegen, was allerdings bezüglich der Arbeit von Beer mehrfach der Fall ist.

Die eigentliche Bedeutung der neuen Constanten  $c$  und  $u$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\text{tang}(\varepsilon - u)}{\text{tang}(\varepsilon + u)} = \frac{\sin 2\varepsilon - \sin 2u}{\sin 2\varepsilon + \sin 2u} = \frac{c^2 \vartheta^2 - \sin^2 e}{c^2 \vartheta^2 + \sin^2 e}.$$

Man entwickelt daraus:

$$c^2 \sin 2u = \frac{\sin 2\varepsilon \sin^2 e}{\vartheta^2}$$

$$c^2 \cos 2u = 1 - \frac{\cos 2\varepsilon \sin^2 e}{\vartheta^2}$$

und daher weiter:

$$c^2 (\cos 2u + \sqrt{-1} \sin 2u) = 1 - \sin^2 e \frac{(a^2 - b^2 - 2ab\sqrt{-1})}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$c^2 e^{2u\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\sin^2 e}{(a + b\sqrt{-1})^2}.$$

Es ist folglich, unter  $r$  den complexen Brechungswinkel verstanden:

$$\cos r = c e^{u\sqrt{-1}} = \frac{p + q\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}.$$

Und so erhalten die Uebergangsbedingungen die Gestalt:

$$\begin{aligned} & 1 + R = D \\ \text{I.} & (1 - R) \cos e = D c \vartheta e^{(\varepsilon + u)\sqrt{-1}} \\ 144. & (1 - R) = D \vartheta e^{\varepsilon\sqrt{-1}} \\ \text{II.} & (1 + R) \cos e = D c e^{u\sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

die freilich das unmittelbare Verständniss des Inhalts beeinträchtigt.

Quincke<sup>1)</sup> gibt den beiden letzten der Cauchy-Eisenlohr'schen Gleichungen die Näherungsform:

---

1) Pogg. Ann. Bd. 128, S. 551.

$$145. \quad \cos 2h = \cos 2H \sin 2 \arctan \frac{\sin e \tan g e}{\sin A \tan g A}$$

$$\tan g d_R = \sin 2H \tan g 2 \arctan \frac{\sin e \tan g e}{\sin A \tan g A},$$

indem er statt der variablen  $p$  und  $q$  die dem Haupteinfallswinkel entsprechenden einführt, also darin Grössen vernachlässigt, „die sich bei der Genauigkeit der angewandten Untersuchungsmethode nicht mehr feststellen lassen“.

## 2. Theorie der Dioptrik der Metalle.

Ist schon im ersteren Theil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Metallen als Function des Einfallswinkels mit Berücksichtigung einer Umformung, welche die Wirkung der Metalle als eine wesentlich „extinguirende“ betrachtet, gewonnen worden, so gehen wir jetzt auf die Gränzbedingungen selbst zurück. Wir geben denselben die Form:

$$146. \quad \begin{array}{ll} 1+R=D & 1-R=D(a+b\sqrt{-1}) \\ \text{I. } 1-R=D \frac{p+q\sqrt{-1}}{\cos e} & \text{II. } 1+R=D \frac{1}{\cos e} \frac{p+q\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} \end{array}$$

Was zunächst den I. Hauptfall betrifft, so zerfallen diese Gleichungen bei Einführung von:

$$R = R_1 + R_2 \sqrt{-1}, \quad D = D_1 + D_2 \sqrt{-1}$$

in die folgenden vier:

$$147. \quad \begin{array}{ll} 1+R_1=D_1 & R_2=D_2 \\ 1-R_1=\frac{D_1 p - D_2 q}{\cos e} & -R_2=\frac{D_1 q + D_2 p}{\cos e} \end{array}$$

Und wenn, wie früher:

$$\begin{array}{ll} R_1 = R_0 \cos \chi_R & D_1 = D_0 \cos \chi_D \\ R_2 = R_0 \sin \chi_R & D_2 = D_0 \sin \chi_D \end{array}$$

gesetzt, mit  $\cos \varphi$  multiplicirt und addirt wird, so fassen sich dieselben wieder in die beiden folgenden zusammen:

$$148. \quad \begin{array}{l} \cos \varphi + R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \cos(\varphi - \chi_D) \\ \cos \varphi - R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = \frac{D_0}{\cos e} [p \cos(\varphi - \chi_D) + q \sin(\varphi - \chi_D)]. \end{array}$$

Das Product derselben, die Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte, wird:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R) &= D_0^2 \frac{\cos(\varphi - \chi_D)}{\cos e} \left[ p \cos(\varphi - \chi_D) + q \sin(\varphi - \chi_D) \right] \\ 148^b. \quad &= D_0^2 \frac{p}{\cos e} \left[ \cos^2(\varphi - \chi_D) + \frac{q}{p} \sin(\varphi - \chi_D) \cos(\varphi - \chi_D) \right]. \end{aligned}$$

Sie ist ihrer wesentlichen Form nach mit der entsprechenden Gleichung (55) der elliptisch polarisirenden Mittel identisch, und bleibt daher das S. 40 Gesagte auch hier anwendbar. Bestimmt man wieder durch Integration über die Zeit einer Schwingungsdauer die totalen, während derselben in Bewegung gesetzten Intensitäten, so erhält man hier wie dort:

$$149. \quad 1 - R_0^2 = -\frac{p}{\cos e} D_0^2 = \frac{\nu \cos r}{\cos e} D_0^2 = \frac{m_D \nu^2}{m} D_0^2$$

oder:

$$1 - J_R = \frac{\mu_D}{\mu} J_D.$$

Diese Erwägungen sind freilich nicht geeignet, im Zähler des Verhältnisses  $\frac{q}{p}$ , dessen Analogon uns in Gleichung 55 als  $\tan \eta (= \kappa \tan r)$ , d. h. als trigonometrische Tangente eines gewissen Phasenunterschiedes, entgegentrat, einen eigentlichen Absorptionscoefficienten vermuthen zu lassen. Spielte ja dort überhaupt  $\kappa$  eine ähnliche Rolle wie hier  $q$ .

Man kann übrigens die vorstehenden Gleichungen auch auf die Form bringen:

$$\cos \varphi + R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \cos(\varphi - \chi_D)$$

$$\cos \varphi - R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\cos e} \cos(\varphi - \chi_D - \varepsilon - u)$$

$$\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R) = D_0^2 \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\cos e} \cos(\varphi - \chi_D) \cos(\varphi - \chi_D - \varepsilon - u),$$

wo  $\varepsilon$  und  $u$  die obigen Variablen von Eisenlohr sind, für welche:

$$\tan(\varepsilon + u) = \frac{q}{p}.$$

Was nun weiter den II. Hauptfall betrifft, so setze man zunächst zur Abkürzung:

$$\frac{p + q\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = c + d\sqrt{-1}.$$

Es haben dann  $c$ , resp.  $d$  die Werthe:

$$150. \quad c = \frac{p a + q b}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{q a - p b}{a^2 + b^2}$$

und ist:

$$c^2 + d^2 = \frac{p^2 + q^2}{a^2 + b^2}.$$

Mit Rücksicht hierauf erhalten die obigen Uebergangsbedingungen ohne Weiteres die Form:

$$151. \quad \begin{aligned} \cos \varphi - R_0 \cos(\varphi - \chi_R) &= D_0 \left[ a \cos(\varphi - \chi_D) + b \sin(\varphi - \chi_D) \right] \\ \cos \varphi + R_0 \cos(\varphi - \chi_R) &= \frac{D_0}{\cos e} \left[ c \cos(\varphi - \chi_D) + d \sin(\varphi - \chi_D) \right] \\ \cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R) &= \frac{D_0^2}{\cos e} \left[ a c \cos^2(\varphi - \chi_D) + b d \sin^2(\varphi - \chi_D) \right. \\ &\quad \left. + (b c + a d) \sin(\varphi - \chi_D) \cos(\varphi - \chi_D) \right]. \end{aligned}$$

Oder da:

$$a c - b d = p, \quad b c + a d = q,$$

so schreibt sich die rechte Seite der letzten Gleichung auch so:

$$D_0^2 \frac{p}{\cos e} \left[ \cos^2(\varphi - \chi_D) + \frac{q}{p} \sin(\varphi - \chi_D) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{b(qa - pb)}{p(a^2 + b^2)} \right];$$

sie unterscheidet sich folglich von der bezüglichen Gleichung des I. Hauptfalles durch das letzte, von der Zeit unabhängige Glied.

Dem entsprechend würden die totalen lebendigen Kräfte für den II. Hauptfall:

$$1 - R_0^2 = D_0^2 \frac{a c + b d}{\cos e},$$

wofür man, da:

$$a c + b d = \frac{(a^2 - b^2)p + 2abq}{a^2 + b^2} = p \frac{a^2 - b^2 + 2q^2}{a^2 + b^2} = p \frac{p^2 + q^2 + \sin^2 e}{a^2 + b^2},$$

schreiben könnte:

$$1 - J_R = \frac{p}{\cos e} (J_D) \frac{p^2 + q^2}{a^2 + b^2} = \frac{p}{\cos e} (J_D) \sqrt{1 + \frac{4q^2 \sin^2 e}{(a^2 + b^2)^2}}.$$

Stimmt nun freilich das hieraus folgende Verhältniss

$\frac{1-J_R}{(J_D)}$  mit den Ausdrücken 119 und 125 überein, so widerspricht es dem des I. Hauptfalles, d. h. der Gleichung 149, die wir als sonst allgemein, im Einklang mit der Entwicklung auf S. 11, auch hier für beide Hauptfälle <sup>1)</sup> in Anspruch nehmen. Wir werden demgemäss unter  $(J_D) = D_0^2$  nur eine Hilfsgrösse, die scheinbare Intensität (resp. Amplitude) zu verstehen haben und für die wirkliche Intensität, resp. Amplitude setzen:

$$152. \quad J_D = (J_D) \frac{p^2 + q^2 + \sin^2 e}{a^2 + b^2} = D_0^2 = D_0^2 \frac{ac + bd}{p},$$

so dass:

$$D_0 = D_0 \sqrt{\frac{p}{ac + bd}}.$$

Wollte man endlich die Uebergangsbedingungen auf die Form bringen:

$$\cos \varphi - R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi - \chi_D - \varepsilon)$$

$$\cos \varphi + R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = \frac{D_0}{\cos e} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{a^2 + b^2}} \cos(\varphi - \chi_D - u)$$

$$\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R) = D_0^2 \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\cos e} \cos(\varphi - \chi_D - \varepsilon) \cos(\varphi - \chi_D - u)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \tan u = d,$$

so würde zwar der constante Coefficient von  $D_0^2$  für beide Hauptfälle gleich, aber zu irgend welchen Folgerungen wäre dieselbe absolut ungeeignet.

Bevor wir nun den charakteristischen Constanten  $a$  und  $b$  des metallischen Mittels vom Standpunkte der Theorie des Mitschwingens der ponderablen Theilchen die ihnen zukommende Deutung geben, erscheint es nothwendig, uns zuvor mit der Cauchy-Beer'schen Anschauung von der Extinction der Metalle und dem Coefficienten dieser Extinction definitiv auseinander zu setzen. Ich werde zu dem Ende beweisen:

---

1) Für die Vorgänge an der Hinterfläche (s. u.) verhalten sich dieselben wieder gleich.

1) dass zwar die Cauchy-Beer'sche Vorstellung wenigstens für den I. Hauptfall zu den richtigen Uebergangsbedingungen hinführt,

2) dass sie aber nichtsdestoweniger auf einer zu engen Interpretation der Schwingungsbewegung nach einer Sinusoide mit complexem Argument beruht, und dass sie

3) im Gegensatz zu dieser mit dem Princip der Erhaltung der Kraft in Widerspruch tritt.

Zum Beweise des ersten Punktes machen wir Gebrauch von den Cauchy'schen Gränzbedingungen (Gl. 19):

$$\varrho_E + \varrho_R = \varrho_D, \quad \frac{d\varrho_E}{dx} + \frac{d\varrho_R}{dx} = \frac{d\varrho_D}{dx}, \quad x = 0$$

und geben den drei Wellen, ähnlich wie Beer, die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \varrho_E &= \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \Theta' + \frac{\delta_E}{\lambda} \right) \\ 153. \quad \varrho_R &= R_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \Theta' + \frac{\delta_R}{\lambda} - \gamma_R \right) \\ \varrho_D &= D_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q x} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \Theta' + \frac{\delta_D}{\lambda'} - \gamma_D \right). \end{aligned}$$

Man erhält alsdann nach Analogie von S. 9 für  $x=0$ :

$$\begin{aligned} \cos 2\pi \frac{t'}{T} + R_0 \cos 2\pi \left( \frac{t'}{T} - \gamma_R \right) &= D_0 \cos 2\pi \left( \frac{t'}{T} - \gamma_D \right) \\ \frac{\cos \alpha}{\lambda} \left[ \sin 2\pi \frac{t'}{T} - R_0 \sin 2\pi \left( \frac{t'}{T} - \gamma_R \right) \right] \\ &= D_0 \left[ \frac{\cos \alpha_D}{\lambda'} \sin 2\pi \left( \frac{t'}{T} - \gamma_D \right) + \frac{q}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{t'}{T} - \gamma_D \right) \right], \end{aligned}$$

wo noch zur Abkürzung  $\frac{t}{T} - \Theta' = \frac{t'}{T}$  gesetzt ist. Macht man nun weiter:

$$\alpha = e, \quad \alpha_D = r, \quad \lambda = \nu \lambda', \quad 2\pi \frac{t'}{T} = \varphi, \quad 2\pi \gamma = \chi,$$

so werden diese Gleichungen in der That mit den Gleichungen 147 identisch.

