Versuch
einer Theorie der (anomalen) Dispersion des Lichtes in einfach und doppelt brechenden Mitteln.

Von

Prof. E. Ketteler.

Vorgetragen in der Sitzung der Niederrh. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Bonn am 14. Februar 1876.

Nachdem ich durch eigene Versuche, besonders an Gasen, sowie durch kritische Benutzung des gesammten vorhandenen Beobachtungsmaterials die empirische Seite der Dispersionslehre im grossen Ganzen, wie ich meine, festgestellt, habe ich weiter auch den Zusammenhang derselben mit der elliptischen Polarisation der Spiegelung und Brechung darlegen können[1]). Die von mir aufgestellte Dispersionsformel schliesst eben die Erscheinung der später entdeckten anomalen Dispersion in sich ein, und sie genügt der Erfahrung nicht nur für die schwächer absorbirten durchgehenden Strahlen, sondern anscheinend ebenso für die, bloss durch die elliptische Polarisation des reflectirten Lichtes zugänglichen, völlig dunkeln Spectralregionen.

In theoretischer Beziehung hat mittlerweile die anomale Dispersion einen vollständigen Umschwung bewirkt. Man hat nämlich eingesehen, dass man bei den dioptrischen Vorgängen mit dem Aether allein nicht auskommt, und so bricht sich allmälig die bis jetzt hauptsächlich von Boussinesq, Sellmeier und mir vertretene Ansicht von einem Zusammenschwingen der Aether- und Körpertheilchen mehr und mehr Bahn. Eine auf diese Auffassung gegründete, wirklich

1) »Das Complexe als Ausdruck des Zusammenhangs zwischen der elliptischen Polarisation der Spiegelung und Brechung und der Dispersion der Farben.« Verhandl. des naturhist. Vereins für Rheinland-Westphalen, Jhrg. 32, 4. Folge, 2. Bd. (1875).

haltbare Dispersionstheorie verspricht dann neben einem tieferen Verständniss der Lichtbewegung überhaupt auch Aufschlüsse über den Aufbau und die Constitution der aus Aether- und Körpermaterie zusammengesetzten Aggregate, welche die einzelnen wägbaren Mittel bilden.

Die jüngste Behandlung der anomalen Dispersion verdankt man Hrn. Helmholtz[1]). Auch Helmholtz geht von einem Mitschwingen der ponderablen Theilchen aus, und indem er bezüglich der Wechselwirkung zwischen ihnen und den Aethertheilchen den einfachst möglichen Mechanismus voraussetzt, gelangt er leicht zur Aufstellung der beiden erforderlichen Differentialgleichungen. Helmholtz verwirft die Annahme älterer Physiker, wornach Aether- und Körpertheilchen einander Punkt für Punkt anziehen oder abstossen sollen, und substituirt dafür eine Einwirkung wie die eines schwingenden Pendels auf die umgebende Luft. Endlich hebt er mit Nachdruck hervor, dass wegen der allmälig eintretenden Umwandlung von Licht in Wärme, d. h. wegen Absorption der regelmässigen Schwingungsbewegung, direct Reibungscoefficienten in die Rechnung einzuführen seien. In der That beruht der Erfolg dieser Speculation geradezu auf dem Vorhandensein der durch die Reibung bedingten Glieder, und nimmt man dieselben durch Nullsetzung des Reibungscoefficienten fort, so verliert die erhaltene Dispersionscurve jede Aehnlichkeit mit der von der Erfahrung verlangten.

Hrn. Helmholtz Behandlung scheint mir indess insofern eine Erklärung ad hoc, als sie sowohl von der experimentell festgestellten doppelten Artverschiedenheit der elliptischen Polarisation (des Glases und der Metalle, der positiven und der negativen) sowie auch von der durch die Translation eines Mittels bewirkten Modification der Fortpflanzungsgeschwindigkeit absieht, resp. keine Rechenschaft davon gibt, und als sie endlich in Widerspruch steht zu den bisherigen Reflexionstheorien von Fresnel, Cauchy und mir, welche sämmtlich wenigstens für die Gränzfläche

---

1) Monatsber. der Berl. Akad. Oct. 1874 — Poggendorff's Ann., Bd. 154, S. 582.

selbst eine einfache Beziehung zwischen den bezüglichen lebendigen Kräften und dem Brechungsverhältniss verlangen.

Mir wird es, zumal nach den Ergebnissen meiner letzten Arbeit, schwer, von der Vorstellung zu lassen, dass den Metallen ein mit dem Einfallswinkel variabler Brechungsindex zukomme, und dass die Absorption statt einer primären bloss eine secundäre Rolle spiele. Nach vielfachen Bemühungen habe ich mich endlich für die Unmöglichkeit entscheiden müssen, selbst durch Erweiterung der Helmholtz'schen Annahmen durch Hinzuziehung neuer Glieder zu allseitig brauchbaren Ausdrücken zu gelangen. Diese Voraussetzungen scheinen mir indess selbst theoretisch zum Theil nicht ohne Bedenken.

Der Erfahrung zufolge zeigt sich nämlich der Verlauf der Dispersionscurve als unabhängig vom Aggregatzustande. Beachtet man nun, dass sich der Aether nur ganz raschen Bewegungen gegenüber gewissermassen als fester Körper verhält, während sein Widerstand gegen langsame Verschiebungen, und wären es selbst die der leichten im Raume herumfliegenden Gastheilchen, vollkommen verschwindet, und dass in Uebereinstimmung hiermit den Aberrationsbeobachtungen zufolge die Translation eines Mittels, welche senkrecht zur Richtung der Strahlen geht, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben unafficirt lässt, dann dürfte der Mechanismus der Wechselwirkung zwischen Körper- und Aethertheilchen in Wirklichkeit ein complicirterer sein als Hr. Helmholtz ihn annimmt. Unserer einfachen Erwägung zufolge würde der Einfluss der Körpertheilchen auf ganz grosse Schwingungsdauern möglicher Weise = 0 und daher für alle Aggregatformen die zugehörige Fortpflanzungsgeschwindigkeit = 1, während sich aus der Helmholtz'schen Theorie wenigstens für Gase diese Geschwindigkeit als 0 ergibt.

Wenn ich nun selber an die Aufstellung einer eigenen Theorie gehe, so lassen sich die angedeuteten Schwierigkeiten meines Erachtens in folgender einfachen Weise umgehen.

2. Wir beschränken uns im Folgenden auf ruhende Mittel und behandeln zunächst ein solches, dessen ponderable Moleküle isotrop geordnet und in ihrer chemischen Qualität

optisch einfach sind, so dass die bezügliche Dispersionscurve nur einen einzelnen Absorptionsstreifen aufweist.

Dies vorausgesetzt, seien m, m' die in der Volumeinheit enthaltenen Massen der Aether- und Körpertheilchen, und ϱ, ϱ' seien die bezüglichen Excursionen. Es sind dann $m\frac{d^2\varrho}{dt^2}$, $m'\frac{d^2\varrho'}{dt^2}$ die auf sie einwirkenden Kräfte, gemessen durch die Beschleunigung. Andererseits werden diese Kräfte folgendermassen zusammengesetzt sein.

Heisst e die Constante der elastischen Deformation des reinen Aethers, so dass für diesen:

$$m\frac{d^2\varrho}{dt^2} = e\frac{d^2\varrho}{dx^2},$$

wo die x auf die Richtung der Fortpflanzung zu beziehen sind, so tritt zur Kraft $e\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ für das Innere eines ponderablen Mittels noch eine weitere von der Wechselwirkung der Körpertheilchen herrührende hinzu. Dieselbe wird wegen der unendlich geringeren Masse und Kleinheit der Aethertheilchen sowie wegen der Leichtigkeit ihrer Verschiebung gleichfalls eine Deformationskraft $E\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ sein[1]), deren vor der Hand unbekannte Charakteristik E sich sonach als Zuwachs zu e addirt. Man mag sich etwa denken, dass durch den Widerstand der Körpertheilchen ein ähnlicher Effect entsteht, als würde die Spannung des Aethers geändert. Man hat folglich für die Bewegung der Aethertheilchen im Innern:

$$\text{1a.} \qquad m\frac{d^2\varrho}{dt^2} = (e+E)\frac{d^2\varrho}{dx^2}.$$

Was andererseits die Schwingungen der mehr discret vertheilten Körpertheilchen betrifft, so ist wohl von vornherein die Annahme zulässig, dass deren Amplitüden sehr viel kleiner sind als die der Aethertheilchen. Wir betrachten ferner die Anwesenheit der ersteren lediglich als ein Hinderniss für die freie Bewegung des Aethers.

---

1) Wenigstens reicht, wie der Erfolg zeigen wird, eine solche Kraft aus.

Die auf die Körpertheilchen einwirkende Kraft wird nun einmal abhängen können von der Krümmung der dieselben verbindenden Wellenlinie[1]), dann aber auch von dem Abstande derselben von der Gleichgewichtslage. Wir wollen Beides als das Wahrscheinlichere nehmen. Demzufolge wird sich diese Kraft zum Theil zwar auch als eine Deformationskraft $E'\frac{d^2\varrho'}{dx^2}$ darstellen, aber freilich als eine Deformationskraft der durch den schwingenden Aether verschobenen Körpertheile. Dazu wird dann eine direct einwirkende Schiebkraft hinzutreten, die, sofern sie dem jedesmaligen Ausschlage proportional ist, durch $K\varrho'$ bezeichnet werden möge, und von der es dahin gestellt bleibe, ob sie unmittelbar von den drängenden Aethertheilchen ausgeht oder erst mittelbar durch die Reaction der Körpertheilchen erzeugt wird. e ist selbstverständlich positiv, das Vorzeichen der übrigen Kräfte dagegen vorerst unbestimmt. Und da der Verlauf der Dispersion, wie angedeutet, vom Aggregatzustand unabhängig ist, so bezieht sich der Inhalt von E' und K nicht sowohl auf diejenigen Kräfte, welche wie bei festen Körpern das Gefüge derselben zusammenhalten, als vielmehr, analog dem Verhalten der mit Rotationspolarisation begabten Dämpfe, auf die Kräfte zwischen den Bestandtheilen der Moleküle selber, oder endlich auf die wechselseitigen Kräfte zwischen Aether- und Körpertheilchen, sofern dieselben von der Beschaffenheit und Form der letzteren abhängen. Wir hätten sonach für die Bewegung der Körpertheilchen:

1b. $$m'\frac{d^2\varrho'}{dt^2} = E'\frac{d^2\varrho'}{dx^2} + K\varrho'.$$

Die weitere und einzige Schwierigkeit besteht jetzt in der Behandlung der Functionen E, E', K, die, wie man erkennt, die Schwingungsdauer oder Wellenlänge implicite

1) Leisteten die Körpertheilchen eines Mittels der Bewegung gar keinen Widerstand, so bestände für dasselbe die nämliche Gleichung, als wenn die Massen m und m' fest mit einander verbunden wären, d. h.

$$(m+m')\frac{d^2\varrho}{dt^2} = e\frac{d^2\varrho}{dx^2}.$$

Auch diesen Extremfall wird die Theorie zu berücksichtigen haben.

enthalten müssen. Hier bietet sich indess sofort die gewiss plausible Annahme, dass die drei vorstehenden, durch die Anwesenheit der ponderablen Theilchen bedingten und aus der Wechselwirkung mit dem Aether in gleichem Masse herfliessenden Kräfte einander streng proportional sind. Wir werden dem entsprechend setzen:

2. $$E = \alpha\varepsilon,\ E' = \alpha\varepsilon',\ K = \alpha\varkappa,$$

wo ε, ε', $\varkappa$ Constante bedeuten, die mit der statischen Beschaffenheit des Molekulargefüges, resp. der Dichtigkeit, gegeben sind, und wo nur mehr α allein von der Bewegung, also dem dynamischen Zustande des Mittels, abhängt. Es kommt folglich definitiv:

$$m\frac{d^2\varrho}{dt^2} = (e+\alpha\varepsilon)\frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

$$m'\frac{d^2\varrho'}{dt^2} = \alpha\varepsilon'\frac{d^2\varrho'}{dx^2}+\alpha\varkappa\varrho'.$$

Um diese Gleichungen zu integriren, setzen wir:

3. $$\varrho = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{l}-\Theta\right)$$
$$\varrho' = A'\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{l}-\Theta\right).$$

Führt man diese Werthe ein, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$\frac{m}{T^2} = \frac{e+\alpha\varepsilon}{l^2}$$

$$\frac{m'}{T^2} = \alpha\frac{\varepsilon'}{l^2}-\alpha\varkappa',$$

wo zur Abkürzung $\frac{\varkappa}{4\pi^2} = \varkappa'$ gesetzt ist. Diese Bedingungen müssen also zwischen den Constanten der Ausdrücke 3 erfüllt sein, wenn sie als Integrale der Gleichungen 1 zulässig sein sollen. Eliminirt man aus ihnen α, so kommt zunächst:

$$\frac{m}{T^2} = \left(e - \frac{\frac{m'}{T^2}\varepsilon}{\varkappa' - \frac{\varepsilon'}{l^2}}\right)\frac{1}{l^2}$$

und unter Berücksichtigung der Beziehung $l = \omega T$:

$$\omega^2\left(m + \frac{m'\varepsilon}{\varkappa' l^2 - \varepsilon'}\right) = e.$$

Wir führen endlich die für den Weltäther ($m' = 0$) geltende Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ein, für welche $v^2 = \frac{e}{m}$, und setzen zur Abkürzung:

$$\frac{\varepsilon'}{\varkappa'} = L^2, \quad \frac{m'\varepsilon}{m\varepsilon'} = D.$$

Alsdann erhält das Brechungsverhältniss n die endgültige Form:

$$n^2 - 1 = \frac{D}{\frac{l^2}{L^2} - 1}. \tag{4.}$$

Sie entspricht der obigen Forderung, dass für eine unendlich grosse Wellenlänge $l = T = \infty$ das Brechungsverhältniss $n = 1$ wird. Für eine unendlich kurze Wellenlänge dagegen erhält man den Gränzwerth $n'^2 = 1 - D$, gegen den selbst insofern, als derselbe bei positivem D kleiner als 1 wird, schwerlich theoretische Einwendungen zulässig sind.

