Ueber die Behandlung der zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindenden ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte nach dem electrodynamischen Grundgesetze;

von

R. Clausius.

Es ist von mir für die gegenseitige Einwirkung zweier in Bewegung befindlicher Electricitätstheilchen ein neues Grundgesetz aufgestellt, welches ich im Februar d. J. in einer vorläufigen Mittheilung [1]) publicirt und einige Zeit darauf [2]) näher begründet habe. Ich will mir nun erlauben, dieses Gesetz auf die zwischen zwei linearen Strömen stattfindenden ponderomotorischen Kräfte und auf die von einem linearen Strome auf einen linearen Leiter ausgeübten Inductioswirkungen anzuwenden.

§. 1. Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte nach der Ampère'schen Formel.

Um die ponderomotorischen Kräfte für alle Fälle berechnen zu können, hat bekanntlich Ampère aus experimentell festgestellten Thatsachen eine Formel abgeleitet, welche die Kraft darstellen soll, die zwei Stromelemente aufeinander ausüben, und es sei mir gestattet, diese Formel und einige auf ihr beruhende, für ganze geschlossene Ströme geltende Ausdrücke hier kurz anzuführen, um sie dann mit den aus meinem Grundgesetze abgeleiteten Resultaten bequem vergleichen zu können.

---

1) Sitzungsberichte der Niederrhein. Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde 1876 S. 18, u. Pogg. Ann. Bd. 157, S. 489.

2) Borchardt's Journal für Mathematik Bd. 82, S. 85.

Ampère hat seiner Formel verschiedene Gestalten gegeben, von denen je nach den Rechnungen, welche man mit ihr ausführen will, bald die eine, bald die andere bequemer ist. Eine der einfachsten ist folgende. Seien ds und ds' die beiden Stromelemente, i und i' die Stromintensitäten, r der Abstand der Elemente von einander und (ss') der Winkel zwischen ihren Richtungen, dann ist die Kraft, welche die Elemente auf einander ausüben, nach Ampère, eine Anziehung von der Stärke

$$kii'dsds'\left(\frac{\cos(ss')}{r^2} + r\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\right),$$

worin k eine positive Constante bedeutet. Ein negativer Werth dieser Formel stellt natürlich eine Abstossung dar, indem diese als negative Anziehung aufgefasst werden kann.

Will man hieraus die Kraft ableiten, welche das Stromelement ds von einem endlichen Strome s' erleidet, so muss man die in bestimmte Richtungen fallenden Componenten der Kraft betrachten, und für diese kann man dann die Integration ausführen. Es möge dazu ein rechtwinkliges Coordinatensystem eingeführt werden, in welchem die beiden Stromelemente die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben. Die in die Richtungen dieser Coordinaten fallenden Componenten der Kraft, welche das Element ds von dem Elemente ds' erleidet, seien mit $\xi dsds'$, $\eta dsds'$, $\zeta dsds'$ bezeichnet; dann ergiebt sich aus der obigen Anziehungsformel die Gleichung

$$\xi = kii'\left[\frac{x'-x}{r^3}\cos(ss') + (x'-x)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\right]$$

oder anders geschrieben:

$$(1)\qquad \xi = kii'\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(ss') + (x'-x)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\right],$$

und entsprechende Gleichungen ergeben sich für die beiden anderen Coordinatenrichtungen.

Bezeichnen wir nun die drei Componenten der Kraft, welche das Stromelement ds von einem endlichen Strome s' erleidet, mit Ξds, Hds, Zds, so gilt für Ξ die Gleichung

$$\Xi = \int \xi ds'.$$

Für die hierin angedeutete Integration ist es zweckmässig, den unter (1) gegebenen Ausdruck von ξ in folgenden gleichbedeutenden umzuformen:

$$(2)\quad \xi = kii' \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}.$$

Hierin lässt sich das letzte Glied sofort nach s' integriren und giebt einfach die Differenz der Werthe, welche der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck für die beiden Grenzwerthe von s', die s'_0 und s'_1 heissen mögen, annimmt, und welche wir dadurch bezeichnen wollen, dass wir s'_0 und s'_1 als Indices neben den Ausdruck setzen. Wir erhalten so die Gleichung:

$$(3)\quad \Xi = kii' \left\{ \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right] ds' + \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_{s'_1} - \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_{s'_0} \right\}.$$

Nehmen wir nun an, der Strom s' sei ein geschlossener, so beziehen sich die Grenzwerthe s'_0 und s'_1 der Stromcurve auf einen und denselben Punct des Raumes, und die beiden Werthe, deren Differenz in der vorigen Gleichung vorkommt, sind somit unter einander gleich und heben sich gegenseitig auf. Es bleibt also in diesem Falle:

$$(4)\quad \Xi = kii' \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right] ds',$$

und entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Coordinatenrichtungen.

Ist nicht nur der die Kraft ausübende Strom geschlossen, sondern hat man es mit zwei geschlossenen Strömen zu thun, deren auf einander ausgeübte ponderomotorische Kräfte man bestimmen will, so lässt sich die Gesammtwirkung dieser Kräfte sehr einfach mittelst einer von Fr. Neumann eingeführten Grösse ausdrücken, welche die bei irgend einer unendlich kleinen Lagenänderung der Ströme von den ponderomotorischen Kräften gethane Arbeit durch ihr negatives Differential darstellt, und welche Neumann daher das Potential der beiden Ströme aufeinander genannt hat. Dem Ausdrucke dieses Potentials kann man verschiedene Formen geben, von denen ich hier nur die anführen will, welche für unsere weiteren Vergleichungen am bequemsten ist, nämlich