Was sodann den zweiten Punkt betrifft, so gelangte man S. 69 von der Ausgangsgleichung 101:

$$\varrho = D \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{x p + y \sin e}{v} + x \frac{q}{v} \sqrt{-1} \right)$$

zwar auf vollkommen strengem Wege zur Modification derselben:

$$e = \frac{D}{2} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx} \right) \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{xp + y \sin e}{v} \right) \\ + \sqrt{-1} \frac{D}{2} \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx} \right) \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \Theta + \frac{xp + y \sin e}{v} \right),$$

indess muss der von Beer gethane weitere Schritt, die Umformung derselben mittelst directer Anwendung der Fresnel'schen Regel, als willkürlich und als zu enge verworfen werden. Fasst man in der That die beiden Glieder dieses Ausdrucks nach bekanntem Verfahren in eine einzige Sinuscurve zusammen, indem man die Exponentialfunctionen zu den Amplitüden hinzuzieht, so erhält man ebenfalls streng richtig:

$$e = \frac{D}{2} \sqrt{\left( e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx} \right)^2 - \left( e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx} \right)^2} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{xp + y \sin e}{v} - \Delta \right) \\ \tan \frac{2\pi}{T} \Delta = \sqrt{-1} \frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx}}.$$

Nun ist aber der Wurzelwerth völlig unabhängig von  $qx$ , nämlich  $= 2$ , und so lässt sich der Cauchy-Beer'schen Auffassung:

$$e = D e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{xp + y \sin e}{v} \right)$$

mit unbestreitbar grösserem Recht die folgende:

$$e = D \cos \frac{2\pi}{T} \left\{ t' + \frac{xp + y \sin e}{v} - \arctan \left( \sqrt{-1} \frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda} qx} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda} qx}} \right) \right\}$$

entgegenstellen. Hier tritt aber an die Stelle einer Extinction eine constante Amplitude, der sich eine Phasenverschiebung zuordnet, welche nach Ebenen, die der Trennungsfläche parallel sind, variirt und allerdings wegen ihrer imaginären Beschaffenheit eine besondere Deutung erfordert.

Bekanntlich stellt sich Cauchy mit Umgehung des Princip's der Erhaltung der lebendigen Kräfte ganz auf den einseitigen Standpunkt einer blossen geometrischen Continuität. Nun lässt sich aber im Einzelnen darthun, dass

bei gebührender Berücksichtigung des genannten Princips zwischen den Consequenzen der Gleichungen 101 und 101c ein unlösbarer Widerspruch zu Tage tritt.

Setzt man, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, z. B.  $e=0$ , erhebt den Schwingungsausschlag  $\varrho$  der Gl. 101 ins Quadrat und integrirt für ein beliebiges  $x$  über die Zeit einer Schwingungsdauer, so erhält man nach Multiplication mit  $m n^2$  die totale lebendige Kraft eines Volumelementes von der Lage  $x$ . Diese letztere ist aber unabhängig von  $x$ , und sonach eine, wenn auch complexe, so doch absolut constante Grösse. Es ist eben diejenige lebendige Kraft, die während der Zeit  $T$  von aussen her eintritt und durch den Punkt  $x$  hindurchgeht. Dieser nämliche Betrag muss sich dann auch für einen einzelnen Moment auf einer beliebig gelegenen Strecke

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{a + b \sqrt{-1}}$$

ausgebreitet vorfinden, sofern sich für die Einheit der Wellenbreite die äquivalenten Räume verhalten wie die Wellenlängen. Kurz, Gl. 101 zufolge verhalten sich die Metalle bezüglich der totalen lebendigen Kraft genau wie die behandelten beiden Klassen der durchsichtigen Mittel. Wie übrigens dieser Forderung auch mit Umgehung des Imaginären entsprochen werden kann, wird jetzt nach Aufstellung der Beziehungen 148 und 151 wohl kaum noch Schwierigkeiten unterliegen.

Führt man dagegen die entsprechenden beiden Integrationen mit Gleichung 101c aus, so wird die totale lebendige Kraft eine Function der Lage  $x$ . Dabei stösst man noch auf eine neue eigenthümliche Schwierigkeit. Die elliptische Polarisirung der metallischen Mittel ist nämlich zufolge Abschnitt F für die verschiedenen Substanzen (besser gesagt: Wellenlängen) bald positiv, bald negativ, die zugehörige oscillatorische Bewegung also bald rechts-, bald linksläufig, und der Uebergang von der einen zur andern durch den Zeichenwechsel von  $q$  oder  $b$  (wie bei den activen durchsichtigen Mitteln durch den von  $\varepsilon$ ) bedingt. Dem entsprechend müsste es nach Cauchy Mittel geben, für welche die Schwingungsweite der oscillirenden Theilchen mit ihrer Entfernung von der Trennungsfläche entweder abnimmt oder zunimmt. Und während für die erstere Klasse in

unendlicher Entfernung von derselben überhaupt keine Lichtschwingungen bestehen könnten, erlangten diese für die andere Klasse unendlich grosse Amplituden.

Man könnte freilich diese Ausschläge sowie die vorhin berechnete totale lebendige Kraft auf die Aethertheilchen allein beziehen, und die Differenz zwischen dem, was dem Princip der Erhaltung der Kraft zufolge constant bleiben soll, und dieser berechneten Grösse der Einwirkung der Körpertheilchen zur Last legen. Dabei müsste gedachtes Princip in generellster Weise zugestanden werden, so dass sich für das Innere in jedem Querschnitt Aetherschwingungen in Körperschwingungen, Licht in Wärme u. s. w. umsetzen und verwandeln können. Würden so für ein negatives  $q$  die Aetherschwingungen nach und nach gedämpft und ihre Energie an den ponderablen Theil des dioptrischen Aggregates abtreten, so würden umgekehrt für ein positives  $q$  die Körpertheilchen Kraft abgeben und die Aethertheilchen dieselbe aufnehmen. Im ersteren Fall könnte das eine Erwärmung, im zweiten eine Erkältung des Gesamtmittels selbst zur Folge haben, oder wenn dieselbe Substanz gewisse Schwingungen nach Art des Glases, gewisse andere nach Art der Metalle reflectirte und durchliesse, so könnten bei gemeinsamem Auffallen beider im Innern des Mittels jene ersteren durch die letzteren verstärkt oder geschwächt werden.

Indess wie man sich auch die Sache zurechtlegt, theoretisch bleibt jede derartige Erklärung unbefriedigend, und bleibt stets die Nothwendigkeit bestehen, bei positivem  $q$  eine, wenn auch nicht unendliche, so doch mächtig angeschwollene lebendige Kraft durch Aufbietung einer zweiten negativen lebendigen Kraft auf das von aussen gegebene constante Maass zurückbringen zu müssen.

Wenn so Cauchy und mit ihm Beer und wohl die meisten der späteren Bearbeiter der Metallreflexion <sup>1)</sup> die

---

1) Vom älteren Neumann liegen wohl Formeln vor, die nach Jo ch m a n n (Pogg. Ann. Bd. 136, S. 561) gewisse Quincke'sche Interferenzerscheinungen ebensogut darstellen wie die von Cauchy,

in das Metall eindringende Wellenbewegung schon in der unmittelbaren Nähe der Gränzsichten ausgelöscht werden lassen, so geben sie die lebendige Kraft derselben von vornherein verloren. Und wenn man trotzdem fortfährt, die von Fresnel für die elastischen durchsichtigen Mittel aufgestellten Intensitätsformeln auf die zu unelastischen Massen gemachten Metalle zu übertragen, so vermissen wir dabei die Consequenz.

Unsererseits werden wir im Folgenden die Metalle als ebenso elastisch ansehen wie beispielsweise ein Stück Glas oder wie eine Schicht einer wasserhellen Flüssigkeit. Und wenn wir die Metalle als durch den complexen Brechungsindex :

$$n = a + b\sqrt{-1}$$

charakterisirt wissen wollen, so acceptiren wir zugleich auch alle Folgerungen aus dieser Anschauung, wie etwa die theoretische Möglichkeit einer inneren Reflexion und eines Austrittes der Welle nach zweimaliger Brechung aus einer beliebig dicken (planparallelen) Platte u. s. w., Erscheinungen, deren mathematische Seite nach wie vor durch die beiden Gleichungen:

$$R_i = -R, \quad DD_i = 1 - R^2$$

ausgedrückt wird. Dabei halten wir selbstverständlich bei dem Gedanken an die Erhaltung einer von aussen gegebenen lebendigen Kraft im Innern eines Metalles auch die Vorstellung einer Umwandlung ihrer ursprünglichen Schwingungsform in eine beliebige andere aufrecht, wie man das ja auch bei durchsichtigen Mitteln zu thun gezwungen ist. Und eben in der Leichtigkeit, mit der sich diese Umwandlung in der metallischen Gränzsicht in Folge einer durch ungleichphasiges Zusammenschwingen von Aether- und Körpertheilchen sich entwickelnden Reibung vollzieht, erblicken wir den einzigen durchschlagenden Unterschied zwischen Metallen und durchsichtigen Mitteln.

Dies vorausgesetzt, thun wir jetzt denjenigen Schritt,

---

aber Neumann hat die Begründung derselben bisher nirgendwo veröffentlicht.

der zum vollen Abschluss der Theorie der Metallreflexion nothwendig ist, den aber Cauchy um desshalb nicht thun konnte, weil er die Mitschwingungen der Körpertheilchen ignorirte. Setzte Cauchy das Brechungsverhältniss der Metalle in seiner doppelten Eigenschaft als Verhältniss der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels sowie als Verhältniss der äusseren und inneren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten complex, so setzen wir nunmehr auch die aus ihm zu bildende brechende Kraft ( $n^2 - 1$ ) als das Verhältniss der lebendigen Kräfte der Körper- und Aethertheilchen gleichzeitig complex. Wir haben sonach nicht bloss:

$$154. \quad n = \frac{\sin e}{\sin r} = \frac{v}{\omega} = a + b \sqrt{-1}$$

sondern auch:

$$155. \quad n^2 - 1 = \frac{m' D'^2}{m D^2} = a^2 - b^2 - 1 + 2ab \sqrt{-1}.$$

Wird nun, wie wir gesehen,  $D$  complex, so zugleich auch  $D'$ , und daher werden wir schreiben können:

$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2 \sqrt{-1} \\ D' &= D'_1 + D'_2 \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

so dass kommt:

$$n^2 - 1 = \frac{m'}{m} \frac{(D'_1 + D'_2 \sqrt{-1})^2}{(D_1 + D_2 \sqrt{-1})^2}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung einen Augenblick:

$$n^2 - 1 = s \frac{r' + s' \sqrt{-1}}{r + s \sqrt{-1}} = s \frac{(r' r + s' s) + \sqrt{-1} (s' r - r' s)}{r^2 + s^2},$$

folglich:

$$\begin{aligned} r' &= D_1'^2 - D_2'^2, & s' &= 2 D'_1 D'_2, \\ r &= D_1^2 - D_2^2, & s &= 2 D_1 D_2, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus der Identificirung mit Gleichung 155:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= s \frac{r' r + s' s}{r^2 + s^2} \\ &= \frac{m'}{m} \frac{(D_1'^2 - D_2'^2)(D_1^2 - D_2^2) + 4 D'_1 D'_2 D_1 D_2}{(D_1^2 + D_2^2)^2} \\ 2ab &= s \frac{s' r - r' s}{r^2 + s^2} \\ &= 2 \frac{m'}{m} \frac{D'_1 D'_2 (D_1^2 - D_2^2) - D_1 D_2 (D_1'^2 - D_2'^2)}{(D_1^2 + D_2^2)^2} \end{aligned}$$