Für die Variable α findet man:

$$\alpha = -\frac{m'\omega^2}{\varkappa' l^2 - \varepsilon'} = -\frac{\frac{m'}{\varepsilon'}\omega^2}{\frac{l^2}{L^2} - 1}.$$

3. Um von den bewegenden Kräften zu den lebendigen fortzuschreiten, so denke man sich die Theilchen des Mittels aus ihrer Gleichgewichtslage heraus in eine solche relative Lage gebracht, wie sie als extreme irgend einer inneren Wellenlänge l für irgend einen Augenblick entsprechen würde, und in dieser Lage durch eine passende Kraft festgehalten. Die so erzeugte Spannung ist die gleiche, als wenn die ponderablen Theilchen gar nicht vorhanden wären. Ueberlässt man dann das Mittel sich selber, so drängen die Aethertheilchen gegen die Gleichgewichtslage zurück, reissen die Körpertheilchen mit sich fort, und die frühere Spannkraft verwandelt sich in lebendige Kraft, die sich auf beide Arten von Molekülen vertheilt. Beide passiren die Gleichgewichtslage mit einer Energie, die resp. bezeichnet werde durch mC^2, $m'C'^2$ oder auch durch $m\frac{A^2}{T^2}$, $m'\frac{A'^2}{T^2}$. Und da im Weltäther bei iden-

tischer Verschiebung, d. h. bei identischem A und l, auch eine gleiche Spannkraft entwickelt wird, die aber nunmehr die maximale lebendige Kraft $mC_0^2 = m\frac{A^2}{T_0^2}$ erzeugt, so hat man:

$$m\frac{A^2}{T^2}+m'\frac{A'^2}{T^2}=m\frac{A^2}{T_0^2},$$

welche Beziehung wegen: $l = vT_0 = \omega T$ und: $v^2 = \frac{e}{m}$ übergeht in:

$$\text{5a.} \qquad m\frac{A^2}{T^2}+m'\frac{A'^2}{T^2}=\frac{e}{l^2}A^2,$$

oder auch, wenn man zugleich statt der maximalen die variablen Oscillationsgeschwindigkeiten oder Ausschläge einführt, in:

$$\text{5b.} \qquad n^2-1 = \frac{m'\varrho'^2}{m\varrho^2}.$$

Es ist also die sogenannte brechende Kraft gleich dem Verhältniss, in welchem sich eine gegebene lebendige Kraft auf Körper- und Aethertheilchen vertheilt.

Dies vorausgesetzt, haben wir zu prüfen, ob und unter welchen Bedingungen unsere Dispersionsgleichungen mit dem hier abgeleiteten Satze verträglich sind. Wir multipliciren zu dem Ende die beiden Differentialgleichungen resp. mit ϱ,ϱ' und addiren. So kommt:

$$m\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2}+m'\varrho'\frac{d^2\varrho'}{dt^2}=e\varrho\frac{d^2\varrho}{dx^2}+\alpha\varepsilon\varrho\frac{d^2\varrho}{dx^2}+\alpha\varepsilon'\varrho'\frac{d^2\varrho'}{dx^2}+\alpha\varkappa\varrho'^2$$

und nach Ausführung der Integration:

$$\frac{m}{T^2}\varrho^2+\frac{m'}{T^2}\varrho'^2=\frac{e}{l^2}\varrho^2+\alpha\frac{\varepsilon}{l^2}\varrho^2+\frac{\varepsilon'}{l^2}\varrho'^2-\varkappa'\varrho'^2.$$

Die Vergleichung mit Gleichung 5a lehrt sofort, dass die zu erfüllende Bedingung die folgende ist:

$$\frac{\alpha}{l^2}\varrho^2\left[\varepsilon+(\varepsilon'-\varkappa'l^2)\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\right]=0.$$

Lässt man den ersten Factor fort und führt für $\frac{\varrho'}{\varrho}$ seinen Werth aus 5b ein, so erhält man:

$$\varepsilon-\varepsilon'\frac{l^2}{L^2}-1\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}=0$$

oder auch:

$$n^2-1=\frac{D}{\frac{l^2}{L^2}-1}.$$

Die gesuchte Bedingung ist also keine andere als die Dispersionsformel selber, und sonach bildet dieselbe die nothwendige Ergänzung zu dem Satze von der brechenden Kraft als dem Verhältniss der lebendigen Kräfte der Körper- und Aethertheilchen.

4. Mittel, welche der bisher entwickelten einfachen Dispersionsformel für den ganzen Umfang der Strahlung in Strenge genügten, sind bis jetzt nicht beobachtet worden. Man wird daraus schliessen, dass die Zahl derjenigen Substanzen, welche anstatt einer mehrere Zonen mit complexem Brechungsverhältniss (Absorptionsstreifen) besitzen, die bei Weitem überwiegende ist. Was die Behandlung dieser Mittel betrifft, so wird man die schwingende Körpermasse in so viele optisch-chemische Elemente zu zerlegen haben, als Absorptionsstreifen vorkommen. Wäre deren Zahl n, so erhielte man n Differentialgleichungen für die Schwingungen der n verschiedenen Körperqualitäten von den Massen m' und daneben für die Schwingungen des Aethers die um n Zusatzglieder vermehrte Deformationsgleichung des Weltäthers. Man erhielte so:

$$m\frac{d^2\varrho}{dt^2}=\left(e+\alpha_1\,\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\right)\frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

6. $$m'_1\frac{d^2\varrho'_1}{dt^2}=\alpha_1\varepsilon'_1\frac{d^2\varrho'_1}{dx^2}+\alpha_1\varkappa_1\varrho'_1$$

$$m'_2\frac{d^2\varrho'_2}{dt^2}=\alpha_2\varepsilon'_2\frac{d^2\varrho'_2}{dx^2}+\alpha_2\varkappa_2\varrho'_2\ldots\ldots$$

Die Integration und Elimination der α ergäbe jetzt:

$$\omega^2\left(m+\frac{m'_1\varepsilon_1}{\varkappa'_1 l^2-\varepsilon'_1}+\frac{m'_2\varepsilon_2}{\varkappa'_2 l^2-\varepsilon'_2}+\ldots\right)=e.$$

Und wenn wieder allgemein:

$$\frac{\varepsilon'}{\varkappa'}=L^2,\ \frac{m'\varepsilon}{m\varepsilon'}=D$$

gesetzt wird, so kommt definitiv:

7. $$n^2-1=\Sigma\frac{D}{\frac{l^2}{L^2}-1}.$$

Um nun diesen Ausdruck mit der Erfahrung zu vergleichen, resp. auf eine für die numerische Behandlung bequemere Form zu bringen, beachte man, dass das ganze der genaueren Messung zugängliche Spectrum nur etwa zwei Octaven umfasst, und dass dasselbe von den Absorptionen der kleinsten wie der grössten Wellenlängen beeinflusst wird. Man denke sich ferner die l^2 als Abscissen und die einzelnen Functionswerthe derselben, nämlich die unter dem Summenzeichen enthaltenen Glieder, jeden für sich als Ordinaten aufgetragen. Man erhält so n Particularcurven, und die totale Ordinate ist die Summe aller particularen. Jede dieser Theilcurven verläuft nach einem hyperbolischen Gesetze; ihr Mittelpunkt liegt bei L; rechts von demselben erhebt sie sich höher, links tiefer als die horizontale Asymptote, und ihre Steilheit nimmt zu beiden Seiten desselben sehr rasch ab. In Folge dessen werden alle Curven, deren Mittelpunkt von den Gränzen des zugänglichen Spectrums verhältnissmässig weit absteht, auf die zwischen diesen enthaltene Totalcurve nur einen nahezu constanten Einfluss üben. Ueberwiegt der Einfluss des ultravioletten Gebietes, so wird dieselbe gehoben, ist dagegen der des ultrarothen Gebietes der stärkere, so wird sie gesenkt. In beiden Fällen hätte man ein Mittel, welches nur schwach dispergirte, und dessen mittleres Brechungsverhältniss entweder grösser oder kleiner als 1 wäre, so dass: $n^2_m - 1 = a$.

Zu diesen entfernten Curven trete jetzt der Einfluss einer solchen, deren Mittelpunkt entweder gerade in das sichtbare Spectrum hineinfällt oder wenigstens den Gränzen desselben hinlänglich nahe liegt. Die Totalcurve erlangt dann die Form:

$$n^2 - 1 = a + \frac{D'}{\frac{l^2}{L^2} - 1}.$$

Und wenn man für a seinen obigen Werth einführt, also folgerichtig a auf die von der Localerhebung freie Mittelpunktsordinate bezieht, und endlich $L = l_m$, $D' = Dn^2_m$ setzt, so erhält man:

$$8. \qquad (n^2 - n^2_m)(l^2 - l^2_m) = Dn^2_m \, l^2_m$$

oder auch:

$$(\omega^2_m - \omega^2)\,(l^2 - \mathfrak{L}^2) = \mathfrak{D}.$$

Das durch diese Gleichungen ausgesprochene Dispersionsgesetz ist das nämliche, welches ich insbesondere für den Schwefelkohlenstoff aus der Erfahrung abgeleitet, und auf das ich in meiner Abhandlung über das Complexe alle theoretischen Consequenzen bezogen habe. Ersetzt man in 8 l durch $\frac{\lambda}{n}$, unter λ die zugehörige Wellenlänge im Weltäther verstanden, und löst die so umgeformte Gleichung nach n auf, so erhält man für die Form der wahren Dispersionscurve $n = f(\lambda)$ das Bildungsgesetz:

$$\text{9a.}\qquad n = \tfrac{1}{2} n_m \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \right).$$

Und für die zugeordnete innere Wellenlänge l wegen der Symmetrie der Gleichung 8:

$$\text{9b.}\qquad l = \tfrac{1}{2} l_m \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \mp \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \right).$$

Beachtet man schliesslich, dass sich die Vorzeichen in eindeutiger Weise[1]) dadurch bestimmen, dass die Ordinaten der Curve 9a (im Unterschied von Curve 9b) niemals unendlich gross werden, so zeigt dieselbe in der That die von der Erfahrung verlangte Gestalt. Sie befindet sich rechts von der Mittellinie ($\lambda > \lambda_m$) oberhalb der horizontalen Asymptote ($n > n_m$), links ($\lambda < \lambda_m$) unterhalb derselben ($n < n_m$). Die Curve hat ferner zwischen zwei bestimmten Gränzwellenlängen, λ'_0, λ''_0, den theoretischen Gränzen des Absorptionsstreifens, eine scheinbar unstetige Unterbrechung. Für dieses Gebiet werden nämlich die Brechungsverhältnisse complex ($n = a \pm b\sqrt{-1}$), ein Beweis, dass hier die Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen nicht mehr den gewöhnlichen Gesetzen gehorchen. Dispersionskraft D, äussere und innere Gränzwellenlängen λ'_0, l'_0; λ''_0, l''_0 und Gränzbrechungsindices n'_0, n''_0 sind mit λ_m, l_m verknüpft durch die Beziehung:

$$\text{10.}\quad D = \left(1 - \frac{n^2_0}{n^2_m}\right)^2 = \left(1 - \frac{l^2_0}{l^2_m}\right)^2 = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_m}\right)^2.$$

---

1) Hiermit fällt zugleich ein von Hrn. Helmholtz erhobener Einwand.

Der Erfahrung zufolge ist für Schwefelkohlenstoff wie für alle diejenigen Mittel, auf welche sich vorstehende Formel wenigstens näherungsweise anwendet, n^2_m grösser als 1, folglich der Einfluss der ultravioletten Absorptionen der überwiegende. Für alle diese Mittel liegt selbst die nächste einflussreichste Particularcurve innerhalb des Gebietes der kürzeren Wellenlängen. Erst in dritter Linie macht sich für die Mehrzahl derselben daneben auch eine Einwirkung der ultrarothen Seite erkennbar.

Nimmt man schliesslich für die nte Particularcurve $D_n = 1$ und $L_n = \infty$, so schreibt sich Gleichung 7 auch so:

$$n^2 = \frac{D_1 L_1^2}{l^2 - L_1^2} + \frac{D_2 L_2^2}{l^2 - L_2^2} + \dots\dots,$$

und diese Beziehung wird als eine empirische den Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Wellenlänge gleich gut darstellen, sofern man nur die Anzahl der Glieder von der Erfahrung selber abhängig macht. Im Uebrigen gestattet der hyperbolische Charakter der Particularcurven, dass man n gegen seinen reciproken Werth ω vertauscht, und so wird auch die Formel:

$$\omega^2 = \frac{A}{l^2 - B} + \frac{C}{l^2 - D} + \dots\dots,$$

auf gleiche Zulässigkeit Anspruch machen. Sie ist wirklich in der umfangreichsten Weise von mir geprüft und bestätigt worden.

Aus dem Ergebniss dieser Prüfung ziehe ich hier rückwärts den Schluss, dass ebenso die theoretische Formel 7 mit den bisherigen besten, sich auf ein Intervall von zwei Octaven erstreckenden Messungen vollkommen übereinstimmt.