$$-kii'\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds'.$$

Wenn man sich die beiden geschlossenen Ströme in der bekannten Weise durch magnetische Flächenpaare ersetzt denkt, so kann man ihr Potential aufeinander ganz so bilden, wie es bei Agentien geschieht, deren Theile sich mit einer Kraft anziehen oder abstossen, welche nur von den Mengen und der Entfernung abhängt und dem Quadrate der letzteren umgekehrt proportional ist. Man hat nämlich für zwei Elemente dm und dm' des magnetischen Fluidums, mit dem man sich die Flächen belegt denkt, den Ausdruck $\frac{dm\,dm'}{r}$ zu bilden, und diesen nach m über das eine Flächenpaar und nach m' über das andere Flächenpaar zu integriren. Dadurch erhält man das gesuchte Potential zunächst in der Form eines doppelten Flächenintegrals, welches sich aber durch eine leichte mathematische Operation in das obige doppelte Linienintegral umwandeln lässt. Da hiernach die von Neumann eingeführte Grösse bei der Ersetzung der Ströme durch magnetische Flächenpaare als ein Potential von der gewöhnlichen, beim Magnetismus gebräuchlichen Art erscheint, so wollen wir sie zum Unterschiede von einem anderen Potential, welches weiter unten zur Sprache kommen soll, das magnetische Potential der beiden geschlossenen Ströme aufeinander nennen.

§. 2. Anwendung des neuen Grundgesetzes auf die in bewegten linearen Leitern strömenden Electricitäten.

Wir wollen nun dazu schreiten, die Kräfte, welche die in zwei linearen Leitern strömenden Electricitäten auf einander ausüben, aus dem von mir aufgestellten Grundgesetze abzuleiten.

Nach diesem Gesetze gilt, wenn Xee' die x-Componente der Kraft darstellt, welche ein zur Zeit t im Puncte x, y, z befindliches bewegtes Electricitätstheilchen e von einem anderen um die Strecke r von ihm entfernten, im Puncte x', y', z' befindlichen bewegten Electricitätstheilchen e' erleidet, folgende Gleichung:

$$(5)\quad X = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Um diese Gleichung und ebenso auch die weiter unten folgenden, aus ihr abgeleiteten Gleichungen bequemer schreiben zu können, wollen wir ein Summenzeichen von eigenthümlicher Bedeutung einführen. Wenn nämlich eine Summe aus drei Gliedern besteht, welche sich auf die drei Coordinatenrichtungen beziehen, im Uebrigen aber unter einander gleich sind, so wollen wir nur das auf die x-Richtung bezügliche Glied wirklich hinschreiben und das Vorhandensein der beiden anderen durch das Summenzeichen andeuten, wie aus nachstehender Gleichung zu ersehen ist:

$$\Sigma\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$(5_a)\quad X = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(1 - k\Sigma\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Dieses Kraftgesetz ist in Bezug auf seine Anwendbarkeit wesentlich verschieden von denjenigen, welche Weber und Riemann aufgestellt haben. Während nämlich die letzteren nur unter der Voraussetzung richtig sein können, dass ein galvanischer Strom aus zwei gleich starken, nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Strömen von positiver und negativer Electricität bestehe, ist das von mir aufgestellte Gesetz davon unabhängig. Ich habe es unter der Voraussetzung abgeleitet, dass nur die positive Electricität ströme und die negative in Ruhe bleibe, habe aber gleich hinzugefügt, dass das Gesetz auch zulässig bleibt, wenn man annimmt, der galvanische Strom bestehe aus zwei entgegengesetzt gerichteten Strömen von positiver und negativer Electricität, wobei es gleichgültig ist, ob man beiden Strömen gleiche oder verschiedene Stärke zuschreibt.

Der Allgemeinheit wegen wollen wir im Folgenden die zuletzt erwähnte Annahme machen, dass beide Electricitäten sich bewegen können, aber nicht gleiche Geschwindigkeiten zu haben brauchen. Wenn man sich nämlich auch der von C. Neumann gemachten Voraussetzung anschliesst, dass die negative Electricität fest an den ponderablen Atomen hafte, so ist damit doch nur für diejenigen Leiter, welche die Electricität ohne Mitbewegung der Atome leiten, das Strömen der negativen Electricität ausgeschlossen. Bei den electrolytischen Leitern dagegen, bei denen die Electricitätsleitung durch Bewegung der positiv und negativ electrischen Moleciiltheile vermittelt wird, muss man für die entgegengesetzt electrischen Molecültheile auch entgegengesetzt gerichtete Bewegungen annehmen, die aber wegen der verschiedenen Beweglichkeit der verschiedenen Molecültheile nicht mit gleicher Geschwindigkeit stattzufinden brauchen. Wenn man nun bei der Aufstellung der allgemeinen Gleichungen für die negative Electricität eine Strömungsbewegung in Rechnung bringt, ihre Geschwindigkeit aber unbestimmt lässt, so kann man diese Geschwindigkeit für feste Leiter, gemäss der Neumann'schen Vorstellung, gleich Null setzen, oder man kann sie auch, wenn man sich der Weber'schen Vorstellung anschliessen will, gleich der Geschwindigkeit der positiven Electricität setzen, und die Gleichungen lassen sich somit den verschiedenen Arten von Leitern und den verschiedenen Vorstellungsweisen über die Electricitätsbewegung gleich gut anpassen.