Oder auch nach leichter Umformung:

$$a^2 - b^2 - 1 = \frac{m'}{m} \frac{(D'_1 D_1 + D'_2 D_2)^2 - (D'_2 D_1 - D'_1 D_2)^2}{(D_1^2 + D_2^2)^2}$$

$$ab = \frac{m'}{m} \frac{(D'_1 D_1 + D'_2 D_2) (D'_2 D_1 - D'_1 D_2)}{(D_1^2 + D_2^2)^2}$$

Kommt nun den Schwingungen der Aethertheilchen als Bestandtheilen der in das Innere eintretenden Welle eine Phasenverschiebung  $\chi_D = \chi$  zu, und war man berechtigt zu schreiben:

$$D_1 = D_0 \cos \chi, \quad D_2 = D_0 \sin \chi.$$

so wird man mit demselben Rechte den Schwingungen der Körpertheilchen eine gewisse, ihnen entsprechende Phasenverschiebung  $\chi'_D = \chi'$  zulegen und analog schreiben dürfen:

$$D'_1 = D'_0 \cos \chi', \quad D'_2 = D'_0 \sin \chi'.$$

Man erhält so definitiv:

$$156. \quad a^2 - b^2 - 1 = \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi)$$

$$2ab = \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \sin 2(\chi' - \chi).$$

Es charakterisirt sich folglich die Lichtbewegung in Metallen, resp. in metallischen Gränzsichten, dadurch, dass die Schwingungen der Körper- und Aethertheilchen in ihren Phasen gegen einander verschoben sind. Und da  $\chi' - \chi$  und  $\frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}$  zugleich mit dem Brechungsindex  $n$  gegeben sind, so sind beide für das bezügliche Metall spezifische Constanten. Man findet:

$$157. \quad \begin{aligned} \tan 2(\chi' - \chi) &= \frac{2ab}{a^2 - b^2 - 1} \\ \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} &= \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2 b^2}. \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich:

$$(a^2 + b^2)^2 = 1 + 2 \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi) + \left( \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \right)^2,$$

und da sich schreiben lässt:

$$a^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

so kommt:

$$a^2 = \frac{1}{2} \times$$

$$158. \left\{ 1 + \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi) + \sqrt{1 + 2 \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi) + \left( \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \right)^2} \right\}$$

$$b = \frac{1}{2a} \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \sin 2(\chi' - \chi).$$

Hiernach lassen sich für einige wichtigere Specialfälle die einander entsprechenden Werthe von  $\chi' - \chi$ ,  $a$  und  $b$  zu folgender Tabelle zusammenstellen:

| $\chi' - \chi$     | $2(\chi' - \chi)$  | $a^2$                                                                       | $b$                                       |
|--------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 0,                 | 0,                 | $1 + \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}$                                             | 0                                         |
| $\frac{\pi}{4}$ ,  | $\frac{\pi}{2}$ ,  | $\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m'^2 D_0'^4}{m^2 D_0^4}} \right)$ , | $\frac{1}{2a} \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}$  |
| $\frac{\pi}{2}$ ,  | $\pi$ ,            | $1 - \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}$ ,                                           | 0                                         |
| $\frac{3\pi}{4}$ , | $\frac{3\pi}{2}$ , | $\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m'^2 D_0'^4}{m^2 D_0^4}} \right)$ , | $-\frac{1}{2a} \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}$ |
| $\pi$ ,            | $2\pi$ ,           | $1 + \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}$ ,                                           | 0.                                        |

Während  $a$  von  $\chi' - \chi = 0$  an bis  $\chi' - \chi = \frac{\pi}{2}$  fortwährend abnimmt und sogar für letzteren Werth kleiner wird als 1, nimmt  $b$  während der ersten Hälfte dieses Intervalles zu, während der zweiten wieder ab.  $a$  steigt dann zwischen  $\chi' - \chi = \frac{\pi}{2}$  und  $= \pi$  wieder an, dagegen wechseln die Werthe von  $b$  ihr Vorzeichen. Wäre noch insbesondere  $a = 0$ , so hätte das zur Folge:

$$\tan 2(\chi' - \chi) = 0, \quad \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} = \pm (b^2 + 1).$$

Während endlich für  $\chi' - \chi = 0$  metallische und durchsichtige Mittel zusammenfallen, so werden doch die Fresnel'schen Intensitätsformeln, die nur  $b=0$  voraussetzen, auch für die denkbaren Fälle  $\chi' - \chi = \frac{\pi}{2}, = \pi \dots$  ihre Gültigkeit bewahren.

Nachdem so die beiden Constanten  $a$  und  $b$  des Brechungsindex  $n$  rationell erklärt sind, lassen sich weiter die Coefficienten  $p$ ,  $q$  und das variable Brechungsverhältniss  $\nu$ , sowie endlich die Functionen  $c$ ,  $d$  (S. 86) auf dieselben zurückführen.

Man erhält nämlich zufolge Gl. 104, 105 und 108:

$$159. \quad p^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi) + \cos^2 e + \sqrt{\frac{m'^2 D_0'^4}{m^2 D_0^4} + 2 \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi) \cos^2 e + \cos^4 e} \right\},$$

$$q = \frac{1}{2p} \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \sin 2(\chi' - \chi).$$

$$160. \quad \nu^2 - 1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi) - \cos^2 e + \sqrt{\frac{m'^2 D_0'^4}{m^2 D_0^4} + 2 \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \cos 2(\chi' - \chi) \cos^2 e + \cos^4 e} \right\}$$

sowie:

$$161. \quad c = \frac{p}{a} \frac{a^2 + q^2}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{q}{a} \frac{a^2 - p^2}{a^2 + b^2}.$$

Aus der allgemeinen Gleichung für  $\nu$  oder auch aus der Verbindung der Gl. 111 und 156 zieht man den Schluss, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unter die Einheit herabsinkt, dass also das Licht sich in den Metallen (resp. metallischen Gränzsichten) rascher fortpflanzt als im Weltäther, wenn  $\chi' - \chi$  durch den Werth hindurchgeht:

$$\sin 2(\chi' - \chi) \tan 2(\chi' - \chi) = -4 \cos^2 e \frac{m D_0^2}{m' D_0'^2}.$$

Die vorstehend erhaltenen Ausdrücke sind viel zu complicirt, als dass man bei directer Einführung derselben in die Gränzgleichungen zu einem unmittelbaren Einblick in die betreffenden Vorgänge gelangen könnte. Fasst man dagegen den besonderen Fall ins Auge, dass die specifisch metallische Wirkung eines Mittels als sehr klein vorausgesetzt werden darf, so ist immerhin eine Vereinfachung möglich.

Dürfen in der That schon die zweiten Potenzen von  $\sin 2(\chi' - \chi)$  vernachlässigt werden, so erhält man der Reihe nach, wenn noch zur Abkürzung  $\chi' - \chi = \Delta$  geschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 a = \nu &= \sqrt{1 + \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}}, \quad b = \frac{\frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \Delta}{\sqrt{1 + \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}}} \\
 162. \quad \frac{b}{a} &= \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2 + m' D_0'^2} \Delta = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \Delta \\
 p = \nu \cos r &= \sqrt{\nu^2 - \sin^2 e} = \sqrt{\frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} + \cos^2 e}, \quad q = \frac{\frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} \Delta}{\sqrt{\frac{m' D_0'^2}{m D_0^2} + \cos^2 e}} \\
 \frac{q}{p} &= \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2 \cos^2 e + m' D_0'^2} \Delta = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \sin^2 e} \Delta \\
 c = \frac{p}{a} = \cos r &= \frac{\sqrt{\cos^2 e + \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}}}{\sqrt{1 + \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2}}}, \quad d = \frac{b(a^2 - p^2)}{p a^2} = \frac{a b \sin^2 r}{\nu^2 \cos r} \\
 \frac{d}{c} &= \frac{m' D_0'^2}{m D_0^2 + m' D_0'^2} \tan^2 r \Delta = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \tan^2 r \Delta.
 \end{aligned}$$

Da endlich  $b d$  eine kleine Grösse zweiter Ordnung wird, so fallen  $D_0$  und  $D_0'$  zusammen.

Setzt man diese Ausdrücke in die Uebergangsbedingungen (Gl. 147 und 151) und beachtet, dass man wegen der Kleinheit von  $\Delta$  schreiben kann:

$$\cos(\varphi - \chi) + Q \sin(\varphi - \chi) \Delta = (1 - Q) \cos(\varphi - \chi) + Q \cos(\varphi - \chi - \Delta),$$

so erhalten dieselben die Form:

### I. Hauptfall.

$$\cos \varphi + R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \cos(\varphi - \chi_D)$$

$$\cos \varphi - R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \frac{\nu \cos r}{\cos e} \times$$

$$\begin{aligned}
 163. \quad & \left[ \left( 1 - \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \sin^2 e} \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \sin^2 e} \cos(\varphi - \chi_D - \Delta) \right] \\
 & m_E [\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R)] = m_D \nu^2 D_0^2 \cos(\varphi - \chi_D) \times \\
 & \left[ \left( 1 - \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \sin^2 e} \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \sin^2 e} \cos(\varphi - \chi_D - \Delta) \right].
 \end{aligned}$$

## II. Hauptfall.

$$\cos \varphi - R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \nu \times$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \cos(\varphi - \chi_D - \mathcal{A}) \right]$$

$$164. \quad \cos \varphi + R_0 \cos(\varphi - \chi_R) = D_0 \frac{\cos r}{\cos e} \times$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \text{tang}^2 r \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \text{tang}^2 r \cos(\varphi - \chi_D - \mathcal{A}) \right]$$

$$m_E [\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R)] = m_D \nu^2 D_0^2 \times$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \cos(\varphi - \chi_D - \mathcal{A}) \right] \times$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \text{tang}^2 r \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \text{tang}^2 r \cos(\varphi - \chi_D - \mathcal{A}) \right]^{1)}.$$

Und was insbesondere die beiden Gleichungen der lebendigen Kräfte betrifft, so gewinnen dieselben durch Einführung der bezüglichlichen Massen  $m$ ,  $m'$  und der Amplitude  $D_0$  der Körpertheilchen die endgültige Gestalt:

## I. Hauptfall.

$$165a. \quad m_E [\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R)] = (m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2) \cos(\varphi - \chi_D) \times$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{m'_D D_0'^2}{m_D D_0^2 \cos^2 e + m'_D D_0'^2} \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{m'_D D_0'^2}{m_D D_0^2 \cos^2 e + m'_D D_0'^2} \cos(\varphi - \chi_D - \mathcal{A}) \right].$$

## II. Hauptfall.

$$m_E [\cos^2 \varphi - R_0^2 \cos^2(\varphi - \chi_R)] = [m_D D_0^2 \cos(\varphi - \chi_D) + m'_D D_0'^2 \cos(\varphi - \chi_D - \mathcal{A})] \times$$

$$165b. \quad \left[ \left( 1 - \frac{m'_D D_0'^2 \text{tang}^2 r}{m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2} \right) \cos(\varphi - \chi_D) + \frac{m'_D D_0'^2 \text{tang}^2 r}{m_D D_0^2 + m'_D D_0'^2} \cos(\varphi - \chi_D - \mathcal{A}) \right].$$

Während indess die entsprechenden Gleichungen der neutralen durchsichtigen Mittel für alle Punkte im Innern, die um eine beliebige ganze Anzahl der bezüglichlichen Wellenlängen von einander absteht, erfüllt blieben, wird hier

---

1) Man wird bemerken, dass der Coefficient  $\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}$  kein anderer ist, als der Entrainirungscoefficient Fresnel's für bewegte Mittel. In der That leitet sich auch dieser (Astr. Undulationstheorie S. 197) ab aus der Nichtübereinstimmung der Schwingungsperiode der ruhenden intermolekularen Aethertheilchen und der sich bewegenden Körpertheilchen, für welche letzteren dieselbe dem Dopplerschen Princip entsprechend modificirt wird.

ohne Zweifel nach Analogie der activen durchsichtigen Mittel die Unregelmässigkeit der Gränzbewegung nach und nach vor der gewöhnlichen pendelartig einfachen Schwingungsform zurücktreten, die dann das ganze Innere hindurch bestehen bleibt. Es fragt sich dabei nur noch, ob zugleich die anfängliche Phasendifferenz zwischen Aether- und Körpertheilchen sich selbständig erhält oder auch ihrerseits mit grösser werdendem Abstände von der Trennungsfläche verschwindet.