5. Wollen wir auch in diesem allgemeineren Fall zur Erörterung der lebendigen Kräfte übergehen, so wird zunächst der Hinweis genügen, dass eine Verallgemeinerung der unter 3 durchgeführten Schlussweise ohne Weiteres zur entsprechenden Beziehung:

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \varrho'^2}{m \varrho^2}$$

hinführt. In dieselbe kann man selbstverständlich statt der lebendigen Kräfte der einzelnen Moleküle auch die lebendige Kraft der ganzen Körpermasse einführen; man hat dann zu setzen:

$$\Sigma m' \varrho'^2 = \varrho'_m{}^2 \Sigma m'.$$

Was andererseits die Verträglichkeit derselben mit den obigen Differentialgleichungen betrifft, so erhält man durch analoges Verfahren wie oben:

$$11a.\ m\varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \Sigma m' \varrho' \frac{d^2\varrho'}{dt^2} = e\varrho \frac{d^2\varrho}{dx^2} + \Sigma \alpha \left(\varepsilon \varrho \frac{d^2\varrho}{dx^2} + \varepsilon' \varrho' \frac{d^2\varrho'}{dx^2} + \varkappa \varrho'^2 \right)$$

und die Bedingungsgleichung wird:

$$\Sigma \alpha \left(\varepsilon \varrho \frac{d^2\varrho}{dx^2} + \varepsilon' \varrho' \frac{d^2\varrho'}{dx^2} + \varkappa \varrho'^2 \right) = 0$$

oder:

$$\Sigma \frac{\alpha}{l^2} \varrho^2 \left[\varepsilon + (\varepsilon' - \varkappa' l^2) \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} \right] = 0.$$

Sofern nun das behandelte Mittel (etwa ein Gasgemenge oder eine Lösung von Salzen) ganz willkürlich aus mehreren einfacheren Bestandtheilen, von denen jeder sich durch ε, ε', $\varkappa'$ und α charakterisirt, zusammengesetzt ist, und sofern wir überdies nicht annehmen, dass diese einzelnen Bestandtheile Wechselwirkung auf einander ausüben, so zerfällt die vorstehende Totalbedingung in n particuläre. Man wird daher haben:

$$\varepsilon_1 + (\varepsilon_1' - \varkappa_1' l^2) \frac{\varrho_1'^2}{\varrho^2} = 0$$

$$\varepsilon_2 + (\varepsilon_2' - \varkappa_2' l^2) \frac{\varrho_2'^2}{\varrho^2} = 0 \ \ldots\ldots$$

Mit Rücksicht hierauf fasst sich denn das Gesammtergebniss der bisherigen Untersuchung auf die folgende kürzeste Form zusammen:

$$11.\quad \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} = \frac{\varepsilon}{\varkappa' l^2 - \varepsilon'},\ n^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \varrho'^2}{m \varrho^2}.$$

6. Wegen der Beschaffenheit der beiden letzten Gleichungen ist es natürlich unmöglich, dieselben auf die Form $n = f(\lambda)$ zu bringen und daraus die Eigenschaften der wahren Dispersionscurve in Strenge abzuleiten. Zu einem allgemeinen Ueberblick genügt freilich das, was oben bezüglich der Näherungsformel 9 ausgeführt wurde. Es erhellt daraus, dass, wenn man durch einen Mittelpunkt einer Particularcurve n der Gleichung 11 hindurchgeht, man gleichzeitig auf der wahren Dispersionscurve eine schein-

bare Unstetigkeit (einen Absorptionsstreifen) durchschreitet. Hat zu beiden Seiten dieser Mittellinie das $\varrho'_n{}^2$ der Gl. 11 das entgegengesetzte Vorzeichen, so dass sich die particulare lebendige Kraft $m'_n \varrho_n'^2$ rechts zu den übrigen addirt, links von ihnen subtrahirt, so wird innerhalb der Gränzen des Absorptionsstreifens Wellenlänge l und Brechungsindex n complex. Nun habe ich in meiner oben citirten Arbeit[1]) gezeigt, dass in diesem Falle das gespiegelte und gebrochene Licht stark elliptisch polarisirt ist, und dass auf der durchgehenden Welle nicht bloss die Aethertheilchen eine plötzliche Phasenverschiebung χ, sondern ebenso die Körpertheilchen eine davon verschiedene Phasenänderung χ' erleiden. Bezeichnet man nun den wirklichen Ausschlag der Körper- und Aethertheilchen innerhalb der Gränzen der complexen Zone durch ϱ'_0, ϱ_0, so ergibt eine Verallgemeinerung der dort entwickelten Gesichtspunkte, dass die nunmehrige Gleichung:

$$(a+b\sqrt{-1})^2-1=\Sigma\frac{m'(r'_1+r'_2\sqrt{-1})^2}{m(r_1+r_2\sqrt{-1})^2}$$

in die beiden folgenden zerfällt:

$$12. \quad \begin{aligned} a^2-b^2-1 &= \Sigma\frac{m'\varrho'_0{}^2}{m\varrho_0{}^2}\cos 2(\chi'-\chi) \\ 2ab &= \Sigma\frac{m'\varrho'_0{}^2}{m\varrho_0{}^2}\sin 2(\chi'-\chi). \end{aligned}$$

Ist also für die nte Zone und zwar für den Gränzpunkt G' rechts derselben $\chi'-\chi=0$, so werden zwar sämmtliche Particularausschläge mit dem Eintritt in den Absorptionsstreifen gleichzeitig solche Phasenunterschiede erfahren aber dieselben erreichen auf der Mittellinie nur ein geringfügiges Maximum und sinken jenseits derselben auf Null zurück. Bloss für $(\varrho'_0, \varrho_0)_n$ steigt $2(\chi'-\chi)$ erheblich an, erreicht wenigstens bei sehr schwacher Dispersion auf der Mittellinie den Werth $\pm 90^0$ (entsprechend $\pm \frac{1}{4}$ l) und für den Gränzpunkt G'' links den Werth $\pm 180^0$ (oder $\pm \frac{1}{2}$ l), so dass hier zwar wieder $b=0$ und damit die Curve reell wird, aber das Vorzeichen von $\varrho'_n{}^2$ in Gleichung 11 der Voraussetzung zufolge in das entgegengesetzte übergeht.

1) Verhandl. S. 93.

Bildet man schliesslich das resultirende Verhältniss der lebendigen Kräfte für das Innere der complexen Zone, so lässt sich setzen:

$$\frac{R'_o{}^2 \Sigma m'}{R_o{}^2 m} = \sqrt{(a^2-b^2-1)^2+4a^2b^2}.$$

Sämmtliche Rechnungen lassen sich für eine Substanz mit einer einzigen Unstetigkeit im Spectrum ($n_m = 1$), also bei Fortlassung des Summenzeichens, ohne Weiteres ausführen. Man findet zunächst für sehr kleine Dispersivkräfte:

$$13. \quad \frac{m'\varrho'_o{}^2}{m\varrho^{o2}} = \sqrt{D} = \sqrt{\left(1-\frac{\lambda_o}{\lambda_m}\right)^2} = \sqrt{(1-n_o{}^2)^2},$$

$$\sin 2(\chi'-\chi) = \sqrt{\frac{\lambda-\lambda_o}{\lambda_m-\lambda_o}}, \cos 2(\chi'-\chi) = \sqrt{\frac{\lambda_m-\lambda}{\lambda_m-\lambda_o}}.$$

Demnach erhält man zufolge obiger Festsetzung

links v. d. Mitte: rechts v. d. Mitte:

$$a^2-b^2-1 = -\frac{\lambda_m-\lambda''_o}{\lambda_m}\sqrt{\frac{\lambda_m-\lambda}{\lambda_m-\lambda''_o}}, \quad +\frac{\lambda'_o-\lambda_m}{\lambda_m}\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_m}{\lambda'_o-\lambda_m}}$$

$$2ab = \pm\frac{\lambda_m-\lambda''_o}{\lambda_m}\sqrt{\frac{\lambda-\lambda''_o}{\lambda_m-\lambda''_o}}, \quad \pm\frac{\lambda'_o-\lambda_m}{\lambda_m}\sqrt{\frac{\lambda'_o-\lambda}{\lambda'_o-\lambda_m}}.$$

Bezeichnet man nun den Ausdruck: $a^2-b^2-1 = N^2-1$ als den bloss r e f r a c t i v e n, 2ab als den zugleich a b s o r p t i v e n Theil des Brechungsindex n, so nimmt sonach der erstere von der rechts liegenden Gränze G′ des Absorptionsstreifens, für welche er den Werth $+\sqrt{D} = n'_o{}^2-1$ erreicht, nach der Mittellinie zu ab. Auf derselben wird $a^2-b^2 = N^2 = 1$ und sinkt für den Gränzpunkt G″ links noch weiter auf $1-\sqrt{D} = n''_o{}^2$ herab. Denkt man sich also die Gränzpunkte G′, G″ durch eine nach vorstehendem Gesetze $N = F(\lambda)$ construirte Curve[1]) mit einander verbunden, so bildet dieselbe in gewisser Beziehung die Fortsetzung und

---

1) N bleibt freilich vom wirklichen Geschwindigkeits- oder Sinusverhältniss: $\nu = \frac{v}{\omega} = \frac{\sin e}{\sin r}$ (für senkrechte Incidenz = a), dessen variabel werdende Differenz $\nu^2-1 = \frac{m'}{m} Q^2$ als die w i r k s a m e brechende Kraft betrachtet werden muss, zu unterscheiden. Vergl. l. c. S. 70 u. 85 sowie unten unter 15.

Ergänzung der bis dahin isolirten Zweige der reellen Dispersionscurve. Ihre Ordinaten wachsen gleichzeitig mit der Wellenlänge.

Der absorptive Theil dagegen nimmt von den beiden Gränzen zur Mitte gleichmässig zu, und ist daher überall entweder nur das obere oder nur das untere Vorzeichen zu brauchen.

Geht man endlich von ganz schwachen zu stärkeren Dispersivkräften über, so ergibt die Behandlung der Gleichung 4, wenn man in ihr l durch $\frac{\lambda}{n}$ ersetzt und sie jetzt statt nach n nach n^2-1 auflöst, unmittelbar:

$$14. \quad n^2-1 = -\tfrac{1}{2}\left(1+D-\frac{\lambda^2}{\lambda^2_m}\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(1+D-\frac{\lambda^2}{\lambda^2_m}\right)^2 - D}.$$

Sie zerfällt für die complexe Zone in die beiden folgenden:

$$a^2-b^2-1 = -\tfrac{1}{2}\left(1+D-\frac{\lambda^2}{\lambda^2_m}\right), \quad 2ab = \pm\sqrt{D-\tfrac{1}{4}\left(1+D-\frac{\lambda^2}{\lambda^2_m}\right)^2}$$

und gibt neben: $\frac{m'\varrho'_0{}^2}{m\varrho_0{}^2} = \sqrt{D}$ für $2(\chi'-\chi)$ complicirtere Werthe. Für die Mittellinie insbesondere wird dieser Winkel stets kleiner als 90°.

Dass allerdings die hier angedeuteten Vorgänge niemals ohne begleitende Absorption verlaufen, wird schwerlich überraschen. Man hat eben in dem Auftreten des Phasenunterschiedes zwischen Aether- und Körpertheilchen einen implicite mitgegebenen Reibungscoefficienten, und die Stärke der Absorption[1])

1) Setzt man nach Cauchy den Absorptionsfactor der Amplitüde gleich $e^{\beta z}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\nu \cos r}$, die Abscisse z auf dem Lothe genommen, so hat man für kleine D:

$$e^{-\frac{\pi}{l}\frac{m'\varrho'_0{}^2 \sin 2(\chi'-\chi)}{m\varrho_0{}^2+m'\varrho'_0{}^2}d}$$

wo d die durchlaufene Dicke bedeutet und β nur negativ ist. Ich acceptire denselben vollständig, jedoch bedingungsweise, d. h. unter strengster Festhaltung vorstehender Bedeutung und ausser jedwedem Zusammenhang mit den sogenannten Gränzgleichungen. Vergl. ebend. S. 69.

wird geradezu sin 2 $(\chi'-\chi)$ proportional sein, gleichgültig, ob das Vorzeichen desselben (und damit die entstehende elliptische Polarisation) positiv oder negativ ist. Unter dieser Annahme wird dann die Helligkeitsdifferenz zwischen Rand und Mitte eines Absorptionsbandes um so grösser, je kleiner D, also je schmaler dasselbe ist.

Im Uebrigen haben die vorstehenden Erörterungen manchen früher dunkeln Punkt mehr aufgehellt, und wenn sich die Näherungsformel 9 bei entsprechender Behandlung ebensowohl auf die Absorption wie auf die Brechung zusammengesetzter Mittel anwenden dürfte, so mag es andererseits kaum mehr zweifelhaft sein, dass die Phasendifferenz $2(\chi'-\chi)$ nicht wie der sogenannte Ellipticitätscoefficient gegen das Innere des Mittels hin abnimmt, sondern sich vielmehr constant erhält, so dass sich in jeder folgenden Schicht gleichviel regelmässige Schwingungsbewegung in unregelmässige umwandelt.

7. Wenn wir nunmehr den Versuch machen, unsere Theorie auch auf die anisotropen Mittel auszudehnen, so wird nur ein Verfahren zum Ziele führen, welches von dem bisher üblichen völlig verschieden ist. Nach dem Vorgange Fresnel's hat nämlich die bisherige mathematische Behandlungsweise sich ausschliesslich auf die Differentialgleichungen der Schwingungsbewegung des Aethers senkrecht zur Wellennormale beschränkt und mittelst derselben die Geschwindigkeitsfläche der Normalen (entsprechend dem sogenannten ersten Ellipsoid) als die primäre abgeleitet. Erst mit Benutzung dieser letzteren und zwar als Enveloppe derselben erhält man dann die Geschwindigkeitsfläche der Strahlen, die sogenannte Wellenfläche (entsprechend dem zweiten oder Plücker'schen Ellipsoid). Erscheint so die Wellenfläche der ersteren gegenüber nur als secundär oder derivirt, so ist es in der Natur gerade umgekehrt; hier hat bloss die Wellenfläche eine physikalische Bedeutung, und die Normalfläche ordnet sich ihr lediglich zu als eine allerdings werthvolle Hülfsfläche.

Die besprochene Incorrectheit lässt sich nur dadurch vermeiden, dass man die Schwingungen der Körpertheilchen hinzuzieht.

