Zur Theorie der doppelten Brechung; Gleichberechtigung des Strahles und der Normalen als Ausgangsbegriffes[1].

Von

Professor E. Ketteler.

Zum Erweise des in der Ueberschrift ausgesprochenen Satzes, welchen meines Wissens bisher bloss Stefan[2]) vertreten hat, vergegenwärtige man sich die möglichen einfachsten Vorstellungen, auf denen eine Theorie der doppelten Brechung sich aufbauen lässt. Wenn zunächst Fresnel die Annahme machte, dass die natürlichen doppelt brechenden Mittel in ihrer Wirkungsweise ersetzt werden können durch ein Aggregat von Aethertheilchen, in welchem die Masseneinheit nach drei aufeinander senkrechten Hauptrichtungen durch verschieden grosse Elasticitätskräfte bewegt wird, so ist diese Anschauung, obwohl gegenwärtig unhaltbar geworden, doch anscheinend erst von Wenigen aufgegeben. Wenn freilich Fresnel selbst sich auf die Betrachtung derjenigen Kraft beschränkte, welche ein verschobenes einzelnes Theilchen in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, so ging man später von der parallelen Verschiebung von Wellebenen aus. Ebenso leitet man gewöhnlich die Gesetze der Fortpflanzung nicht mehr aus der resultirenden Gesammtbewegung ab, sondern entwickelt lieber die Bewegungscomponenten nach den drei Hauptaxen selbständig. In diesem Fall ordnen sich den Transversalkräften sofort gewisse Longitudinalkräfte zu.

---

1) Zugleich als Vorwort zu dem folgenden Aufsatz.

2) Wien. Ber. L (2) 505.

Behandelt man die drei erwähnten Bewegungsgleichungen unbekümmert um die Natur dieser letzteren Kräfte, aber unter Ausschluss von Dichtigkeitsänderungen des Mittels, so lassen sich dieselben mit v. Lang[1]) ohne Weiteres in der Form von Integralgleichungen hinschreiben. Die nähere Untersuchung charakterisirt dann diese Kräfte als hydrodynamische Druckkräfte. Nennen wir m die Aethermasse der Volumeinheit, e_x, e_y, e_z die Deformationsconstanten für die drei Axenrichtungen, ferner ξ, η, ζ die Schwingungscomponenten zur Zeit t und p den entsprechenden Druck, so gestalten sich die in Rede stehenden Gleichungen allgemeiner wie folgt:

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{dp}{dx}\right) &= e_x\, \Delta_2\xi \\ m\left(\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{dp}{dy}\right) &= e_y\, \Delta_2\eta \\ m\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{dp}{dz}\right) &= e_z\, \Delta_2\zeta, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

Sollen diese Gleichungen für transversale Schwingungen auf die Fresnel'sche Fläche der Fortpflanzung führen[2]), so muss bezüglich p angenommen werden, dass bei jeder kleinen Verschiebung die totale Arbeit des Druckes verschwindet, dass also:

$$\frac{dp}{dx}\mathfrak{A}_x + \frac{dp}{dy}\mathfrak{A}_y + \frac{dp}{dz}\mathfrak{A}_z = 0,$$

unter $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ die den entsprechenden kleinen Wegprojectionen proportionalen axialen Amplituden verstanden. Geht man nämlich durch resp. Multiplication mit denselben

---

1) Einleitung in die theor. Physik. Braunschweig 1868. — 2. Heft, S. 330.