Wenn man bedenkt, dass im Unterschiede zu den durchsichtigen Mitteln, bei denen  $n$  und sonach auch  $n \cos r (= p)$  absolut constant und nur  $\kappa$  als von  $x$  abhängig betrachtet wurde, bei den Metallen sowohl  $p$  als  $q$  Functionen des nämlichen Unterschiedes  $\chi' - \chi$  sind, und dass z. B. der Forderung eines allmäligen Verschwindens von  $q$  in Gl. 147<sub>b</sub> nur dadurch entsprochen werden kann, dass in Ausdruck 159 gesetzt wird:

$$166. \quad \sin 2(\chi' - \chi) = e^{-f^2 x} \sin 2(\chi' - \chi)_0,$$

so wird damit offenbar allgemein  $\chi'$  eine Function von  $x$ , die den schliesslichen Gränzwert  $\chi' = \chi$  verlangt. Es hat daher nicht bloss in dem vorhin betrachteten schwach metallischen Mittel die augenblickliche Intensität eines Metalltheilchens ( $m, m'$ ) von der Lage  $\delta$  etwa bei senkrechter Incidenz die Oscillationsform:

$$L = m D_0^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi \right] + m' D_0'^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi' \right]$$

$$167. \quad -m' D_0'^2 (\chi' - \chi) \sin \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi' \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t' + \frac{\delta}{\omega} \right) - \chi' \right]$$

$$\chi' = \chi + A_0 e^{-f^2 x} 1),$$

so dass in einiger Tiefe sowohl das fremdartige letzte Glied vernichtet, als auch die Identität der Phasen der beiden ersteren herbeigeführt wird, sondern es geht überhaupt die Exponentialfunction  $e^{-f^2 x}$  in die sämmtlichen

---

1) Definiren wir  $f^2$  als Extinctionscoefficienten, so unterscheidet sich derselbe von dem gleichnamigen Coefficienten Cauchy's dadurch, dass dieser nach und nach eine Unregelmässigkeit der

Ausdrücke  $q$ ,  $d$ ,  $b$  und  $p$ ,  $c$ ,  $a$ ,  $\nu$ , soweit dieselben als Bestimmungsstücke der in das Innere eintretenden lebendigen Kraft in den letzten der Gleichungen 147 und 151 in Betracht kommen, ein und macht sie dadurch für alle einzelnen einander folgenden Gränzschichten verschieden. Es variiren daher alle diese Grössen zwischen zwei bestimmten Gränzwerten, einem ersten für  $x = 0$ , für den wir die obige Bezeichnung beibehalten wollen, und einem zweiten für  $x = \infty$ , der resp. durch  $q$ ,  $d$ ,  $b$  und  $p$ ,  $c$ ,  $a$ ,  $n$  vorgestellt werde. Für diese innere Gränze findet man:

$$168. \quad q = d = b = 0$$

$$a = n = \sqrt{\frac{m'D_0'^2}{mD_0^2} + 1}, \quad p = \sqrt{\frac{m'D_0'^2}{mD_0^2} + \cos^2 e} = \sqrt{n^2 - \sin^2 e},$$

$$c = \frac{p}{n} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 e}{n^2}}.$$

Kurz die Brechung durch alle einzelnen dieser parallelen Oberflächenschichten erfolgt, was Richtung angeht, so, als ob dieselben gar nicht vorhanden wären und der Eintritt der Welle in das innere Metall nach dem Gesetze:  $n = \frac{\sin e}{\sin r}$  vor sich ginge.

Damit indess, conform der Entwicklung auf S. 90, bei diesem Durchwandern der Gränzschichten die gesammte Intensität erhalten werde, dazu ist nothwendig, dass:

$$\frac{\mu_D}{\mu} D_0^2 = \frac{p}{\cos e} D_0^2 = \frac{p}{\cos e} \mathfrak{D}_0^2,$$

folglich:

$$169. \quad \frac{p}{p} = \frac{D_0^2}{\mathfrak{D}_0^2}$$

wenn nämlich  $\mathfrak{D}_0$  die Amplitude der Aethertheilchen im Innern bedeutet.

Damit erscheint denn schliesslich:

$$170. \quad \frac{m'D_0'^2}{mD_0^2} = n^2 - 1 = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2}$$

---

Schwingungsbewegung vernichtet, während jener die Oscillationen als solche auslöscht.

definirt als die brechende Kraft des metallischen Innern, und wir können nunmehr die gewonnenen Resultate zu folgendem Satze zusammenfassen:

Wofern nicht bei unserer Schlussfolge etwas Wesentliches übersehen ist, so verhalten sich die Metalle in ihrem Innern (mit Abrechnung eines verschiedenen Dispersionsgesetzes, worüber Näheres unter F) genau wie durchsichtige Mittel, und sind in beiden die Oscillationen der Aether- und Körpertheilchen gleichphasige Sinussoiden.

Die Erscheinungen der Metallreflexion sind daher lediglich die Folge einer elliptisch polarisirenden Wirkung der Oberflächenschicht<sup>1)</sup>, innerhalb welcher sowohl die Phasendifferenz zwischen Aether- und Körpertheilchen als auch die äquivalenten Volumina und reducirten Dichten sich continuirlich ändern.

Begleiten wir endlich der Vollständigkeit wegen den durch die Vorderfläche einer metallischen Platte eingetretenen Strahl bis zu seinem Austritt durch die Hinterfläche. Bringt man zu dem Ende die bezüglichen Gränzgleichungen auf die Form:

$$1 + R_i = D_i$$

$$\text{I. } 1 - R_i = D_i \frac{\cos e}{p + q\sqrt{-1}} = \frac{D_i \cos e}{p^2 + q^2} (p - q\sqrt{-1})$$

und:

$$171. \quad 1 - R_i = D_i \frac{1}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{D_i}{a^2 + b^2} (a - b\sqrt{-1})$$

$$\text{II. } 1 + R_i = D_i \cos e \frac{a + b\sqrt{-1}}{p + q\sqrt{-1}} = \frac{D_i \cos e}{p^2 + q^2} (f - g\sqrt{-1}),$$

---

1) Vielleicht hängt gerade der Metallglanz, für den es bisher kaum eine stichhaltige Erklärung gibt, mit der eigenthümlichen Schwingungsform (Klangfarbe) der Oberflächenschicht und des von ihr ausgehenden diffusen Lichtes zusammen.

so erhält man zwischen den totalen lebendigen Kräften und zwar für beide Hauptfälle die identische Beziehung:

$$1 - R_1^2 - R_2^2 = \frac{p \cos e}{p^2 + q^2} (D_1^2 + D_2^2)$$

oder:

$$m_E v^2 (1 - R_0^2) = m_D D_0^2 \frac{p^2}{p^2 + q^2}.$$

Dieselbe bezieht sich, mathematisch genommen, zunächst wieder auf die Fläche  $x = 0$ , in welcher  $n$  durch plötzlichen Sprung in  $v$  übergeht, so dass  $m n^2 \mathfrak{E}_0^2 = m v^2 \cdot 1$ . Der Effect wird indess kein anderer sein, als wenn wir uns diesen Uebergang zwischen den obigen Gränzwerten mehr langsam und stetig vollzogen denken. Sonach werden wir denn dahin gedrängt, überhaupt die Fläche  $x = 0$  als Schwerfläche (Schwerpunktsfläche), d. h. als Inbegriff aller wirksamen einzelnen Gränzsichten aufzufassen, deren Oscillationsbewegung beiderseitig (nicht bloss einseitig, wie wir bisher der Einfachheit wegen annahmen) in die der angrenzenden Mittel continuirlich übergeht.

Wir bringen endlich die rechte Seite der vorstehenden Gleichung nach dem Vorgang auf S. 56 mit dem Princip der Erhaltung der Kraft in Uebereinstimmung, indem wir als Amplitude des freien Aethers setzen:

$$\frac{D_0^2}{1 + \frac{q^2}{p^2}} = D_0^2 \cos^2 \eta'' = D_0^2, \quad (J_D) \frac{p^2}{p^2 + q^2} = J_D.$$

Was nun noch die Amplituden selbst betrifft, so sind zuvörderst wegen  $R_1 = -R$  Intensität und Phasenunterschied bei innerer Reflexion die nämlichen wie bei äusserer. Für das gebrochene Licht ergibt sich:

$$D^s = \frac{2(p + q\sqrt{-1})}{(\cos e + p) + \sqrt{-1}q}$$

$$172. J_D^s = \frac{4p^2}{(\cos e + p)^2 + q^2} = \frac{4 \cos^2 r \sin^2 e}{\sin^2(e + r) + q^2 \sin^2 r}$$

$$\tan \chi_D^s = \frac{q \cos e}{p^2 + q^2 + p \cos e};$$

$$D^p = \frac{2(a + b\sqrt{-1})(p + q\sqrt{-1})}{(p + v \cos e) + \sqrt{-1}(q + w \cos e)}$$

$$J_D^p = \frac{4p^2(a^2 + b^2)}{p^2 + q^2 + 2p \cos e(p^2 + q^2 + \sin^2 e) + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e}$$

$$173. \quad = \frac{1}{v^2} \frac{4 \cos^2 r \sin^2 e (a^2 + b^2)}{[\cos^2(e-r) + q^2 \cot^2 e \sin^2 r] [\sin^2(e+r) + q^2 \sin^2 r]}$$

$$\text{tang } \chi_D^p = \frac{b(p^2 + q^2) + \cos e[(aq + bp)(a^2 - b^2) - (ap - bq)2ab]}{a(p^2 + q^2) + \cos e[(ap - bq)(a^2 - b^2) + (aq + bp)2ab]}$$

Aus den vier für die Phasenverschiebung aufgestellten Ausdrücken 117, 125, 172, 173 ersieht man, dass dieselben für die Brechung an Vorder- und Hinterfläche keineswegs gleich sind und sich daher auch niemals aufheben<sup>1)</sup>. Dieser Umstand macht den oben (S. 72) besprochenen Quincke'schen Interferenzversuch an dünnen durchsichtigen Metallblättchen sehr viel verwickelter, als es oberflächlich scheinen möchte, denn es addirt sich der vom Incidenzwinkel abhängige Gangunterschied  $\chi_D^a + \chi_D^i$  zu dem durch den Brechungsquotienten bewirkten hinzu, welcher letzterer ebenfalls mit dem Einfallswinkel variirt.

Liesse man schliesslich unter dem Azimuth von  $45^\circ$  geradlinig polarisirtes Licht auf die Hinterfläche der Platte auffallen, so würde die elliptische Polarisation der durchgehenden Welle bestimmt sein durch die Ausdrücke 132, sofern man wegen der Gleichheit des Verhältnisses der scheinbaren und wirklichen Intensitäten die dortige Einklammerung fortlässt und  $d_D^i = d_D^a$  nimmt. — Der entsprechende Versuch ist freilich unausführbar.

Lässt man dagegen das unter dem Azimuth von  $45^\circ$  auf die Vorderfläche aufgefallene Licht nach zweimaliger Brechung aus der Hinterfläche austreten, so gelten für dasselbe im freien Aether die Beziehungen:

---

1) Man vergleiche die Messungen Quincke's an dünnen Metallblättchen. Pogg. Ann. Bd. 119, S. 373.

$$\text{tang } d'_D = \text{tang } 2 d_D$$

$$\text{tang} \left( \frac{1}{2} \arctan d'_D \right) = \frac{b(p \cos e + \sin^2 e) - aq \cos e}{a(p \cos e + \sin^2 e) + bq \cos e}$$

$$174. \quad \text{tang}^2 h' = \frac{J^p_a J^p_i}{J^s_a J^s_i} = \frac{(p^2 + q^2 + \sin^2 e)(a^2 + b^2)}{[(p \cos e + \sin^2 e)^2 + q^2 \cos^2 e]^2} \\ = \frac{(\nu^2 + q^2)(a^2 + b^2)}{[\nu^2 \cos^2(e - r) + q^2 \cos^2 e]^2}.$$

Die vorstehende Untersuchung hat meines Erachtens die Theorie der Dioptrik der Metalle wenigstens in ihren Grundzügen klargestellt. Erscheint es auch noch nicht möglich, die erhaltenen Resultate ohne Beihülfe des Complexen, also auf Grund allgemeiner Annahmen bezüglich der Constitution der ponderablen Mittel auf directem mechanischem Wege abzuleiten, so wird man doch die Richtigkeit derselben wohl kaum bezweifeln dürfen. Sie vernichten freilich die Vorstellung, die man sich bisher über das Verhalten der Metalle zu machen gewohnt war, und brechen vielleicht einer neuen Auffassung derselben Bahn.

#### E. Das metallische Mittel mit Berücksichtigung der unter B behandelten Gränzwirkung.

Nach meinen bisherigen optischen Arbeiten lassen sich drei Klassen von einfach brechenden durchsichtigen Mitteln auseinanderhalten. Im neutralen ruhenden Mittel fallen Strahl und Wellennormale zusammen, und sind beide reell; im neutralen bewegten Mittel gelangen sie zur Divergenz, bleiben aber nach wie vor reell; im elliptisch polarisirenden ruhenden Mittel endlich wird die Richtung des Strahles complex, während die der Wellennormale ihren reellen Ausdruck behält. Das Gleiche würde der Fall sein bei einem bewegten elliptisch polarisirenden Mittel.