Das Mittel, um dessen doppeltbrechende Eigenschaften es sich handelt, sei dadurch aus einem isotropen von dem allseitig gleichen Molekularabstand r_0 hervorgegangen, dass man dasselbe nach drei auf einander senkrechten Richtungen den Druck- resp. Zugkräften p_x, p_y, p_z aussetzt, und dadurch lineare, diesen Drucken — wie wir annehmen wollen — genau proportionale axiale Ausdehnungen erzielt, welche dann weiter die Coordinaten-Entfernungen: $x = x_0(1 + \mathfrak{a} p_x) = x_0(1+\alpha)$, $y = y_0(1+\mathfrak{a} p_y) = y_0(1+\beta)$, $z = z_0(1+\mathfrak{a} p_z) = z_0(1+\gamma)$ zur Folge haben. Der variable Molekularabstand r für irgend eine Richtung, die mit den Axen des Druckes die Winkel a, b, c bildet, berechnet sich daraus, wie ich weiterhin zeigen werde, mittelst der Gleichung:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 a}{r_0{}^2(1+\alpha)^2} + \frac{\cos^2 b}{r_0{}^2(1+\beta)^2} + \frac{\cos^2 c}{r_0{}^2(1+\gamma)^2}.$$

Wird nun ein Aetherpunkt des Mittels von irgend einer äusseren Kraft fortdauernd erschüttert, so pflanzt sich diese Bewegung auf alle umliegenden Aether- und Körpertheilchen fort, und nach Verlauf etwa der Zeiteinheit ist sie bis zu einer Fläche, die man *κατ' ἐξοχὴν* die Wellenfläche nennt, fortgeschritten. Längs einem jeden radius vector dieser Fläche, einem sogenannten Strahl, sind also Aether- und Körpertheilchen in einer mit einander verträglichen Bewegung. Die Bedingungen dieser Verträglichkeit sind aber meines Erachtens folgende:

a. Die Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen liegen nothwendig in der durch Strahl und Wellennormale gegebenen Ebne, die daher zugleich als eine gewisse Symmetrieebne des Mittels erscheint.

b. Die Schwingungen der Aethertheilchen, welch letztere wir wegen ihrer Feinheit uns wenigstens nahezu als ein Continuum vorstellen, liegen kraft der Incompressibilität desselben innerhalb der tangentiellen Wellebne.

c. Die Kraft dagegen, welche aus dem Widerstande der mehr discret liegenden Körpertheilchen hervorgeht, steht senkrecht auf dem Strahle, und verhalten sich dieselben insofern in anisotropen Mitteln nicht anders wie in isotropen.

d. Dagegen scheint es wegen der angedeuteten Verschiedenheit nicht unumgänglich nothwendig, dass Körper- und Aethertheilchen parallel schwingen. Wir lassen es vorläufig dahingestellt, ob die Schwingungen der ersteren, sofern ihnen überhaupt eine regelmässige Richtung zukommt, senkrecht stehen zum Strahle oder zur Normalen.

Dies vorausgesetzt, heisse wieder e die Deformationsconstante des reinen Aethers; die Constanten der hinzutretenden, aus dem Widerstande der Körpertheilchen herfliessenden senkrecht auf dem Strahle stehenden Kräfte seien E, E′, K.

Was folglich die Bewegungsgleichung der senkrecht zur Normalen schwingenden Aethertheilchen betrifft, so hat man, sofern e geradezu in dieser Richtung wirkt und zu e der Zuwachs $E\cos\delta$ — unter δ den Winkel zwischen Strahl und Wellennormale verstanden — hinzutritt:

15a. $$m\frac{d^2\varrho}{dt^2} = (e + E\cos\delta)\frac{d^2\varrho}{dx^2}.$$

Andererseits bleibt für die Körpertheilchen die frühere Differentialgleichung:

15b. $$m'\frac{d^2\varrho'}{dt^2} = E'\frac{d^2\varrho'}{dx^2} + K\varrho'$$

nach wie vor bestehen, und sind in derselben E′ und K auf eine Richtung senkrecht zum Strahle zu beziehen.

Ebenso machen wir, wie früher, wiederum die Annahme:

16. $$E = \alpha\varepsilon,\ E' = \alpha\varepsilon',\ K = \alpha\varkappa.$$

Um diese Gleichungen zu integriren, denken wir uns den wirklichen Ausschlag ϱ (A) als Componente des senkrecht zum Strahle gerichteten virtuellen Ausschlages ϱ_0 ($A_0 = \mathfrak{A}$) und setzen:

17. $$\varrho_0 = \mathfrak{A}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{l'} - \Theta\right) = \frac{\varrho}{\cos\delta},$$
$$\varrho' = \mathfrak{A}'\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{l'} - \Theta\right).$$

Hier beziehen sich folglich, wie besonders hervorgehoben werden mag, auch die Abscissen x auf die Richtung des Strahles, und sind ebenso die l′ die in derselben Richtung, nicht in der Richtung der Normalen, gemessenen inneren Wellenlängen.

Bezeichnet man endlich (im Unterschied zur Wellengeschwindigkeit ω) die Strahlengeschwindigkeit durch σ und stellt neben das Sinusverhältniss: $n = \frac{\sin e}{\sin r} = \frac{v}{\omega}$ das Geschwindigkeitsverhältniss: $n' = \frac{v}{\sigma}$, so erhält man für letzteres, analog wie früher:

$$18. \quad \frac{\mathfrak{A}'^2}{A_0^2} = \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\cos\delta}{\frac{l'^2}{L^2} - 1}, \quad n'^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2}{m A_0^2},$$

wenn zugleich durch Einführung des Summenzeichens möglichst generalisirt wird.

8. Die weitere Aufgabe besteht jetzt darin, die Werthe $\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}, \frac{\varepsilon'}{\varkappa'} = L^2$ und δ als Functionen des variablen Molekularabstandes r auszudrücken. m' und m dagegen bleiben als Massen des kubischen Raumes von jeder Orientirung unabhängig.

Zunächst lässt sich fragen, welche lineare Dichtigkeit des Körpergefüges bezüglich des Widerstandes gegen die Aetherschwingungen in Betracht kommt, die in der Richtung der Ausweichung der Körpertheilchen oder die in der Richtung des Strahles oder die in einer dritten auf den genannten beiden senkrechten Richtung gelegene. Wir werden unbedenklich die erstere wählen.

Was ferner ε' und $\varkappa'$ betrifft, so hängen beide in gegenseitiger Ergänzung von der Form, der chemischen Qualität und den Kräften des molekularen Gefüges überhaupt ab. Es erscheint daher wahrscheinlich, dass jede Dichtigkeitsänderung die eine wie die andere Grösse in gleichem Masse beeinflussen werde. In der That haben meine früheren Arbeiten ergeben, dass der Quotient derselben: $\frac{\varepsilon'}{\varkappa'} = L^2$ nicht bloss für Gase und Flüssigkeiten von der (kubischen) Dichtigkeit unabhängig ist, sondern auch für die zwei, resp. drei Hauptbrechungsindices der anisotropen Mittel einen identischen Werth hat. Dagegen ist er für Kalkspath und Arragonit trotz gleicher chemischer Zusammensetzung verschieden. Wir werden demzufolge unsere Constante L^2 als einzig an die optisch-chemische Qualität gebunden erachten.

Der Quotient $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ dagegen als das Verhältniss zweier sich einander zuordnender Deformationsgrössen des Aethers und der Körpertheilchen wird nothwendig mit dem Molekularabstand r der letzteren sich ändern. Da nun für ein unendlich grosses r (das freilich $m' = 0$ zur Folge hat) n' gleich 1 und mit dem Kleinerwerden von r ein Anwachsen von n' verbunden ist, so wird $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ wenigstens angenähert irgend einer Potenz dieses Abstandes umgekehrt proportional sein. Wir wählen aus einleuchtenden Gründen die erste, und wenn wir so:

19. $$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\mathfrak{b}}{r}$$

setzen, unter $\mathfrak{b}$ eine absolute Constante verstanden, so haben wir zugleich insofern die Erfahrung für uns, als sich bekanntlich $\frac{n'^2-1}{m'}$ im grossen Ganzen nur wenig mit der Dichtigkeit ändert.

Sonach bleibt nur noch der Werth von δ zu erörtern übrig. Zu dem Ende wolle man sich den folgenden Versuch realisirt denken.

Auf die ebne Trennungsfläche einer isotropen Substanz falle unter dem Einfallswinkel 0 eine linear polarisirte Wellebne, d. h. ein Bündel von unendlich vielen parallelen Strahlen. Dieselbe wird ungebrochen in das Innere eintreten, und ihre Polarisation bleibt innerhalb wie ausserhalb die nämliche. Von den unendlich vielen eindringenden Strahlen greife man einen heraus und denke sich die Körpertheilchen, die derselbe auf seinem Wege berührt, durch irgend ein Merkmal äusserlich gekennzeichnet.

Alsdann comprimire oder dilatire man das Mittel nach zwei auf einander senkrechten Richtungen, die indess der Einfachheit wegen beide der Schwingungsebne parallel seien, ungleich stark. Der Erfolg ist ein doppelter. Wegen der vorausgesetzten ungleichen axialen Ausdehnung werden sämmtliche Molekularreihen, die nicht in die Richtung dieser Axen hineinfallen, um einen gewissen messbaren Winkel gedreht. Unter ihnen also auch die früher bezeichnete Linie, deren früherer Winkel χ_0 mit der einen der beiden Kraftrichtungen etwa in $\chi_0+\delta_0 = \chi$ übergeht. Zweitens wird das früher einfach brechende Mittel für die betrachtete Ebne optisch einaxig; die jetzt dem Incidenzwinkel 0 entsprechende gebrochene (extraordinäre) Wellebne bleibt zwar der einfallenden parallel, aber der zugehörige Strahl erscheint gegen den einfallenden (χ_0) gleichfalls um irgend einen Winkel δ gedreht. So würden sich also in Folge der vorgenommenen Modification einer nämlichen Raumlinie χ_0 die beiden neuen Richtungen $\chi_0+\delta_0 = \chi$ und $\chi_0+\delta = \chi'$ zuordnen. Lässt man anfangs die eine Druckaxe mit dem einfallenden Strahle zusammenfallen, so dass $\chi_0 = 0$ wird, so wird auch $\delta = \delta' = 0$. Nimmt dann χ_0 zu, so wachsen zugleich δ_0 und δ; beide erreichen für die Nähe von $\chi_0 = 45^0$ ihr Maximum und sinken für $\chi_0 = 90^0$ wiederum auf 0 zurück.

Für dieses eigenthümliche Verhalten der beiden Richtungen χ und χ', deren eine zudem durch die Coexistenz der anderen bedingt ist, gibt es meines Erachtens keine andere befriedigende Lösung, als geradezu die Forderung: $\chi = \chi'$, $\delta_0 = \delta$. Demnach wäre der Winkel δ zwischen Wellennormale und Strahl (oder den ihnen entsprechenden virtuellen Schwingungsrichtungen) derselbe wie der Winkel zwischen der ersteren Richtung als Richtung irgendwelcher Theilchen des unmodificirten Mittels und der Richtung der nämlichen Theilchen nach der Modification. Oder mit andern Worten: *Es erscheint der einer bestimmten äusseren Welle entsprechende innere Strahl an die Mitwirkung der identischen Körpertheilchen gebunden, mag nun das Mittel isotrop oder durch äussere Kräfte in den anisotropen Zustand übergeführt sein.*[1]) Der Schluss von solchen äusseren Kräften auf Molekularkräfte liegt dann wohl nahe genug.

1) Zu vorstehender Ueberlegung bietet die Aberrationslehre (Ketteler, Astron. Undulationstheorie S. 177) folgendes Analogon. Ein auf ein ruhendes isotropes oder anisotropes Mittel auffallender Strahl AB erzeuge in dessen Inneren den gebrochenen Strahl BC,

Ist übrigens das Mittel ein zusammengesetztes, so dass das Summenzeichen der Gleichung 18 zur Anwendung kommt, so begnüge man sich vorläufig mit dem speciellen Falle, dass δ für alle optisch-chemischen Elementarbestandtheile desselben gleich ist, also $\cos\delta$ dem Summenzeichen vorgesetzt werden kann.

9. Dies vorausgesetzt, lassen sich r und δ in folgender Weise berechnen. Es sei gegeben die Entfernung R_0 irgend eines Theilchens des unmodificirten Mittels vom Coordinatenanfangspunkte; die Verbindungslinie beider — senkrecht zu der vorhin markirten Molekülreihe — mache mit den Axen die Winkel a_0, b_0, c_0. Man hat dann: $\cos a_0 = \frac{x_0}{R_0}$, $\cos b_0 = \frac{y_0}{R_0}$, $\cos c_0 = \frac{z_0}{R_0}$.