2) Ich darf hier wohl die Meinung äussern, dass alle künstlicheren Theorien, welche sogenannte quasitransversale Schwingungen ergeben, gegenüber den einfachen Fresnel'schen Gesetzen kaum auf reale Wahrheit Anspruch haben. Andererseits erachte ich auch den Beweis, dass die Schwingungsebne auf der Polarisationsebne senkrecht steht, als thatsächlich erbracht.

und Addition obiger Gleichungen von den bewegenden Kräften zu den Arbeiten über, so erhält man unter vorstehender Bedingung:

$$1)\quad m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\mathfrak{A}_x + \frac{d\eta^2}{dt^2}\mathfrak{A}_y + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\mathfrak{A}_z\right) = \mathfrak{e}_x\,\mathfrak{A}_x\,\Delta_2\xi + \mathfrak{e}_y\mathfrak{A}_y\,\Delta_2\eta + \mathfrak{e}_z\,\mathfrak{A}_z\,\Delta_2\zeta,$$

welche Gleichung durch Einsetzung der Integralausdrücke:

$$2)\quad \xi = \mathfrak{A}_x \cos\varphi,\ \eta = \mathfrak{A}_y \cos\varphi,\ \zeta = \mathfrak{A}_z \cos\varphi \qquad \varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{ux + vy + wz}{l}\right),$$

worin T die Schwingungsdauer, $l = \omega T$ die Wellenlänge und u, v, w die Cosinus der Winkel zwichen Wellennormale und Axen bedeuten, übergeht in:

$$\frac{m}{T^2}\mathfrak{A}^2 = \frac{\mathfrak{e}_x\,\mathfrak{A}_x{}^2 + \mathfrak{e}_y\,\mathfrak{A}_y{}^2 + \mathfrak{e}_z\,\mathfrak{A}_z{}^2}{l^2}$$

oder:

$$m\omega^2 = \mathfrak{e}_x U^2 + \mathfrak{e}_y V^2 + \mathfrak{e}_z W^2,$$

sofern man entsprechend unter U, V, W die Cosinus der Winkel zwischen Schwingung und Axen versteht.

Dem hierdurch ausgesprochenen Gesetze wird unbeschadet der specielleren Form der Function p seitens der Gleichungen I. genügt, wenn man in der Erwägung, dass der Druck im Momente des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage verschwindet, sonst aber ähnlich verläuft wie die Ausschläge, die Annahme macht:

$$p = c \sin\varphi,$$

unter c eine von x, y, z; t unabhängige neue Variable verstanden. Dies eingesetzt, gibt bei Einführung der axialen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten:

$$3)\quad \begin{aligned} (\omega_x{}^2 - \omega^2)\,U &= C\omega^2 u \\ (\omega_y{}^2 - \omega^2)\,V &= C\omega^2 v \\ (\omega_z{}^2 - \omega^2)\,W &= C\omega^2 w, \end{aligned}$$

worin noch $C\omega^2 = -\,cl$ geschrieben ist. Aus diesen Gleichungen leitet man durch bekannte Behandlung ab:

$$4)\quad \begin{gathered} \omega^2 = \omega_x{}^2 U^2 + \omega_y{}^2 V^2 + \omega_z{}^2 W^2 \\ \frac{u^2}{\omega_x{}^2 - \omega^2} + \frac{v^2}{\omega_y{}^2 - \omega^2} + \frac{w^2}{\omega_z{}^2 - \omega^2} = 0. \end{gathered}$$

Multiplizirt man dieselben noch resp. mit u, v, w und addirt, so kommt:

$$C\omega^2 = \omega_x{}^2\, Uu + \omega_y{}^2\, Vv + \omega_z{}^2\, Ww,$$

so dass man erhält:

$$C = \text{tang}\, \delta, \tag{5}$$

wo δ den Winkel zwischen Strahl und Normale bedeutet. Der vorstehende Ausdruck berechtigt dann schliesslich, dem Druck p mit v. Lang[1]) von vornherein die Form zu geben:

$$p = \mathfrak{a}\frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{b}\frac{d\eta}{dy} + \mathfrak{c}\frac{d\zeta}{dz}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Constanten bedeuten, deren Werthe sich sonach als:

$$\mathfrak{a} = \omega_x{}^2, \quad \mathfrak{b} = \omega_y{}^2, \quad \mathfrak{c} = \omega_z{}^2$$

herausstellen.

Sofern die $\mathfrak{e}$ und m gegebene Grössen sind, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω von T und l unabhängig, d. h. das vorausgesetzte Mittel ist dispersionslos.

