

# Ueber den Uebergang des Lichtes zwischen absorbirenden isotropen und anisotropen Mitteln und über die Mechanik der Schwingungen in denselben.

Von

E. Ketteler.

---

Ausgehend von der Annahme des Zusammenschwingens der Aether- und Körpertheilchen bin ich im Verfolg meiner optischen Untersuchungen zu Resultaten gelangt, denen eine bemerkenswerthe Allgemeinheit zukommen dürfte. Ich erlaube mir, dieselben hier vollständig zusammenzustellen und sie zugleich mit möglichster Strenge aus ihren Prämissen zu entwickeln.

Was zunächst die Uebergangsbedingungen des Lichtes betrifft, so denke man sich zwei absorbirende — vorläufig isotrope — Mittel in ebener Trennungsfläche sich berühren. Im Innern des ersten Mittels bewege sich eine gegebene ebene Welle gegen die Trennungsfläche hin und werde an derselben zum Theil gespiegelt, zum Theil gebrochen. Da das Mittel absorbirt, so charakterisirt sich die gegebene Welle durch zwei ausgezeichnete Richtungen, die ich kurz die Extinctionsrichtung und die Propagationsrichtung nennen werde. Sie sind die Normalen zweier Ebenen, der Ebene gleicher Amplituden und der Ebene gleicher Phasen, welche letztere kurzweg die Wellenebene heisse.

Man mache nun die Trennungsfläche zur XY-Ebene eines Coordinatensystems, ziehe darin irgend welche Gerade als X-Axe und nehme die Richtung des Lothes als Z-Axe desselben. Man fixe ferner zwei unendlich kleine Volumelemente, die im ersten und zweiten Mittel an einander stossen, mache ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt

der Coordinaten und beziehe auf ihn die sämtlichen Schwingungen der Theilchen beider Mittel. Für ein Aether- resp. Körpertheilchen, dessen Ruhelage sich in  $x, y, z$  befindet, mögen die Schwingungscomponenten bezeichnet werden als  $\xi, \eta, \zeta$ , resp.  $\xi', \eta', \zeta'$ .

Da ich weiter unten zeigen werde, dass sich die Körpertheilchen mit einem gewissen Recht als eine Art Ballast oder Bewegungswiderstand für den Aether bezeichnen lassen, und da man zudem für das eine der beiden Mittel die ponderablen Massen fortnehmen, dasselbe also durch den Weltäther ersetzen darf, so begreift sich, dass in die (linearen) Uebergangsbedingungen ausschliesslich die Ausschläge der Aethertheilchen, resp. die durch sie hervorgerufenen elastischen Kräfte des Aethers eingehen. Die von mir gefundenen sogenannten Grenzgleichungen sind nun folgende vier:

$$\text{I. } \left. \begin{aligned}
 & \Sigma \left( \alpha \frac{d\zeta}{dz} \right)_1 = \Sigma \left( \alpha \frac{d\zeta}{dz} \right)_2 \\
 & \Sigma \left( \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right)_1 = \Sigma \left( \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right)_2 \\
 & \Sigma \left( \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_1 = \Sigma \left( \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_2 \\
 & \Sigma \left( \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_1 = \Sigma \left( \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_2
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Sie gelten für Mittel von beliebiger Anordnung, und beziehen sich darin die Indices 1, 2 auf das erste, resp. zweite derselben, die Summenzeichen auf die Zahl der in jedem Mittel vorkommenden Wellen.

Sofern der Coefficient  $\alpha$  der ersten dieser Gleichungen für isotrope Mittel = 1 ist, so verlangt dieselbe die Gleichheit der linearen Dilatation senkrecht zur Trennungsfläche, die drei übrigen verlangen die Gleichheit der bezüglichen Drehungscomponenten und zwar sämtlich für die im Coordinatenanfangspunkt fixirten kleinen Aetherparallelopipeda. Auf die Bedeutung, welche diese Begriffe in der neueren Mechanik überhaupt gewonnen haben, brauche ich hier kaum hinzuweisen.

Den vorstehenden Grundsätzen lassen sich für ideell durchsichtige Mittel, aber auch nur für diese, zwei weitere

hinzuftügen. Es sind das der Fresnel-Neumann'sche Grundsatz der Gleichheit der Schwingungscomponenten parallel der Schnittlinie von Einfallsebene und Trennungsfäche sowie der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, in welch letzteren dann auch die Amplituden der Körpertheilchen eingehen. Ich komme weiter auf dieselben zurück.

Mit den eben gewonnenen vier Grenzgleichungen verbinden wir noch das Huyghens'sche Princip sowie das Princip der Incompressibilität des Aethers. Letzteres gibt die bekannte Gleichung:

$$\text{II.} \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Was dagegen das erstere betrifft, so knüpft sich seine analytische Formulirung an die Besprechung der zugehörigen Integralausdrücke. Hier sehe ich mich indess veranlasst, die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen insoweit einzuschränken, als ich für die beiden vorausgesetzten Mittel von einer specifischen Grenzwirkung, d. h. von einer eigenthümlichen Einwirkung der Grenzschichten derselben auf sich selbst wie auf einander absehe<sup>1)</sup>. Wir werden demgemäss den Extinctionscoefficienten ( $q$ ) und den Refractionscoefficienten ( $\nu$ ) für alle Punkte der Mittel als gleich nehmen.

Dies vorausgesetzt, haben die Integrale der vorstehenden Differentialgleichungen die allgemeine, elliptischen Schwingungen entsprechende Form:

$$\xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q (u'x + v'y + w'z)} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\nu(u'x + v'y + w'z)}{\lambda} \right) - \psi_x \right]$$

$$\text{III.} \quad \eta = \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} q (u'x + v'y + w'z)} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\nu(u'x + v'y + w'z)}{\lambda} \right) - \psi_y \right].$$

$$\zeta = \mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q (u'x + v'y + w'z)} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\nu(u'x + v'y + w'z)}{\lambda} \right) - \psi_z \right]$$

Darin bedeutet  $e$  die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems,  $t$  die laufende Zeit,  $T$  die Schwingungs-

1) Man findet darüber das Nothwendige in Wied. Ann. III, p. 300—314.

dauer und  $\lambda$  die Wellenlänge im Weltäther. Die  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  sind die Amplituden und die  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$  die entsprechenden axialen Anomalien. Endlich sind die  $u, v, w$  die Cosinus der Winkel zwischen Propagationsrichtung und Axen, die  $u', v', w'$  die Cosinus der Winkel zwischen Extinctionsrichtung und Axen.

Zugleich mit  $w$  ist auch der sogenannte Einfallswinkel  $r$  gegeben. Man hat nämlich:

$$\cos r = w, \quad \sin r = \sqrt{u^2 + v^2};$$

die sogenannte Einfallsebene bildet folglich mit der X-Axe einen Azimuthwinkel  $\Theta$ , der bestimmt ist durch:

$$\text{tang } \Theta = \frac{v}{u}.$$

Entsprechend erhält man für das Azimuth der die Extinctionsrichtung enthaltenden Normalebene:

$$\text{tang } \Theta' = \frac{v'}{u'}$$

und sonach für den Winkel zwischen beiden:

$$\text{tang } (\Theta - \Theta') = \frac{yu' - v'u}{uu' + vv'}.$$

Ich werde im Folgenden das einfallende, reflectirte und durchgehende Licht durch die Amplituden  $\mathfrak{E}, \mathfrak{R}, \mathfrak{D}$  und bezüglich der übrigen Attribute durch ein angehängtes  $E, R, D$  unterscheiden.

Was nunmehr die Auswerthung des Huyghens'schen Principis betrifft, so ist die mit diesem Namen belegte Vorstellungswiese sowohl auf die Ebene gleicher Amplitude wie auf die Ebene gleicher Phase in Anwendung zu bringen. Wenn daher bezüglich letzterer die bekannten Gleichungen gelten:

$$\nu_E \sin r_E = \nu_R \sin r_R = \nu_D \sin r_D$$

IVa.

$$\Theta_E = \Theta_R = \Theta_D$$

$$\nu_R = \nu_E$$

$$\cos r_R = -\cos r_E, \quad r_R = 180^\circ - r_E,$$

und sonach:

$$u_R = u_E, \quad v_R = v_E, \quad w_R = -w_E,$$

so muss nach gleicher Schlussweise bezüglich der ersteren die Forderung gestellt werden:

$$q_R = q_E,$$

$$\text{IVb.} \quad u'_R = u'_E, \quad v'_R = v'_E, \quad w'_R = -w'_E, \\ u'_D = 0, \quad v'_D = 0, \quad w'_D = 1.$$

Es liegen folglich die drei Propagationsnormalen in einer und derselben Ebene und sind die drei Extinctionsnormalen symmetrisch zur Trennungsfläche.

Bevor ich die Ausdrücke III unter Benutzung der vorstehenden Gleichungen IV in die Bedingungsgleichungen I einführe, sollen im Interesse der Uebersichtlichkeit folgende Abkürzungen festgestellt werden. Es bedeute:

$$\delta = u'x + v'y + w'z \\ \varphi = 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\nu(u'x + v'y + w'z)}{\lambda} \right).$$

Ferner:

$$\text{tang } \vartheta_x = \frac{qu'}{\nu u}, \quad \text{tang } \vartheta_y = \frac{qv'}{\nu v}, \quad \text{tang } \vartheta_z = \frac{qw'}{\nu w},$$

$$1) \quad f_x = \sqrt{\nu^2 u'^2 + q^2 u'^2} \\ f_y = \sqrt{\nu^2 v'^2 + q^2 v'^2} \\ f_z = \sqrt{\nu^2 w'^2 + q^2 w'^2}$$

Alsdann ist:

$$\sin \vartheta_x = \frac{qu'}{f_x}, \quad \cos \vartheta_x = \frac{\nu u}{f_x} \\ 2) \quad \sin \vartheta_y = \frac{qv'}{f_y}, \quad \cos \vartheta_y = \frac{\nu v}{f_y} \\ \sin \vartheta_z = \frac{qw'}{f_z}, \quad \cos \vartheta_z = \frac{\nu w}{f_z}$$

und sonach:

$$3) \quad \vartheta_x^R = \vartheta_x^E, \quad \vartheta_y^R = \vartheta_y^E, \quad \vartheta_z^R = 180^\circ + \vartheta_z^E, \\ \vartheta_x^D = 0, \quad \vartheta_y^D = 0.$$

Nunmehr erhält man z. B. den Differentialquotienten:

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} qd} [\nu w \sin(\varphi - \psi_z) - qw' \cos(\varphi - \psi_z)] \\ = -\frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} qd} f_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z)$$

und Ausdrücke von ähnlichem Bildungsgesetz auch für die übrigen.