In Folge der Modification gelange dieselbe Molekülreihe in die etwas verschiedene Lage a, b, c, und die Entfernung R_0 werde zu R. Es ist dann entsprechend: $\cos a = \frac{x}{R}$, $\cos b = \frac{y}{R}$, $\cos c = \frac{z}{R}$. Für δ, R und R_0 gelten jetzt die Beziehungen:

$$\cos\delta = \cos a_0 \cos a + \cos b_0 \cos b + \cos c_0 \cos c$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,\quad R_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Jenachdem man nun mittelst der axialen Entfernungen der Nummer 7 entweder die Winkel der neuen Richtung auf die der alten oder die Winkel der alten auf die der neuen zurückführt, erhält man bei Beachtung der Proportionalität von R, R_0 mit r, r_0 die folgenden Ausdrücke:

$$20.\quad \begin{aligned} r\cos\delta &= r_0(1+\alpha)\cos^2 a_0 + r_0(1+\beta)\cos^2 b_0 + r_0(1+\gamma)\cos^2 c_0 \\ r^2 &= r^2_0(1+\alpha)^2\cos^2 a_0 + r_0^2(1+\beta)^2\cos^2 b_0 + r_0^2(1+\gamma)^2\cos^2 c_0, \end{aligned}$$

oder auch:

---

und man denke sich die drei Punkte A, B, C durch drei mit dem Gefüge des Mittels fest verbundene Diopter oder besser noch B, C durch eine unendlich dünne, durch die ponderablen Theilchen hindurchgelegte ideelle Röhre ein für allemal fixirt. Es wird dann das gebrochene Licht auch dann noch, ohne an die Wandungen anzustossen, durch die Röhre hindurchgehen, wenn das Mittel mit einer beliebigen Translationsgeschwindigkeit im Raume bewegt wird. Und doch ändern sich in Folge dieser Bewegung Einfallswinkel, Brechungswinkel und Brechungsverhältniss.

$$21.\quad \begin{aligned} \frac{\cos\delta}{r} &= \frac{\cos^2 a}{r_0(1+\alpha)} + \frac{\cos^2 b}{r_0(1+\beta)} + \frac{\cos^2 c}{r_0(1+\gamma)} \\ \frac{1}{r^2} &= \frac{\cos^2 a}{r_0^2(1+\alpha)^2} + \frac{\cos^2 b}{r_0^2(1+\beta)^2} + \frac{\cos^2 c}{r_0^2(1+\gamma)^2}. \end{aligned}$$

Führt man den vorletzten in Gleichung 18 ein und setzt dabei zur Abkürzung: $\frac{\mathfrak{b}}{r_0(1+\alpha)} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)_1, \frac{\mathfrak{b}}{r_0(1+\beta)} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)_2 \dots,$ so erhält dieselbe folgende definitive Form:

$$22.\ n'^2 - 1 = \Sigma \frac{\frac{m'}{m}}{\frac{l'^2}{L^2} - 1} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)_1 \cos^2 a + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)_2 \cos^2 b + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)_3 \cos^2 c \right\}.$$

Fasst man schliesslich die drei Summen als A, B, C zusammen, so schreibt sich kürzer:

$$23.\quad \begin{aligned} n'^2 &= (1+A)\cos^2 a + (1+B)\cos^2 b + (1+C)\cos^2 c \\ \frac{1}{\sigma^2} &= \frac{\cos^2 a}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 b}{\omega_2^2} + \frac{\cos^2 c}{\omega_3^2}, \end{aligned}$$

und in dieser Gestalt dürfte sie fortan das sogen. zweite oder Plücker'sche Ellipsoid ($\mathfrak{E}$), dessen Ausdruck bisher: $\frac{\cos\delta}{r} = \frac{1}{\sigma}$ war, zu ersetzen haben.

Dem durch Gleichung 23 dargestellten Ellipsoid ordnet sich dann ein zweites zu, welches repräsentirt wird durch:

$$24.\quad \begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{\cos^2 a_0}{1+A} + \frac{\cos^2 b_0}{1+B} + \frac{\cos^2 c_0}{1+C}. \\ \omega^2 &= \omega_1^2 \cos^2 a_0 + \omega_2^2 \cos^2 b_0 + \omega_3^2 \cos^2 c_0 \end{aligned}$$

Dasselbe träte an die Stelle des bisherigen sogenannten ersten oder reciproken Ellipsoides (E), für welches man bis jetzt annahm: $r\cos\delta = \omega$.

Mit den genannten beiden Flächen ist, wie man weiss, die weitere Theorie der Doppelbrechung vollständig vorgezeichnet.

10. Wenn wir bisher für zusammengesetzte Mittel den Specialfall festhielten, dass der Winkel zwischen Strahl und Wellennormale für alle einzelnen optisch-chemischen Elemente denselben Werth habe, so dürfen wir nunmehr diese Voraussetzung fallen lassen. Auch bei der allgemeinsten Zusammensetzung des Mittels wird die um einen Punkt

desselben fortgeleitete Schwingungsbewegung nach Verlauf der Zeiteinheit bis zu einer ganz bestimmten geschlossenen Fläche vorgerückt sein. Einem bestimmten radius vector derselben entspricht eine bestimmte Verträglichkeit seitens der Aether- und Körpertheilchen, und der durch die Anwesenheit der letzteren hervorgerufene Widerstand $\alpha\varepsilon$ kommt nunmehr als partielle Componente $\alpha_1\varepsilon_1 \cos \delta_1$, $\alpha_2\varepsilon_2 \cos \delta_2$ in einer von der wirksamen Molekularqualität abhängigen Richtung a'_0, b'_0, c'_0; a''_0, b''_0, c''_0 zur Geltung. Hier bedeutet also nach wie vor δ den Winkel zwischen einer bestimmten, aus der Modification hervorgegangenen zusammengesetzten Molekülreihe a, b, c und einem einfachen Bestandtheile derselben in seiner unmodificirten Lage. Man wird daher auch einem und demselben Strahle eine beliebige Zahl von partiellen Normalen und erregenden Partialwellen zulegen dürfen und müssen. Sie alle fassen sich schliesslich zu einer resultirenden Normale und Welle zusammen, und diese erhält man dadurch, wenn man an dem zugehörigen rad. unseres directen Ellipsoides eine Tangentialebne errichtet und auf dieselbe ein Perpendikel fällt. Die durch rad. vector und Normale bestimmte Ebne ist dann die resultirende Schwingungsebne, und der Winkel Δ zwischen beiden wird der resultirende Winkel zwischen Strahl und resultirender Normale, so dass kommt:

25. $$\omega = \sigma \cos \Delta.$$

Sind nun die verschiedenartigen Massetheilchen durch die aufgewendeten Partialdrucke nach identischen axialen Richtungen modificirt, oder wenn man lieber entsprechende Molekularkräfte einführt, ist das Gefüge der einzelnen heterogenen Elemente symmetrisch um die nämlichen Richtungen gelagert, so entspricht das dem Fall der regelmässigeren Krystallsysteme. Gruppirt sich dagegen diese Lagerung um divergirende Axenrichtungen, so hat man das, was man die Dispersion der optischen Axen nennt, und was bisher fast jeder Erklärung zu spotten schien.

11. Wenden wir uns nunmehr auch für die anisotropen Mittel von den bewegenden Kräften zu den lebendigen. Man construire zu dem Ende die einer bestimmten Farbe

und Strahlenrichtung entsprechende Schwingungsebne und in derselben ein Parallelogramm LMNO, dessen längere Seite OL dem Strahle parallel und gleich l' gemacht werde; der kürzeren Seite ON gebe man die Länge $A = A_0 \cos \varDelta$ der wirklichen Amplitüde und lasse sie mit der Schwingungsrichtung der Aethertheilchen zusammenfallen, so dass dieselbe folglich auf der resultirenden Normale senkrecht steht und der Winkel LON gleich $90^0 + \varDelta$ wird.

Man denke sich ferner die innerhalb desselben gelegenen Aethertheilchen aus ihrer Gleichgewichtslage heraus in eine solche Extremlage gebracht, wie sie einer durch A, l' charakterisirten Welle entsprechen würde, und in derselben irgendwie festgehalten. Die dadurch aufgehäufte Spannkraft ist wieder die nämliche, als wären die Körpertheilchen nicht vorhanden. Ueberlässt man dann das Mittel sich selber, so drängen die Aethertheilchen auf nunmehr schrägstehenden Bahnen von der Länge A — parallel zu NO — gegen die Gleichgewichtslage zurück und reissen die Körpertheilchen in Bahnen, deren äquivalente Länge A' sei, mit sich fort. Ist für die Gleichgewichtslage alle Spannkraft in lebendige Kraft umgewandelt, so bestimmt sich diese wie früher zu: $m\frac{A^2}{T^2} + \sum m' \frac{A'^2}{T^2}$.

Wird andererseits im reinen Aether die nämliche anfängliche Verschiebung zur Erzielung einer nämlichen Spannkraft hervorgerufen, so hat man, um die eingreifende äussere Kraft durch eine Wellenbewegung von der nämlichen Amplitüde A und der nämlichen Ausbiegung ersetzen zu können, das obige Parallelogramm durch Drehung seiner Seiten in die Form des Rechtecks zu bringen, sodann aber auch seine Länge l' auf l zu verkürzen, sofern eben $l = l' \cos \varDelta$ werden muss. Die dieser Verschiebung entsprechende maximale lebendige Kraft ist $m\frac{A^2}{T_0{}^2} = m\frac{A^2}{T^2}n^2 = \frac{e}{l^2}A^2$. Zu demselben Ziel gelangt man aber auch dadurch, dass man bei Beibehaltung derselben Strecke l' die Aethertheilchen um A_0 verschiebt, also statt aus A und l, aus A_0 und l' ein Rechteck bildet. Es ist eben: $\frac{e}{l^2}A^2 = \frac{e}{l'^2}A_0{}^2$. Sonach erhält man die coordinirten Beziehungen:

$$\frac{m}{T^2}A^2+\Sigma\frac{m'}{T^2}A'^2=\frac{e}{l^2}A^2,\ n^2-1=\frac{\Sigma m'A'^2}{mA^2},$$

26. $$\frac{m}{T^2}A_0^2\cos^2\varDelta+\Sigma\frac{m'}{T^2}A'^2=\frac{e}{l'^2}A_0^2,\ n'^2-\cos^2\varDelta=\frac{\Sigma m'A'^2}{mA_0^2}.$$

Die beiden ersten haben dieselbe Form wie die der isotropen Mittel, aber sie enthalten nicht, wie die zugehörige Dispersionsformel 22, das Geschwindigkeitsverhältniss $n'=\frac{v}{\sigma}$ und die demselben entsprechende innere Wellenlänge l' (gemessen auf dem Strahle), sondern das Sinusverhältniss $n=\frac{\sin e}{\sin r}\left(=\frac{v}{\omega}\right)$ und die ihm zugeordnete Wellenlänge l (gemessen auf der Normalen) und endlich nicht die volle Amplitüde der Aethertheilchen A_0 senkrecht zum Strahle, sondern den auf die Fallhöhe A reducirten Werth derselben senkrecht zur Normalen.

Dieses Gesetz der *wirklichen* lebendigen Kräfte bildet sonach die Ergänzung zum Ausdruck der *virtuellen* lebendigen Kräfte in Gleichung 18.

12. Mit vorstehender Untersuchung fällt nun wohl auch die wesentlichste Schwierigkeit, welche bisher der Ausdehnung der Fresnel'schen Reflexionstheorie auf die anisotropen Mittel im Wege stand.

Man denke sich im Weltäther als ersteren Mittel eine unter irgend einem Azimuth polarisirte Wellebne auf eine beliebig orientirte ebne Krystallfläche auffallen, so werden im allgemeinen neben der reflectirten Welle zwei gebrochene entstehen. Um dieselben nach Amplitüde und Azimuth festzustellen, bedarf man, wie bei dem Uebergang des Lichtes in ein isotropes Mittel, vier verschiedener Gränzbedingungen. Während indess dort wegen der Spaltbarkeit des Grundsatzes der lebendigen Kräfte schon zwei Principien zur Ableitung derselben genügen, sind hier deren drei erforderlich. Wir bezeichnen sie kurz als das Princip der sogenannten Continuität, das Princip der Gleichheit der Arbeit und das Princip der lebendigen Kräfte. Das erste und dritte verdankt man Fresnel und Neumann, das zweite dagegen ist meines Wissens neu.

I. Das Princip der Aequivalenz der Bewegungsgrössen oder der Continuität parallel der Trennungsfläche. Man beziehe die sämmtlichen Schwingungen auf ein Coordinatensystem, dessen Z-Axe in die Richtung des Lothes fällt, dessen Y-Axe auf der Einfallsebne senkrecht steht, und dessen X-Axe folglich die Schnittlinie der Einfalls- und Trennungsebne ist. Man zerlege ferner die Schwingungen ϱ der Aethertheilchen der Gränzschicht parallel den Axen in die Componenten ξ, η, ζ. Alsdann verlangt der Grundsatz der Continuität, dass für die beiden ersteren der Trennungsfläche parallelen, also sowohl parallel als senkrecht zur Einfallsebne die Summe der Componenten der Schwingungsgeschwindigkeiten in der einfallenden und reflectirten Welle gleich ist der Summe dieser Componenten in den beiden gebrochenen Wellen. Man hat folglich:

$$27. \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{d(\xi_E+\xi_R)}{dt}=\dfrac{d(\xi'_D+\xi''_D)_0}{dt} \\[2ex] \dfrac{d(\eta_E+\eta_R)}{dt}=\dfrac{d(\eta'_D+\eta''_D)_0}{dt} \end{array}\right\} z=0.$$

Ich hebe hervor, dass dieser Grundsatz nur auf die vollen Ausschläge bezogen werden soll, d. h. auf diejenigen, die bisher durch ϱ_0 und deren Amplitüde im Gegensatz zu A durch A_0 bezeichnet ist. Bezüglich dieser Unterscheidung reicht aber, wie man sieht, die blosse geometrische Continuität nicht aus. Man hat sich vielmehr die lebendige Kraft der einzelnen, der Trennungsfläche anliegenden Aethertheilchen als Stosskraft $m\frac{d\varrho}{dt}$ zu denken, und es wird nun nicht bloss die Quantität der Bewegung parallel der Ebne $z = 0$ im ersten Mittel der im zweiten gleich sein, sondern es erhellt auch, dass nach aussen hin gerade die Amplitüde A_0 der gebrochenen Wellen, nicht aber A, dieselbe zu repräsentiren vermag. Wäre in der That die Continuität allein massgebend, so würde man, wie für ruhende, auch für bewegte Mittel ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$ nach Belieben gegen einander vertauschen dürfen. Das ist indess erweisbar falsch. — Entsprechend dieser Forderung sind in vorstehenden Gleichungen die ξ_0, η_0 der gebrochenen Wellen auch äusserlich bezeichnet.

Da diese Gleichungen ferner für alle Punkte ($z = 0$) der continuirlich einander folgenden Wellebnen, welche in die Trennungsfläche selbst hineinfallen, ihre Gültigkeit bewahren, so erscheint es zweckmässig, die Ausschläge hier nicht, wie oben, auf die Richtung des Strahles, sondern auf die der Normalen zu beziehen, also allgemein zu setzen:

$$\varrho_0 = A_0 \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z \cos \alpha + x \sin \alpha}{\omega} - \Theta'\right),$$

wo α der Reihe nach den Einfalls-, Spiegelungs- und Brechungswinkel bedeutet und unter $\lambda = \omega T$ die Wellenlänge längs der Normalen zu verstehen ist.