Zu beachten bleibt endlich, dass bei der Totalverschiebung der Wellen keine longitudinale Druckarbeit geleistet wird, dass also die gesammte Arbeit der bewegenden Kräfte sich in Arbeit der Beschleunigung umsetzt.

Um zufolge dieser Theorie von der Geschwindigkeitsfläche der Normalen (Gl. 4 b) zu der der Strahlen, d. h. zur Wellenfläche fortzuschreiten, soll man bekanntlich diese als die Enveloppe der ersteren deuten.

Das bisher besprochene anisotrope Idealmittel Fresnel's mit drei aufeinander senkrechten verschiedenen Deformationsconstanten lässt sich gegenwärtig den realen doppelt brechenden Mitteln als Aggregaten von Aether- und Körpertheilchen nicht mehr substituiren; es führt weder ohne neue Annahmen zu den Intensitätsformeln der Spiegelung und Brechung noch auch anscheinend zu einer Erklärung der (anomalen) Dispersion. — Man kann indess dem Fresnel'schen Typus einen zweiten gegenüberstellen.

Man denke sich die Theilchen eines isotrop geordneten unzusammendrückbaren Aethers mit den allseitig gleichen Elementen $\mathfrak{e}$ und m noch mit fremden Massen beschwert, und zwar möge bei einer Verschiebung parallel der X-Axe per Volumeinheit die Gesammtmasse $m + m_x$

---

1) Wien. Ber. LXXIII (2), Mai-Heft 1876.

bewegt werden. Die Masse m_x soll dabei so mit m verbunden sein, dass sie bloss nach der X-Richtung mitgenommen wird, nach allen übrigen Richtungen aber ruhend bleibt. Ebenso möge bei der Verschiebung parallel der Y-Axe eine ähnlich verbundene Masse m_y mitgenommen, also die Gesammtmasse $m + m_y$ und parallel der Z-Axe endlich die Gesammtmasse $m + m_z$ bewegt werden. Man hätte sonach ein Idealmittel, in welchem bei einer gleichen Verschiebung des Aethers nach beliebiger Richtung seitens einer constant bleibenden Elasticität fort und fort andere Massen in Schwingungen versetzt werden. Da offenbar der Effect zunächst für die Axenrichtungen der gleiche bleibt, mag man bei Gleichheit der Quotienten aus Elasticität und Masse die Zähler oder Nenner veränderlich nehmen, so werden, so lange:

$$\omega_x^2 = \frac{e_x}{m} = \frac{e}{m + m_x}, \dots ,$$

beide Idealmittel auch für alle übrigen Richtungen bezüglich der Schwingungslage und Fortpflanzungsgeschwindigkeit übereinstimmende Gesetze ergeben. Man wird daher für diesen zweiten Typus die Differentialgleichungen haben:

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} (m+m_x)\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{dp}{dx}\right) &= e\,\Delta_2\xi \\ (m+m_y)\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{dp}{dy}\right) &= e\,\Delta_2\eta \\ (m+m_z)\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{dp}{dz}\right) &= e\,\Delta_2\zeta. \end{aligned}$$

Sie unterscheiden sich von den Gl. I. vornehmlich dadurch, dass bei Aufwendung einer gewissen Arbeit zur Totalverschiebung der Wellebnen die bewegenden Kräfte sich nicht mehr einfach in beschleunigende umsetzen, sondern ausserdem auch longitudinale Druckarbeit verrichten. Um von diesen Gleichungen zur Wellenfläche zu gelangen, dazu bedarf es natürlich gleichfalls der Vornahme der Umhüllung.