Durch Substitution derselben in Gl. II wird zuvörderst die Incompressibilitätsbedingung:

$$4) \quad \mathfrak{A}_x f_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_y) \\ + \mathfrak{A}_z f_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z) = 0.$$

Sie zerfällt durch Eliminirung des die laufende Zeit  $t$  enthaltenden Winkels  $\varphi$  in die beiden folgenden:

$$\mathfrak{A}_x f_x \cos(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \cos(\psi_y + \vartheta_y) + \mathfrak{A}_z f_z \cos(\psi_z + \vartheta_z) = 0 \\ \mathfrak{A}_x f_x \sin(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\psi_y + \vartheta_y) + \mathfrak{A}_z f_z \sin(\psi_z + \vartheta_z) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich sofort einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Eliminirt man der Reihe nach  $\mathfrak{A}_x$ ,  $\mathfrak{A}_y$ ,  $\mathfrak{A}_z$ , so gewinnt man die Doppelgleichung:

$$\frac{\mathfrak{A}_x^2 (\nu^2 u^2 + q^2 u'^2)}{\sin^2 [(\psi_y + \vartheta_y) - (\psi_z + \vartheta_z)]} = \frac{\mathfrak{A}_y^2 (\nu^2 v^2 + q^2 v'^2)}{\sin^2 [(\psi_x + \vartheta_x) - (\psi_z + \vartheta_z)]} \\ = \frac{\mathfrak{A}_z^2 (\nu^2 w^2 + q^2 w'^2)}{\sin^2 [(\psi_x + \vartheta_x) - (\psi_y + \vartheta_y)]}.$$

Es entsprechen sich sonach die in den folgenden Horizontalreihen aufgeführten Specialfälle:

$$\begin{array}{lll} u = u' = 0 & \psi_y + \vartheta_y = \psi_z + \vartheta_z & \mathfrak{A}_y f_y + \mathfrak{A}_z f_z = 0 \\ v = v' = 0 & \psi_x + \vartheta_x = \psi_z + \vartheta_z & \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_z f_z = 0 \\ w = w' = 0 & \psi_x + \vartheta_x = \psi_y + \vartheta_y & \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_y f_y = 0. \end{array}$$

Damit also eine der Schwingungscomponenten herausfalle, dazu ist nothwendig, dass gleichzeitig Fortpflanzungsrichtung und Auslöschungsrichtung auf der betreffenden Axe senkrecht stehen. Dann sind aber Phasendifferenz und Amplitudenverhältniss der übrig bleibenden Componenten aus den als bekannt vorausgesetzten Functionen  $\vartheta$  und  $f$  direct ableitbar.

Sollen ferner zwei Componenten zusammen verschwinden, so hat man die Bedingungen:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_x = 0, \mathfrak{A}_y = 0 & w = w' = 0 \\ \mathfrak{A}_x = 0, \mathfrak{A}_z = 0 & v = v' = 0 \\ \mathfrak{A}_y = 0, \mathfrak{A}_z = 0 & u = u' = 0, \end{array}$$

folglich in der einen übrig bleibenden linear polarisirtes Licht.

Lässt man beispielsweise die Extinctionsrichtung in die Einfallsebene als XZ-Ebene fallen, so dass  $v = v' = 0$  wird, so folgt für die in derselben liegenden einfallenden Schwingungen:

$$\psi_x^E - \psi_z^E = \vartheta_z^E - \vartheta_x^E$$

und für die zugehörigen reflectirten zufolge Gl. 3:

$$\begin{aligned}\psi_x^R - \psi_z^R &= 180^\circ + \vartheta_z^E - \vartheta_x^E \\ &= 180^\circ + \psi_x^E - \psi_z^E.\end{aligned}$$

Die reflectirte elliptische Bewegung geht also im entgegengesetzten Sinne vor sich wie die einfallende. Für das gebrochene Licht ist  $\vartheta_x^D = 0$ ; folglich hat man:

$$5) \quad \text{tang}(\psi_x^D - \psi_z^D) = \text{tang} \vartheta_z^D = \frac{q}{\nu w} = \frac{q}{p}.$$

Die Amplituden sind gegeben durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}_x^2(\nu^2 u^2 + q^2 u'^2) = \mathfrak{A}_z^2(\nu^2 w^2 + q^2 w'^2).$$

Führt man darin zwei neue Grössen  $\mathfrak{A}_1, r$  ein, für welche:

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_1 \cos r, \quad \mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}_1 \sin r,$$

so lassen sich dieselben als Amplitude, resp. Schwingungsazimuth der restaurirten Schwingung, d. h. derjenigen linearen Schwingung definiren, deren Energie der Energie der gegebenen elliptischen Schwingung gleich kommt. Die restaurirte reflectirte Schwingung wird auf der restaurirten gebrochenen senkrecht stehen, sobald die Bedingung erfüllt ist:

$$\text{tang} r^R \text{tang} r^D = -1$$

$$6) \quad \frac{\sqrt{\nu^2 u^2 + q^2 u'^2}}{\sqrt{\nu^2 w^2 + q^2 w'^2}} \frac{\nu_D u_D}{\sqrt{\nu_D^2 w_D^2 + q_D^2}} = 1.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für den sogenannten Hauptincidenzwinkel. Ist insbesondere  $\nu = 1, q = 0, \nu u = \nu_D u_D = \sin e$ , so vereinfacht sie sich auf:

$$6b) \quad \sin e \text{ tang} e = \sqrt{p_D^2 + q_D^2}, \quad \text{tang} e = \sqrt{\nu_D^2 + q_D^2}.$$

Analog endlich lassen sich mittelst der obigen Doppelgleichung auch die Richtungscosinus  $\frac{\mathfrak{A}_x}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_y}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_z}{\mathfrak{A}}$  der allgemeinen restaurirten Schwingung ermitteln.

Combinirt man jetzt die vier Grenzbedingungen mit der auf beide Mittel gesondert angewandten Incompressibilitätsbedingung 4, so erhält man für den (an sich offenbar willkürlichen) Punkt  $x=0, y=0, z=0$  das System der folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
& [\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \mathfrak{J}_z) - \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \mathfrak{J}_z)] f_z \\
&= \mathfrak{D}_z f_z^D \sin(\varphi - \psi_z^D - \mathfrak{J}_z^D). \\
& [\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \mathfrak{J}_x) + \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \mathfrak{J}_x)] f_x \\
&- [\mathfrak{E}_x \sin(\varphi - \psi_x - \mathfrak{J}_z) - \mathfrak{R}_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \mathfrak{J}_z)] f_z \\
&= \mathfrak{D}_z f_x^D \sin(\varphi - \psi_z^D) - \mathfrak{D}_x f_z^D \sin(\varphi - \psi_x^D - \mathfrak{J}_z^D). \\
& [\mathfrak{E}_y \sin(\varphi - \psi_y - \mathfrak{J}_x) + \mathfrak{R}_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \mathfrak{J}_x)] f_x \\
&- [\mathfrak{E}_x \sin(\varphi - \psi_x - \mathfrak{J}_y) + \mathfrak{R}_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \mathfrak{J}_y)] f_y \\
7) &= \mathfrak{D}_y f_x^D \sin(\varphi - \psi_y^D) - \mathfrak{D}_x f_y^D \sin(\varphi - \psi_x^D). \\
& [\mathfrak{E}_y \sin(\varphi - \psi_y - \mathfrak{J}_z) - \mathfrak{R}_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \mathfrak{J}_z)] f_z \\
&- [\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \mathfrak{J}_y) + \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \mathfrak{J}_y)] f_y \\
&= \mathfrak{D}_y f_z^D \sin(\varphi - \psi_y^D - \mathfrak{J}_z^D) - \mathfrak{D}_z f_y^D \sin(\varphi - \psi_z^D). \\
& \mathfrak{R}_x f_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \mathfrak{J}_x) + \mathfrak{R}_y f_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \mathfrak{J}_y) \\
&- \mathfrak{R}_z f_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \mathfrak{J}_z) = 0. \\
& \mathfrak{D}_x f_x^D \sin(\varphi - \psi_x^D) + \mathfrak{D}_y f_y^D \sin(\varphi - \psi_y^D) \\
&+ \mathfrak{D}_z f_z^D \sin(\varphi - \psi_z^D - \mathfrak{J}_z^D) = 0.
\end{aligned}$$

Sind darin die Functionen  $f$  und  $\mathfrak{J}$  bekannt und ausserdem die drei  $\mathfrak{E}$  und  $\psi^E = \psi$  gegeben, so lassen sich mittelst derselben die drei  $\mathfrak{R}$  und  $\psi^R$  und die drei  $\mathfrak{D}$  und  $\psi^D$  berechnen.

In der That zerfällt jede dieser Gleichungen durch Eliminirung von  $\varphi$  in zwei, und führt man jetzt die neuen Anomalien ein:

$$\chi^R = \psi^R - \psi, \quad \chi^D = \psi^D - \psi,$$

so genügen die dann vorhandenen 12 Gleichungen zur Ermittlung der 12 Unbekannten:

$$\begin{aligned}
R' &= \mathfrak{R} \cos \chi^R, & R'' &= \mathfrak{R} \sin \chi^R \\
D' &= \mathfrak{D} \cos \chi^D, & D'' &= \mathfrak{D} \sin \chi^D.
\end{aligned}$$

Hiermit ist die im ersten Theil gestellte Aufgabe allgemein gelöst.

Für die weitere Verwendung der Gleichungen empfiehlt es sich, sie rückwärts mittelst der symbolischen Amplituden:

$$\begin{aligned}
R &= R' + R'' \sqrt{-1} \\
D &= D' + D'' \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

in bequemere complexe Formen zusammenzufassen. Ich lasse indess zur leichteren Ueberleitung zu den von mir bisher in Wiedemann's Annalen (vgl. u. S. 26) behandelten Spe-

cialfällen fortan die Einfallsebene mit der ZX-Ebene zusammenfallen, setze wie früher:

$$\vartheta_x = \gamma, \quad \vartheta_z = \beta;$$

$$\nu u = \nu_2 u_2 = \sin e, \quad \nu w = p$$

und schreibe abkürzungsweise:

$$\Psi_{m,\mu} = \cos(\psi_m + \mu) + \sqrt{-1} \sin(\psi_m + \mu).$$

Man erhält dann:

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} (\mathfrak{E}_z - R_z) \Psi_{z,\beta} &= \sqrt{p_2^2 + q_2^2} D_z \Psi_{z,\beta_2} \\ \sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2} (\mathfrak{E}_z + R_z) \Psi_{z,\gamma} - \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} (\mathfrak{E}_x - R_x) \Psi_{x,\beta} \\ &= \sin e D_z \Psi_{z,\gamma_2} - \sqrt{p_2^2 + q_2^2} D_x \Psi_{x,\beta_2} \\ 8) \sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2} (\mathfrak{E}_y + R_y) \Psi_{y,\gamma} - \sqrt{-1} q v' (\mathfrak{E}_x + R_x) \Psi_x \\ &= \sin e D_y \Psi_y \\ \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} (\mathfrak{E}_y - R_y) \Psi_{y,\beta} - \sqrt{-1} q v' (\mathfrak{E}_z + R_z) \Psi_z \\ &= p_2 D_y \Psi_{y,\beta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} R_z \Psi_{z,\beta} + \sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2} R_x \Psi_{x,\gamma} - q v' R_y \Psi_y = 0 \\ \sqrt{p_2^2 + q_2^2} D_z \Psi_{z,\beta_2} + \sin e D_x \Psi_{x,\gamma_2} = 0. \end{aligned}$$

Dass das System auch dieser Gleichungen mit einander verträglich ist, bedarf wohl keines weiteren Nachweises. Setzt man z. B. einmal  $\sin e = 0$ ,  $u' = 0$  und sodann  $\sin e = 0$ ,  $v' = 0$ , so erhält man die gleichen Ausdrücke wie bei der Vertauschung von  $x$  und  $y$ . Das wäre freilich nicht der Fall, wollte man die erste Gleichung, welche die linearen Dilatationen senkrecht zur Trennungsfläche enthält, durch eine die Dilatationen parallel der Trennungsfläche enthaltende ersetzen.

Wenn ich bezüglich der Details auf meine frühere Arbeit verweise, so möge hier bloss der nicht uninteressante Fall erwähnt werden, dass nämlich bei senkrechter Incidenz die Propagations- und Extinctionsnormalen sich rechtwinklig schneiden. Man findet für ihn:

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{R} = 0, \quad \chi^R = 0, \quad \mathfrak{D} = 0,$$

so dass das gebrochene Licht seine Fähigkeit zu weiterer Brechung unter normalem Einfall verloren hat. Ein ähnlicher Fall würde in der Natur bezüglich desjenigen Lichtes realisiert sein, welches unter den Bedingungen der Totalreflexion als sogenannter „streifender Strahl“ in ein optisch dünneres Mittel eintritt.