Zudem erlaube ich mir, abweichend von Cauchy, welcher alle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich behandelt, dieselben je nach ihrer Richtung durch entgegengesetzte Vorzeichen zu charakterisiren. Ich schreibe also naturgemässer $\Theta = \left(\frac{D}{\lambda_E}\right)$:

$$\varrho_E = A_E \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \left(\Theta - \frac{z \cos \alpha_E + x \sin \alpha_E}{\lambda_E}\right)\right\}$$

28. $$\varrho_R = A_R \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \left(\Theta + \frac{z \cos \alpha_R + x \sin \alpha_R}{\lambda_R}\right)\right\}$$

$$\varrho^0_D = A^0_D \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \left(\Theta + \frac{z \cos \alpha_D + x \sin \alpha_D}{\lambda_D}\right)\right\}.$$

Sind endlich U, V, W die Winkel, welche die senkrecht zum Strahle liegenden Richtungen ϱ_0 mit den Coordinatenaxen bilden, und führt man diese Werthe in die Gränzgleichungen ein, so zerfallen dieselben, sofern sie für alle t und x gültig bleiben, in die folgenden:

$$\frac{\sin \alpha_E}{\lambda_E} = -\frac{\sin \alpha_R}{\lambda_R} = -\frac{\sin' \alpha_D}{\lambda'_D} = -\frac{\sin \alpha''_D}{\lambda''_D}$$

29. $$A_E \cos U_E + A_R \cos U_R = (A'_D \cos U'_D + A''_D \cos U''_D)_0$$

$$A_E \cos V_E + A_R \cos V_R = (A'_D \cos V'_D + A''_D \cos V''_D)_0.$$

Die erstere führt bezüglich der Winkel α zu den Werthen:

$$\alpha_E = e, \quad \alpha_R = 360^0 - e, \quad \alpha_D = 180^0 + r,$$

wo e und r absolute Grössen sind. In den beiden letzteren sind wieder wegen der vorausgesetzten Ruhe des Mittels die Geschwindigkeitsamplitüden den Ausschlagsamplitüden proportional.

II. Das Princip der Arbeit senkrecht zur Trennungsfläche. Entsprach vorstehender Grundsatz dem Gesetz der Aequivalenz der Stosskraft oder auch scheinbar der Cauchy'schen Annahme des continuirlichen Aneinanderstossens der jezwei entsprechenden, durch die resultirenden Oscillationsgeschwindigkeiten der Aethertheilchen im ersten und zweiten Mittel als Functionen der Lage (x, y, z) derselben repräsentirten Curven, so vertritt dagegen das in Rede stehende Princip eine evident mechanische Forderung. Es bleibt nämlich stets zu beachten, dass die ursprünglich eingreifende spontane Kraft, welche die Schwingungsbewegung verursacht, eine gewisse mechanische Arbeit zu leisten hat, welche, wenn sie im reinen Aether wirkt, in der Ueberwindung der Elasticitätskraft desselben, und wenn im Innern eines ponderablen Mittels, in der Ueberwindung nicht bloss der Elasticität des Aethers, sondern auch des Widerstandes der Körpertheilchen besteht. In jedem Falle wird diese Arbeit dem Aufziehen einer elastischen Feder oder dem Heben eines Gewichtes vergleichbar sein. Die einmal aufgewandte mechanische Arbeit erhält sich dann mittelst der Deformationskraft des Aethers in der Gesammtheit der schwingenden Theilchen als deren Energie. Fassen wir dabei ein einzelnes Aethertheilchen in's Auge, so leistet es auch seinerseits bald negative Arbeit, sofern es frei dem Zuge der Elasticitätskraft folgt und deren Spannkraft in lebendige Kraft umwandelt, bald dagegen positive Arbeit, sofern sich die erworbene lebendige Kraft verzehrt und durch den zunehmenden Widerstand, dem es begegnet, in Spannkraft rückverwandelt.

Was nun insbesondere diejenigen Aethertheilchen betrifft, welche der Trennungsfläche unmittelbar anliegen, so werden dieselben durch die ZComponente der einfallenden und reflectirten Welle gezwungen, sich bald dieser Gränzebne zu nähern, bald sich von derselben zu entfernen. Und ein in der Gleichgewichtslage in ihr selbst liegendes Theilchen wird abwechselnd in das obere und in das untere Mittel hineingetrieben. Die Schwingungen dieser Theilchen werden aber nur dann regelmässig verlaufen, wenn sie zu beiden Seiten der Ebne $z = 0$ in der Richtung des Lothes eine gleiche mechanische Arbeit zu leisten haben.

Entspricht nun dem Widerstand im ersten Mittel ein zu hebendes Gewicht p, und bedeuten ebenso p'_D, p''_D die bezüglichen Widerstände der gebrochenen Wellen im zweiten Mittel, dann verlangt das Princip der Gleichheit der Arbeit: $p(d\zeta_E + d\zeta_R) = p'_D d\zeta'_D + p''_D d\zeta''_D$.
Oder wenn man, sofern sich diese Gewichte als einander proportional herausstellen, durch Integration von der Zeit dt zu t übergeht:

30. $$p(\zeta_E + \zeta_R) = p'_D \zeta'_D + p''_D \zeta''_D. \qquad \Big\} z = 0.$$

Selbstverständlich beziehen sich hier die ζ auf die wirklichen Ausschläge ϱ, A im Gegensatz zu den unter Umständen möglichen ϱ_0, A_0. Was denn jetzt das Verhältniss dieser Widerstände betrifft, so bewirke im ersten Mittel das senkrechte Heben des Gewichtes p auf die Höhe 1 eine der Aethermasse m, die dadurch gleichzeitig in ihrer schräg liegenden Bahnlinie verschoben wird, zu Gute kommende lebendige Kraft mc^2. Ebenso erhalte in Folge einer gleichen Niveauveränderung des Gewichtes p_D eine gleichgrosse Aethermasse m im zweiten Mittel die nämliche lebendige Kraft mc^2, zugleich aber auch die benachbarte Körpermasse $\Sigma m'$ die Energie $\Sigma m'c'^2$, beide in der Richtung ihrer resp. Bahnlinie genommen. Es verhält sich dann offenbar:

$$p : p_D = mc^2 : (mc^2 + \Sigma m'c'^2).$$

Nun ist aber bereits gezeigt, dass, wenn in irgend einem brechenden Mittel eine gegebene Arbeit sich auf Körper- und Aethertheilchen vertheilt, das Verhältniss dieser Theilung mit der sogenannten brechenden Kraft identisch wird. Dementsprechend wird:

31. $$p : p_D = 1 : n^2.$$

Und so erhält, wenn man noch den Winkel zwischen Schwingungsrichtung und Loth durch $\mathfrak{W}$ bezeichnet und analog wie oben setzt:

$$\varrho = A \cos \frac{2\pi}{T} \left\{ t + \frac{z \cos \alpha + x \sin \alpha}{\omega} - \Theta' \right\},$$

das Princip der Gleichheit der Arbeit senkrecht zur Trennungsfläche die schliessliche Form:

32. $$A_E \cos \mathfrak{W}_E + A_R \cos \mathfrak{W}_R = A'_D \cos \mathfrak{W}'_D n'^2 + A''_D \cos \mathfrak{W}''_D n''^2,$$

wo hier selbstverständlich n', n'' die entsprechenden Sinusverhältnisse bedeuten.

Man wird bemerken, dass dieser Grundsatz — obwohl ihn Fresnel völlig ausser Acht liess und Cauchy durch Herbeiziehung von Longitudinalwellen mehr äusserlich umschrieb — den eigentlichen Vorgang bei der Biegung, resp. Spaltung der einfallenden Welle fast am nächsten berührt.

Die beiden bisher getrennt aufgestellten Sätze finden nun ihre Ergänzung und Zusammenfassung im:

III. Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Dasselbe erhält dem Obigen zufolge zunächst ohne Weiteres die Form:

$$33.\quad M\left[\left(\frac{d\varrho_E}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\varrho_R}{dt}\right)^2\right]=\left.\begin{matrix} M'_D\left(\frac{d\varrho'_D}{dt}\right)^2+\Sigma\mathfrak{M}'_D\left(\frac{d\mathfrak{r}'_D}{dt}\right)^2 \\ +M''_D\left(\frac{d\varrho''_D}{dt}\right)^2+\Sigma\mathfrak{M}''_D\left(\frac{d\mathfrak{r}''_D}{dt}\right)^2\end{matrix}\right\}z=0,$$

wo die M die sogenannten optisch äquivalenten, d. h. die von den Wellen in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume sind.

Und wenn man die früheren Werthe ϱ einführt und die Schwingungen der Körpertheilchen ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{r}$) mittelst Gleichung 26 sofort eliminirt, so vereinfacht sie sich auf:

$$34.\quad M(A_E{}^2-A_R{}^2)=M'_D\, n'^2A'_D{}^2+M''_D\, n''^2A''_D{}^2.$$

Was die Ermittelung der Volumina M, M_D betrifft, so betrachte man im Innern der Mittel diejenigen Wellenstücke, welche an einer Trennungsfläche von endlicher Begränzung — z. B. von eckiger Form, deren eine Seite der X Axe parallel sei — gespiegelt werden, resp. durch dieselbe in das zweite Mittel eintreten. Diese Wellenstücke verschieben sich während der Zeit T längs der Strahlenrichtung um Strecken, die der früheren Wellenlänge l′ proportional sind, und die von ihnen beschriebenen parallelopipedischen Räume von der Höhe l sind eben die gesuchten. Dieselben lassen sich zunächst weiter durch ihre Hälften, d. h. durch die bezüglichen der Trennungsfläche unmittelbar anliegenden sogenannten Huyghens'schen Prismen ersetzen, und deren Volumina verhalten sich offenbar wie die Längen h der von den respectiven Berührungspunkten der Wellenflächen auf die Trennungsfläche herabgelassenen Senkrechten. Es ist folglich: $M : M_D = h : h_D$.

13. Dies vorausgesetzt, handelt es sich nur mehr um die Bestimmung der Winkel U, V, welche die je in der

zugehörigen Schwingungsebne auf die vier Strahlen gefällten Perpendikel mit der X- und Y-Axe bilden, ferner um die Winkel 𝔚 zwischen Schwingungsrichtung und Z-Axe sowie um die Höhen h der Huyghens'schen Prismen.

Zu dem Ende construire man in der Ebne des Papieres als XZ-Ebne (Einfallsebne) die Axen OX, OZ und senkrecht darauf OY. Die Richtung des Strahles sei OS und die der zugehörigen Normalen, die in der XZ-Ebne um den Brechungswinkel r ($= \alpha_D - 180$) von OZ absteht, ON. Zieht man endlich in der Ebne SON und zwar senkrecht zu OS die Linie OR, so handelt es sich um deren Winkel mit den Axen. Verbindet man nun die Punkte X, N, Z, ferner R, N, S sowie R, X; R, Y und N, Y in der Einheit der Entfernung von O durch Kreisbögen, so entstehen die beiden sphärischen Dreiecke RNX und RNY.

In dem ersteren hat man:

$$\cos RX = \cos RN \cos XN + \sin RN \sin XN \cos RNX,$$

oder da: $RS = 90^0$, $NS = \Delta$ und Flächenwinkel $RNX = \vartheta$, d. h. gleich dem Azimuthalwinkel der Schwingungsebne ROS und der Einfallsebne XOZ ist:

$$\cos RX = \cos(90 - \Delta) \cos(90 - r) + \sin(90 - \Delta) \sin(90 - r) \cos\vartheta$$

$$\cos U = \sin\Delta \sin r + \cos\Delta \cos r \cos\vartheta.$$

Das Dreieck RNY hat die Seite $YN = 90^0$ und den Flächenwinkel YNR, der um das Azimuth ϑ von $YNX = 90^0$ abweicht. Man findet daher:

$$\cos V = \cos RY = \sin RN \cos RNY$$
$$= \cos \Delta \sin \vartheta.$$

Zieht man endlich in der Schwingungsebne SNR noch senkrecht zu ON die Schwingungsrichtung O𝔑 und verbindet sie durch den Kreisbogen 𝔑Z mit Z, so ist in dem entstehenden Dreieck 𝔑ZN Seite $\mathfrak{R}N = 90^0$, folglich:

$$\cos \mathfrak{W} = \cos \mathfrak{R}Z = \sin \mathfrak{R}N \cos \mathfrak{R}NZ$$
$$= - \sin r \cos \vartheta.$$

Noch erübrigt die Ausmessung der Perpendikel h. Sei wieder die Ebne des Papiers die Einfallsebne, OX die Schnittlinie derselben mit der Trennungsfläche und OZ das Einfallsloth. Die Wellennormale ON werde im Punkte A, die X-Axe im Punkte D von der entsprechenden Wellebne geschnitten; es ist dann DA die Projection derselben auf die Einfallsebne. In der Wellebne, also im allgemeinen oberhalb oder unterhalb der Ebne des Papieres, liege der zugehörige Contactpunkt B der Wellenfläche, welcher die Richtung OS sowie die der Schwingung AB bestimmt.

Statt nun direct von B aus ein Perpendikel auf die Trennungsfläche herabzulassen, fälle man zunächst von B aus auf die Verlängerte DA das Loth BC, welches dieselbe in C trifft, und von C aus die weitere Senkrechte CE auf die Axe OX, welche sonach in E getroffen wird. Es ist dann auch CE das verlangte Perpendikel h.