Während wir ferner für die Metalle Brechungsverhältniss und Geschwindigkeit complex setzten, aber noch Strahl und Wellennormale sich decken liessen, mag im allgemeinen jetzt der Fall besprochen werden, dass auch in ihnen die genannten Richtungen auseinander treten.

Verzichtet man auf die Behandlung der Gränzgleichungen und beschränkt sich überhaupt auf reflectirtes Licht, so lassen sich die nöthigen Transformationen der für die neutralen Mittel erhaltenen Amplitüden in doppelter Weise durchführen.

Man geht entweder aus von den Fresnel'schen Ausdrücken der neutralen durchsichtigen Mittel, z. B. von dem Ausdrucke:

$$R^s = - \frac{\sin(e-r)}{\sin(e+r)},$$

gibt demselben durch Einführung der Beziehung:

$$\cos r = \cos r - \sin r \times \sqrt{-1}$$

zunächst die Gestalt der Gleichung 57, nämlich:

$$R^s = - \frac{\sin(e-r) - \sqrt{-1} \times \sin e \sin r}{\sin(e+r) - \sqrt{-1} \times \sin e \sin r}$$

und setzt in dieser, nachdem man alle  $r$  in  $e$  und  $n$  ausgedrückt:

$$n = a + b\sqrt{-1}, \quad n \cos r = p + q\sqrt{-1}.$$

So erhält man:

$$175. \quad R^s = \frac{(\cos e - p) - \sqrt{-1} (q - \times \sin e)}{(\cos e + p) + \sqrt{-1} (q - \times \sin e)}.$$

Man kann aber auch auch andererseits von den bezüglichen Formeln der einfachen Metalle ausgehen, also z. B. von:

$$R^s = \frac{\cos e - p - \sqrt{-1} q}{\cos e + p + \sqrt{-1} q}$$

und hierin:  $p = v \cos r'$  durch:

$$\begin{aligned} v (\cos e - \sin e \times \sqrt{-1}) &= v \cos e - \sin e \times \sqrt{-1} \\ &= p - \sqrt{-1} \times \sin e \end{aligned}$$

ersetzen. Das letzte Glied dieses Werthes fasst sich auch so mit  $q$  zu:

$$q - \times \sin e = q'$$

zusammen, und die Schwächungscoefficienten werden wieder die nämlichen wie vorhin.

Was indess schliesslich das für die Praxis wichtige Amplitüdenverhältniss  $\frac{R^p}{R^s}$  betrifft, so geht es keinesfalls mehr an, dasselbe direct auf der bezüglichen Fresnel'schen

oder Cauchy'schen Formel zu begründen, sondern man hat auf die allgemeinen Ausdrücke 22 und 36 zurückzugehen. Ergibt zunächst die Division derselben:

$$176. \quad \frac{R^p}{R^s} = \frac{v b - \omega \beta \quad v \beta + \omega b}{v b + \omega \beta \quad v \beta - \omega b} \\ = \frac{(v^2 - \omega^2) b \beta - (\beta^2 - b^2) v \omega}{(v^2 - \omega^2) b \beta + (\beta^2 - b^2) v \omega},$$

so werden für die weitere Umbildung dieses Verhältnisses die beiden oben gegebenen Regeln wieder passen. Dabei bleibt eben zu beachten, dass nur für neutrale Mittel:

$$v^2 - \omega^2 = \beta^2 - b^2 \\ \sin^2 e - \sin^2 r = \cos^2 r - \cos^2 e$$

ist, und dass gerade in Folge dieser Gleichheit das obige Verhältniss auf die beschränkt gültige und daher hier unbrauchbare Fresnel'sche Form:

$$\frac{\cos(e + r)}{\cos(e - r)}$$

zusammenschrumpft. Schlägt man nun den ersteren Weg ein, so erhält man für active durchsichtige Mittel:

$$177. \quad \frac{R^p}{R^s} = \frac{(n^2 - 1) \cos(e + r) - \sqrt{-1} \kappa [\cos e \sin r (n^2 - 1) - 2 \sin e \cos r]}{(n^2 - 1) \cos(e - r) - \sqrt{-1} \kappa [\cos e \sin r (n^2 - 1) + 2 \sin e \cos r]}$$

und daraus in directer Weise für Phasenunterschied  $d_R$  und Intensitätsverhältniss  $\frac{J^p}{J^s}$  die nämlichen Werthe, die S. 48 indirect gewonnen sind.

Setzt man dann weiter zur Abkürzung:

$$n^2 - 1 = a^2 - b^2 - 1 + 2 a b \sqrt{-1} = u + w \sqrt{-1}$$

und:

$$\frac{p + q \sqrt{-1}}{u + w \sqrt{-1}} = s + t \sqrt{-1},$$

so erhält man allgemein:

$$\frac{R^p}{R^s} =$$

$$\frac{[p \cos e - \sin e (\sin e + 2 \kappa t)] + \sqrt{-1} [\cos e (q - \kappa \sin e) + 2 \kappa s \sin e]}{[p \cos e + \sin e (\sin e + 2 \kappa t)] + \sqrt{-1} [\cos e (q - \kappa \sin e) - 2 \kappa s \sin e]}$$

Und so folgt für Phasenunterschied und Intensitätsverhältniss:

$$\text{tang } d_R = \frac{2 q' \cos e \sin^2 e + 2 \kappa' \sin 2 e (p^2 + q^2) (a^2 - b^2 - 1)}{(p^2 + q'^2) \cos^2 e - [\sin^2 e - 2 \kappa' q \sin e (p^2 + q^2 + \cos^2 e)]^2}$$

$$178. \cos 2h = \frac{2 p \cos e \sin^2 e - 2 \kappa' \sin 2 e (p^2 + q^2) 2 a b}{(p^2 + q'^2) \cos^2 e + [\sin^2 e - 2 \kappa' q \sin e (p^2 + q^2 + \cos^2 e)]^2}$$

$$q' = q - \kappa \sin e, \quad \kappa' = \frac{\kappa}{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4 a^2 b^2}.$$

Die sämmtlichen  $\kappa$  enthaltenden Glieder brauchen dabei, sofern sie klein sind, nur angenähert bekannt zu sein.

Sind freilich diese Ausdrücke so complicirt, dass sie sich nur bei gegebenem  $\kappa$  (vergl. Abschnitt F) ohne zu grosse Mühe mit der Erfahrung vergleichen lassen, so gewähren sie doch schon darum Interesse, weil sie zugleich die durchsichtigen und metallischen activen und inactiven Mittel umfassen.

Man ersieht insbesondere aus ersterem, dass das Vorzeichen von  $d_R$  nicht bloss durch die Vorzeichen von  $q$  und  $\kappa$ , sondern auch durch die absoluten Werthe derselben in Verbindung mit der Grösse des Einfallswinkels  $e$  bedingt ist.

Ebenso wie bei den mit der besprochenen Oberflächenwirkung behafteten Metallen gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Reflexion an einem Metalle im Innern eines elliptisch polarisirenden durchsichtigen Mittels vor sich geht. Auch die dann eintretenden Erscheinungen werden von obigen Formeln umfasst.

## F. Das natürlich gegebene Mittel.

Die einzelnen bis jetzt behandelten Fälle sind Abstractionen, die sich den in der Natur vorkommenden Mitteln höchstens für einen beschränkten Theil des Gesamtumfanges der Aetherstrahlung accomodiren. Ob nämlich eine Substanz positiv, neutral oder negativ, und ob sie glasig oder metallisch reflectirt, hängt lediglich ab von der Wellenlänge des erregenden Strahles, und so besteht zwischen Reflexion und Dispersion der innigste Zusammenhang.

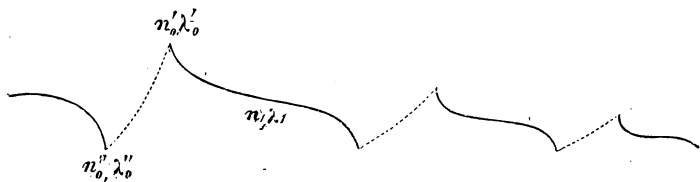
Den Schlüssel zur Erklärung dieses Verhaltens bietet die neuentdeckte anomale Dispersion, und das geeignetste Hilfsmittel zur übersichtlichen Darstellung des Verlaufes der Erscheinung die Heranziehung der Dispersionsformel.

Nun stellte ich <sup>1)</sup> als das allgemeine Gesetz der Dispersion, das sowohl die gewöhnlich durchsichtigen als die gefärbten Mittel umfasst, den Ausdruck auf:

$$179. \quad \frac{1}{n^2} = \Sigma \frac{M}{l^2 - N}.$$

Derselbe verknüpft das Brechungsverhältniss  $n$  mit der inneren Wellenlänge  $l \left( = \frac{\lambda}{n} \right)$  durch eine Reihe von Constanten  $M$  und  $N$ , deren Zahl und Grösse durch die Zahl und Breite der vorhandenen Unstetigkeiten (d. h. Zonen mit complexem Brechungsindex) bedingt ist. Solche Unstetigkeiten können den Verlauf der reellen Curve  $n=f(\lambda)$

Fig. 2.



(Fig. 2) sowohl unterbrechen als auch seitlich begränzen, so dass im letzteren Falle das Brechungsverhältniss für alle Schwingungsdauern, die eine gewisse maximale oder minimale Gränze überschreiten, zugleich complex würde.

Betrachten wir hier den einfacheren Fall, der möglicher Weise im Schwefelkohlenstoff realisirt ist, dass nämlich die Dispersionscurve für unendlich grosse (positive und negative) Schwingungsdauern endlich und reell bleibt und überdies nur eine einzige unstetige Unterbrechung besitzt (Fig. 3). Die ihr zukommende Gleichung ist:

$$\frac{1}{n^2} = M_1 + \frac{M_2}{l^2 - N_2}.$$

1) Pogg. Ann. Jubelband, S. 166. — Man vergl. auch Bd. 140, S. 1 und 177.

Setzt man  $\frac{1}{M} = n_{\infty}^2$ , und führt zwei neue Constanten:  $D$  und  $A_0$  ein, die defnirt sind durch die Beziehungen:

$$M_2 = -\frac{D}{n_{\infty}^2} A_0^2, \quad N_2 = A_0^2 (1 - D),$$

so lässt sich dafür auch schreiben:

$$180. \quad (n^2 - n_{\infty}^2) (l^2 - A_0^2) = D n_{\infty}^2 A_0^2$$

Und wenn zur Einführung des Amplitudenverhältnisses  $d$  der Körper- und Aethertheilchen:

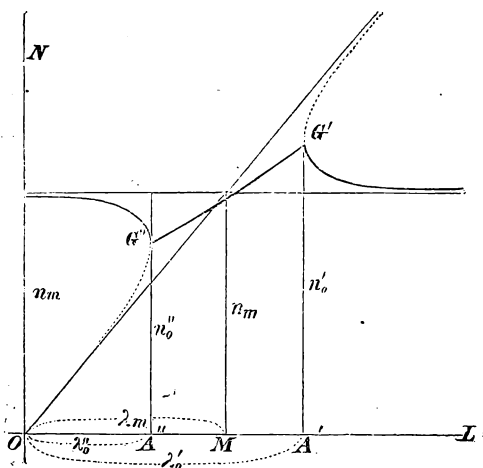
$$n^2 - 1 = \varsigma d^2, \quad n_{\infty}^2 - 1 = \varsigma d_{\infty}^2$$

gesetzt wird, so hat man für zwei beliebige Farben  $\alpha$  und  $\beta$  die Relation:

$$\frac{d_{\alpha}^2 - d_{\infty}^2}{d_{\beta}^2 - d_{\infty}^2} = \frac{l_{\beta}^2 - A_0^2}{l_{\alpha}^2 - A_0^2}.$$

Das Amplitudenverhältniss für eine variable innere Wellenlänge  $l$  und ihre zugehörige Schwingungsdauer verläuft so nach einem hyperbolischen Gesetze, und eine zukünftige Theorie, welche die Dispersionerscheinungen aus dem Zusammenschwingen von Körper- und Aethertheilchen ableiten wird, findet meines Erachtens gerade hier einen gewissen Anhaltspunkt<sup>1)</sup>.

Fig. 3.