## II.

Wenn ich nunmehr zur Mechanik der Aether-Körperschwingungen in absorbirenden Mitteln übergehe, so sehe ich den intermolekularen Aether derselben als gleichartig an mit dem Weltäther, lege also beiden gleiche Elasticität und Dichtigkeit bei und nehme daher an, dass das einzelne Körpertheilchen trotz verhältnissmässig grosser Masse nur einen verschwindend kleinen Raum einnimmt. Dies vorausgesetzt, heisse  $m$  die in der Volumeinheit enthaltene Aethermasse,  $m'$  die in derselben befindliche optisch-chemisch einfache Körpermasse, die Schwingungscomponenten der Aethertheilchen seien  $\xi, \eta, \zeta$ , die der Körpertheilchen  $\xi', \eta', \zeta'$ , die respectiven Amplituden  $\mathfrak{A}_x \dots, \mathfrak{A}'_x \dots$ , und es bedeute endlich  $e$  die Deformationsconstante des Weltäthers. Ich habe nun gefunden, dass zwischen diesen Grössen und zwar sowohl für anisotrope wie isotrope Mittel die Gleichung besteht:

$$\begin{aligned} \text{V.} \quad & m \left( \frac{d^2\xi}{dt^2} d\mathfrak{A}_x + \frac{d^2\eta}{dt^2} d\mathfrak{A}_y + \frac{d^2\zeta}{dt^2} d\mathfrak{A}_z \right) \\ & + \sum m' \left( \frac{d^2\xi'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_x + \frac{d^2\eta'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_y + \frac{d^2\zeta'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_z \right) \\ & = e (\mathcal{A}_2\xi d\mathfrak{A}_x + \mathcal{A}_2\eta d\mathfrak{A}_y + \mathcal{A}_2\zeta d\mathfrak{A}_z), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\mathcal{A}_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Es ist also die Summe der Schwingungsarbeiten der Aether- und Körpertheilchen, gemessen durch die Beschleunigungen, gleich der Schwingungsarbeit des Aethers, gemessen durch die Deformation desselben <sup>1)</sup>.

Die Integrale dieser Gleichung sind für die Aethertheilchen die früheren Ausdrücke III, für die Körpertheil-

---

1) Dieser Satz unterscheidet sich von den bezüglichen, jüngst von Herrn de Saint-Venant in den Ann. de chim. et de phys. (4) XXV (335—381) beifällig besprochenen Sätzen Boussinesq's im wesentlichen dadurch, dass in letzteren nicht die Arbeiten der Kräfte, sondern diese selbst vorkommen.

chen die nämlichen Ausdrücke, wenn die bezüglichlichen Amplituden  $\mathfrak{A}'_x \dots$ , und Verzögerungen  $\psi'_x \dots$  durch Accentuierung von  $\mathfrak{A}_x$  und  $\psi_x$  unterschieden werden. Es durchlaufen demnach die Körpertheilchen wie die Aethertheilchen im allgemeinen elliptische Bahnen.

Substituirt man statt der Wegelemente die ihnen proportionalen Amplituden und beachtet bei Ausführung der Rechnung, das die Grössen  $m$ ,  $e$  mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  des Weltäthers durch die Beziehung verknüpft sind:

$$e = mv^2,$$

so gewinnt man nach Eliminirung der laufenden Zeit und Wiederzusammenfassung der Theilausdrücke die symbolische Form:

$$9) \frac{v^2 - q^2 - 1 + 2vq \cos \varrho \sqrt{-1} = \sum m' [\mathfrak{A}'_x{}^2 (\cos \psi'_x + \sqrt{-1} \sin \psi'_x) + \mathfrak{A}'_y{}^2 (\cos \psi'_y + \sqrt{-1} \sin \psi'_y) + \dots]}{m [\mathfrak{A}_x{}^2 (\cos \psi_x + \sqrt{-1} \sin \psi_x) + \mathfrak{A}_y{}^2 (\cos \psi_y + \sqrt{-1} \sin \psi_y) + \dots]}$$

Darin bedeutet  $\varrho$  den Winkel zwischen Extinctions- und Propagationsnormale, so dass:

$$\cos \varrho = u u' + v v' + w w'.$$

Reducirt man endlich die beschleunigenden und bewegenden Kräfte der je zusammengehörigen Componenten auf gleiche Phase, indem man schreibt:

$$\mathfrak{A}_x{}^2 \cos \psi_x + \mathfrak{A}_y{}^2 \cos \psi_y + \mathfrak{A}_z{}^2 \cos \psi_z = \mathfrak{A}^2 \cos \psi$$

$$\mathfrak{A}_x{}^2 \sin \psi_x + \mathfrak{A}_y{}^2 \sin \psi_y + \mathfrak{A}_z{}^2 \sin \psi_z = \mathfrak{A}^2 \sin \psi$$

$$\mathfrak{A}'_x{}^2 \cos \psi'_x + \mathfrak{A}'_y{}^2 \cos \psi'_y + \mathfrak{A}'_z{}^2 \cos \psi'_z = \mathfrak{A}'^2 \cos \psi'$$

$$\mathfrak{A}'_x{}^2 \sin \psi'_x + \mathfrak{A}'_y{}^2 \sin \psi'_y + \mathfrak{A}'_z{}^2 \sin \psi'_z = \mathfrak{A}'^2 \sin \psi',$$

ersetzt also die gegebene elliptische Schwingung durch eine äquivalente restaurirte von gleicher Schwingungsarbeit mit den neuen Amplituden  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}'$  und Anomalien  $\psi$ ,  $\psi'$ , so schreibt sich kürzer:

$$\frac{v^2 - q^2 - 1 + 2vq \cos \varrho \sqrt{-1} = \sum m' \mathfrak{A}'^2 [\cos (\psi' - \psi) + \sqrt{-1} \sin (\psi' - \psi)]}{m \mathfrak{A}^2}$$

Man hat folglich:

$$10) \quad \nu^2 - q^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathcal{A}'^2 \cos(\psi' - \psi)}{m \mathcal{A}^2},$$

$$2\nu q \cos \varrho = \frac{\Sigma m' \mathcal{A}'^2 \sin(\psi' - \psi)}{m \mathcal{A}^2}.$$

Sofern nun die rechten Seiten dieser Gleichungen die gegebene Fortpflanzungsrichtung des Mittels in absoluter Weise charakterisiren, also insbesondere von  $\varrho$  unabhängig sind, so hat man:

11)  $\nu^2 - q^2 = a^2 - b^2, \quad \nu q \cos \varrho = ab,$   
 wo  $a$  und  $b$  zwei Constanten sind, nämlich diejenigen Specialwerthe von  $\nu$  und  $q$ , die  $\varrho=0$  entsprechen. Die Bedeutung derselben ist also folgende. Ist allgemein  $\varrho=0$ , läuft die Wellebene der Absorptionsebene parallel, so sind  $a$  der zugehörige Refractions- und  $b$  der Extinctionscoefficient, beide folglich von der Incidenz unabhängig. Ist dagegen  $u'=v'=0, w'=1$  und sonach  $\varrho=r=\text{arc cos } w$ , so entsprechen  $a$  und  $b$  dem senkrechten Einfall  $r=e=0$ . Für jede andere Incidenz  $e$  leitet man dann ab:

$$2\nu^2 = a^2 - b^2 + \sin^2 e + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2 e)^2 + 4a^2 b^2}$$

$$q = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 e}}.$$

Nunmehr lässt sich obige Gleichung auf die Form bringen;

$$(a + b\sqrt{-1})^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathcal{A}'^2 (\cos \mathcal{A} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{A})}{m \mathcal{A}^2}$$

oder kürzer:

$$VI. \quad n^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A'^2}{m \mathcal{A}^2},$$

so dass die beiden Constanten  $a, b$ , die fortan als der Hauptrefractions- und Hauptextinctionscoefficient bezeichnet werden sollen, als die Charakteristik eines complexen Brechungsverhältnisses  $n$  behandelt werden dürfen.

Wenn ich in verschiedenen Abhandlungen dem System der Gleichungen V und VI den Rang eines dioptrischen Grundgesetzes beigelegt habe, so veranlassten dazu die folgenden Erwägungen:

1. Der ihm zu Grunde liegende Satz ist a priori einzusehen. Denn so lange eine Welle von bestimmter Aetheramplitude, Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungs-

dauer zu Stande kommt, so lange leistet die Elasticität des Aethers die gleiche Arbeit, mögen nun die von ihm angeregten mitschwingenden Körpertheilchen gleiche oder verschiedene Amplitude und Schwingungsdauer erlangen, und mögen sie der Bewegung Widerstand leisten oder nicht.

2. Für ideell durchsichtige Mittel liefern diese Gleichungen bei Anwendung des Principis der Erhaltung der lebendigen Kräfte eine (quadratische) Beziehung, welche mit den übrigen (linearen) Uebergangsbedingungen verträglich ist<sup>1)</sup>.

3. Für bewegte durchsichtige Mittel gilt nicht bloss das Nämliche, sondern sie begründen auch die durch die Erfahrung bestätigte, zuerst von Fresnel nachgewiesene Modification der Fortpflanzungsgeschwindigkeit<sup>2)</sup>.

4) Für total reflectirende Combinationen liefern sie direct den von Cauchy auf indirectem Wege mittelst complex gewordener Amplituden erhaltenen Extinctionsindex des streifenden Strahles<sup>3)</sup>.

5. Für absorbirende Mittel endlich, insbesondere für die Erscheinungen der Metallreflexion stimmen ebenso die mit Beihülfe der Beziehungen 11) mittelst der obigen Grenzgleichungen abgeleiteten Reflexionsformeln mit den indirect von Cauchy abgeleiteten überein<sup>4)</sup>.

Was schliesslich die experimentelle Ermittlung der Charakteristik  $a$ ,  $b$  betrifft, so hat man mit der Aufsuchung der Hauptincidenz, als deren Bedingung oben:

$$6b. \quad p^2 + q^2 = \sin^2 e \tan^2 e$$

gefunden wurden, die Kenntniss des Hauptazimuthes  $h$ , für welches sich mittelst der Grenzgleichungen:

$$12) \quad \tan \vartheta_z = \frac{q}{p} = \tan 2h$$

ergibt, zu verbinden, um sowohl  $p$  als  $q$  getrennt zu erhalten und die so gefundenen Werthe in Gl. 11 zu substituiren.

1) Vgl. unten. Ferner Wied. Ann. I, p. 219.

2) Vgl. unten. Ferner Wied. Ann. I, p. 556; III, p. 297 und des Verfassers Astron. Undulationstheorie. Bonn 1873.

3) Wied. Ann. III, p. 91—93.

4) Ebendasselbst III, p. 95—103 u. 284—297.

Die vorstehende Entwicklung umfasst ferner ebenso-  
sowohl die anisotropen wie die isotropen Mittel. Hält man  
fest an der früher gegebenen Definition der Strahl- und  
Normalcylinder als unendlich enger gerader Cylinder, die  
resp. um die Richtung des Strahles und der Normalen her-  
umgelegt sind, und unterscheidet man die Bestimmungs-  
stücke der Integralausdrücke III, sofern sie sich auf die  
Normale beziehen sollen, durch angehängte  $n$  von denen  
der Strahlrichtung, so passt allerdings die Differential-  
gleichung V nur auf die Strahlcylinder.