Es mögen nun zwei von galvanischen Strömen durchflossene lineare Leiter s und s' gegeben sein, welche sich bewegen können und deren Stromintensitäten veränderlich sein können. In einem Leiterelemente ds denken wir uns gleiche Mengen von positiver und negativer Electricität enthalten, welche wir mit hds und $-hds$ bezeichnen wollen. Die positive Electricität habe die Strömungsgeschwindigkeit c nach der Seite, nach welcher wir die Bogenlänge s als wachsend betrachten, und die negative Electricität habe eine nach der entgegengesetzten Seite gehende Strömungsgeschwindigkeit, welche wir mit $-c_1$ bezeichnen wollen. Ebenso bezeichnen wir die in einem Leiterelemente ds' enthaltenen Electricitätsmengen mit $h'\,ds'$ und $-h'\,ds'$ und ihre Strömungsgeschwindigkeiten mit c' und $-c_1'$.

Richten wir nun zunächst unsere Aufmerksamkeit auf irgend zwei in den beiden Leitern sich bewegende Electricitätstheilchen, welche sich zur Zeit t in den Puncten x, y, z und x', y', z' und im gegenseitigen Abstande r befinden, so hat jedes dieser Electricitätstheilchen ausser seiner Bewegung im Leiter, welche wir kurz die Strömungsbewegung nennen und deren Geschwindigkeit wir, wie oben bei der positiven Electricität, beim einen mit c und beim anderen mit c' bezeichnen wollen, noch dadurch eine weitere Bewegung, dass der Leiter selbst sich bewegt. Um die Antheile, welche diese beiden Bewegungen an der Veränderung der Coordinaten und des Abstandes haben, von einander unterscheiden zu können, wollen wir folgende Bezeichnungsweise einführen.

Die Coordinaten eines in einem der Leiter festen Punctes betrachten wir einfach als Functionen der Zeit t, die Coordinaten des im Leiter s strömenden Electricitätstheilchens dagegen denken wir uns als Functionen von t und s dargestellt, und betrachten dabei s selbst wieder als Function von t. Demnach ist für die Coordinate x des Electricitätstheilchens der vollständige Differentialcoëfficient nach t so zu schreiben:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{ds}{dt},$$

oder, wenn wir für den die Strömungsgeschwindigkeit darstellenden Differentialcoëfficienten $\frac{ds}{dt}$ das oben eingeführte Zeichen c anwenden:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + c\frac{\partial x}{\partial s}. \tag{6}$$

Ebenso gilt für das im Leiter s' mit der Geschwindigkeit c' strömende Theilchen die Gleichung:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + c'\frac{\partial x'}{\partial s'}. \tag{7}$$

Entsprechende Gleichungen sind natürlich auch für die beiden anderen Coordinatenrichtungen zu bilden.

Der Abstand r der beiden Electricitätstheilchen von einander hängt wegen der Bewegung der beiden Leiter unmittelbar von t, und wegen der Bewegung der Electricitätstheilchen in den Leitern von s und s' und dadurch mittelbar von t ab. Der vollständige Differentialcoëfficient von $\frac{1}{r}$ nach t lautet daher:

$$(8) \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{dt} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t} + c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s} + c'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}.$$

Wegen der in der Gleichung (5_a) vorkommenden zweiten Differentiation nach t müssen wir unser Augenmerk auch noch auf das Verhalten der Geschwindigkeiten c und c' richten. Bei einem galvanischen Strome kann die Geschwindigkeit der strömenden Electricitäten sich an jeder Stelle des Leiters mit der Zeit ändern, weil die Intensität des Stromes veränderlich sein kann, und ausserdem können, falls der Leiter in Bezug auf Querschnitt und Stoff nicht überall gleich ist, die Geschwindigkeiten an verschiedenen Stellen des Leiters verschieden sein. Wenn wir nun dem entsprechend bei unserem zur Betrachtung ausgewählten, im Leiter s sich bewegenden Electricitätstheilchen die Strömungsgeschwindigkeit c als Function von t und s behandeln, so haben wir zu setzen:

$$(9) \qquad \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial c}{\partial s},$$

und ebenso für das im Leiter s' sich bewegende Electricitätstheilchen:

$$(10) \qquad \frac{dc'}{dt} = \frac{\partial c'}{\partial t} + c'\frac{\partial c'}{\partial s'}.$$

Nach diesen Vorbemerkungen über die Behandlung der in Betracht kommenden Grössen wollen wir die Kraft bestimmen, welche ein Stromelement ds' auf eine in einem Puncte concentrirt gedachte Electricitätseinheit ausüben würde, wenn diese mit der Geschwindigkeit c im Leiter s strömte.

Zunächst möge die Kraft bestimmt werden, welche die in dem Elemente enthaltene positive Electricitätsmenge $h'ds'$, die mit der Geschwindigkeit c' strömt, auf jene Electricitätseinheit ausüben würde. Die x-Componente dieser Kraft wird durch das Product $h'ds'X$ dargestellt, in welchem für X der unter (5_a) gegebene Ausdruck zu setzen ist, wodurch kommt:

$$-h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(1-k\sum\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right)-kh'ds'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Hierin müssen wir das letzte Glied etwas näher betrachten. Die Grösse $\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}$, welche durch Einsetzung des in (7) gegebenen Ausdruckes von $\frac{dx'}{dt}$ die Form

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+c'\frac{\partial x'}{ds'}\right)$$

erhält, ist als Function von t, s und s' anzusehen, und demgemäss ist die angedeutete vollständige Differentiation nach t so auszuführen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)+c\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)+c'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Diese Gleichung möge mit h' multiplicirt und dann das letzte Glied in folgender Weise umgeformt werden:

$$h'c'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right)-\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}.$$

Zugleich möge bei der im vorletzten Gliede angedeuteten Differentiation berücksichtigt werden, dass nur r von s abhängig ist. Dann kommt:

$$(11)\quad h'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)=h'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)+h'c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$
$$-\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}.$$