Wenn man bisher, wie namentlich Stokes[1]) entwickelt

1) Rep. Brit. Assoc. (1862).

hat, etwas kühn die Gleichung (4 a) in dem Sinne als das thatsächliche Gesetz der Lichtbewegung in Krystallen betrachtet hat, dass dieselbe auf die Geschwindigkeit der Normalen und die verwandte, aus ihr ableitbare (s. u.) Gl. (12 a) auf die der Strahlen bezogen werden soll, so haben zum Glück die entsprechenden, von Stokes ausdrücklich zum Zweck der Entscheidung angestellten Versuche[1]) diese Zweifel beseitigt. Wir werden daher wenigstens den Gleichungen II. die ihnen bisher zugelegte Bedeutung lassen und heben überhaupt bezüglich des zweiten Typus hervor, dass derselbe zu der richtigen von der Reflexionstheorie verlangten Gleichung der lebendigen Kräfte hinführt, und dass hier die Erklärung der Dispersion auf eine Abhängigkeit der Massen m_x, m_y, m_z von der Wellenlänge hinauskommt, welche Grössen allerdings in den natürlich gegebenen Mitteln der Beweglichkeit der Körpertheilchen proportional sind. Die drei Gl. II. enthalten dieselben ersichtlich als gegebene Grössen, und um daher die Dispersion der doppelt brechenden Mittel theoretisch zu begründen, darf man nicht bei Typus II. stehen bleiben, sondern hat unmittelbar auf die natürliche Constitution zurückzugehen.

Da nun bei der Theorie des Mitschwingens der Körpertheilchen die von denselben ausgehenden Reactionskräfte und die von diesen Kräften geleisteten Arbeiten in den Vordergrund treten, so begreift sich, dass ein Anknüpfen an die Form der Gl. II, welche zu Arbeiten von Beschleunigungs- und Druckkräften führen, mit solchen Schwierigkeiten verbunden erscheint, dass ein Streben nach Vereinfachung gerechtfertigt wird. Zudem ist der bisher übliche Weg der Entwicklung der Theorie der doppelten Brechung nicht frei von Schwächen.

Schon oben wurde angedeutet, dass man erst auf dem Umwege einer fictiven (mathematischen Hülfs-) Fläche, der Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen, zur eigentlich physikalischen Fläche, der Wellenfläche, hingelangt, und dass demzufolge auch die Definition des Strahles nicht recht gelingen will[2]). Könnte man freilich umgekehrt verfahren,

1) Compt. rend. LXXVII. p. 1150.

2) Man vergleiche übrigens die Erklärung Kirchhoff's Abh. d. Berl. Akad. 1876.

so dass die Hülfsfläche die secundäre würde, so erschiene auch der Uebergang von der primären aus durch Fällung von Perpendikeln auf die Tangentialebnen viel plausibler als die jetzige Begründung der umgekehrten Enveloppe-Construction.

Selbstverständlich darf man bei einem solchen Versuche nicht auf das Verfahren Fresnel's, auf die Wirkung von elastischen Kräften durch Verschiebung eines einzelnen Punktes oder einer einzelnen Punktreihe zurückgreifen, sondern man hat die gleichzeitige Verschiebung aller succedirenden Ebnen ins Auge zu fassen. Nun ist die übliche Vorstellungsweise die folgende. Auf Grund des Huyghens'schen Princips, welches die allseitige Ausbreitung des Lichtes auf die Beihülfe beliebig gegebener Erschütterungsmittelpunkte von Elementarwellen zurückführt, construirt man im Innern des Krystalles eine in gleicher Ebne liegende Folge von Oberflächenelementen neben einander befindlicher Wellenflächen als sogenannte Wellebne und lässt dann diese Ebne als abstracten Begriff sich parallel verschieben, ohne sich eigentlich um die in schräger Richtung erfolgende Bewegungsübertragung von Theilchen zu Theilchen und um das Wie und Warum dieser Schiefe weiter zu bekümmern. In unserem Sinne sind denn auch die Differentialgleichungen I. und II. wenig mehr als Bedingungen der Möglichkeit der Coexistenz solcher abstracter Wellebnen, die, könnte man vielleicht sagen, ihre Aufgabe fast mehr nach der geometrischen als nach der mechanischen Seite hin gelöst haben.