Nichtsdestoweniger liesse sich der zunächst gleichfalls  
für den Strahl geltenden Gl. VI, nämlich:

$$13a) \quad n^2 = \frac{m \mathfrak{A}^2 + \Sigma m' \mathfrak{A}'^2}{m \mathfrak{A}^2}$$

für die Normale die analoge Beziehung zuordnen:

$$13b) \quad n_n^2 = \frac{m \mathfrak{A}_n^2 + \Sigma m' \mathfrak{A}'_n^2}{m \mathfrak{A}_n^2}.$$

Identificirt man nämlich diese Ausdrücke dadurch,  
dass man setzt:

$$14) \quad \frac{n}{n_n} = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{A}} = \cos \delta,$$

$$m \mathfrak{A}_n^2 + \Sigma m' \mathfrak{A}'_n^2 = m \mathfrak{A}^2 + \Sigma m' \mathfrak{A}'^2,$$

unter  $\delta$  den Winkel zwischen Strahl und Normale verstan-  
den, so sind diese Bedingungen in Einklang mit der in  
der vorhergehenden Abhandlung dargelegten Auffassung.

Hiernach unterliegt es nun wohl keinem Zweifel, dass  
sich zunächst auch für den Uebergang des Lichtes zwischen  
anisotropen Mitteln die Strahl- wie die Normalcylinder zur  
Formulirung der Grenzgleichungen verwerthen lassen wer-  
den. Man gelangt in der That wenigstens für den speciel-  
len Fall der durchsichtigen Mittel mit beiden zum Ziel.  
Nennt man  $U_s, V_s, W_s$  die Cosinus der Winkel zwischen  
der (virtuellen) Schwingungsrichtung innerhalb der Strahl-  
cylinder und den Axen,  $\Theta$  den Azimuthwinkel zwischen  
der Schwingungs- und Einfallsebene als XZ-Ebene, und be-  
deutet  $r$  den Brechungswinkel der Normalen, so erhält man  
leicht:

$$U_s = - \sin \delta \sin r + \cos \delta \cos r \cos \Theta$$

$$V_s = + \cos \delta \sin \Theta$$

$$\begin{aligned}
W_s &= -\sin \delta \cos r - \cos \delta \sin r \cos \Theta \\
u_s &= +\cos \delta \sin r + \sin \delta \cos r \cos \Theta \\
v_s &= +\sin \delta \sin \Theta \\
w_s &= \cos \delta \cos r - \sin \delta \sin r \cos \Theta.
\end{aligned}$$

Bezieht man nun unter der Annahme  $q=0$  die drei letzten der Gl. I einmal auf die Strahl- und sodann auf die Normalcylinder der aus dem Weltäther kommenden gebrochenen Strahlen, so entstehen vermöge der aus Gl. 14 ableitbaren Beziehung:

$$\mathcal{U}_s n_s = \mathcal{U}_n n_n = \mathcal{D}n,$$

sechs Gleichungen, die zu je zwei identisch sind, nämlich:

$$\mathcal{E} \cos \Theta_E - \mathcal{R} \cos \Theta_R = \Sigma \mathcal{D}n \cos \Theta_D$$

$$15) \quad \mathcal{E} \sin \Theta_E + \mathcal{R} \sin \Theta_R = \Sigma \mathcal{D} \sin \Theta_D$$

$$\cos e (\mathcal{E} \sin \Theta_E - \mathcal{R} \sin \Theta_R) = \Sigma \mathcal{D}n \sin \Theta_D \cos r.$$

Zu diesen drei Gleichungen fügen wir als vierte die Gleichung der lebendigen Kräfte. Wird dieselbe auf die während der Zeiteinheit gewonnenen Totalenergien der Aether- und Körpertheilchen angewandt, so erhält sie zunächst die Form:

$$M (\mathcal{E}^2 - \mathcal{R}^2) = \Sigma (M_D \mathcal{D}^2 + \Sigma M'_D \mathcal{D}'^2),$$

unter  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  die Amplituden der Aether- und Körpertheilchen und unter  $M$ ,  $M_D$  die äquivalenten Volumina verstanden. Diese letzteren sind proportional den Huyghens'schen Prismen, d. h. der Gesammtheit der Strahlcylinder, welche von der Trennungsfläche ausgehen und durch die resp. Wellebenen abgeschnitten werden.

Es sei  $O$  der erste,  $D$  der letzte (nach Verlauf der Zeiteinheit erschütterte) Einfallspunkt der ankommenden Welle, die Richtung der gebrochenen Normalen sei  $OA$ , die des Strahles  $OB$ , und es stehe Ebene  $DAB$  senkrecht auf der Einfallsebene. Dieselbe ist alsdann die gebrochene Wellebene, welcher Punkt  $B$  als Contactpunkt der Wellenfläche und Richtung  $AB$  als Schwingungsrichtung entspricht, so dass Winkel  $BAD = \Theta$ . Fällt man nun von  $B$  auf die Einfallsebene das Perpendikel  $BC$  und von  $C$  auf  $OD$  ein zweites  $CE$ , dann ist  $CE = CD \sin r$  die Höhe des bezüglichen Prisma und zugleich das Maass für sein Volumen  $M$ . Directer gewinnt man diese Höhe durch die Projection des rad. vect.  $OB$  auf die  $Z$ -Axe. Dieselbe beträgt:

$$M_D = \omega_n \cos r (1 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r \cos \Theta) = \omega_s W_s.$$

Sowie es bezüglich dieses Volumens an sich gleichgültig ist, ob man dasselbe in elementare Strahl- oder Normalcylinder zerlegt denkt, so ist es ferner zufolge Beziehungen 13 und 14 ebenso gleichgültig, ob man die Amplituden  $\mathfrak{D}$  der Aethertheilchen als in der Strahl- oder Normalebene gelegen ansieht und die Körpertheilchen mittelst der ersten oder zweiten jener Gleichungen eliminiert. Man erhält jedenfalls:

$$16) (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) \sin e \cos e = \Sigma \mathfrak{D}^2 n^2 \sin r \cos r (1 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r \cos \Theta).$$

Sofern nun das System der vier Bedingungen 15 und 16 zur Einzelberechnung der Amplituden und Azimuthe der gespiegelten und gebrochenen Wellen genügt, so leisten sonach Strahl- und Normalcylinder bezüglich des Ueberganges des Lichtes die gleichen Dienste.

Multiplicirt man noch die zweite und dritte der Gl. 15, subtrahirt das Product von Gl. 16 und dividirt den verbleibenden Rest durch die erste der Gl. 15, so erhält man, wie insbesondere für die sogenannten uniradialen Azimuthe ohne weiteres einleuchtet:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{E} \cos \Theta_E + \mathfrak{R} \cos \Theta_R) \cos e \\ &= \Sigma \mathfrak{D}_s (-\sin \delta \sin r + \cos \delta \cos r \cos \Theta) \\ &= \Sigma \mathfrak{D}_n \cos \Theta \cos r \left( 1 - \frac{\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r}{\cos \Theta} \right). \end{aligned}$$

Man kann die erstere dieser Beziehungen auf die Form bringen:

$$(\mathfrak{E} \cos \Theta_E + \mathfrak{R} \cos \Theta_R) \cos e = \Sigma \mathfrak{D}_s U_s$$

oder:

$$17) \quad \xi_E + \xi_R = \Sigma \xi_D^s \quad | z=0,$$

welche Gleichung dem auf die Strahlcylinder bezogenen Fresnel-Neumann'schen Continuitätsprincip entsprechen würde.

Die zweite Gleichung schreibt sich dagegen auch so:

$$18) \quad \frac{d\xi_E}{dz} + \frac{d\xi_R}{dz} = \Sigma \frac{d\xi_D}{dz} \left( 1 - \frac{\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r}{\cos \Theta} \right), \quad | z=0;$$

sie wird mit der ersten der Gl. I identisch, sobald man darin für die einfallende und gespiegelte Welle  $\alpha=1$  und für die gebrochenen setzt:

$$19) \quad \alpha = 1 - \frac{\text{tang } \delta \text{ tang } r}{\cos \Theta}.$$

Diese zweite Form enthält sonach die linearen Dilatationen der Normalschwingungen senkrecht zur Trennungsfläche, und es erscheint darin der Coefficient  $\alpha$  als abhängig vom Doppelbrechungsvermögen, vom Brechungswinkel und vom Schwingungsazimuth. Seine geometrische Construction ist folgende.

Man verlängere die Schwingungsrichtung BA, welche mit dem Durchschnitt CD von Wellebene und Einfallsebene den Winkel  $\Theta$  bildet, und fälle darauf vom Einfallspunkt D aus das Perpendikel DF. Alsdann ist:

$$AB = AO \cdot \text{tang } \delta = \omega_n \text{ tang } \delta$$

$$AF = AD \cos \Theta = -\omega_n \cot r \cos \Theta$$

und sonach:

$$\frac{AB}{AF} = -\frac{\text{tang } \delta \text{ tang } r}{\cos \Theta},$$

so dass kommt:

$$\alpha = 1 + \frac{AB}{AF} = \frac{BF}{AF}.$$

Dem entsprechend hat man die Dilatation der Normalschwingungen parallel der Z-Axe im Verhältniss der Linien BF:AF zu vergrössern; ihre auf beide gebrochene Wellen ausgedehnte Summe ist dann der parallelen Dilatation im ersten Mittel gleich. Sonach hat von den beiden Linien:

$$CD = \omega_n \cot r (1 - \text{tang } \delta \text{ tang } r \cos \Theta)$$

$$BF = \omega_n \cot r (\cos \Theta - \text{tang } \delta \text{ tang } r)$$

die zweite eine ähnliche Bedeutung bezüglich der Gleichheit der Dilatationen wie die erstere bezüglich der Gleichheit der lebendigen Kräfte.

Geht man jetzt von ideell durchsichtigen zu absorbirenden Mitteln zurück, so dass das Princip der lebendigen Kräfte seine Anwendbarkeit verliert, so wird auch zugleich die durch Gl. 17 ausgesprochene Continuitätsbedingung hinfällig. Man kann nämlich das Brechungsverhältniss  $n$  als complexe Grösse ansehen, deren Charakteristik  $a$ ,  $b$  durch die Ausdrücke 10 bestimmt ist. Denkt man sich jetzt  $r$  und  $\delta$  als Functionen von  $n$  und  $e$ , so werden dieselben gleichfalls und ebenso schliesslich U complex. Um also

die Intensitätsbestimmung mit Hülfe der Strahlcylinder ausführen zu können, hat man das absorbirende Mittel unter die durchsichtigen zu subsumiren und die Bedeutung von  $a$ ,  $b$  als gegeben vorauszusetzen.

Grössere Einfachheit und Vollständigkeit bieten in diesem Fall die Normalcylinder. Für sie behalten nicht nur die Grenzgleichungen der Drehungscomponenten, sondern ebenso die der Dilatation die reelle Form. Dass nämlich gerade auch der Coefficient  $\alpha$  eine Function zwischen reellen Grössen bleibt, davon überzeugt man sich mittelst des weiter unten zu erweisenden Satzes, dass das Verhältniss des Hauptextinctions- und Hauptrefractionscoefficienten von der Orientirung unabhängig ist, wenigstens für die einfacheren Fälle <sup>1)</sup> leicht, da sowohl das eine wie das andere Verfahren zu den gleichen Endformeln hinführt.

Hiernach gelten denn die zunächst für isotrope Mittel gewonnenen Gleichungen I auch für beliebige Combinationen anisotroper Mittel, sofern man nur, entsprechend der Anzahl der reflectirten und gebrochenen Wellen die unterdrückten Summenzeichen wiederherstellt und in die erste derselben die Dilatationscoefficienten  $\alpha$  mit den ihnen nach Gl. 19 zukommenden Werthen einführt.

---

Wenn nun dem Bisherigen zufolge für den Uebergang des Lichtes die Bedeutung der Normalcylinder überwiegt, so vereinfachen dagegen die Strahlcylinder die Formulirung der Differentialgleichungen der inneren Bewegung.