Der hierin vorkommende Differentialcoëfficient $\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}$ lässt sich durch einen anderen ersetzen. Das Leiterelement ds' ist von zwei Querschnitten des Leiters begrenzt, welche sich an den durch die Bogenlängen s' und $s'+ds'$ bestimmten Stellen befinden. Durch den ersten Querschnitt strömt während der Zeit dt die Menge $h'c'dt$ von positiver Electricität in das Element hinein. Durch den zweiten Querschnitt strömt die Menge

$$\left(h'c' + \frac{\partial(h'c')}{\partial s'}\,ds'\right) dt$$

aus dem Elemente heraus. Die während der Zeit dt stattfindende Zunahme der in dem Elemente enthaltenen positiven Electricitätsmenge ist also:

$$-\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}\,ds'\,dt.$$

Eben diese Zunahme wird aber andererseits durch

$$\frac{\partial h'}{\partial t}\,ds'\,dt$$

dargestellt, und man erhält somit die Gleichung:

$$(12) \quad \frac{\partial(h'c')}{\partial s'} = -\frac{\partial h'}{\partial t}$$

und dadurch geht die Gleichung (11) über in:

$$h'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) = h'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + h'c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{\partial h'}{\partial t}.$$

Hierin lässt sich an der rechten Seite das erste und letzte Glied in eines zusammenziehen, so dass die Gleichung lautet:

$$(13) \quad h'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + h'c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in das letzte Glied des obigen Ausdruckes der Kraftcomponente geht derselbe über in:

$$-h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(1 - k\sum\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right) - kds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + h'c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\right].$$

Hierin müssen wir nun endlich noch für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$ ihre unter (6) und (7) gegebenen Werthe einsetzen, wodurch wir folgenden Ausdruck für die x-Componente der von der positiven Electricitätsmenge $h'ds'$ ausgeübten Kraft erhalten:

$$-h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[1-k\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+c'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right]$$

$$-kds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{h'c'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(h'\frac{\partial x'}{\partial t}+h'c'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{h'c'^2}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Will man ferner die x-Componente derjenigen Kraft ausdrücken, welche die in dem Elemente ds' enthaltene negative Electricitätsmenge $-h'ds'$ auf die im Leiter s gedachte Electricitätseinheit ausüben würde, so hat man dazu im vorigen Ausdrucke nur h' und c' durch $-h'$ und $-c_1'$ zu ersetzen, wodurch man erhält:

$$h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[1-k\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}-c_1'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right]$$

$$-kds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{h'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{h'c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(-h'\frac{\partial x'}{\partial t}+h'c_1'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}-\frac{h'c_1'^2}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhalten wir die x-Componente der zu bestimmenden Kraft, welche das Stromelement ds' auf die im Leiter s gedachte, mit der Geschwindigkeit c strömende Electricitätseinheit ausüben würde. Bei der Ausführung der Addition möge berücksichtigt werden, dass die Summe $h'c'+h'c_1'$ die Stromintensität in s' bedeutet, welche wir mit i' bezeichnen und in allen Theilen des Leiters als gleich annehmen wollen. Wenn wir dann noch unter Einführung eines neuen Zeichens dieselbe x-Componente durch $\mathfrak{x}ds'$ darstellen, so erhalten wir die Gleichung:

$$(14)\quad \mathfrak{x}=k\left[i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.-ci'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{c'-c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Entsprechend lauten natürlich auch die zur Bestimmung der y- und z-Componente derselben Kraft dienenden Gleichungen.

§. 3. Ponderomotorische Kraft zwischen zwei Stromelementen.

Aus der im vorigen Paragraphen bestimmten Kraft, welche die im Leiter s gedachte Electricitätseinheit von dem Stromelemente ds' erleiden würde, können wir nun leicht auch die Kräfte ableiten, welche die in einem Leiterelemente ds wirklich enthaltenen beiden Electricitätsmengen hds und $-hds$ von dem Stromelemente ds' erleiden.

Um die x-Componente der Kraft zu erhalten, welche die positive Electricitätsmenge hds, deren Geschwindigkeit c ist, erleidet, brauchen wir nur den obigen Ausdruck von $\mathfrak{x}$ mit $hdsds'$ zu multipliciren, und diese Componente wird somit dargestellt durch:

$$khdsds'\left[i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.-ci'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{c'-c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Um ferner die x-Componente der Kraft zu erhalten, welche die negative Electricitätsmenge $-hds$ erleidet, brauchen wir in dem vorigen Ausdrucke nur h und c durch $-h$ und $-c_1$ zu ersetzen, wodurch wir erhalten:

$$-khdsds'\left[i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t}-c_1\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.+c_1i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{c'-c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke bedeutet die x-Componente der ponderomotorischen Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelement ds' erleidet. In dieser Summe heben sich alle Glieder, welche nicht c oder c_1 als Factor haben, gegenseitig auf und es bleibt:

$$khdsds'(c+c_1)i'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\Sigma\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right).$$

Hierin kann man noch das Product $h(c+c_1)$, welches die Stromintensität in s bedeutet, durch das Zeichen i ersetzen. Indem wir den Ausdruck dann, unserer früheren Bezeichnung gemäss, gleich $\xi ds ds'$ setzen, erhalten wir die zur Bestimmung von ξ dienende Gleichung, zu welcher wir auch die entsprechenden zur Bestimmung von η und ζ dienenden bilden wollen, nämlich:

$$(15)\quad \begin{cases} \xi = kii'\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial x'}{\partial s'} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\dfrac{\partial x'}{\partial s'}\right) \\ \eta = kii'\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\sum\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial x'}{\partial s'} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\dfrac{\partial y'}{\partial s'}\right) \\ \zeta = kii'\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\sum\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial x'}{\partial s'} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\dfrac{\partial z'}{\partial s'}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen kann man noch dadurch umgestalten, dass man für die in ihnen vorkommende Summe andere gleichbedeutende Ausdrücke substituirt. Aus der Gleichung

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} = -2\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right) = -2\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

Bezeichnet man ferner, wie oben, den Winkel zwischen den Richtungen der beiden Stromelemente ds und ds' mit (ss'), so ist:

$$\cos(ss') = \sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

Infolge dieser beiden Gleichungen kann man der ersten der Gleichungen (15) folgende Formen geben:

$$(16)\quad \xi = -kii'\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)$$

$$(17)\quad \xi = kii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(ss') - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right),$$

und in gleicher Weise lassen sich natürlich auch die beiden letzten der Gleichungen (15) umgestalten.