1) Den Satz von der Identität der brechenden Kraft und dem

Den Verlauf der Dispersionscurve, wie sie (Fig. 3) der continuirlichen Folge der Schwingungsdauern  $T$  oder äusseren Wellenlängen  $\lambda$  entspricht, erhält man, wenn man in Gl. 180 die innere Wellenlänge  $l$  durch  $\frac{\lambda}{n}$  ersetzt und die entstehende Gleichung als quadratische nach  $n$  auflöst. Es kommt so zunächst:

$$181. \quad n^2 = \frac{1}{2} \left[ n_{\infty}^2 (1 - D) + \frac{\lambda^2}{A_0^2} \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} \left( n_{\infty}^2 (1 - D) + \frac{\lambda^2}{A_0^2} \right) \right]^2 - n_{\infty}^2 \frac{\lambda^2}{A_0^2}}.$$

Einer gegebenen Wellenlänge  $\lambda$  entspricht folglich im allgemeinen ein doppelter Werth von  $n$  je nach der Wahl des Vorzeichens. Die beiden Theile des Doppelzweiges stossen zusammen für eine Gränzwellenlänge  $\lambda_0$ , die den Radicanden zum Verschwinden bringt, und heisst das entsprechende Brechungsverhältniss  $n_0$ , so kommt einfach:

$$n_0^2 = \frac{1}{2} \left[ n_{\infty}^2 (1 - D) + \frac{\lambda_0^2}{A_0^2} \right] = n_{\infty} \frac{\lambda_0}{A_0},$$

woraus man zieht:

$$\frac{n_0^2}{n_{\infty}^2} = \frac{l_0^2}{A_0^2} = 1 \pm \sqrt{D}.$$

Entsprechend der quadratischen Form des Radicanden hat man sonach zwei verschiedene Werthe von  $\lambda_0$ ,  $l_0$ ,  $n_0$  und darum zwei von einander getrennte Doppelzweige der Curve. Zwischen beiden liegt eine Zone der complexen Brechungsverhältnisse, die sich der Erfahrung zufolge als ein das Spectrum durchziehender Absorptionsstreifen  $A'A''$  her-

Verhältniss der lebendigen Kräfte der Körper- und Aethertheilchen betrachten wir, im Gegensatz zu den Ausführungen Sellmeier's (Pogg. Ann. Bd. 145, S. 399 und Bd. 147, S. 386), für jede einzelne Farbe als streng richtig. Nur unter dieser Voraussetzung führt übrigens auch die Continuitätstheorie von Cauchy und mir (S. 18) zu den nämlichen Intensitätsformeln wie die Verbindung des Princip's der Continuität mit dem der Erhaltung der Kraft. — Helmholtz's Erklärungsversuch der anomalen Dispersion (Berl. Monatsber. Sept. 1874) ist mir erst bei der Correctur zu Händen gekommen.

ausstellt. Von den beiden Doppelzweigen hat ferner, ebenfalls der Erfahrung zufolge, nur derjenige Ast eine dioptrische Bedeutung, der sich von den Gränzwellenlängen ab dem Gränzbrechungsverhältniss  $n_\infty$  asymptotisch nähert <sup>1)</sup>.

Führt man noch in Gl. 181 diejenige Wellenlänge  $\lambda_m$  ein, die der ungefähren Mitte des Absorptionsstreifens entspricht, und die sich der Constanten  $\mathcal{A}_0 = l_m$  gewissermassen als äussere Wellenlänge zuordnet, so dass:

$$182. \quad \lambda_m = n_\infty \mathcal{A}_0 = n_m l_m,$$

und identificirt schliesslich den so geänderten Ausdruck mit der quadratischen Form:

$$n^2 = (a^2 + b^2) \pm 2ab,$$

so lässt sich die Wurzel ausziehen, und man erhält:

$$n = \frac{1}{2} n_\infty \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \right\}.$$

Hier erscheint denn  $\lambda_m$  als Ausdruck einer potentiellen Anlage, nämlich eines Dispersionsvermögens, und:

$$183. \quad D = \left( \frac{n_0^2 - n_\infty^2}{n_\infty^2} \right)^2 = \left( \frac{l_0^2 - l_m^2}{l_m^2} \right)^2 = \left( \frac{\lambda_0 - \lambda_m}{\lambda_m} \right)^2$$

als ein quantitatives Maass desselben. Letzteres ist nach meinen früheren Untersuchungen der jedesmaligen Dichte der dispergirenden Substanz proportional. Man hat folglich definitiv:

1) Die beiden Asymptoten der entstehenden hyperbolischen Curve erhält man aus Gl. 180 durch Nullsetzung ihrer beiden Factoren. Sofern nämlich einem unendlich grossen  $\lambda$  sowohl ein endliches  $n$  als ein unendlich grosses  $n$  entspricht, so hat man zugleich  $n = n_\infty$  und  $\frac{\lambda}{n} = \mathcal{A}_0$ . Die erstere Asymptote ist der Abscissenaxe

parallel; die zweite gegeben durch die Gleichung  $n = \frac{1}{\mathcal{A}_0} \lambda$ . Denken wir uns nun das zusammengesetzte Mittel durch ein äquivalentes aus reinem Aether ersetzt, so dass:  $\frac{d^2 \varrho}{dt^2} = \omega_\infty^2 \frac{1 - \mathcal{A}_0^2}{1 - \mathcal{A}_0^2 (1 - D)} \frac{d^2 \varrho}{d\delta^2}$ , so erscheint die bewegende Kraft auf den bezüglichen zweiten Zweigen als zu schwach, resp. die Belastung als zu stark, als dass sich wenigstens Wellen von ganz grosser oder ganz kleiner Schwingungsdauer fortpflanzen könnten.

$$184. \quad n = \frac{1}{2} n_m \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_m}\right)^2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_m}\right)^2} \right\}$$

als die Beziehung zwischen  $n$  und  $\lambda$  einerseits und dem Gränzbrechungsverhältniss  $n_m = n_\infty$  sowie der Lage  $\lambda_m$  und der halben Breite  $\lambda_0 - \lambda_m$  der complexen Zone andererseits. Was noch die Wahl des Wurzelzeichens betrifft, so bezieht sich das obere auf den links von der durch  $\lambda_m$  charakterisirten Verticallinie M gelegenen dioptrischen Ast, auf dem die Indices sich mit zunehmender Wellenlänge von dem Werthe  $n_\infty$  entfernen, das untere auf den rechts gelegenen Ast, auf dem dieselben sich mit zunehmender Wellenlänge diesem Gränzwert annähern. Für beide reellen dioptrischen Aeste hat folglich das Brechungsverhältniss die Form:

$$n = a \pm b$$

Liegt dagegen die willkürliche Wellenlänge  $\lambda$  irgendwo zwischen den beiden Gränzwellenlängen  $\lambda'_0$  und  $\lambda''_0$ , so bleibt  $a$  reell, aber es wird  $b$  imaginär, und sonach wird das entsprechende Brechungsverhältniss:

$$n = a \pm b \sqrt{-1},$$

wenn  $b$  nach wie vor den absoluten Werth der zweiten Wurzel bedeutet.

Die dargelegten Beziehungen, die zunächst nur für Substanzen mit einer einzigen complexen Zone auf strenge Gültigkeit Anspruch machen, werden nichtsdestoweniger auch für andere Substanzen für die Umgebung eines jeden einzelnen Absorptionsstreifens anwendbar bleiben, so lange derselbe einigermaßen isolirt steht und sich nicht mit den benachbarten confundirt. Auch habe ich bereits gezeigt<sup>1)</sup>, dass z. B. für Fuchsin die mittelst der Gleichung:

$$185. \quad \frac{n'^2_0}{n''^2_0} = \frac{\lambda'_0}{\lambda''_0}$$

sich aus der als bekannt vorausgesetzten Breite des Absorptionsstreifens ergebenden Werthe der Gränzbrechungsverhältnisse sehr gut in die bezügliche Kundt'sche Beobachtungstabelle hineinpassen.

1) Pogg. Ann. Jubelband, S. 166.

Nun lehren insbesondere die messenden Versuche von Wiedemann und Quincke, dass die elliptische Polarisation einer Fuchsinsschicht in dem Maasse an Stärke zunimmt, als die Wellenlänge des auffallenden Lichtes sich den Gränzwellenlängen des Absorptionsstreifens nähert, und dass an der Gränze desselben die sogenannte glasige Reflexion in die metallische übergeht.

Sofern nun die aufgestellte Dispersionsformel mehr ist als ein bloss empirischer Ausdruck, so muss, (von der Gränzwirkung  $B$  einstweilen abgesehen,) wenn man von der linken Gränze des Absorptionsstreifens gegen die Mitte vorschreitet, die beobachtete Polarisation dem Brechungsverhältniss:

$$n = a + b\sqrt{-1},$$

dagegen, wenn man von der rechts liegenden Gränze sich der Mitte nähert, dem Brechungsverhältniss:

$$n = a - b\sqrt{-1},$$

entsprechen. Sie wird also das eine Mal negativ, das andere Mal positiv sein, und für die Mitte selbst, d. h. für eine bestimmte Wellenlänge  $\lambda = \lambda_m$ , positiv und negativ zugleich sein.

Man bezeichnet nämlich nach dem Vorgange Jamin's die elliptische Polarisation als positiv oder negativ, je nachdem die Anomalie  $\chi^s - \chi^p$  das positive oder negative Zeichen hat, je nachdem also die Componente parallel der Einfallsebene gegen die Componente senkrecht zur Einfallsebene verzögert, resp. beschleunigt ist. Es entspricht so einer positiven Reflexion das negative Zeichen für  $b\sqrt{-1}$  und umgekehrt. Die Jamin'sche Bezeichnung ist willkürlich; sie hat offenbar den Missstand, dass man gewissermaassen einer positiven Ursache eine negative Wirkung zulegt, und daher dürfte vielleicht der Vorschlag Beachtung finden, hinfort die elliptische Polarisation, umgekehrt wie bisher, gerade nach dem Vorzeichen des imaginären Gliedes des bezüglichen Brechungsverhältnisses zu benennen.

Beobachtungen eines solchen Umschlages der rechtselliptischen Bewegung in die linkselliptische zu beiden Seiten der Mittellinie des Absorptionsstreifens einer Substanz mit Oberflächenfarben liegen nun vorläufig nicht vor.

Was ferner die Geschwindigkeit  $\frac{1}{v}$  betrifft, mit der die auffallende Welle innerhalb der absorbirenden Region in das brechende Mittel eindringt, so ist dieselbe, wie wir gesehen, von dem Incidenzwinkel abhängig, und daher sind die beiden Gränzpunkte  $G'$ ,  $G''$  je nach der Incidenz durch eine verschieden verlaufende Dispersionscurve mit einander zu verbinden.

Innerhalb des Absorptionsgebietes wächst also das Brechungsverhältniss der Gränzschrift zugleich mit der Wellenlänge, und ist im allgemeinen das Ansteigen der bezüglichen Curve ein ziemlich gleichförmig steiles.

Für senkrechte Incidenz insbesondere hat man zufolge Gl. 108:

$$186. \quad v = a = \frac{1}{2} n_m \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D},$$

und ist dieselbe zugleich noch dadurch ausgezeichnet, dass für sie der Einfluss der Gränzwirkung  $B$  verschwindet.

Diese letztere wird sich möglicher Weise im allgemeinen mit der besprochenen Wirkung der Phasenverschiebung zwischen Körper- und Aethertheilchen zu einer resultirenden zusammensetzen. Fassen wir insbesondere das reflectirte Licht ins Auge, so wurde bereits hervorgehoben, dass der partielle Gangunterschied  $d_R$  der Gränzwirkung  $B$  für Vorder- und Hinterfläche sein Zeichen wechselt, während derjenige, welcher der rein metallischen Wirkung entspricht, sein Vorzeichen behält. Damit ferner beide bei einer Reflexion an der Vorderfläche sich verstärken, dazu war nothwendig, dass  $q' = q - z \sin e$  (vergl. S. 105) kleiner ist als  $q$ , dass folglich die resultirende Schwingungsbewegung (Gl. 148<sup>b</sup>) der Ebne  $x = 0$  vermöge dieses combinirten Einflusses derjenigen eines neutralen Mittels genähert, d. h. das charakteristische, nach  $\frac{1}{2} T$  periodische Glied geschwächt werde. Das Entgegengesetzte wäre der Fall, wenn einem positiven  $q$  ein negatives  $z$  entspräche, so dass  $q' = q + z \sin e$  würde.

Welchen Fall die Natur verlangt, lässt sich vielleicht ausser durch die Erfahrung schon durch die Erwägung entscheiden, dass bei einer Reflexion an der Vorderfläche ver-

hältnissmässig der Weltäther, bei einer Reflexion an der Hinterfläche dagegen mehr die ponderablen Moleküle die Schwingungsform der Gränzsichten beeinflussen, und dass daher im ersteren Fall eine Schwächung der Unregelmässigkeit der Bewegung die wahrscheinlichere ist.