Man hat nun der Reihe nach:

$$CE = CD \sin r,\ CD = CA + AD,\ CA = AB \cos CAB = AB \cos \vartheta,$$
$$AB = AO \operatorname{tang} \Delta = \omega \operatorname{tang} \Delta,\ CA = \omega \operatorname{tang} \Delta \cos \vartheta,$$
$$AD = \omega \cot r,\ CD = \omega (\cot r + \operatorname{tang} \Delta \cos \vartheta).$$

Folglich schliesslich:

$$h = CE = \omega (\cos r + \operatorname{tang} \Delta \cos \vartheta \sin r).$$

Für die einfallende und gespiegelte Welle leiten sich die bezüglichen Werthe aus den hier entwickelten Ausdrücken einfach dadurch ab, dass man $\Delta = 0$ setzt, statt r den geometrischen Brechungswinkel: $\alpha_D - 180^0$ einführt und diesen nun durch $\alpha_E = e$, $\alpha_R = 360^0 - e$ ersetzt.

14. Die so gewonnenen Beziehungen bringen nun die Gränzgleichungen 29, 32, 34 zunächst auf die Form:

$$\begin{aligned} &(A_E \cos\vartheta_E + A_R \cos\vartheta_R) \cos e = \Sigma A_D{}^0 (\sin\Delta \sin r + \cos\Delta \cos r \cos\vartheta_D) \\ &A_E \sin\vartheta_E + A_R \sin\vartheta_R = \Sigma A_D{}^0 \cos\Delta \sin\vartheta_D \\ &(A_E \cos\vartheta_E - A_R \cos\vartheta_R) \sin e = \Sigma A_D \cos\vartheta_D \sin r\, n^2 \\ &(A_E{}^2 - A_R{}^2) \sin e \cos e = \Sigma A_D{}^2 \sin r \cos r\, n^2 \times (1 + \operatorname{tang} r \operatorname{tang}\Delta \cos\vartheta_D), \end{aligned} \tag{34}$$

wo sich der Abkürzung wegen das Summenzeichen auf die beiden gebrochenen Wellen beziehen soll. Dazu tritt die Gleichung:

$$A_D = A_D{}^0 \cos \Delta$$

hinzu, und so kann man überall entweder die Continuitätsamplitüde $A_D{}^0$ oder die Arbeitsamplitüde A_D einführen.

Wir denken uns das Letztere geschehen und ebenso überall das Sinusverhältniss n durch die Sinus selbst ersetzt. Unsere Gränzgleichungen fallen alsdann völlig mit den von Fr. Neumann aus seiner Theorie abgeleiteten zusammen, wenn wir den bisherigen Variabeln ϑ, A_D, A_R die drei neuen:

$$(\vartheta) = \vartheta - 90^0,\ (A_D) = \frac{A_D}{n},\ (A_R) = -A_R$$

lediglich substituiren. Will man sich nun nicht mit MacCullagh auf die sogenannten uniradialen Azimuthe, d. h. auf diejenigen Azimuthe des einfallenden Lichtes beschränken, welche nur einen einzigen gebrochenen Strahl zu Stande kommen lassen, so werden die weiteren Transformationen verwickelt. Neumann hat dieselben in mühsamer Rechnung durchgeführt und gefunden, dass die Multiplication der ersten und dritten dieser Gleichungen, ferner die Subtraction des entstehenden Productes von der vierten und endlich die Division dieser Differenz durch die zweite dasselbe Resultat ergibt, als führe man die genannten Operationen bei einem uniradialen Azimuthe aus und setze dann wieder der rechten Seite das Summenzeichen vor. Demzufolge erhält man sofort:

36.
$$\begin{aligned} A_E \sin \vartheta_E + A_R \sin \vartheta_R &= \Sigma A_D \sin \vartheta_D \\ (A_E \sin \vartheta_E - A_R \sin \vartheta_R) \cos e &= \Sigma A_D \sin \vartheta_D\, n \cos r \\ (A_E \cos \vartheta_E + A_R \cos \vartheta_R) \cos e &= \Sigma A_D \cos r \times \\ &\qquad (\cos \vartheta_D + \operatorname{tang} \Delta \operatorname{tang} r) \\ A_E \cos \vartheta_E - A_R \cos \vartheta_R &= \Sigma A_D \cos \vartheta_D\, n. \end{aligned}$$

Für isotrope Mittel, also für $\Delta = 0$, beziehen sich die ersten beiden auf den I Hauptfall ($\vartheta_E = 90^0$), die letzten beiden auf den II Hauptfall ($\vartheta_E = 0^0$).

Der aus diesen Gleichungen abzuleitende Schwächungscoefficient $\frac{A_R}{A_E}$ ist durch die Erfahrung hinreichend erprobt. Und wenn zwar die Amplitüde ($A_D A_D^i$) des nach einer zweimaligen Brechung aus der Hinterfläche einer planparallelen Platte austretenden Lichtes sich unmittelbar mittelst der allgemeinen Beziehung:

$$A_D\, A_D^i = A_E^2 - A_R^2$$

ableitet, so hat doch Neumann die interessante innere Krystallreflexion gleichfalls ausführlich behandelt. Zu den identischen Gleichungen würden natürlich auch unsere Grundsätze führen.

Dahingegen lässt sich die vieldeutige Continuitätstheorie Cauchy's durch passende Nebenannahmen zwar wohl auf die Vorgänge an der Vorderfläche, nicht aber auf die an der Hinterfläche eines Krystalles ausdehnen. Da aber damit zugleich ihr prätendirter Vorzug, die elliptische Polarisation der durchsichtigen Mittel mechanisch zu begründen, ganz illusorisch wird, diese vielmehr, wie ich anderswo gezeigt habe, sich weit vollständiger gerade aus den vorstehenden Formeln ableitet, so dürften sich nunmehr auch ihre Principien als zwar äusserlich ansprechend, aber als innerlich haltlos und willkürlich herausstellen.

Ich darf denn diese Untersuchung wohl mit dem Satze schliessen, dass die Theorie des Mitschwingens der ponderablen Theilchen die bewährten Formeln Neumann's auf Fresnel's Ansicht über die Lage der Polarisationsebne zurückführt.

---

15. Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate. Das Grundgesetz der Dispersion.

Die beiden Gleichungen, in welche die Differentialgleichung 11a zerfällt, lassen sich ohne Mühe dahin erweitern, dass sie sich unmittelbar auf absorbirende wie auf durchsichtige Mittel anwenden. Führt man nämlich statt der auf die Richtung der Fortpflanzung bezogenen Abscisse r (S. 13 durch x bezeichnet) die Coordinaten z, x der Einfallsebne ein, so schreiben sie sich auch so:

$$\text{I.}\qquad mA\frac{d^2\varrho}{dt^2}+\Sigma m'A'\frac{d^2\varrho'}{dt^2}-eA\left(\frac{d^2\varrho}{dz^2}+\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)=0$$

$$\text{II.}\qquad \varepsilon A\left(\frac{d^2\varrho}{dz^2}+\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)+\varepsilon' A'\left(\frac{d^2\varrho'}{dz^2}+\frac{d^2\varrho'}{dx^2}\right)+\varkappa A'\varrho'=0.$$

Um diese Gleichungen zu integriren, setzen wir:

$$\text{III.}\qquad \begin{aligned}\varrho &= Ae^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\Theta'+\frac{zp+x\sin e}{v}\right)\right\}\\ \varrho' &= A'e^{\frac{2\pi}{\lambda}qz}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\Theta'+\frac{zp+x\sin e}{v}\right)-2\Delta\right\},\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung: $2\Delta = 2(\chi'-\chi)$, ferner: $\alpha_E = e$, $\alpha_D = r$,

$$p = \nu\cos r,\ \sin e = \nu\sin r,\ p^2+\sin^2 e = \nu^2.$$

Was zunächst Gl. I betrifft, so wird dieselbe nach Ausführung dieser Substitution:

$$mA^2\cos\varphi+\Sigma m'A'^2\cos(\varphi-2\Delta) = mA^2\left[(p^2-q^2+\sin^2 e)\cos\varphi + 2pq\sin\varphi\right].$$

Sie zerfällt in die beiden folgenden:

$$\text{IV.}\qquad \nu^2 - q^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A'^2 \cos 2\Delta}{m A^2},\quad 2pq = \frac{\Sigma m' A'^2 \sin 2\Delta}{m A^2}.$$

Sofern nun die rechte Seite dieser Ausdrücke als für das bezügliche Mittel charakteristisch vom Einfallswinkel unabhängig ist, so hat man in Uebereinstimmung mit Gl. 12:

$$\text{V.}\qquad p^2 - q^2 + \sin^2 e = \nu^2 - q^2 = a^2 - b^2,\quad pq = ab.$$

Folglich für das wirkliche variable Brechungsverhältniss ν (Vgl. l. c. S. 70):

$$2\nu^2 = a^2 - b^2 + \sin^2 e + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2 e)^2 + 4a^2b^2}.$$

Die analoge Behandlung der Differentialgleichung II führt zu den Beziehungen:

$$\text{VI.}\qquad \begin{aligned} &(a^2+b^2)^2\, \varepsilon' A'^2 \sin 2\Delta = \\ &\varkappa' \lambda^2 [(a^2-b^2)\, A'^2 \sin 2\Delta - 2ab\, A'^2 \cos 2\Delta] \\ &(a^2+b^2)^2 (\varepsilon A^2 + \varepsilon' A'^2 \cos 2\Delta) = \\ &\varkappa' \lambda^2 [(a^2-b^2)\, A'^2 \cos 2\Delta + 2ab\, A'^2 \sin 2\Delta]. \end{aligned}$$

Combinirt man sie mit Gl. IV und lässt darin die Summenzeichen fort, so erhält man nunmehr direct, d. h. ohne Beihülfe des Complexen, die frühere Gl. 14 zurück, und damit a und b unmittelbar als Functionen von λ.

Die Gleichungen I, II, III dürften sonach wohl als das Grundgesetz der Dispersionslehre aufzufassen sein.

Für anisotrope Mittel ferner wird entsprechend (VII):

$$m\left(\mathfrak{A}_x \frac{d^2\xi}{dt^2} + \mathfrak{A}_y \frac{d^2\eta}{dt^2} + \mathfrak{A}_z \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) + \Sigma m'\left(\mathfrak{A}'_x \frac{d^2\xi'}{dt^2} + \dots\right)$$

$$-e\left\{\mathfrak{A}_x\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) + \mathfrak{A}_y\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \dots\right) + \mathfrak{A}_z\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \dots\right)\right\} = 0$$

und (VIII):

$$\left\{\varepsilon_x \mathfrak{A}_x\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) + \varepsilon_y \mathfrak{A}_y\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \dots\right) + \varepsilon_z \mathfrak{A}_z\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \dots\right)\right\}$$

$$+\varepsilon'\left\{\mathfrak{A}'_x\left(\frac{d^2\xi'}{dx^2} + \frac{d^2\xi'}{dy^2} + \frac{d^2\xi'}{dz^2}\right) + \mathfrak{A}'_y\left(\frac{d^2\eta'}{dx^2} + \dots\right) + \mathfrak{A}'_z\left(\frac{d^2\zeta'}{dx^2} + \dots\right)\right\}$$

$$+\varkappa(\mathfrak{A}'_x\, \xi' + \mathfrak{A}'_y\, \eta' + \mathfrak{A}'_z\, \zeta') = 0,$$

soweit wenigstens die einzelnen Molekularqualitäten um gleich liegende Axen gruppirt sind.

Hier bezieht sich die erste Gl. auf beide Ellipsoide ($\mathfrak{E}$, E), die zweite nur auf das directe Plücker'sche ($\mathfrak{E}$).

Und was endlich die circular polarisirenden Mittel betrifft, so bedürfen die vorstehenden Differentialgleichungen zufolge einer Bemerkung Mac Cullagh's nur eines einfachen Zusatzgliedes, um auch diese Mittel zu umfassen. Denkt man sich in denselben eine der Z-Axe folgende Welle, so hat man mit grosser Wahrscheinlichkeit:

$$m\mathfrak{A}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)+\Sigma m'\mathfrak{A}'\left(\frac{d^2\xi'}{dt^2}+\frac{d^2\eta'}{dt^2}\right)-e\mathfrak{A}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)=0$$

$$\text{IX.}\qquad \gamma\mathfrak{A}\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\xi}{dz}\right)+\varepsilon\mathfrak{A}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)+\varepsilon'\mathfrak{A}'\left(\frac{d^2\xi'}{dz^2}+\frac{d^2\eta'}{dz^2}\right)$$

$$+\varkappa\mathfrak{A}'(\xi'+\eta')=0.$$

Und dazu die Integralgleichungen:

$$\text{X.}\qquad \xi=\mathfrak{A}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{l}\right),\quad \eta=\pm\mathfrak{A}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{l}\right)\ \ldots\ .$$

Hier erscheint das Amplitüdenverhältniss $\mathfrak{A}' : \mathfrak{A}$ und damit auch der Brechungsindex n als abhängig vom Vorzeichen von η; man erhält:

$$n^2-1=\Sigma\frac{D\pm Gl}{\frac{l^2}{L^2}-1},$$

wo G eine Constante bedeutet. Macht man weiter die Annahme, dass in dem wie immer zusammengesetzten Mittel nur eine einzige sogenannte active Substanz enthalten sei, so ergibt sich nahezu durch Subtraction:

$$(n_1{}^2-n_2{}^2)\left(1-\frac{1}{n^2}\Sigma\frac{DL^2}{l^2-L^2}\right)=\frac{2GL'^2l}{l^2-L'^2},$$

sofern wegen der Kleinheit der Differenz der Indices ihre Summe $n_1+n_2=2n$ gesetzt werden darf. Folglich weiter:

$$\text{XI.}\qquad \frac{n_1-n_2}{\lambda}=\frac{1}{l_1}-\frac{1}{l_2}=\frac{GL'^2}{l^2-L'^2}.$$

Diesem Ausdruck ist aber bekanntlich der Drehungswinkel ψ der Polarisationsebne proportional. Führt man, da der Erfahrung zufolge L'^2 durchweg nur klein ist, die angedeutete Division aus, so schreibt sich schliesslich:

$$\psi=\frac{R}{l^2}+\frac{S}{l^4}.$$

Diese Beziehung unterscheidet sich von der von Boltzmann vorgeschlagenen und neuerdings von Soret und Sarasin am Quarz bestätigt gefundenen Dispersionsformel nur dadurch, dass dieselbe l statt λ enthält.