In Bezug auf diese hier gewonnenen, und auch schon in der oben citirten Mittheilung und Abhandlung publicirten

Ausdrücke für die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, ist zunächst zu bemerken, dass sie davon, ob der galvanische Strom aus der Bewegung nur Einer Electricität oder aus der Bewegung beider Electricitäten besteht, ferner davon, ob die Stromelemente in Ruhe oder in Bewegung sind, und ob die Stromintensitäten in ihnen constant oder veränderlich sind, nicht beeinflusst werden.

Ihrer Richtung nach unterscheidet sich die durch diese Ausdrücke bestimmte Kraft von derjenigen, welche Ampère angenommen hat, wesentlich dadurch, dass sie nicht in die Verbindungslinie der beiden Stromelemente fällt.

Die durch den Mittelpunct von ds gehende Grade, in welcher die Kraft wirkt, lässt sich leicht geometrisch bestimmen. Nach der Form der obigen Ausdrücke, welche aus je zwei Gliedern bestehen, zerfällt die Kraft in zwei Componenten, von denen die erste eine Anziehung von der Stärke

$$kii'\,ds\,ds'\,\frac{\cos(ss')}{r^2}$$

ist, und die zweite die Richtung des Elementes ds' und die Stärke

$$-\,kii'\,ds\,ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s} \text{ oder } kii'\,ds\,ds'\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}$$

hat. Daraus folgt, dass jene Gerade, in welcher die Kraft wirkt, in der durch r und ds' gelegten Ebene liegen muss. In dieser Ebene bestimmt sich ihre Richtung weiter dadurch, dass sie auf dem Elemente ds senkrecht sein muss. Die in die Richtung des Elementes ds fallende Componente der Kraft wird nämlich dargestellt durch

$$ds\,ds'\left(\xi\frac{\partial x}{\partial s}+\eta\frac{\partial y}{\partial s}+\zeta\frac{\partial z}{\partial s}\right),$$

und wenn man hierin für ξ, η ζ die unter (15) gegebenen Ausdrücke einsetzt, und dabei die Gleichung

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}$$

berücksichtigt, so hebt sich Alles auf und der Ausdruck wird Null, woraus folgt, dass die Kraft nur auf dem Elemente senkrecht sein kann.

Ein anderer wesentlicher Punct, in welchem die aus dem neuen Grundgesetze abgeleitete Kraft von der Ampère'schen abweicht, ist folgender. Wenn die beiden Stromelemente so gerichtet sind, dass sie mit ihrer Verbindungslinie zusammenfallen, so würden sie nach der Ampère'schen Formel eine Abstossung oder Anziehung auf einander ausüben, jenachdem die Ströme im gleichen oder entgegengesetzten Sinne stattfinden. Nach den obigen Formeln dagegen ist für diesen Fall die Kraft gleich Null. Ich glaube nicht, dass irgend eine erfahrungsmässig feststehende Thatsache dem letzteren Resultate widerspricht. Man betrachtet zwar gewöhnlich die Bewegung, welche ein auf zwei mit Quecksilber gefüllte parallele Rinnen gesetzter metallischer Schwimmer beim Durchgange eines galvanischen Stromes annimmt, als einen Beweis für die Richtigkeit des aus der Ampère'schen Formel abgeleiteten Ergebnisses; ein solcher Schluss scheint mir aber nicht gerechtfertigt zu sein, da diese Bewegung sich auch auf andere Weise erklären lässt, nämlich aus der Wirkung, welche die Electricität beim Uebergange aus dem Quecksilber in den festen Leiter und aus dem festen Leiter wieder in das Quecksilber auf die ponderablen Atome ausübt, und welche auch in zusammenhängenden Leitern bei der Ueberwindung des Leitungswiderstandes stattfindet, aber hier keine sichtbare Bewegung, sondern nur Wärme hervorbringen kann.

Zur weiteren Vergleichung unserer oben bestimmten Kraft mit der von Ampère angenommenen kann besonders die unter (2) gegebene, aus der Ampère'schen Formel abgeleitete Gleichung dienen, nämlich:

$$\xi = kii' \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der unter (17) gegebenen nur durch das letzte Glied. Da dieses Glied ein Differentialcoëfficient nach s' ist, so giebt es bei der Integration über einen geschlossenen Strom s' oder auch über ein beliebiges System von geschlossenen Strömen den Werth Null. Daraus folgt, dass in allen Fällen, wo es sich um die von geschlossenen Strömen (zu denen auch Magnete zu rechnen sind), ausgeübten pondemotorischen Kräfte handelt, die aus der Ampère'schen Formel abgeleiteten Resultate mit den aus dem neuen Grundgesetze sich ergebenden übereinstimmen.

§. 4. Bestimmung der inducirten electromotorischen Kraft.