Wir setzen demnach:

links von der Mittellinie: , rechts von der Mittellinie:

$$+ b, + q, + \kappa \qquad - b, - q, - \kappa.$$

Für die Mittellinie selbst kommt:

$$n_M = \frac{1}{2} n_m (\sqrt{4-D} + \sqrt{D} \sqrt{-1}).$$

Oder da:

$$\frac{\lambda'_0}{\lambda_m} = 1 + \sqrt{D}, \quad \frac{\lambda''_0}{\lambda_m} = 1 - \sqrt{D},$$

folglich:

$$\frac{\lambda'_0 + \lambda''_0}{\lambda_m} = 2, \quad \frac{\lambda'_0 \lambda''_0}{\lambda_m^2} = 1 - D,$$

so lässt sich schreiben:

$$187. \qquad \frac{2 a_m}{n_m} =$$

$$\sqrt{\left(1 + \frac{n'^2_0}{n_m^2}\right)\left(1 + \frac{n''^2_0}{n_m^2}\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{l'^2_0}{l_m^2}\right)\left(1 + \frac{l''^2_0}{l_m^2}\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda'_0}{\lambda_m}\right)\left(1 + \frac{\lambda''_0}{\lambda_m}\right)}$$

$$\frac{2 b_m}{n_m} =$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{n'^2_0}{n_m^2}\right)\left(1 - \frac{n''^2_0}{n_m^2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{l'^2_0}{l_m^2}\right)\left(1 - \frac{l''^2_0}{l_m^2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda'_0}{\lambda_m}\right)\left(1 - \frac{\lambda''_0}{\lambda_m}\right)}$$

$a_m$ , welches stets kleiner ist als  $n_m$ , erlangt diesen Werth erst für  $D = 0$ .

Was ferner neben den bisher betrachteten Substanzen mit Oberflächenfarbe die eigentlichen Metalle betrifft, so lehrt die Erfahrung, dass bei denselben in Uebereinstimmung mit der hier proponirten Dispersionsformel sowohl  $a$  als auch  $a^2 + b^2$  mit der Wellenlänge zugleich zunehmen. Damit indess die Metalle unter der Annahme  $\kappa = 0$  dem genannten Gesetze vollkommen entsprächen, dazu wäre nothwendig, dass:

$$a^2 + b^2 = n_m^2 \frac{\lambda}{\lambda_m}$$

$$a^2 - b^2 = \frac{n_m^2}{2} \left(1 - D + \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right),$$

dass also insbesondere  $\frac{a^2 + b^2}{\lambda}$  constant wäre. Eine solche Constanz lässt sich in der That z. B. für Stahl und Glockengut zugeben, dagegen fällt dieser Quotient für die stärker dispergirenden Substanzen Silber und Messing mit Abnahme der Wellenlänge beträchtlich mit. Wäre freilich  $\alpha$  nicht gleich Null, so würden eben Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth zur Ableitung des Brechungsverhältnisses nicht mehr genügen. Doch wie dem auch sei, die bisher der Untersuchung unterzogenen Metalle zeigen sämmtlich die positive Reflexion. Sofern man es nun überhaupt für möglich hält, dass dieselben nach Analogie der Substanzen mit Oberflächenfarben zwar das sichtbare Spectrum mit einem breiten Absorptionsbande überdecken, aber an den beiden endlichen Grenzen desselben oder auch nur auf Einer Seite — also im ultrarothem oder ultravioletten Strahlungsgebiete — sich wie gefärbte Gase, Flüssigkeiten oder Gläser verhalten, so darf man behaupten, dass die durchforschte Region des metallischen Absorptionsstreifens rechts von der Mittellinie desselben liegt, und dass sonach die Metalle für die calorischen Wellen rascher durchstrahlbar werden als für die chemischen und Fluorescenz erregenden.

Hiernach erübrigt uns nur noch die Feststellung des Dispersionsgesetzes eines metallisch reflectirenden Mittels für das eigentliche Innere. Man erhält dasselbe mittelst Gleichung 170, nämlich:

$$n^2 - 1 = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4 a^2 b^2},$$

sofern man für  $a$  und  $b$  ihre nunmehr bekannten Werthe in  $\lambda$  substituirt. So ergibt sich:

$$188. \quad (n^2 - 1)^2 = (n_m^2 - 1) \left( \frac{\lambda^2}{l_m^2} - 1 \right) + n_m^2 D.$$

Und da die Dispersionsgleichung (180) der nicht metallisch gebrochenen Farben sich auch so schreibt:

$$0 = (n_m^2 - n^2) \left( \frac{1}{n^2} \frac{\lambda^2}{l_m^2} - 1 \right) + n_m^2 D,$$

so geht erstere aus dieser dadurch hervor, dass man einfach  $n = 1$  nimmt.

Auch im Inneren eines Metalles wächst also

das Brechungsverhältniss zugleich mit der Wellenlänge.

Die durch Gl. 188 repräsentirte Curve schneidet wieder die Hyperbeläste der Fig. 3 in den Punkten  $G'$  und  $G''$ , so dass die  $n_0$  und  $n_0$  zusammenfallen. Die Mittellinie  $M$  dagegen durchsetzt sie in einem Punkte, der bestimmt ist durch:

$$(n_M^2 - 1)^2 - (n_m^2 - 1)^2 = n_m^2 D,$$

und für den folglich:  $n_M > n_m$ . Mit Rücksicht hierauf lässt sich daher auch schreiben:

$$(n^2 - 1)^2 - (n_M^2 - 1)^2 = \frac{1}{l_m^2} (n_m^2 - 1) (\lambda^2 - \lambda_m^2).$$

Gehen wir nunmehr, die Gränzen des Absorptionsstreifens überschreitend, zu dem reellen Theile der Dispersionscurve der Gl. 184 über, so verläuft dieselbe in der durch Fig. 2 und 3 dargestellten Weise. Die elliptische Polarisation ist nur mehr abhängig von  $\alpha$ , und da demselben zu beiden Seiten der Mittellinie  $M$  das entgegengesetzte Zeichen zukommt, so ist die Reflexion auf der einen Seite positiv, auf der andern negativ. Nun haben wir  $\alpha$ ,  $q$ ,  $b$  links von der Mittellinie gemeinschaftlich das positive und rechts von derselben das negative Zeichen zugelegt; die Reflexion wird daher links, ausserhalb wie innerhalb des Absorptionsstreifens, negativ, rechts positiv.

Der Erfahrung zufolge zeigt nun freilich die Dispersionscurve der meisten natürlich vorkommenden Mittel einen solchen Verlauf, dass sich daraus auf die Existenz mehrfacher Absorptionsstreifen schliessen lässt. Unter den eigentlich durchsichtigen Substanzen dürfte nur der Schwefelkohlenstoff dem bisher besprochenen einfachen Dispersionsgesetze folgen, während z. B. Wasser, Glas, Sylvin u. s. w. nach dem ultrarothem Theile des Spectrums hin eine mehr oder minder starke Krümmung der Curve zeigen, die neben dem allen durchsichtigen Substanzen gemeinschaftlichen ultravioletten Absorptionsstreifen auch einen ultrarothem andeutet. Gilt aber das bisher aufgestellte Gesetz für die Nähe eines jeden einzelnen derselben, so werden die genannten Substanzen positiv reflectiren für eine violette und überviolette Strahlung, negativ für eine rothe und überrothe.

Das Zeichen dieser Reflexion bestimmt sich sonach allgemein durch die Convexität oder Concavität der Curve gegen die Abscissenaxe, und umgekehrt darf man aus dem für eine gewisse Wellenlänge experimentell bestimmten Zeichen auf die grössere Nähe des ultrarothern oder ultravioletten Absorptionsgebietes schliessen.

Zwischen dem convexen und concaven Theile der Curve liegt selbstverständlich eine Strecke ohne Krümmung; dieselbe liegt in der Nähe desjenigen charakteristischen Strahles des Mittels, dessen Elemente ich in früheren Abhandlungen <sup>1)</sup> durch  $n_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $l_1$  (vergl. Fig. 2) bezeichnet habe. Diese Strecke wird also katoptrisch charakterisirt sein durch neutrale Reflexion.

Alle diese Forderungen der Theorie werden anscheinend durch die Erfahrung bestätigt. So zählt z. B. Jamin das Glas zu den positiven Substanzen, und die Dispersionscurve desselben belehrt sofort, dass die sichtbare Strahlung dem convexen Theile der Curve angehört, und dass man sich rechts von der Mittellinie des nächsten Absorptionsstreifens befindet. Dasselbe gilt von Kalkspath, Quarz und Alkohol.

Für Wasser dagegen, das nach Jamin zu den negativen Substanzen gehört, hat die Dispersionscurve schon im rothen Theile des Spectrums mit Zunahme der Wellenlänge einen so rasch gegen die Abscissenaxe abfallenden Verlauf, dass man auf die Nähe einer ultrarothern Absorption schliessen muss. Für Wasser befinden sich also die mittleren sichtbaren Strahlen links von der Mittellinie des nächstliegenden Absorptionsgebietes.

Der Alaun wäre ein neutraler Körper.

Eine noch directere Bestätigung der Theorie entnehme ich einer vor Kurzem erhaltenen brieflichen Mittheilung von Herrn Quincke. Am Fuchsin nämlich sind gegenwärtig zwei verschiedene, weit von einander abstehende Absorptionsstreifen bekannt <sup>2)</sup>, ein schmaler an der Gränze

1) l. c. Bd. 140, S. 1 und 177.

2) Man vergl. den Aufsatz von Behrens »Ueber das Spectrum des Edelopals« in Leonhard's Jahrbuch für Mineralogie, Jahrg. 1873, Heft 9.

des Roth und ein breiterer im Blauviolet. Nun fand kürzlich Lundquist in Upsala, dass die Reflexion der Fraunhofer'schen Linien B und C negativ, die der folgenden positiv sei. Hier ist also in der That zwischen den beiden Absorptionsgebieten das Vorzeichen derselben umgesprungen, und wird wohl die nähere Kenntnissnahme der genannten Arbeit noch weitere interessante Aufschlüsse ergeben <sup>1)</sup>.

Wenn endlich Jamin bei seiner Classification der positiven, neutralen und negativen Substanzen darauf aufmerksam macht, dass den positiven das grösste und den negativen das kleinste Brechungsverhältniss zukomme, so ist eine solche Eintheilung bekanntlich nicht ohne Ausnahme durchzuführen. In der That ist auch der Zusammenhang zwischen der Art der Reflexion und der Stärke der Brechung kein so inniger wie der zwischen Reflexion und Dispersion.

Lässt sich nun die Form der Abhängigkeit des Coefficienten  $\kappa$  von der Wellenlänge (und event. für das Absorptionsgebiet vom Einfallswinkel) vorläufig in Strenge noch nicht geben, so ist derselbe doch unzweifelhaft eine

---

1) Die Arbeit ist seitdem in Pogg. Ann. Jahrg. 1874, Heft 6, 7, 8 vollständig abgedruckt. Die elliptische Reflexion der angewandten Fuchsinschicht, welche die Hypotenusenfläche eines Kronglasprisma bekleidete, zeigte sich am stärksten zwischen Orange und Indigo. Vielleicht darf man aus den mitgetheilten Zahlenwerthen schliessen, dass die Dispersion zwischen den Fraunhofer'schen Linien B und C regelmässig verläuft, sofern nämlich die Brechungsverhältnisse mit abnehmender Wellenlänge zunehmen. Zwischen E und F begönne dann der Absorptionsstreifen der anomalen Dispersion, denn von E bis V nimmt die Lundquist'sche Constante  $c (= a^2 + b^2 = n_m^2 \frac{\lambda}{\lambda_m})$  zugleich mit der Wellenlänge ab. Und wenn endlich die Constante  $\gamma$  (für welche  $\sin 2\gamma = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ ) für die beiden kürzesten Wellenlängen  $\lambda_G$  und  $\lambda_V$  als von der Incidenz abhängig gefunden wird, so hat man es hier wahrscheinlich mit einem starken Einflusse der Gränzwirkung B zu thun.

Für weitere Untersuchungen dieser Art möchte es sich empfehlen, dass man katoptrische und dioptrische Messungen mit einander verbinde.

Function der Krümmungsverhältnisse der reellen Dispersionscurve sowohl ausserhalb wie innerhalb des Absorptionsgebietes. Wir werden daher nicht fehl gehen, wenn wir schreiben:

$$189. \quad \kappa = f(n^2 - n_m^2), \quad f(n_m^2 - n^2) = -f(n^2 - n_m^2).$$

Nun ist gewiss die einfachste Annahme, die man machen könnte, die, das Functionszeichen  $f$  für überflüssig zu erachten, d. h. geradezu zu setzen:

$$190. \quad \kappa = n^2 - n_m^2, \quad \varepsilon = \frac{n^2 - n_m^2}{n^2 - 1},$$

resp. innerhalb des Absorptionsgebietes  $n$  durch  $n$  zu ersetzen, so dass man für dieses hätte (vergl. Gl. 178):

$$\kappa = n^2 - n_m^2 \\ = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2} - \sqrt{(a_m^2 - b_m^2 - 1)^2 + 4a_m^2b_m^2}.$$

Es wäre folglich die Stärke der elliptischen Polarisation der Gränzwirkung  $B$  direct proportional dem Dispersionsvermögen<sup>1)</sup>. Und für die Wellenlänge der Mittellinie des Absorptionsstreifens, für welche  $\kappa=0$  und  $b$  und  $q$  zugleich positiv und negativ sind, verhielte sich das Mittel (auch das metallische) als vollkommen neutral.