Wenngleich nun das Huyghens'sche Princip eine so universelle Geltung hat, dass keine von der Natur gebotene Wellenbewegung ohne die Intervention desselben zu Stande kommt, so lässt sich dasselbe nichtsdestoweniger bei der theoretischen Untersuchung arbeitender Kräfte umgehen und so gewissermaassen der natürlichen punktförmigen Ausbreitung der Wellen die künstliche Aufhebung der Solidarität der schwingenden Theilchen durch passende zwischen ihnen angebrachte Verbindungen entgegenstellen. Man kann dann diese Theilchen durch äussere Kräfte auch nach anderen Ebnen verschieben, als dem zwanglosen

Zustand derselben entspricht, und die dabei geleistete Arbeit in Rechnung ziehen. Gelingt es ferner im einzelnen Falle, den Einfluss der erwähnten Verbindungen durch frei wirkende Kräfte zu ersetzen, so wird selbst die Aufstellung entsprechender neuer, nach den Coordinatenaxen getrennter Bewegungsgleichungen ermöglicht.

Dies vorausgesetzt, mögen die Theilchen eines Mittels vom Typus II, die im Ruhezustand auf einer beliebigen Richtung S liegen, senkrecht zu dieser mittelst einer äusseren Kraft nach dem Gesetze:

7)
$$\xi_s = \mathfrak{A}_x{}^s \cos\varphi_s,\ \eta_s = \mathfrak{A}_y{}^s \cos\varphi_s,\ \zeta_s = \mathfrak{A}_z{}^s \cos\varphi_s$$
$$\varphi_s = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{xu_s + yv_s + zw_s}{l_s}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{r_s}{\omega_s}\right)$$

verschoben und in einer bestimmten Lage festgehalten werden. Die Componenten der hierdurch bleibend geweckten Elasticitätskraft sind alsdann per Volumeinheit die folgenden:

$$e\Delta_2\xi_s,\quad e\Delta_2\eta_s,\quad e\Delta_2\zeta_s.$$

Man lasse nun die Theilchen dem Zuge dieser Kraft folgen, sorge aber durch passende Verbindungen dafür, dass bei der Bewegung das Gesetz der Gl. 7 genau eingehalten werde, und unterbreche dieselbe, sobald die kleinen Wege $d\mathfrak{A}_x{}^s$, $d\mathfrak{A}_y{}^s$, $d\mathfrak{A}_z{}^s$ zurückgelegt sind. Es ist dann während der Verschiebung die Arbeit:

8)
$$dW_s = e\,[\Delta_2\xi^s d\mathfrak{A}_x{}^s + \Delta_2\eta^s d\mathfrak{A}_y{}^s + \Delta_2\zeta^s d\mathfrak{A}_z{}^s]$$

verzehrt worden.

Selbstverständlich wird bei diesem Vorgang die gewonnene Spannkraft ebenso wenig zu Druckarbeit verbraucht wie bei der analogen Transversalverschiebung der Schichten eines isotropen Mittels, und wird daher alle potentielle Energie zur Geschwindigkeitserhöhung der bewegten Massen aufgewandt. Man hat daher auch die Gleichung:

9)
$$dW_s = (m + m_x)\frac{d^2\xi_s}{dt^2}d\mathfrak{A}_x{}^s + (m + m_y)\frac{d^2\eta_s}{dt^2}d\mathfrak{A}_y{}^s + (m + m_z)\frac{d^2\zeta_s}{dt^2}d\mathfrak{A}_z{}^s.$$

Combinirt man dieselbe mit der vorhergehenden und integrirt, so erhält man beispielsweise die Form:

$$\text{10)} \qquad n_s{}^2 - 1 = \frac{m_x U_s{}^2 + m_y V_s{}^2 + m_s W_s{}^2}{m},$$

wo U_s, V_s, W_s die Cosinus der Winkel zwischen der auf S senkrechten Schwingungsrichtung und den Axen bedeuten und ausserdem zur Abkürzung gesetzt ist: $\frac{e}{m\omega_s{}^2} = \frac{v^2}{\omega_s{}^2} = n_s{}^2$. Diese nämliche Beziehung findet man, wenn man die entsprechenden Verhältnisse der natürlichen Mittel auf den ideellen Typus II. reducirt (vgl. u. Gl. V.).