Wir kehren nun zurück zu der Gleichung (14), nämlich:

$$\mathfrak{x} = k\Big[i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\Sigma\Big(\frac{\partial x}{\partial t}+c\frac{\partial x}{\partial s}\Big)\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{i'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\Big)$$

$$-ci'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-i'\frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{c'-c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\Big)\Big].$$

Die durch diese Gleichung bestimmte Grösse $\mathfrak{x}$ ist dadurch definirt, dass das Product $\mathfrak{x}ds'$ die x-Componente der Kraft darstellt, welche eine im Leiter s gedachte, mit der Geschwindigkeit c strömende Electricitätseinheit von dem Stromelemente ds' erleiden würde. Bezeichnet man die y- und z-Componente derselben Kraft mit $\mathfrak{y}ds'$ und $\mathfrak{z}ds'$, so sind die Grössen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ natürlich durch ganz entsprechende Gleichungen zu bestimmen. Bezeichnet man ferner die in die Richtung des Leiters s fallende Componente derselben Kraft mit $\mathfrak{S}ds'$, so gilt für $\mathfrak{S}$ die Gleichung:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{x}\frac{\partial x}{\partial s}+\mathfrak{y}\frac{\partial y}{\partial s}+\mathfrak{z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Diese Grösse steht nun mit einer anderen, um deren Bestimmung es sich im Folgenden handelt, in unmittelbarer Beziehung. Das Product $\mathfrak{S}dsds'$ stellt nämlich dasjenige dar, was man die von dem Stromelemente ds' in dem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft nennt. Bezeichnet man also die von einem endlichen Strome s' in einem endlichen Leiter s inducirte electromotorische Kraft mit E, und demgemäss die von dem Stromelemente ds' in dem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft mit $\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} ds ds'$, so hat man zu setzen:

$$\mathfrak{S} = \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'}.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$(18) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = \mathfrak{x} \frac{\partial x}{\partial s} + \mathfrak{y} \frac{\partial y}{\partial s} + \mathfrak{z} \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Wenn man hierin für $\mathfrak{x}$ den oben angeführten Ausdruck und für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die entsprechenden Ausdrücke einsetzt, so heben sich die mit dem Factor c behafteten Glieder gegenseitig auf, und die übrigen geben:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k \Big[i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \Sigma \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)$$
$$- i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1'}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \Big].$$

Hierin kann man setzen:

$$i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \Sigma \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} = i' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - \frac{i'}{r} \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'}$$

und dann weiter:

$$- \frac{i'}{r} \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right),$$

wodurch die obige Gleichung übergeht in:

$$(19) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k \Big[- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + i' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)$$
$$- i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1'}{r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \Big].$$

Dieser Gleichung kann man noch etwas andere Formen geben. Wenn $d\sigma$ und $d\sigma'$ die unendlich kleinen Bahnen sind, welche die Leiterelemente ds und ds' während der Zeit dt zurücklegen, so kann man setzen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} \text{ und } \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial \sigma'} \frac{d\sigma'}{dt},$$

oder unter Einführung der Zeichen

$$\gamma = \frac{d\sigma}{dt} \text{ und } \gamma' = \frac{d\sigma'}{dt}$$

noch kürzer:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma \frac{\partial x}{\partial \sigma} \text{ und } \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma' \frac{\partial x'}{\partial \sigma'}.$$

Dadurch geht (19) über in:

$$(20) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k \Big[-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{i'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'}\Big) + i' \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\gamma}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial x'}{\partial s'}\Big) - i' \frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\gamma'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial \sigma'} + \frac{c' - c_1'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'}\Big)\Big].$$

Bezeichnet man nun wieder, wie früher, den Winkel zwischen den Richtungen der beiden Leiterelemente ds und ds' mit (ss'), und ferner den Winkel zwischen den Richtungen des Leiterelementes ds und des Bahnelementes $d\sigma'$ mit $(s\sigma')$, sowie den zwischen den Richtungen von $d\sigma$ und ds' mit $(\sigma s')$, so kann man die obigen Summen durch die Cosinus dieser Winkel ersetzen, und erhält:

$$(21) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k \Big[-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{i' \cos(ss')}{r}\Big) + i' \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\gamma \cos(\sigma s')}{r}\Big) - i' \frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c_1') \cos(ss')}{r}\Big)\Big].$$

Aus dieser unter (19), (20) und (21) in verschiedenen Formen gegebenen Differentialgleichung kann man durch Integration die inducirte electromotorische Kraft für jedes Stück des inducirenden Stromes und jedes Stück des inducirten Leiters berechnen.

Ist der inducirende Strom s' geschlossen, so giebt das letzte Glied bei der Integration nach s' den Werth Null, und man erhält:

$$(22) \quad \frac{\partial E}{\partial s} = -k \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i' \cos(ss')}{r} ds' + k i' \frac{\partial}{\partial s} \int \frac{\gamma \cos(\sigma s')}{r} ds'.$$

Diese Gleichung stimmt mit den von Fr. Neumann aufgestellten Inductionsgesetzen überein.