In dem einfacheren Fall der Fig. 3 wird ferner auch für eine unendlich grosse Wellenlänge der Ellipticitätscoefficient gleich Null werden. Und hat das Mittel mehrere Absorptionsstreifen, so tritt für jeden derselben ein Index  $n_1$  an die Stelle von  $n_\infty$ , und die Reflexion wird positiv für alle Indices  $n > n_1$ , negativ für alle  $n < n_1$ .

Auch diese Forderung widerspricht der Erfahrung insofern nicht, als die Ellipticitätscoefficienten der positiven

---

1) Um unseren Werth von  $\varepsilon$  für grosse Incidenzen in die Cauchy-Quincke'sche Form überzuführen, hat man denselben etwa durch 2 zu dividiren. Es kommt so:  $\varepsilon' = \frac{n^2 - n_m^2}{2(n^2 - 1)}$ , wofür sich angenähert auch:  $\varepsilon' = \frac{n - n_m}{2(n - 1)}$  schreiben lässt. Sofern endlich für die Mehrzahl der untersuchten Substanzen (insbesondere Gläser) nahezu  $n - 1 = 0,5$  ist, so hat man im Durchschnitt:  $\varepsilon' = n - n_\infty$ , was in der That mit den Beobachtungen nicht übel harmonirt.

Mittel für die gewöhnliche optische Strahlung durchweg gross, diejenigen der negativen Mittel durchweg klein sind, sofern eben die bezüglichen  $n$  von  $n_1$  sehr weit abstehen, resp. denselben recht nahe liegen.

Zum Schluss bemerke ich noch, dass unsere gesammte Entwicklung sich nur auf solche Mittel bezieht, in deren Inneren die Aetherschwingungen, die von aussen her einfallen, sich zwar vorübergehend in Aether- und Körperschwingungen umsetzen, ohne jedoch durch irgend welche Aenderung der Schwingungsdauer und Schwingungsart den Körpertheilchen eine bleibende lebendige Kraft zurückzulassen, resp. an ihnen innere Arbeit zu verrichten. Das System dieser letzteren wäre daher, wenn auch nicht als träger Ballast, so doch als absolut elastisch zu betrachten. Ausgeschlossen sind daher streng genommen alle Mittel, in denen das durchstrahlende Licht wenigstens eine merkliche Temperaturerhöhung oder eine merkliche Zustandsänderung des ponderablen Gefüges hervorruft, sowie endlich die fluorescirenden Mittel, sofern sie die von aussen gegebene Schwingungsdauer in eine Summe neuer Schwingungsdauern auflösen und dadurch die Brechbarkeit verändern.

Wenn freilich die Beobachtung lehrt, dass es keine absolut adiathermanen Mittel gibt, und wenn insbesondere die neueren Arbeiten Vierordt's<sup>1)</sup> gezeigt haben, dass die wirkliche Auslöschung des Lichtes bei den Substanzen mit Oberflächenfarben, z. B. beim Fuchsin, für die Mittellinie ihrer Dispersionscurve im Maximum ist und überhaupt mit der Annäherung an dieselbe von beiden Seiten her zunimmt, so werden wir im allgemeinen der Erfahrung zufolge einen Ausdruck von der Form:

$$191. \quad \varrho = A e^{-h^2 \delta} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\delta}{I} \right),$$

als das Gesetz dieser Auslöschung betrachten dürfen, aber darin hat dann selbstverständlich  $h^2$  das negative Vorzeichen. Auch dieses  $h$  erscheint sonach als Function der Wellenlänge und der charakteristischen Strahlen des Mittels, und man mag überdies zugeben können, dass dasselbe

1) Pogg. Ann. Bd. 151, S. 119.

(sofern es nicht als Reibungs-, sondern als Diffusions-constante auftritt) für sich besonderer Maxima und Minima fähig sei.

### Zusatz.

#### Zur Theorie der (anormalen) Dispersion des Lichtes.

Hr. Helmholtz hat in den Monatsber. der Berl. Akad. (Sept. 1874) eine Theorie der anormalen Dispersion gegeben, welche gleichfalls auf der Annahme eines Zusammenschwingens von Körper- und Aethertheilchen basirt. Wenn er indess Sellmeier gegenüber den Einwand erhebt, dass derselbe in seine Rechnungen keine Kraft eingeführt habe, welche die mechanische Arbeit der schwingenden Bewegung als solche vernichten könne, so thut er selbst das in einer Weise, die, analog dem Verfahren von Cauchy und Beer, eine negative Metallreflexion unmöglich macht.

Hrn. Helmholtz's Bedenken gegen meine eigenen seitherigen Aufstellungen hoffe ich durch die vorstehende Abhandlung, also insbesondere durch den Nachweis einer nur scheinbaren Unstetigkeit der Dispersionscurve und ebenso einer nur scheinbaren Gleichwerthigkeit der beiden Asymptoten der Fig. 3 sowie endlich durch den Umstand, dass die für das Absorptionsgebiet geforderte Phasenverschiebung von Körper- und Aethertheilchen eine besondere Einführung von *implicite* schon mitgegebenen Reibungscoefficienten überflüssig macht, einigermaßen begegnen zu können.

Im Folgenden will ich indess versuchen, die Gesetze der Dispersion des Lichtes aus den Bewegungsgleichungen selber abzuleiten.

Zu dem Ende erinnere ich zunächst an Gleichung 10, die ohne Weiteres auch die Form annimmt:

$$1. \quad \frac{d^2 \varrho}{dt^2} = \frac{e}{m + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} m'} \frac{d^2 \varrho}{dx^2} = \omega^2 \frac{d^2 \varrho}{dx^2},$$

und in der die bewegende Kraft für jede einzelne Farbe als eine Function der Constanten  $e$  des freien Aethers sowie des entsprechenden (mittleren) Amplitüden- und Massenverhältnisses der Körper- und Aethertheilchen gegeben ist. Es handelt sich nunmehr darum, die Differentialgleichungen für die beiden Arten von Schwingungen getrennt für sich aufzustellen.

Sind wieder  $m'$ ,  $m$  die Massen der Volumeinheit, so hat man  $m' \frac{d^2 \varrho'}{dt^2}$ ,  $m \frac{d^2 \varrho}{dt^2}$  als die auf sie wirkenden Kräfte, gemessen durch die Beschleunigung. Andererseits werden diese Kräfte folgendermaassen zusammengesetzt sein.

Beachtet man, dass Gleichung 1 zufolge einzig die elastische Deformation des Aethers, deren Constante  $\epsilon$  ist, sowohl die Massen  $m$  als  $m'$ , aber beide in verschiedener Weise, in Bewegung setzt, so vertheilt sich die Kraft derselben in mehrere Componenten.

Sie zieht zunächst eine elastische Deformation der Körpertheilchen nach sich, und der dazu verbrauchte Theil ist offenbar äquivalent einer Kraft  $\epsilon' \frac{d^2 \varrho'}{dx^2}$ . Es wirken aber auch die benachbarten Aethertheilchen auf das einzelne Körpertheilchen ein und ziehen dasselbe mit irgend einer Kraft  $x^2 \varrho'$  in seine Gleichgewichtslage zurück. Auch diese letztere Kraft wird, soweit sie den Aethertheilchen nicht rückwärts wieder zu gute kommt, einem Theil der Deformation des Aethers das Gleichgewicht halten.

Was daher andererseits die Bewegung der Aethermasse für sich betrifft, so bleibt von der gesammten Deformationskraft nur noch ein nicht verbrauchter Theil  $\epsilon \frac{d^2 \varrho}{dx^2}$  übrig. Zu dieser tritt nun diejenige hinzu, die herrührt aus der erwähnten Rückwirkung der benachbarten Körpertheilchen. Diese letztere wird sich aber den Aethertheilchen gegenüber und zwar im grossen Ganzen (denn wir haben es nur mit mittleren Schwingungen zu thun, die von denen der einzelnen Aethertheilchen je nach deren Abstand von den Körpermassen ziemlich verschieden sein mögen) nur in Form von Deformationskraft äussern, und so setzt sich dieselbe in eine äquivalente Kraft  $b x^2 \frac{d^2 \varrho}{dx^2}$  um, die geradezu dem Coefficienten  $x^2$  proportional ist, und in der  $b$  eine Constante bedeutet. Setzt man endlich  $\epsilon' = a \epsilon$ , unter  $a$  eine zweite Constante verstanden, so schreiben sich die Bewegungsgleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} 2. \quad m' \frac{d^2 \varrho'}{dt^2} &= a \epsilon \frac{d^2 \varrho'}{dx^2} - x^2 \varrho' \\ m \frac{d^2 \varrho}{dt^2} &= (\epsilon + b x^2) \frac{d^2 \varrho}{dx^2}. \end{aligned}$$

Um dieselben zu integriren, setzen wir:

$$\varrho' = A' \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{l} \right), \quad \varrho = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{l} \right).$$

Führt man diese Werthe ein, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$\begin{aligned} \frac{m'}{T^2} &= a \frac{\epsilon}{l^2} + \frac{x^2}{4\pi^2} \\ \frac{m}{T^2} &= \frac{\epsilon + b x^2}{l^2} \end{aligned}$$

Diese Bedingungen müssen also zwischen den Constanten der vorstehenden Gl. erfüllt sein, wenn sie als Integrale der Gleichungen 2

zulässig sein sollen. Eliminirt man aus ihnen  $x^2$ , so erhält man unter Beachtung der Beziehung:  $l = \omega T$  für das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon}{m} \frac{l^2 - 4\pi^2 ab}{l^2 - 4\pi^2 b \frac{m'}{m}}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\frac{\varepsilon}{m} = \omega_\infty^2, \quad 4\pi^2 ab = \mathcal{A}_0^2, \quad 4\pi^2 b \frac{m'}{m} = \mathcal{A}_0^2 (1 - D),$$

woraus wegen  $v^2 = \frac{e}{m}$ :

$$\varepsilon = \frac{e}{n_\infty^2}, \quad D = 1 - \frac{m'}{a m},$$

so wird:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\infty^2} \frac{l^2 - \mathcal{A}_0^2}{l^2 - \mathcal{A}_0^2 (1 - D)} = \frac{1}{n_\infty^2} \frac{1}{1 + \frac{D \mathcal{A}_0^2}{l^2 - \mathcal{A}_0^2}},$$

welche Gleichung mit dem Dispersionsgesetz der S. 109 identisch ist.

Würde man andererseits aus den beiden obigen Bedingungs-  
gleichungen den Werth  $\varepsilon$  anstatt  $x^2$  eliminiren, so erhielte man durch  
Vergleich der beiden Ausdrücke für  $\omega$ :

$$-x^2 = \frac{\varepsilon}{m} \frac{4\pi^2 (a m - m')}{l^2 - 4\pi^2 b \frac{m'}{m}} = \frac{e}{n_\infty^2} \frac{4\pi^2 a D}{l^2 - \mathcal{A}_0^2 (1 - D)},$$

so dass sich diese Kraft (wegen  $\varrho' < \varrho$ ) als negativ erweist. Und  
weiter:

$$-b x^2 = \frac{e}{n_\infty^2} \frac{D \mathcal{A}_0^2}{l^2 - \mathcal{A}_0^2 (1 - D)}.$$

Nun habe ich in einer früheren Arbeit gezeigt, dass sowohl  
für Gase als Flüssigkeiten  $D$  anscheinend der (auf Wasser von  $4^\circ$   
bezogenen) Dichtigkeit  $\mathcal{A}$  des Mittels proportional ist, und dass  $\mathcal{A}_0^2$   
eine von dieser Dichtigkeit unabhängige absolute Constante ist, de-  
ren Werth sogar für die drei Hauptbrechungsindices einer anisotro-  
pen Substanz der gleiche bleibt. Setzt man daher:

$$\frac{m'}{m} = A \cdot \mathcal{A}, \quad D = B \cdot \mathcal{A}, \quad ab = C,$$

so erhält man:

$$a = \frac{A \cdot \mathcal{A}}{1 - B \cdot \mathcal{A}}, \quad \frac{1}{b} = \frac{A \cdot \mathcal{A}}{C (1 - B \cdot \mathcal{A})}.$$

Nimmt also  $\mathcal{A}$  bis zur Gränze der Verdünnung ab, so wird  
schliesslich:

$$\frac{d^2 \varrho'}{d t^2} = 0, \quad m \frac{d^2 \varrho}{d t^2} = e \frac{d^2 \varrho}{d x^2}.$$