Von besonderem Gewicht ist dieser Umstand für die Entwicklung der Wellenfläche bewegter doppelt brechender Mittel. Um nämlich die Gesetze der Aberrationserscheinungen in Krystallen, wie ich sie empirisch aus eigens angestellten Versuchen <sup>2)</sup> ableiten konnte, theoretisch zu begründen, dazu bedarf es einer doppelten Erwägung.

---

1) Wied. Ann. III p. 106—112. Die Anwendung dieses Satzes führt zu einer erheblichen Vereinfachung der dort entwickelten Formeln.

2) Pogg. Ann. CXLVII, p. 404—429.

Es ist nämlich erstens kraft des Doppler'schen Princip's die Schwingungsdauer der Aether- und Körpertheilchen in den bisherigen Differentialgleichungen verschieden zu nehmen. Und zwar übersieht man, dass die Differenz beider durch den Winkel zwischen der Strahlrichtung als der thatsächlichen Fortpflanzungsrichtung und der Translationsrichtung bedingt ist, derart nämlich, dass sie im Maximum ist, wenn diese beiden Richtungen zusammenfallen, dagegen verschwindet, wenn sich dieselben rechtwinklig kreuzen. Daraus ergibt sich denn mit Evidenz, dass das Operiren mit der Strahlrichtung auf einfacherem Wege zum Ziele führt als das Operiren mit der Normalen, und dass das letztere zugleich den Begriff des Strahles als primär gegeben voraussetzen muss. Zweitens tritt bei der Translation vermöge der von mir sogenannten „inneren Aberration der Anisotropie“ an die Stelle einer bestimmten Krystallrichtung mit ihrem zugehörigen charakteristischen Amplitudenverhältniss eine benachbarte andere in die zu untersuchende feste Richtung des Raumes.

Man denke sich nun der Einfachheit wegen einen unendlich ausgedehnten Hauptschnitt eines einaxigen Krystalles und lasse auch die Translationsrichtung in denselben hineinfallen. Wir beschränken uns auf extraordinäres Licht, bezeichnen das Geschwindigkeitsverhältniss des Strahles für eine und dieselbe Krystallrichtung durch  $n'$  für den Zustand der Bewegung, durch  $n$  für den Zustand der Ruhe und nehmen wie bei isotropen Mitteln an, dass das Amplitudenverhältniss ( $A':\mathcal{A}$ ) ungeändert bleibt. Die optische Axe mache mit der Richtung des Strahles den Winkel  $\gamma$  und mit der der Translation den Winkel  $\psi$ .

Dies vorausgesetzt, tritt an die Stelle der Integralgleichung VI die allgemeinere folgende:

$$20) \quad n'^2 - 1 = \sum \frac{m' A'^2 T^2}{m \mathcal{A}^2 T'^2},$$

wo  $T$  die Schwingungsdauer der Aethertheilchen,  $T'$  die der Körpertheilchen bedeutet. Man hat dann weiter:

$$\sum \frac{m' A'^2}{m \mathcal{A}^2} = n^2 - 1$$

$$\frac{T}{T'} = 1 - \frac{g}{\omega'} \cos(\psi - \gamma),$$

sofern nämlich das Verhältniss der Schwingungsdauern entsprechend dem Doppler'schen Princip<sup>1)</sup> auf ein Verhältniss der Componente der Translationsgeschwindigkeit  $g$  parallel der Strahlrichtung und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega'$  im intermolekularen Aether zurückgeführt wird. Wir werden im Folgenden die höheren Potenzen des kleinen Bruches  $\frac{g}{\omega}$  vernachlässigen, so dass sich also schreiben lässt:

$$21) \quad n'^2 - 1 = (n^2 - 1) \left( 1 - 2 \frac{g}{\omega} \cos(\psi - \gamma) \right).$$

Ist nun der leuchtende Punkt in relativer Ruhe zu den Körpertheilchen, so lassen sich die rad. vect. der Wellenfläche sowie diese selbst am leichtesten auf dem zusammenhängenden Gerippe der Körpertheilchen markiren. In diesem Sinne ist vorstehende Gleichung, die sich auch auf die Form bringen lässt:

$$22) \quad \begin{aligned} n' &= n \left( 1 - \frac{gk}{\omega} \cos(\psi - \gamma) \right) \\ n^2 &= n_1^2 \sin^2 \gamma + n_2^2 \cos^2 \gamma \\ k &= \frac{n^2 - 1}{n^2}, \end{aligned}$$

$$\omega' = \omega + gk \cos(\psi - \gamma),$$

zugleich die Gleichung der Wellenfläche. Die Verlängerung oder Verkürzung der rad. vect. erfolgt sonach in anisotropen wie isotropen Mitteln nach dem gleichen Gesetze.

Denkt man sich dagegen den Erschütterungsmittelpunkt in relativer Ruhe zu den Aethertheilchen und fixirt dem entsprechend die Strahlengeschwindigkeit durch den Aether, so bleibt noch zu beachten, dass durch eine feste Richtung  $\gamma_0$  des Raumes gleichzeitig mit der undulatorischen Strahlbewegung die ponderablen Theilchen einer Krystallrichtung  $\gamma$  hindurchgehen, deren Lage durch den Aberrationswinkel:

$$\alpha = \frac{g}{\omega} \sin(\psi - \gamma_0)$$

1) Wied. Ann. I, p. 589.

bestimmt ist. Und wäre ebenso umgekehrt  $\gamma$  bekannt, so findet man  $\gamma_0$  mittelst der Beziehung:

$$\gamma_0 = \gamma + \alpha.$$

Mit Rücksicht hierauf schreibt sich der Ausdruck für  $n^2$  nun auch so:

$$\begin{aligned} n^2 &= n_1^2 \sin^2(\gamma_0 - \alpha) + n_2^2 \cos^2(\gamma_0 - \alpha) \\ &= n_1^2 \sin^2 \gamma_0 + n_2^2 \cos^2 \gamma_0 - 2(n_1^2 - n_2^2) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \alpha. \end{aligned}$$

Und coordinirt man schliesslich der Richtung  $\gamma_0$  für den Ruhezustand des Mittels das Geschwindigkeitsverhältniss  $n_0$ , so erhält jetzt die Gl. 21 die Form:

$$n'^2 - 1 = [n_0^2 - 1 - 2(n_1^2 - n_2^2) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \alpha] \left( 1 - 2 \frac{g}{\omega} \cos(\psi - \gamma_0) \right)$$

und bei der Vernachlässigung der kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} n'^2 &= \\ n_0^2 - 2 \frac{g}{\omega} [(n_0^2 - 1) \cos(\psi - \gamma_0) + (n_1^2 - n_2^2) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \sin(\psi - \gamma_0)] \\ &= n_0^2 - 2 \frac{g}{\omega} [(n_1^2 - 1) \sin \psi \sin \gamma_0 + (n_2^2 - 1) \cos \psi \cos \gamma_0]. \end{aligned}$$

Lässt man im Folgenden die angehängten  $_0$  fort, ersetzt die Geschwindigkeitsverhältnisse durch die Geschwindigkeiten selbst und führt für die axialen Richtungen die Coefficienten  $k_1, k_2$  ein, so erhält man nach Ausziehung der Wurzel:

$$23) \quad \frac{1}{\omega'} = \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{\omega_2^2} - g \left( \frac{k_1}{\omega_1^2} \sin \psi \sin \gamma + \frac{k_2}{\omega_2^2} \cos \psi \cos \gamma \right)}.$$

Es ist dies die Gleichung der Wellenfläche des bewegten anisotropen Mittels, bezogen auf die ruhenden Aetherpunkte. Um dieselbe auch in Punkt-Coordinationen auszudrücken, setze man noch:

$$y = \omega' \sin \gamma, \quad x = \omega' \cos \gamma.$$

Alsdann ergibt sich leicht:

$$23b) \quad \omega_2^2 (y - g k_1 \sin \psi)^2 + \omega_1^2 (x - g k_2 \cos \psi)^2 = \omega_1^2 \omega_2^2.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind identisch mit den in meiner Astronomischen Undulationstheorie (S. 176) direct aus der Erfahrung abgeleiteten Gleichungen 67 und 65.

Der hier entwickelten Strahlengeschwindigkeit  $\omega'$  in

der Richtung  $\gamma$  ordnet sich eine Normalgeschwindigkeit  $\omega'_n$  längs der Richtung  $\chi$  zu, die sich darstellt als ein vom Centrum auf die bezügliche Tangentialebene gefälltes Perpendikel. Sie ist gegeben durch den Ausdruck:

$$24) \quad \omega'_n = \sqrt{\omega_1^2 \sin^2 \chi + \omega_2^2 \cos^2 \chi} \\ + g (k_1 \sin \psi \sin \chi + k_2 \cos \psi \cos \chi).$$

Den Versuch einer unmittelbaren theoretischen Begründung desselben findet man in meinem Buche SS. 212—216; sie ist weniger anschaulich und zugleich umständlicher, sofern nämlich die Schwingungsdauern der Aether- und Körpertheilchen, welche in der Richtung  $\chi$  der gleichen Sinusoide angehören, in dem Verhältniss stehen:

$$\left(\frac{T}{T'}\right)_n = 1 - \frac{g \cos(\psi - \gamma)}{\omega_n \cos(\gamma - \chi)}.$$

In der That sind es also hier die Strahlcylinder, welche mittelst der einfacheren Voraussetzungen zum Ziele führen.

### III.

Stellt man sich jetzt weiter die Aufgabe, den Brechungs- und Extinctionscoefficienten der (ruhenden) homoe-drischen Mittel als eine Function der Wellenlänge in's Auge zu fassen, so würde dem behandelten ersten dioptrischen Grundgesetz ein zweites zur Seite zu stellen sein, welches die Schwingungsarbeit der Aether- und Körpertheilchen als Wirkung der inneren Kräfte der Körpermaterie und ihrer Wechselwirkung mit dem Aether darstellt. Es möge mir gestattet sein, auch über diesen schwierigen Gegenstand meine Ideen in Kürze vorzulegen; sie sind wesentlich auf Grundlage der Erfahrung, zumeist der Erscheinungen der anomalen Dispersion, gebildet worden.

Wenn zunächst meine Versuche über die Farbenzerstreuung der Gase (entsprechend den Ergebnissen Biot's und Gernez's über die Rotationspolarisation der Dämpfe) gelehrt haben, dass die Dispersion qualitativ vom Aggregatzustande unabhängig ist, so werden die in Betracht kommenden Körperkräfte weniger wohl von Molekül zu

Molekül als vielmehr innerhalb des Moleküls von Atom zu Atom wirksam sein. Man wird sich daher die in Rede stehenden Vorgänge einigermaßen versinnlichen können, wenn man sich in einem ausgedehnten und tiefen Behälter viele und kleine, aber massige Kugeln suspendirt denkt, deren Individuen gruppenweise durch starke elastische Federn zu stabilen Formen verbunden sind, deren Gruppen durch schwächere Federn aus einander gehalten werden, und deren sämtliche Zwischenräume durch eine unzusammendrückbare Flüssigkeit ausgefüllt werden. Erregt man dann in dieser Flüssigkeit passende elliptische Wellen, so werden die trägen Kügelchen in ähnlicher Weise hemmend und fördernd auf die Flüssigkeitstheilchen und diese letzteren fördernd und hemmend auf die ersteren einwirken wie bei der Fortpflanzung des Lichtes die Aether- und Körpertheilchen.

Darf man sich in der That die Aethertheilchen als ein Continuum bildend und von geringer Masse, die Körpertheilchen als zwar gleichfalls wenig ausgedehnt, aber als massig und discret geordnet vorstellen, so ist einzusehen, dass der Einfluss dieser letzteren sich gewissermaßen localisirt geltend machen, d. h. von wenigen, verhältnissmässig weit von einander abstehenden Centren aus vermöge ihrer gegenseitigen Einwirkung und ihrer Rückwirkung auf den Aether eine neue dynamische Kräftevertheilung bewirken werde.