Einige Bemerkungen zu vorstehendem Aufsatz.

Von Demselben.

Seit der Drucklegung des vorstehenden Aufsatzes für die diesjährigen Verhandlungen des naturhistorischen Vereins habe ich erkannt, dass die in demselben behandelte Aufgabe innerhalb engerer Gränzen gehalten ist als nöthig gewesen wäre, und dass insbesondere das Brechungsverhältniss ganz grosser Wellen sich von der Einheit unterscheiden kann, ohne dass seitens des inneren Aethers eine wesentliche Eigenschaftsänderung anzunehmen wäre.

Sofern nämlich unter 2, aus den dort angeführten Gründen, in der Differentialgleichung der Aethertheilchen ein Glied $K\varrho$ für entbehrlich erachtet wurde, so füge ich dasselbe nunmehr hinzu und ersetze demzufolge das System der beiden Gleichungen I und II durch das folgende:

$$\text{I.} \qquad mA\frac{d^2\varrho}{dt^2}+\Sigma m'A'\frac{d^2\varrho'}{dt^2}=eA\left(\frac{d^2\varrho}{dz^2}+\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)$$

$$\text{IIb.} \qquad A\left\{\varepsilon\left(\frac{d^2\varrho}{dz^2}+\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)+\varkappa\varrho\right\}=A'\left\{\varepsilon'\left(\frac{d^2\varrho'}{dz^2}+\frac{d^2\varrho'}{dx^2}\right)+\varkappa'\varrho'\right\}.$$

Integrirt man dieselben mittelst der Ausdrücke III, so treten jetzt zu den Beziehungen IV und V anstatt VI die beiden folgenden:

$$\text{VIb.} \qquad \begin{gathered} A^2[\varepsilon(a^2-b^2)-\varkappa_1\lambda^2]= \\ A'^2\{[\varepsilon'(a^2-b^2)-\varkappa_1'\lambda^2]\cos 2\varDelta-\varepsilon' 2ab\sin 2\varDelta\}. \\ A^2\varepsilon 2ab= \\ A'^2\{[\varepsilon'(a^2-b^2)-\varkappa_1'\lambda^2]\sin 2\varDelta+\varepsilon' 2ab\cos 2\varDelta\}. \end{gathered}$$

Man entwickelt daraus:

$$\frac{A'^2 \cos 2\Delta}{A^2} = \frac{[\varepsilon(a^2-b^2)-\varkappa_1\lambda^2][\varepsilon'(a^2-b^2)-\varkappa_1'\lambda^2]+4a^2b^2\varepsilon\varepsilon'}{[\varepsilon'(a^2-b^2)-\varkappa_1'\lambda^2]^2+4a^2b^2\varepsilon'^2}$$

$$\frac{A'^2 \sin 2\Delta}{A^2} = \frac{2ab(\varepsilon'\varkappa_1-\varepsilon\varkappa_1')\lambda^2}{[\varepsilon'(a^2-b^2)-\varkappa_1'\lambda^2]^2+4a^2b^2\varepsilon'^2}.$$

Und wenn man zur Abkürzung:

(a). $$\frac{\varepsilon'}{\varkappa'} = L^2,\ \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1'}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = D'\frac{m}{m'}$$

setzt und diese Werthe in Gl. IV einführt, so erhält man als das Gesetz der Dispersionscurve:

(b). $$a^2-b^2-1=\sum\left\{\frac{m'\varepsilon}{m\varepsilon'}-\frac{\left(a^2-b^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)D'\frac{\lambda^2}{L^2}}{\left(a^2-b^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2+4a^2b^2}\right\}$$

$$2ab=\sum\frac{2abD'\frac{\lambda^2}{L^2}}{\left(a^2-b^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2+4a^2b^2}.$$

Ist nur eine einzige complexe Zone vorhanden, so dass man die Summenzeichen fortlassen darf, so lassen sich a und b leicht explicite entwickeln, und es kommt dann, wenn man die beiden jetzt auftretenden Gränzwerthe der brechenden Kraft für eine unendlich grosse und eine unendlich kleine Wellenlänge als:

(c)₁. $$n_\infty^2-1=\frac{m'\varkappa_1}{m\varkappa_1'} \quad \text{für } \lambda=\infty$$

$$n_2^2-1=\frac{m'\varepsilon}{m\varepsilon'} \quad \text{für } \lambda=0$$

$$D' = n_\infty^2-n_2^2 = Dn_\infty^2$$

bezeichnet und nunmehr: $\lambda_m = n_\infty L$ schreibt:

(d). $$a^2-b^2-1=n_\infty^2-1-\frac{n_\infty^2}{2}\left(1+D-\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(n_2^2+\frac{\lambda^2}{L^2}\right)-1,$$

$$2ab=n_\infty^2\sqrt{D-\frac{1}{4}\left(1+D-\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right)^2}=\sqrt{n_\infty^2\frac{\lambda^2}{L^2}-\frac{1}{4}\left(n_2^2+\frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2}.$$

Für $n_\infty = 1$ fallen dieselben mit den Gleichungen 14b zusammen. Construirt man aus ihnen in bekannter Weise die Dispersionscurve auch für ihre reellen Zweige, so dass sich zuvörderst schreibt:

$$n^2 = \frac{1}{2}\left(n_2{}^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(n_2{}^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2 - n_\infty{}^2 \frac{\lambda^2}{L^2}},$$

so lässt sich, sofern: $n_2{}^2 = n_\infty{}^2(1-D)$ gesetzt wird, die Wurzel ausziehen, und man erhält:

$$n = \frac{1}{2} n_\infty \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \right\},$$

welche Gleichung sich von Gl. 9a einzig nur dadurch unterscheidet, dass hier n_∞ eine wirklich vorhandene horizontale Asymptote repräsentirt, während dort n_m als Mittelordinate einer immerhin gekrümmten Linie aufgefasst wurde. Die in Rede stehende Formel (und mit ihr auch zugleich die Curve 9b) würde sonach durch gegenwärtige Erörterung wieder über die Bedeutung einer blossen Näherungsformel emporgehoben. Endlich vollziehen sich jetzt die hyperbolischen Krümmungen der anomalen Dispersion selbst für eine optisch-chemisch einfache Substanz nicht mehr zu beiden Seiten der Horizontalen $n = 1$, sondern der Linie $n = n_\infty$, und so können daher die Brechungsverhältnisse aller Wellenlängen, wie es ja auch nicht unwahrscheinlich ist, die Einheit übersteigen.

Für die zugehörigen Phasenverschiebungen ergibt sich Folgendes. Für den Absorptionsstreifen einer einfachen Substanz erhält man zufolge Gleichungen IV die trigonometrische Tangente der Phasendifferenz 2Δ durch Division der beiden Ausdrücke (d). Es kommt so:

$$\text{(e).} \qquad \operatorname{tang} 2\Delta = \frac{n_\infty{}^2 \sqrt{4D - \left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda^2_m}\right)^2}}{2(n_\infty{}^2 - 1) - n_\infty{}^2\left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda^2_m}\right)}$$

oder für kleine D, d. h. für schmale Absorptionsstreifen, einfacher:

$$\text{(e)}_2. \qquad \operatorname{tang} 2\Delta = \pm \frac{n_0{}^2 - n_\infty{}^2}{n_\infty{}^2 - 1} \sqrt{\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - \lambda_m}}.$$

Sofern wir nun voraussetzen, dass n_∞^2 stets grösser als 1 ist, bleibt $2\varDelta$ kleiner als 90^0. Die Phasendifferenz steigt dann vom Gränzpunkt G' rechts (für $\lambda = \lambda'_0$, $n'_0 > n_\infty$) bis zu einem auf der Mittellinie ($\lambda = \lambda_m$) selbst liegenden Maximalwerth an, um links von derselben im Gränzpunkt G'' (für $\lambda = \lambda''_0$, $n''_0 < n_\infty$) wiederum auf Null zurückzusinken. Dementsprechend kommt denn nunmehr auch den beiden reellen Zweigen (statt 0^0 und 180^0) der nämliche Werth $2\varDelta = 0$ zu.

Was schliesslich das Amplitüdenverhältniss $A':A$ betrifft, so wird dasselbe im Unterschied zu Gl. 13 innerhalb wie ausserhalb des Absorptionsstreifens veränderlich. Für das Innere desselben findet man:

$$\text{(f).}\qquad \frac{m'A'^2}{mA^2} = \sqrt{(n_\infty^2-1)\frac{\lambda^2}{L^2}-(n_2^2-1)}.$$

Vielleicht dürfte es nicht unzweckmässig erscheinen, an dieser Stelle auch die Differentialgleichungen 1 und 6 entsprechend zu erweitern und sie mittelst der einfachen Ausdrücke 3 zu integriren. Dieselben erhalten die Form:

$$m\frac{d^2\varrho}{dt^2} = e\frac{d^2\varrho}{dx^2} - \alpha_1\varepsilon_1\frac{d^2\varrho}{dx^2} - \alpha_1\varkappa_1\varrho$$
$$- \alpha_2\varepsilon_2\frac{d^2\varrho}{dx^2} - \alpha_2\varkappa_2\varrho - \ldots .$$

$$\text{(g).}\qquad m'_1\frac{d^2\varrho'_1}{dt^2} = \alpha_1\varepsilon'_1\frac{d^2\varrho'_1}{dx^2} + \alpha_1\varkappa'_1\varrho'_1$$

$$m'_2\frac{d^2\varrho'_2}{dt^2} = \alpha_2\varepsilon'_2\frac{d^2\varrho'_2}{dx^2} + \alpha_2\varkappa'_2\varrho'_2 \ldots .$$

Die Integration und Elimination der α ergibt jetzt:

$$\omega^2\left(m + m'_1\frac{\varkappa_1 l^2 - \varepsilon_1}{\varkappa'_1 l^2 - \varepsilon'_1} + m'_2\frac{\varkappa_2 l^2 - \varepsilon_2}{\varkappa'_2 l^2 - \varepsilon'_2} + \ldots\right) = e,$$

d. h.

$$\text{(h).}\qquad n^2 - 1 = \Sigma\frac{m'}{m}\frac{\varkappa_1 l^2 - \varepsilon_1}{\varkappa'_1 l^2 - \varepsilon'_1}$$

oder auch:

$$n^2 - 1 = \Sigma\frac{m'\varkappa_1}{m\varkappa'_1} + \Sigma\frac{m'}{m}\frac{\dfrac{\varkappa_1}{\varkappa'_1} - \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1}}{\dfrac{\varkappa'_1}{\varepsilon'_1}l^2 - 1}.$$

Führt man die früheren Abkürzungen (Gl. a) ein und setzt noch:

(c). $$n^2_\infty - 1 = \Sigma \frac{m' \varkappa_1}{m \varkappa'_1},\quad n_2{}^2 - 1 = \Sigma \frac{m' \varepsilon_1}{m \varepsilon'_1},$$

so erhält man die verallgemeinerte Gleichung 8, nämlich:

(i). $$n^2 - n^2_\infty = \Sigma \frac{D'}{\frac{l^2}{L^2} - 1}$$

zurück, und man ersieht zugleich, dass sämmtliche Einzelbestandtheile an der Bildung der beiden extremen brechenden Kräfte participiren.

Naturgemäss zieht die frühere Annahme $\frac{\varepsilon'_1}{\varkappa'_1} = L^2$, unter L^2 eine von der Dichtigkeit unabhängige Constante verstanden, die weitere: $\frac{\varepsilon_1}{\varkappa_1} = \mathfrak{L}^2 = \text{Const.}$ nach sich. Daraus folgt dann:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1} = c \frac{\varkappa_1}{\varkappa'_1},\quad D' = C \frac{m' \varkappa_1}{m \varkappa'_1}$$

und wenigstens für Substanzen mit einem einzigen Absorptionsstreifen:

(k). $$D' = C\,(n^2_\infty - 1).$$

Die hierdurch ausgesprochene Abhängigkeit zwischen Brechung und Zerstreuung ist in der That durch meine Gasversuche erwiesen. Ihnen zufolge ist nämlich der Abstand zweier Spectrallinien eines Gasspectrums (welche von der Mittellinie hinreichend entfernt sind, so dass in Gleichungen 8 und i Wellenlängen l und λ gegen einander vertauscht werden dürfen) der prismatischen Ablenkung derselben proportional.

Was weiter die Behandlung der anisotropen Mittel betrifft, so schreibt sich Gleichung (h) für diese offenbar so:

(l). $$n'^2 - 1 = \Sigma \frac{l'^2 - \mathfrak{L}^2}{l'^2 - L^2} \frac{m'}{m} \left\{ \left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)_1 \cos^2 a + \left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)_2 \cos^2 b + \left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)_3 \cos^2 c \right\}.$$

Und daraus erhellt, dass nicht bloss die Erörterungen der Nummern 7—12 nach wie vor ihre Anwendbarkeit behalten, sondern dass insbesondere auch die strengeren Gleichungen VII und VIII nach entsprechender Vervollständigung ebenfalls gültig bleiben würden.

Das Nämliche wäre der Fall bezüglich der Gleichungen IX, X, XI der circular polarisirenden Mittel.

Die schliessliche, endgültige Entscheidung freilich darüber, ob $\varkappa$ in Wirklichkeit von Null verschieden ist, hängt, wie mir scheint, von der experimentellen Beantwortung der schwierigen Frage ab, ob das Brechungsverhältniss der Metalle kleiner sein kann als Eins oder nicht.

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande

Jahr/Year: 1876

Band/Volume: 33

Autor(en)/Author(s): Ketteler E.

Artikel/Article: Versuch einer Theorie der (anomalen) Dispersion des Lichtes in einfach und doppelt