Man kann jetzt auch die gewonnene Arbeitsgleichung in die drei folgenden Einzelgleichungen zerfällen:

$$\text{IIIa.} \qquad \begin{aligned} (m+m_x)\frac{d^2\xi_s}{dt^2} - \frac{dp_s}{dx} &= e\Delta_2\xi_s \\ (m+m_y)\frac{d^2\eta_s}{dt^2} - \frac{dp_s}{dy} &= e\Delta_2\eta_s \\ (m+m_z)\frac{d^2\zeta_s}{dt^2} - \frac{dp_s}{dz} &= e\Delta_2\zeta_s, \end{aligned}$$

sofern man nämlich zu den gegebenen bewegenden Kräften drei den Einfluss der Verbindungen repräsentirende variable Kräfte (Druckkräfte) hinzufügt, deren Totalarbeit man gleich Null setzt. Ersichtlich verhalten sich diese Differentialgleichungen einer nicht ganz sicheren aprioristischen Construction gegenüber ganz ähnlich den Gl. I, von denen sie sich nur dadurch unterscheiden, dass hier bei gleicher Form der Druckcomponenten die Einheit der Kraft auf verschiedene Massen, dort die Einheit der Masse auf verschiedene Kräfte bezogen wird. Es entsprechen ihnen die Integralgleichungen:

$$\text{11)} \qquad \begin{aligned} \left(\frac{1}{\omega_x{}^2} - \frac{1}{\omega_s{}^2}\right) U_s &= C\frac{1}{\omega_s{}^2} u_s \\ \left(\frac{1}{\omega_y{}^2} - \frac{1}{\omega_s{}^2}\right) V_s &= C\frac{1}{\omega_s{}^2} v_s \\ \left(\frac{1}{\omega_z{}^2} - \frac{1}{\omega_s{}^2}\right) W_s &= C\frac{1}{\omega_s{}^2} w_s. \end{aligned}$$

Man leitet daraus ab:

$$\frac{1}{\omega_s{}^2} = \frac{U_s{}^2}{\omega_x{}^2} + \frac{V_s{}^2}{\omega_y{}^2} + \frac{W_s{}^2}{W_z{}^2}$$

$$12)\qquad \frac{u_s^2}{\frac{1}{\omega_x^2}-\frac{1}{\omega_s^2}}+\frac{v_s^2}{\frac{1}{\omega_y^2}-\frac{1}{\omega_s^2}}+\frac{w_s^2}{\frac{1}{\omega_z^2}-\frac{1}{\omega_s^2}}=0,$$

Gleichungen, von denen in der That die erstere mit der mittelst des Arbeitsprincips unmittelbar gewonnenen Gl. 10 identisch ist, während die zweite die Wellenfläche darstellt. Würde man hier dem p dieselbe Form geben dürfen wie oben in Ausdruck 6, so behielte zwar C seine frühere Bedeutung, aber andererseits würden die Coefficienten:

$$\mathfrak{a}=\frac{\omega_s^2}{\omega_x^2},\qquad \mathfrak{b}=\frac{\omega_s^2}{\omega_y^2},\qquad \mathfrak{c}=\frac{\omega_s^2}{\omega_z^2}$$

mit der Richtung S veränderlich.

Doch kehren wir zum Ausdruck 8 für die erhaltene Elementararbeit dW_s zurück. Man kann dieselbe auch in folgender Weise gewinnen. Die nämlichen Theilchen des Mittels, deren Gleichgewichtslage die Linie S ist, mögen nunmehr senkrecht zu einer Richtung N, welche mit S einen vorläufig unbestimmten Winkel δ bilde, nach dem Gesetz der Ausdrücke:

$$13)\qquad \begin{gathered}\xi_n=\mathfrak{A}_x{}^n\cos\varphi_n,\quad \eta_n=\mathfrak{A}_y{}^n\cos\varphi_n,\quad \zeta_n=\mathfrak{A}_z{}^n\cos\varphi_n,\\ \varphi_n=2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{xu_n+yv_n+zw_n}{l_n}\right)=\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{r_n}{\omega_n}\right)\end{gathered}$$

hin und hergeführt werden, und es möge zugleich dafür gesorgt sein, dass:

$$14)\qquad \begin{gathered}\frac{r_s}{\omega_s}=\frac{r_n}{\omega_n},\quad \varphi_s=\varphi_n,\\ l_n=l_s\cos\delta,\quad \mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_s\cos\delta,\end{gathered}$$

unter $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}_s$ die vollen Amplituden verstanden. Beschränkt man die Bewegung nur auf ein Zeitelement, bis nämlich die kleinen Wege $d\mathfrak{A}_x{}^n$, $d\mathfrak{A}_y{}^n$, $d\mathfrak{A}_z{}^n$ zurückgelegt sind, so hat man:

$$dW_n=\mathfrak{e}\,[\Delta_2\xi_n\,d\mathfrak{A}_x{}^n+\Delta_2\eta_n\,d\mathfrak{A}_y{}^n+\Delta_2\zeta_n\,d\mathfrak{A}_z{}^n]$$

und findet sonach, dass:

$$dW_s=dW_n,$$

dass also bei der einen oder anderen Bewegung die gleiche Arbeit verbraucht wird. Die Arbeit letzteren Ursprungs möge nun, selbstverständlich immer unter Benutzung passender fester Verbindungen, zur partiellen Umwandlung in

Beschleunigungs- und Druckarbeit verwandt werden. Man wird dann schreiben dürfen:

$$dW_n = (m+m_x)\left(\frac{d^2\xi_n}{dt^2} + A\frac{dp}{dx}\right)d\mathfrak{A}_x{}^n$$
$$+ (m + m_y)\left(\frac{d^2\eta_n}{dt^2} + B\frac{dp}{dy}\right)d\mathfrak{A}_y{}^n + \ldots.,$$

unter A, B, C noch festzustellende Functionen verstanden. Lässt man bei gegebener Richtung S Winkel δ und damit die numerischen Werthe von A, B, C von Null ab allmälig ansteigen, so entsprechen der Richtung S immer andere Richtungen N und immer andere Flächen als die zugehörigen geometrischen Oerter der die ω_n bestimmenden Endpunkte derselben. Wenn dann schliesslich der Einfluss der Verbindungen gänzlich aufhört und damit das Huyghens-sche Princip zur vollen Wirksamkeit gelangt, werden:

$$A = B = C = 1.$$

Die geometrischen Oerter der Endpunkte von S und N treten dann in das Verhältniss von eingehüllter und einhüllender Fläche, und die Bestimmungsstücke der letzteren führen sich auf die Gleichungen zurück:

$$(m+m_x)\left(\frac{d^2\xi_n}{dt^2} + \frac{dp_n}{dx}\right) = \mathfrak{e}\,\varDelta_2\xi_n$$
$$\text{IIIb.} \qquad (m+m_y)\left(\frac{d^2\eta_n}{dt^2} + \frac{dp_n}{dy}\right) = \mathfrak{e}\,\varDelta_2\eta_n$$
$$(m+m_z)\left(\frac{d^2\zeta_n}{dt^2} + \frac{dp_n}{dz}\right) = \mathfrak{e}\,\varDelta_2\zeta_n.$$