Zunächst wird die Deformation des inneren Aethers wegen der Reaction der Körpertheilchen von Punkt zu Punkt anders verlaufen als einer pendelartigen Oscillation von gleicher Amplitude und Schwingungsdauer im Weltäther entspricht. Es wird ihr daher auch ein anderer Mittelwerth der Deformationsconstante zukommen, und möglicher Weise werden selbst Glieder, welche höhere Differentialquotienten der Ausschläge nach den Axen enthalten, hinzutreten. Andererseits werden die Elemente der Atomgruppen ebenfalls Verdrehungen, deren Folge das Auftreten einer weiteren Spannungsconstante ist, daneben aber auch Verschiebungen erfahren. Ich mache hier nun die Annahme, dass die inneren Kräfte, welche sich einer Aenderung der

stabilen Gleichgewichtsform des Moleküles widersetzen, stets begleitet seien von Abstossungskräften zwischen den Atomen, dergestalt, dass bei eintretender Störung die ersteren das schwingende Theilchen in seine frühere Lage zurückzuführen, die letzteren dagegen aus derselben zu entfernen streben. Diese aus den relativen Abstandsänderungen hervorgehenden Kräfte mögen zum Theil den Verschiebungen, zum Theil den Verschiebungsgeschwindigkeiten und möglicher Weise sogar den höheren Potenzen derselben proportional sein. Ist aber der Aether eine unzusammendrückbare elastische Flüssigkeit, so werden seine Theilchen in jedem Augenblick die vorhandenen Lücken auszufüllen suchen und auch die gleichfalls elastischen Körpertheilchen in dieselben hineintreiben.

Eine jede der hier aufgeführten Kräfte leistet in jedem Augenblick eine gewisse Arbeit  $dW$ , die für die einen positiv, für die andern negativ ist. Und da man zufolge Gl. V weiss, dass die Summe der durch die Beschleunigung gemessenen Arbeiten der Aether- und Körpertheilchen gleich der Deformationsarbeit des Weltäthers ist, so gelangt man zu dem folgenden zweiten, jenen ersten ergänzenden Satz:

$$\text{VII.} \quad \Sigma dW = 0.$$

Bevor ich nun die einzelnen Glieder berechne, bemerke ich, dass alle Ausschläge als unendlich klein genommen werden sollen, so dass die erwähnten Kräftefunctionen in ihrer einfachsten Form zur Anwendung kommen. Ferner soll das Mittel vorläufig aus einer einzigen Molekularqualität bestehen, und sollen die Theilchen um die Coordinatenachsen als Symmetrieachsen geordnet sein. Dies vorausgesetzt, denke man sich um irgendwelche Richtung den Strahlcylinder construirt, und es mögen wieder die Ausschläge der Aethertheilchen desselben zur Zeit  $t$  mit  $\xi, \eta, \zeta$ , die der Körpertheilchen mit  $\xi', \eta', \zeta'$  bezeichnet werden. Nimmt man die Amplituden der ersteren als verhältnissmässig gross an gegen die der letzteren, so werden demnach zwei Theilchen, die in der Ruhelage beisammen liegen, sich zur Zeit  $t = t_1$  um irgend eine merkliche Strecke getrennt haben, dagegen werden zwei andere, die in der

Gleichgewichtslage von einander abstanden, in diesem Augenblick eben zusammentreffen, so dass man für sie hat:

$$t = t_1 \quad \xi_1 = \xi'_1, \quad \eta_1 = \eta'_1, \quad \zeta_1 = \zeta'_1.$$

Das Aethertheilchen steht zunächst unter dem Einfluss der das System anregenden Deformationskraft des Weltäthers mit den Componenten:

$$e \mathcal{A}_2 \xi_1, \quad e \mathcal{A}_2 \eta_1, \quad e \mathcal{A}_2 \zeta_1.$$

Durch diese Anregung wird auf das Körpertheilchen ein Druck geübt, dessen Componenten seien:

$$-d_x \mathcal{A}_2 \xi'_1, \quad -d_y \mathcal{A}_2 \eta'_1, \quad -d_z \mathcal{A}_2 \zeta'_1,$$

und so erhält das Aethertheilchen in diesem Moment den gleichen, entgegengesetzten Reactionsdruck:

$$+d_x \mathcal{A}_2 \xi_1, \quad +d_y \mathcal{A}_2 \eta_1, \quad +d_z \mathcal{A}_2 \zeta_1.$$

Denkt man sich andererseits die primitive Kraftwirkung von der Körpermasse ausgehend und dadurch die Spannungskräfte entwickelt:

$$e'_x \mathcal{A}_2 \xi'_1, \quad e'_y \mathcal{A}_2 \eta'_1, \quad e'_z \mathcal{A}_2 \zeta'_1,$$

so mögen die zugehörigen Drucke und Gegendrucke bezeichnet werden für die Aethertheilchen durch:

$$-d'_x \mathcal{A}_2 \xi_1, \quad -d'_y \mathcal{A}_2 \eta_1, \quad -d'_z \mathcal{A}_2 \zeta_1$$

und für die Körpertheilchen durch:

$$+d'_x \mathcal{A}_2 \xi'_1, \quad +d'_y \mathcal{A}_2 \eta'_1, \quad +d'_z \mathcal{A}_2 \zeta'_1.$$

Sonach ist die totale Deformationskraft des Aethers beispielsweise parallel der X-Axe:

$$[c - (d_x - d'_x)] \mathcal{A}_2 \xi_1 = (e - \varepsilon_x) \mathcal{A}_2 \xi_1$$

und die des Körpertheilchens in der nämlichen Richtung:

$$(e'_x + \varepsilon_x) \mathcal{A}_2 \xi'_1 = e'_x \mathcal{A}_2 \xi'_1.$$

Zu den besprochenen Kräften der Gestaltsänderung, die der Aether- und Körpermaterie gemeinschaftlich zugelegt wurden, kommen weiter die zwischen den Atomen der letzteren supponirten Abstossungskräfte. Nehmen wir an, dass das betrachtete Körpertheilchen zur Zeit  $t = t_1$  durch eine Kraft mit den Componenten:

$$+f_x \xi'_1, \quad +f_y \eta'_1, \quad +f_z \zeta'_1$$

gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird. Für diesen Moment erhält man daher die Reactionsdrucke:

Für die Aethertheilchen:

$$-k_x \xi_1, \quad -k_y \eta_1, \quad -k_z \zeta_1$$

und für die Körpertheilchen:

$$+ \alpha_x \xi'_1, + \alpha_y \eta'_1, + \alpha_z \zeta'_1,$$

so dass z. B. parallel der X-Axe für beide die Totalkräfte entwickelt werden:

$$- \alpha_x \xi_1 \\ + (\xi_x + \alpha_x) \xi'_1 = \alpha'_x \xi'_1.$$

Analoge Bemerkungen gelten für die Kräfte, die der Oscillationsgeschwindigkeit der Aether- und Körpertheilchen proportional sind, und die entsprechend bezeichnet werden sollen durch:

$$- \gamma_x \frac{d\xi_1}{dt} \\ + (g_x + \gamma_x) \frac{d\xi'_1}{dt} = \gamma'_x \frac{d\xi'_1}{dt}.$$

Ich fasse dieselben mit den ersteren zu den Gesamtkräften:

$$- \alpha_x \left( \xi_1 + \delta \frac{d\xi_1}{dt} \right) \\ + \alpha'_x \left( \xi'_1 + \delta \frac{d\xi'_1}{dt} \right)$$

zusammen und nehme anticipando (vgl. S. 46) an, dass das Verhältniss  $\delta$  für Aether- und Körpertheilchen gleich und überhaupt von der Orientirung unabhängig sei.

Eine letzte Klasse von in Betracht kommenden Kräften bilden diejenigen, die aus der Flüssigkeit und Unzusammendrückbarkeit des anisotrop angeordneten Systems hervorgehen, und deren Totalarbeit in jedem Augenblick gleich Null ist. Es sind zum Theil solche, welche mit der Dissymmetrie der Anordnung verschwinden, zum Theil solche, welche auch in isotropen Mitteln bestehen bleiben.

Vermöge der ersteren sind den bewegenden Kräften der Aethertheilchen gewisse Druckcomponenten:

$$\frac{dp_1}{dx}, \frac{dp_1}{dy}, \frac{dp_1}{dz}$$

hinzuzufügen, und lässt sich nach Reduction auf gleiche Phase dem  $p$  die Form geben:

$$25) \quad p = a \frac{d\xi}{dx} + b \frac{d\eta}{dy} = c \frac{d\zeta}{dz}.$$

Die zuletzt genannten auch in isotropen Mitteln auf-

tretenden Kräfte sollen endlich für Aether- und Körpertheilchen kurz mit

$$\begin{array}{ccc} f_x, & f_y, & f_z \\ f'_x, & f'_y, & f'_z \end{array}$$

bezeichnet werden, und gelten für sie paarweise die Beziehungen:

$$\begin{aligned} f_x d\mathcal{A}_x + \Sigma f'_x d\mathcal{A}'_x &= 0 \\ f_y d\mathcal{A}_y + \Sigma f'_y d\mathcal{A}'_y &= 0 \\ f_z d\mathcal{A}_z + \Sigma f'_z d\mathcal{A}'_z &+ 0. \end{aligned}$$

Nachdem hiermit die Einzelberechnung der sämtlichen wirksamen Kräfte abgeschlossen, erhalten nunmehr die Differentialgleichungen der Bewegung die für die laufende Zeit geltende Form:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = (e - \Sigma \varepsilon_x) \mathcal{A}_2 \xi - \Sigma \kappa_x \left( \xi + \delta \frac{d\xi}{dt} \right) + \frac{dp}{dx} + f_x$$

$$m' \frac{d^2\xi'}{dt^2} = \varepsilon'_x \mathcal{A}_2 \xi' + \kappa'_x \left( \xi' + \delta \frac{d\xi'}{dt} \right) + f'_x$$

. . . . .

$$m \frac{d^2\eta}{dt^2} = (e - \Sigma \varepsilon_y) \mathcal{A}_2 \eta - \Sigma \kappa_y \left( \eta + \delta \frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{dp}{dy} + f_y$$

VIII.

$$m' \frac{d^2\eta'}{dt^2} = \varepsilon'_y \mathcal{A}_2 \eta' + \kappa'_y \left( \eta' + \delta \frac{d\eta'}{dt} \right) + f'_y$$

. . . . .

$$m \frac{d^2\zeta}{dt^2} = (e - \Sigma \varepsilon_z) \mathcal{A}_2 \zeta - \Sigma \kappa_z \left( \zeta + \delta \frac{d\zeta}{dt} \right) + \frac{dp}{dz} + f_z$$

$$m' \frac{d^2\zeta'}{dt^2} = \varepsilon'_z \mathcal{A}_2 \zeta' + \kappa'_z \left( \zeta' + \delta \frac{d\zeta'}{dt} \right) + f'_z$$

. . . . .

sofern unter den in sie eingehenden Coefficienten Werthe verstanden werden, welche die Mittelwerthe sind für alle in der Volumeinheit enthaltenen Massetheilchen.