Ist der inducirte Leiter s geschlossen, so giebt bei der Integration nach s das zweite Glied den Werth Null, und es kommt:

$$(23) \quad \frac{\partial E}{\partial s'} = -k \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i' \cos(ss')}{r} ds - k i' \frac{\partial}{\partial s'} \int \Big(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c_1') \cos(ss')}{r}\Big) ds.$$

Sind endlich s und s' beide geschlossen, so fallen bei der doppelten Integration nach s und s' die beiden letzten Glieder fort, und man erhält daher für die von einem gegeschlossenen Strome s' in einen geschlossenen Leiter s inducirte electromotorische Kraft die einfache Gleichung:

$$(24) \quad E = -k \frac{\partial}{\partial t} \int\int \frac{i' \cos(ss')}{r} \, ds \, ds'.$$

Ganz in derselben Weise, wie wir vorher die vom Strome s' im Leiter s inducirte electromotorische Kraft bestimmt haben, können wir natürlich auch die vom Strome s im Leiter s' inducirte electromotorische Kraft bestimmen. Bezeichnen wir diese mit E' und demgemäss die von einem Stromelemente ds in einem Leiterelemente ds' inducirte electromotorische Kraft mit $\frac{\partial^2 E'}{\partial s \partial s'} ds \, ds'$, so ist zu setzen:

$$(25) \quad \frac{\partial^2 E'}{\partial s \partial s'} = k \Big[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i \cos(ss')}{r}\right) + i \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r}\right) - i \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma \cos(\sigma s')}{r} + \frac{(c - c_1)\cos(ss')}{r}\right)\Big].$$

§. 5. Arbeit der ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte.

Nachdem für zwei von electrischen Strömen durchflossene Leiterelemente ds und ds' die auf einander ausgeübten ponderomotorischen Kräfte und die gegenseitig in einander inducirten electromotorischen Kräfte bestimmt sind, lässt sich auch die von diesen Kräften gethane Arbeit leicht angeben.

Die Componenten derjenigen ponderomotorischen Kraft, welche ds von ds' erleidet, wurden durch die Producte $\xi ds ds'$, $\eta ds ds'$ und $\zeta ds ds'$ dargestellt und die darin vorkommenden Grössen ξ, η, ζ durch die Gleichungen (15) bestimmt, und wenn man in entsprechender Weise die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche ds' von ds erleidet, durch $\xi' ds ds'$, $\eta' ds ds'$ und $\zeta' ds ds'$ darstellt, so kann man zur Bestimmung von ξ', η', ζ' dieselben Gleichungen anwenden, nachdem man in ihnen die accentuirten und unaccentuirten Buchstaben gegen einander vertauscht hat.

Will man nun die Arbeit bestimmen, welche diese Kräfte bei der Bewegung der Elemente während der Zeit dt leisten, so hat man folgenden Ausdruck zu bilden:

$$ds\,ds'\,dt\left(\xi\frac{\partial x}{\partial t}+\eta\frac{\partial y}{\partial t}+\zeta\frac{\partial z}{\partial t}+\xi'\frac{\partial x'}{\partial t}+\eta'\frac{\partial y'}{\partial t}+\zeta'\frac{\partial z'}{\partial t}\right).$$

Substituirt man hierin für ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' ihre Werthe, so erhält man:

$$kii'\,ds\,ds'\,dt\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right).$$

Hierin kann man weiter setzen:

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x'}{\partial s'\,\partial t}$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x'}{\partial s'\,\partial t},$$

wodurch entsteht:

$$kii'\,ds\,ds'\,dt\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\right],$$

und wenn man hiermit dieselben Umformungen vornimmt, wie mit (19), so erhält man für die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der zwischen zwei Stromelementen wirkenden ponderomotorischen Kräfte den Ausdruck:

$$kii'\,ds\,ds'\,dt\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(ss')}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r}\right)\right].$$

Um die Arbeit, welche von der in einem Leiter inducirten electromotorischen Kraft während der Zeit dt geleistet wird, auszudrücken, haben wir die electromotorische Kraft mit der im Leiter stattfindenden Stromintensität und dem Zeitelemente zu multipliciren. Wenden wir dieses auf die beiden electromotorischen Kräfte an, welche die Elemente ds und ds' gegenseitig in einander induciren, so kommt:

$$ds\,ds'\,dt\left(i\frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'} + i'\frac{\partial^2 E'}{\partial s\,\partial s'}\right).$$

Setzt man hierin die unter (21) und (25) gegebenen Ausdrücke ein, so heben sich mehrere Glieder gegenseitig auf und es bleibt:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'cos(ss')}{r}\right) + i'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\,cos(ss')}{r}\right)\right.$$
$$\left. + ii'\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{(c-c_1)cos(ss')}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{(c'-c_1')cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Hierin lassen sich die beiden ersten in der grossen Klammer stehenden Glieder durch folgende ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'cos(ss')}{r}\right) + ii'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{cos(ss')}{r}\right),$$

so dass man für die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der von den Elementen ds und ds' in einander inducirten electromotorischen Kräfte folgenden Ausdruck erhält:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'cos(ss')}{r}\right) + ii'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{(c-c_1)cos(ss')}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{c'-c_1')cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Addirt man nun die beiden gefundenen Arbeitsgrössen, so erhält man für die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit aller zwischen den Elementen ds und ds' wirkenden Kräfte den Ausdruck:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'cos(ss')}{r}\right) + ii'\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma cos(\sigma s')}{r} + \frac{(c-c_1)cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma' cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c'-c_1')cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Bei der Integration dieser Ausdrücke nach s und s' treten für den Fall, dass es sich um geschlossene Leiter und Ströme handelt, dieselben Vereinfachungen ein, welche schon in den vorigen Paragraphen bei anderen Ausdrücken zur Sprache gekommen sind, indem die Glieder, welche die Form von Differentialcoëfficienten nach s und s' haben, bei der betreffenden Integration, wenn der Leiter geschlossen ist, den Werth Null geben. Sind s und s' beide geschlossen, so bleiben nur die Integrale der Glieder übrig, welche Differentialcoëfficienten nach t enthalten. Führt man dann noch zur Abkürzung das Zeichen w ein mit der Bedeutung:

$$(26) \quad w = k \int\int \frac{\cos(ss')}{r} \, ds \, ds'$$

und bezeichnet die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der ponderomotorischen Kräfte mit dA_p, die der electromotorischen Kräfte mit dA_e und die aller Kräfte einfach mit dA, so lauten die Gleichungen:

$$(27) \quad dA_p = ii'dw$$

$$(28) \quad dA_e = -d(ii'w) - ii'dw$$

$$(29) \quad dA = -d(ii'w).$$

§. 6. Das electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander.