Fassen wir jetzt das Gesagte zusammen, so entspricht einer und derselben auf verschiedene Krystallrichtungen bezogenen potentiellen Energie eine veränderliche Umsetzung in Beschleunigung und Druck. Die Beschleunigung wird ein Maximum und die Druckarbeit verschwindet, so lange man sich unter Beihülfe zweckmässiger Verbindungen die ursprüngliche äussere Arbeit so ausgeführt denkt, dass die Theilchen bei constanter Amplitude $\mathfrak{A}_s$ und constanter Wellenlänge l_s um die beliebige Richtung S in transversale Schwingungen gerathen. Denkt man sie sich indess so ausgeführt, dass die nämlichen Theilchen der Richtung S mit der coordinirten Amplitude $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_s \cos\delta$ und Wellenlänge $l_n = l_s \cos\delta$ senkrecht zur coordinirten Richtung N vollkommen frei schwingen, so wird für die Ausschläge, welche die Ruherichtung S nach wie vor mit der Geschwindigkeit ω_s durchlaufen, die gewissermaassen verlorne Amplitude $\mathfrak{A}_s \sin\delta$ zur Leistung einer entsprechenden anderen Arbeit verbraucht.

Die Richtung S als rad. vect. der Wellenfläche (Gl. 12b) heisst ein Strahl; um dieselbe als Richtung ihrer Gleichgewichtsörter pendeln die schwingenden Theilchen mit der Amplitude $\mathfrak{A}_n$ in schräger Richtung frei herum, genau so, wie sie bei Anbringung passender Verbindungen mit der Amplitude $\mathfrak{A}_s$ in senkrechter Richtung um die nämliche Ruhelage vibriren würden. Die Verschiebung der Wellebne und damit die Bewegungsübertragung von Theilchen zu Theichen erfolgt sonach längs dieser Richtung S, und daher erscheint dieselbe der Hülfsrichtung N gegenüber, welche man die Normale nennt, als die primäre (physikalisch bedeutsame), während andererseits die Amplitude $\mathfrak{A}_s = \frac{\mathfrak{A}_n}{\cos\delta}$ ebenso als Hülfsgrösse (virtuelle Amplitude) der physikalischen Amplitude $\mathfrak{A}_n$ zugeordnet ist. Das Gleiche gilt von dem Hülfsbegriff der (Strahl-) Ebne:

$$r_s = xu_s + yv_s + zw_s$$

gegenüber der thatsächlichen (Well-)Ebne:

$$r_n = xu_n + yv_n + zw_n$$

sowie von den Hülfsbegriffen l_n und ω_n gegenüber den physikalischen l_s und ω_s.

Bezüglich des Verhältnisses zwischen Strahl und Normale hat man sonach offen anzuerkennen, dass die Differentialgleichungen III b gerade die Richtung der Gleichgewichtsörter der Schwingungen gar nicht enthalten. Nun kann keine Wellenbewegung ohne eine solche Folge von Ruhelagen gedacht werden. Wenn daher im Innern eines Krystalles zwei unendlich wenig gedrehte, abstract gedachte Wellensysteme neben einander bestehen sollen, so sind beide an eine einzige Richtung der Gleichgewichtsörter gebunden, und diese ist keine andere als die Richtung des Strahles, längs der sich dann allerdings dem Interferenzprincip gemäss die Partialausschläge summiren.

Ist nun im Vorstehenden der Nachweis geführt, dass man in der Theorie der doppelten Brechung ebensowohl den Strahlbegriff wie den Normalbegriff zum Ausgang wählen darf, so soll im Folgenden gezeigt werden, dass jedes dieser beiden Verfahren seine eigenthümlichen Vortheile bietet. Ich denke mir um den Strahl wie um die Normale der natürlichen Mittel unendlich enge gerade Cylinder gelegt und nenne dieselben kurz resp. Strahl- und Normalcylinder. Wenn dann bezüglich des Ueberganges des Lichtes, so lange die Mittel als ideell durchsichtig vorausgesetzt werden, die Strahl- wie die Normalcylinder sich als gleichmässig brauchbar erweisen, so überwiegt doch alsbald die Bedeutung der letzteren, sobald es sich um absorbirende Mittel handelt. Andererseits vereinfachen die Strahlcylinder die Differentialgleichungen der inneren Bewegung und zwar sowohl bei der Ableitung der Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in den fortschreitenden (transferirten) doppelt brechenden Mitteln als auch namentlich bezüglich der Behandlung des Dispersionsproblems.

Ausgangsbegriffe 1-13