Dieselben gelten, so lange man die Summenzeichen fortlässt, für optisch-chemisch einfache Mittel, und sind die Coordinatenaxen zugleich die Symmetrieaxen. Es ist indess leicht, vorstehende Entwicklung auf beliebig zusammengesetzte Mittel zu erweitern. Es seien  $m$  verschiedene Molekularqualitäten vorhanden,  $m'_1, m'_2 \dots m'_m$ , eine jede um

drei rechtwinklige Axen symmetrisch geordnet, aber diese  $m$  Axensysteme seien um ein erstes als Hauptaxensystem regellos zerstreut. Ich wähle das Hauptaxensystem so, dass für die untersuchte Strahlenrichtung keine Drehcomponenten auftreten. Man hat dann folglich in den drei auf die Aetherschwingungen bezüglichen Gleichungen so viele  $\varepsilon$  und  $\kappa$  enthaltende Glieder, als heterogene Körpermassen da sind. Dazu kommen  $3m$  Gleichungen für die Schwingungscomponenten dieser letzteren. Man multiplicire nun eine jede mit dem zugehörigen Wegelement  $d\mathfrak{A}_x, d\mathfrak{A}_y, d\mathfrak{A}_z; d\mathfrak{A}'_x, d\mathfrak{A}'_y, d\mathfrak{A}'_z \dots$  und addire sie sämmtlich. Es fallen dann die Arbeiten der Druckkräfte für sich heraus, und so erhält man das System der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 m \left( \frac{d^2 \xi}{dt^2} d\mathfrak{A}_x + \frac{d^2 \eta}{dt^2} d\mathfrak{A}_y + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} d\mathfrak{A}_z \right) + \sum m' \left( \frac{d^2 \xi'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_x + \frac{d^2 \eta'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_y + \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_z \right) \\
 = e (\mathcal{A}_2 \xi d\mathfrak{A}_x + \mathcal{A}_2 \eta d\mathfrak{A}_y + \mathcal{A}_2 \zeta d\mathfrak{A}_z), \\
 \sum \left\{ - \left[ \varepsilon_x \mathcal{A}_2 \xi + \kappa_x \left( \xi + \delta \frac{d\xi}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}_x + \left[ \varepsilon'_x \mathcal{A}_2 \xi' + \kappa'_x \left( \xi' + \delta \frac{d\xi'}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}'_x \right\} \\
 + \sum \left\{ - \left[ \varepsilon_y \mathcal{A}_2 \eta + \kappa_y \left( \eta + \delta \frac{d\eta}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}_y + \left[ \varepsilon'_y \mathcal{A}_2 \eta' + \kappa'_y \left( \eta' + \delta \frac{d\eta'}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}'_y \right\} \\
 + \sum \left\{ - \left[ \varepsilon_z \mathcal{A}_2 \zeta + \kappa_z \left( \zeta + \delta \frac{d\zeta}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}_z + \left[ \varepsilon'_z \mathcal{A}_2 \zeta' + \kappa'_z \left( \zeta' + \delta \frac{d\zeta'}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}'_z \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

sofern nämlich die erste derselben mit Gl. V identisch ist. Die letzte Gleichung giebt sonach die Specialisirung des Inhaltes des Ausdrucks VII.

Nun beachte man, dass die Arbeitsdifferenzen der drei Summenzeichen dieser Gleichung, die parallel den bezüglichen Axen geleistet werden, lediglich in der Ueberwindung von solchen Widerständen bestehen, die einander als die Componenten fester Spontan- und Reactionskräfte zugeordnet sind, und dass sie unabhängig erscheinen von den hydrodynamischen Drucken. Man darf hieraus schliessen, dass zunächst in der Gesamtgleichung jede der drei Summen für sich zu annulliren ist, und dass dann innerhalb jeder ebenso viele Gleichungen bestehen, als heterogene Molekularqualitäten vorhanden sind.

Demzufolge hat man die 3m Einzelgleichungen:

$$\left[ \varepsilon_x \mathcal{A}_2 \xi + \kappa_x \left( \xi + \delta \frac{d\xi}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}_x = \left[ \varepsilon'_x \mathcal{A}_2 \xi' + \kappa'_x \left( \xi' + \delta \frac{d\xi'}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}'_x$$

IX.  $\left[ \varepsilon_y \mathcal{A}_2 \eta + \kappa_y \left( \eta + \delta \frac{d\eta}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}_y = \left[ \varepsilon'_y \mathcal{A}_2 \eta' + \kappa'_y \left( \eta' + \delta \frac{d\eta'}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}'_y$

$$\left[ \varepsilon_z \mathcal{A}_2 \zeta + \kappa_z \left( \zeta + \delta \frac{d\zeta}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}_z = \left[ \varepsilon'_z \mathcal{A}_2 \zeta' + \kappa'_z \left( \zeta' + \delta \frac{d\zeta'}{dt} \right) \right] d\mathfrak{A}'_z.$$

Wir wollen jetzt die Gl. V und IX unter der speciellen Annahme integrieren, dass die Extinctions- und Propagationsrichtung zusammenfallen. In diesem Falle ist  $\varrho=0$  (vgl. S. 24) und daher  $\nu=a$ ,  $q=b$ , und die Aetherschwingung wird linear<sup>1)</sup>, so dass zugleich in den Ausdrücken III

$$\psi_x = \psi_y = \psi_z.$$

Ersetzt man wieder die Wegelemente durch die ihnen proportionalen Amplituden und fasst nach Eliminirung der laufenden Zeit die Cosinus und Sinus der axialen Anomalien  $\mathcal{A}$  mit den Amplitudencomponenten der Körpertheilchen und ebenso die beiden Bestandtheile  $a$ ,  $b$  der Charakteristik zu complexen Gesamtwerten zusammen, so erhält man schliesslich in Uebereinstimmung mit Gl. VI:

$$n^2 - 1 = \frac{\sum m' (A'_x{}^2 + A'_y{}^2 + A'_z{}^2)}{m \mathfrak{A}^2},$$

oder bei Einführung der Cosinus  $U = \frac{\mathfrak{A}_x}{\mathfrak{A}}$ ,  $V = \frac{\mathfrak{A}_y}{\mathfrak{A}}$ ,  $W = \frac{\mathfrak{A}_z}{\mathfrak{A}}$  der Winkel zwischen der restaurirten Schwingungsrichtung der Aethertheilchen und den Coordinatenachsen:

$$26) \quad n^2 - 1 = \left( \frac{\sum m' A'_x{}^2}{m \mathfrak{A}_x{}^2} \right) U^2 + \left( \frac{\sum m' A'_y{}^2}{m \mathfrak{A}_y{}^2} \right) V^2 + \left( \frac{\sum m' A'_z{}^2}{m \mathfrak{A}_z{}^2} \right) W^2$$

und dazu:

---

1) Es entspricht nämlich, wie in Wied. Ann. III, p. 98 gezeigt ist, dem senkrechten Einfall eine lineare (thatsächliche) Normalschwingung, der sich dann auch eine lineare (virtuelle) Strahlschwingung zuordnet.



$$\text{tang } 2\eta = \text{tang } 2\eta_x = \text{tang } 2\eta_y = \text{tang } 2\eta_z.$$

Daraus folgt dann sofort, dass auch:

$$28) \quad \text{tang } \eta = \text{tang } \eta_x = \text{tang } \eta_y = \text{tang } \eta_z,$$

d. h. das Verhältniss des Hauptextinctions- und Hauptrefractionscoefficienten ist von der Orientirung unabhängig; man darf daher die Gleichung des Ellipsoides sowohl auf die Refractionscoefficienten  $a$  als die Extinctionscoefficienten  $b$  beziehen, so dass sich schreiben lässt:

$$a^2 = a_x^2 U^2 + a_y^2 V^2 + a_z^2 W^2$$

$$b^2 = b_x^2 U^2 + b_y^2 V^2 + b_z^2 W^2$$

$$a^2 + b^2 = (a_x^2 + b_x^2) U^2 + (a_y^2 + b_y^2) V^2 + (a_z^2 + b_z^2) W^2.$$

Zu einer Vereinfachung der erhaltenen Ausdrücke gelangt man weiter mittelst der Erwägung, dass sich ein unendlich dünner Strahleylinder, den man um irgendwelche Krystallrichtung herum gelegt denkt, sich bezüglich seiner brechenden Kraft nicht von dem eines isotropen Mittels unterscheidet, in welchem das Amplitudenverhältniss  $\frac{A'}{\mathfrak{A}}$

den gleichen Werth hat. Es wird daher auch in Krystallen die brechende Kraft darstellbar sein durch einen Ausdruck von der Form:

$$29) \quad n^2 - 1 = \sum \frac{m' \kappa(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon n^2}{m \kappa'(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon' n^2}.$$

Behufs dessen Identificirung mit dem vorstehenden mögen zunächst neue Constanten  $\epsilon_\xi, \epsilon_\eta, \epsilon_\zeta; \epsilon'_\xi, \epsilon'_\eta, \epsilon'_\zeta; \kappa_\xi \dots; \kappa'_\xi \dots$  und neue Winkel  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$  eingeführt werden, welche mit den früheren durch die Relationen verknüpft seien:

$$\begin{aligned} & \left( \sum \frac{m' \kappa_x(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon_x n^2}{m \kappa'_x(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon'_x n^2} \right) U^2 \\ &= \sum \left( \frac{m' \kappa_\xi(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon_\xi n^2}{m \kappa'_\xi(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon'_\xi n^2} \mathfrak{U}^2 \right) \\ & \left( \sum \frac{m' \kappa_y(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon_y n^2}{m \kappa'_y(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon'_y n^2} \right) V^2 \\ &= \sum \left( \frac{m' \kappa_\eta(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon_\eta n^2}{m \kappa'_\eta(\lambda^2 - \sqrt{-1} 2\pi v \delta \lambda) - 4\pi^2 \epsilon'_\eta n^2} \mathfrak{V}^2 \right) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Alsdann lässt sich die rechte Seite des Ausdrucks 26 unter ein einziges Summenzeichen zusammenfassen, und soll derselbe sich mit Gl. 29 decken, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varepsilon_{\xi}}{\kappa_{\xi}} = \frac{\varepsilon_{\eta}}{\kappa_{\eta}} = \frac{\varepsilon_{\zeta}}{\kappa_{\zeta}} \\
 30) \quad & \frac{\varepsilon'_{\xi}}{\kappa'_{\xi}} = \frac{\varepsilon'_{\eta}}{\kappa'_{\eta}} = \frac{\varepsilon'_{\zeta}}{\kappa'_{\zeta}} = \frac{L^2}{4\pi^2} \\
 & \frac{\varepsilon_{\xi}}{\varepsilon'_{\xi}} U^2 + \frac{\varepsilon_{\eta}}{\varepsilon'_{\eta}} \mathfrak{B}^2 + \frac{\varepsilon_{\zeta}}{\varepsilon'_{\zeta}} \mathfrak{W}^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \\
 & \frac{\kappa_{\xi}}{\kappa'_{\xi}} U^2 + \frac{\kappa_{\eta}}{\kappa'_{\eta}} \mathfrak{B}^2 + \frac{\kappa_{\zeta}}{\kappa'_{\zeta}} \mathfrak{W}^2 = \frac{\kappa}{\kappa'}.
 \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser neuen Constanten ergibt sich daraus, dass, wenn die Werthe aller zusammengehörigen Systeme  $\varepsilon_{\xi} \dots \kappa_{\xi} \dots$  für alle Massen  $m'_1, m'_2 \dots$  bis auf ein einziges für eine Masse  $m'_{\mu}$  gleich Null gesetzt werden, die Cosinus U, V, W zwischen Hauptaxensystem und gegebener Krystallrichtung mit den bezüglichen U,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{W}$  zusammenfallen, dass dann also die Hauptaxen des zugehörigen Ellipsoides in eine Lage  $\Xi, H, Z$  hineinkommen. Die in Rede stehenden Coefficienten charakterisiren folglich die einzelne Molekularqualität in Bezug auf Verschiebungen, die deren eigenen Symmetrieaxen parallel sind, und darum sind die U,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{W}$  die Cosinus der Winkel zwischen diesen Symmetrieaxen und der gegebenen Richtung.