Bei der Aufstellung des neuen Grundgesetzes habe ich eine Grösse gebildet, welche ich das electrodynamische Potential zweier bewegter Electricitätstheilchen e und e' auf einander genannt und durch folgenden Ausdruck dargestellt habe:

$$k \frac{ee'}{r} \left(\frac{dx}{dt} \frac{\delta x'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right),$$

welchen man abgekürzt so schreiben kann:

$$k \frac{ee'}{r} \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt}.$$

Von dieser Grösse habe ich nachgewiesen, dass ihr negatives Differential die Arbeit darstellt, die während der Zeit dt von den Kräften, welche die Theilchen auf einander ausüben, geleistet wird.

Da nun bei geschlossenen Strömen dieselben Electricitätsmengen, welche einmal in ihnen sind, auch in ihnen bleiben, so kann man unter Anwendung der vorigen Gleichung auch das electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander bilden, und dieses Potential muss ebenfalls jener Bedingung genügen, dass die von allen Kräften, welche die Ströme auf einander ausüben, während der Zeit dt geleistete Arbeit durch das negative Differential des Potentials dargestellt wird.

Um das Potential auszudrücken, betrachten wir zunächst zwei Elemente, ds und ds', der beiden Ströme. In diesen sind die Electricitätsmengen hds, $-hds$, $h'ds'$ und $-h'ds'$ enthalten. Die Geschwindigkeiten dieser Electricitätsmengen sind in §. 2 näher bestimmt und die in die x-Richtung fallenden Componenten derselben werden dargestellt

$$\begin{array}{llllll}
\text{für die Menge} & & & hds & \text{durch} & \frac{\partial x}{\partial t}+c\,\frac{\partial x}{\partial s} \\
» & » & » & -hds & » & \frac{\partial x}{\partial t}-c_1\,\frac{\partial x}{\partial s} \\
» & » & » & h'ds' & » & \frac{\partial x'}{\partial t}+c'\,\frac{\partial x'}{\partial s'} \\
» & » & » & -h'ds' & » & \frac{\partial x'}{\partial t}-c_1'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}
\end{array}$$

und entsprechende Ausdrücke gelten für die in die anderen Coordinatenrichtungen fallenden Geschwindigkeitscomponenten. Indem wir nun die vier Combinationen von je einer in ds und einer in ds' enthaltenen Electricitätsmenge bilden, können wir für jede dieser Combinationen das electrodynamische Potential der beiden Mengen auf einander ausdrücken. Diese Potentiale werden dargestellt:

$$\begin{array}{llllll}
\text{für} & hds & \text{u.} & h'ds' & \text{durch} & k\frac{hh'ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+c'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) \\
» & hds & » & -h'ds' & » & -k\frac{hh'ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}-c_1'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) \\
» & -hds & » & h'ds' & » & -k\frac{hh'ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}-c_1\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+c'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) \\
» & -hds & » & -h'ds' & » & k\frac{hh'ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}-c_1\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}-c_1'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right).
\end{array}$$

Die Summe dieser vier Ausdrücke, welche das Potential der beiden in dem einen Stromelemente enthaltenen Electricitätsmengen auf die beiden im anderen Stromelemente enthaltenen darstellt, ist einfach:

$$k\,\frac{hh'ds\,ds'}{r}\,(c+c_1)(c'+c_1')\sum\frac{\partial x}{\partial s}\,\frac{\partial x'}{\partial s'}$$

oder auch, wenn man die Producte $h(c+c_1)$ und $h'(c'+c_1')$, welche die Stromintensitäten bedeuten, durch i und i', und die angedeutete Summe durch $cos(ss')$ ersetzt:

$$kii' \frac{cos(ss')}{r} ds\, ds'.$$

Durch Integration dieses Ausdruckes über die beiden geschlossenen Stromcurven erhalten wir das Potential der beiden Ströme auf einander. Indem wir dieses mit W bezeichnen, gelangen wir zu der Gleichung:

$$(30) \qquad W = kii' \int\int \frac{cos(ss')}{r} ds\, ds',$$

welche sich unter Anwendung des durch (26) definirten Zeichens w noch kürzer so schreiben lässt:

$$(31) \qquad W = ii'w.$$

In §. 1 wurde eine von Fr. Neumann eingeführte Grösse erwähnt, welche wir das magnetische Potential der Ströme auf einander nannten, und welche durch folgenden Ausdruck dargestellt wird:

$$-kii' \int\int \frac{cos(ss')}{r} ds\, ds'$$

oder unter Anwendung des Zeichens w durch

$$-ii'w.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem für W gefundenen ergiebt sich, dass das von uns aus dem Grundgesetze abgeleitete electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander dem von Neumann eingeführten Potential dem absoluten Werthe nach gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist.

Betrachten wir nun endlich die am Schlusse des vorigen Paragraphen gegebenen Ausdrücke der während der Zeit dt gethanen Arbeit, so sehen wir, dass die Arbeit aller von geschlossenen Strömen auf einander ausgeübten Kräfte in der That durch das negative Differential ihres electrodynamischen Potentials dargestellt wird. Der für die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte allein gewonnene Ausdruck $ii'dw$ dagegen ist nur dann das negative Differential des magnetischen Potentials, wenn die Stromintensitäten constant sind, oder wenigstens ein constantes Product haben.