Aus vorstehenden Bedingungen schliesst man ferner, dass die Reactionen den erregenden Kräften proportional sind, und dass das Verhältniss derjenigen Körperkräfte, welche wegen der Gestaltsänderung die schwingenden Theilchen in die Gleichgewichtslage zurückzuführen streben, und derjenigen, welche wegen der relativen Abstandsänderungen sie von derselben entfernen, von der Orientirung unabhängig ist.

Für  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  leitet man jetzt ab:

$$31) \quad n_0^2 - 1 = \sum \frac{m'_{\varepsilon}}{m\varepsilon}, \quad n_{\infty}^2 - 1 = \sum \frac{m'_{\kappa}}{m\kappa},$$

Ausdrücke, welche bei Bezugnahme auf Gl. 30 und 26 Ellipsoide repräsentiren und sich daher unter Einführung der axialen Brechungsverhältnisse auch so schreiben lassen:

$$31b) \quad \begin{aligned} n^2_0 &= (n^2_0)_x U^2 + (n^2_0)_y V^2 + (n^2_0)_z W^2 \\ n^2_\infty &= (n^2_\infty)_x U^2 + (n^2_\infty)_y V^2 + (n^2_\infty)_z W^2. \end{aligned}$$

Denkt man sich jetzt, dass die Werthe  $\varepsilon_\xi \dots \varepsilon'_\xi \dots$  des Systems  $m'_1$  die bezüglichen Werthe aller übrigen bedeutend an Grösse überragen, und dass andererseits die Werthe  $\kappa_\xi \dots \kappa'_\xi \dots$  des Systems  $m'_m$  die bei weitem grössten sind, so folgt, dass die Hauptaxen des Ellipsoids der ersten Gleichung gegen die der zweiten um irgendwelchen Winkel gedreht sind.

Sofern die  $\varepsilon$  und  $\kappa$  als reell vorausgesetzt werden, findet folglich für die genannten extremen Wellenlängen keine Absorption Statt.<sup>1)</sup> Den entsprechenden axialen Einzelamplituden kommen zufolge der Definition dieser Coefficienten die Verhältnisse zu:

$$32) \quad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}'_0{}^2}{\mathfrak{A}^2} &= \frac{\varepsilon}{e' + \varepsilon}, & \frac{\mathfrak{A}'_0{}^2}{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}'_0{}^2} &= \frac{\varepsilon}{e'} \\ \frac{\mathfrak{A}'_\infty{}^2}{\mathfrak{A}^2} &= \frac{\kappa}{k + \kappa}, & \frac{\mathfrak{A}'_\infty{}^2}{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}'_\infty{}^2} &= \frac{\kappa}{k}, \end{aligned}$$

so dass also diese Amplituden sich nahezu verhalten wie die Quadratwurzeln der Reactions- und Spontankräfte.

Definirt man schliesslich allgemein die dispergirende Kraft einer einzelnen Molekularqualität durch den Ausdruck:

$$33) \quad D' = \frac{m'}{m} \left( \frac{\kappa}{\kappa'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right),$$

so dass:

$$34) \quad D' = D'_\xi \mathfrak{U}^2 + D'_\eta \mathfrak{B}^2 + D'_\zeta \mathfrak{B}^2,$$

und setzt noch:

$$35) \quad \delta = \frac{\gamma}{\kappa} = \frac{\gamma'}{\kappa'} = \frac{1}{2\pi v} \frac{G}{L},$$

so gewinnt das Dispersionsgesetz (Gl. 29) die mehr übersichtliche Form:

$$X. \quad n^2 - n^2_\infty = \sum \frac{D' n^2}{\frac{\lambda^2}{L^2} - \sqrt{-1} G \frac{\lambda}{L} - n^2}.$$

1) D. h. so lange man von der Grenzwirkung absieht.

Bezüglich der sich hieran anschliessenden allgemeinen Construction der Wellenfläche möge auf das in einer früheren Arbeit Gesagte<sup>1)</sup> verwiesen werden. Handelt es sich speciell um Mittel, deren Theilchen um ein einziges Axensystem regelmässig angeordnet sind, d. h. um Mittel ohne sogenannte Dispersion der Axen, so wird zugleich in Betracht dessen, dass man erfahrungsmässig in Gl. X D' meist als eine kleine Grösse betrachten darf, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können, und dass dem entsprechend das rechter Hand vorkommende  $n$  durch einen von Wellenlänge und Orientirung unabhängigen Mittelwerth ersetzt werden darf, das durch diese Gleichung repräsentirte Ellipsoid nach Lage und Grössenverhältniss seiner Axen für alle Schwingungsdauern constant. Unter dieser Voraussetzung lässt sich unmittelbar auf die Differentialgleichungen VIII zurückgehen, und man gelangt dann auf folgendem einfacheren Wege zum Ziel. Man multiplicire beispielsweise die erste derselben mit  $\mathfrak{A}_x$ , die zweite mit  $\mathfrak{A}'_x$  und addire sie unter Beachtung, dass die letztere  $m$  mal vorkommt. So erhält man das System:

$$\begin{aligned}
 36) \quad & m\mathfrak{A}_x \frac{d^2\xi}{dt^2} + \sum m'\mathfrak{A}'_x \frac{d^2\xi'}{dt^2} = c\mathfrak{A}_x \mathcal{A}_2\xi + \frac{dp}{dx} \mathfrak{A}_x \\
 & m\mathfrak{A}_y \frac{d^2\eta}{dt^2} + \sum m'\mathfrak{A}'_y \frac{d^2\eta'}{dt^2} = c\mathfrak{A}_y \mathcal{A}_2\eta + \frac{dp}{dy} \mathfrak{A}_y \\
 & m\mathfrak{A}_z \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \sum m'\mathfrak{A}'_z \frac{d^2\zeta'}{dt^2} = c\mathfrak{A}_z \mathcal{A}_2\zeta + \frac{dp}{dz} \mathfrak{A}_z.
 \end{aligned}$$

Wir integriren dieselben wieder für den speciellen Fall, dass Extinctions- und Propagationsrichtung zusammenfallen, so dass die Aetherschwingungen linear werden und für  $p$  der Ausdruck 25 substituirt werden darf. Es kommt dann z. B. für die erste:

$$\begin{aligned}
 & m\mathfrak{A}_x^2 \cos \varphi + \sum m'\mathfrak{A}'_x{}^2 \cos(\varphi - \mathcal{A}_x) \\
 = & m[\mathfrak{A}_x^2 + (a\mathfrak{A}_xu + b\mathfrak{A}_yv + c\mathfrak{A}_zw)\mathfrak{A}_xu][(\nu^2 - q^2)\cos \varphi + 2\nu q \sin \varphi].
 \end{aligned}$$

Man schreibe nun zur Abkürzung:

$$aUu + bVv + cWw = C$$

und eliminire die laufende Zeit. Alsdann folgt:

1) Pogg. Ann. Erg. Bd. VIII, 460.

$$m\mathcal{U}_x^2 + \Sigma m'\mathcal{U}'_x{}^2 \cos \mathcal{A}_x = m(\mathcal{U}_x^2 + C\mathcal{U}\mathcal{U}_x u)(\nu^2 - q^2)$$

$$\Sigma m'\mathcal{U}'_x{}^2 \sin \mathcal{A}_x = m(\mathcal{U}_x^2 + C\mathcal{U}\mathcal{U}_x u)2\nu q$$

oder kürzer unter Beachtung der Gl. 10 und 11:

$$[(a_x^2 - b_x^2) - (a^2 - b^2)] U = C(a^2 - b^2)u$$

$$2[a_x b_x - ab] U = C 2abu.$$

Fasst man dieselben zusammen und fügt die entsprechenden übrigen Gleichungen hinzu, so hat man:

$$(n_x^2 - n^2) U = C n^2 u$$

$$37) \quad (n_y^2 - n^2) V = C n^2 v.$$

$$(n_z^2 - n^2) W = C n^2 w,$$

also dieselben wie für den früher (S. 9) behandelten ideellen Typus II. Sofern indess die Brechungsverhältnisse complex sind, so darf man diese Gleichungen in Rücksicht auf die früher erwiesene Constanz des Verhältnisses des Hauptextinctions- und Hauptrefractionscoefficienten auf jeden derselben für sich beziehen. Von ihnen aus gelangt man nach bekanntem Verfahren zu den Bestimmungsstücken der zugeordneten Normale.

Die jetzt folgende Erörterung soll die wichtigeren Aufgaben der Dispersionslehre behandeln und zu dem Zweck an Gl. X anknüpfen.

Um die ihr entsprechende Dispersionscurve  $n = f(\lambda)$  construiren zu können, hat man die Gleichung nach  $n^2$  aufzulösen und das Reelle und Imaginäre zu trennen. Sie zerfällt alsdann in folgende zwei:

$$38) \quad a^2 - b^2 = F'(\lambda), \quad 2ab = F''(\lambda),$$

von denen die erste die wesentlichsten Eigenschaften der Refractionscurve, die zweite die der Absorptionscurve begründet. Mit diesen Namen habe ich nämlich in früheren Aufsätzen die beiden entsprechenden Curven

$$a = f'(\lambda), \quad b = f''(\lambda),$$

in deren Gleichungen  $a$  und  $b$  getrennt vorkommen, belegt.

Sofern die Schwierigkeiten, die sich der geometrischen wie algebraischen Behandlung derselben entgegenstellen, mit der Zahl der zusammenschwingenden heterogenen Bestandtheile wachsen, so behandle ich zunächst das chemisch

einfache Mittel und beschränke mich bezüglich zusammengesetzter Mittel auf solche, welche innerhalb des gewöhnlichen optischen Spectrums nur Einen Absorptionsstreifen zeigen <sup>1)</sup>).

1. Für dioptrisch einfache Mittel fällt das Summenzeichen fort und wird Gl. X in Bezug auf  $n^2$  quadratisch. Die Auflösung ergibt:

$$39) \quad n^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2} \right) - \sqrt{-1} G \frac{\lambda}{L} \right] \\ \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \left( n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2} \right)^2 - (G^2 + 4n_\infty^2) \frac{\lambda^2}{L^2} \right] - \sqrt{-1} G \frac{\lambda}{L} \left[ \frac{1}{2} \left( n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2} \right) - n_\infty^2 \right]}$$

Setzt man nun abkürzungsweise den reellen Theil des Radicanden =  $\alpha$ , den imaginären =  $\sqrt{-1} \beta$ , so kommt:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \left( n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{+\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ 2ab = -\frac{1}{2} G \frac{\lambda}{L} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Oder bei Einführung der charakteristischen Wellenlängen:

$$2(a^2 - b^2) = n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}L^2} \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'_{g^2})(\lambda^2 - \lambda''_{g^2}) + \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'_{g^2})^2(\lambda^2 - \lambda''_{g^2})^2 + 4G^2L^2\lambda^2(\lambda^2 - \lambda''_{\mu})^2}} \\ 40) \quad 4ab = -G \frac{\lambda}{L} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}L^2} \sqrt{-(\lambda^2 - \lambda'_{g^2})(\lambda^2 - \lambda''_{g^2}) + \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'_{g^2})^2(\lambda^2 - \lambda''_{g^2})^2 + 4G^2L^2\lambda^2(\lambda^2 - \lambda''_{\mu})^2}}$$

Es verschwindet nämlich für  $\lambda = \lambda'_{g^2} = \lambda''_{g^2}$  die Function  $\alpha$ , für  $\lambda = \lambda''_{\mu}$  die Function  $\beta$ . Die ersteren Werthe entsprechen dem Minimum und Maximum der Brechung — ich nenne sie daher die Gränzwellenlängen —;  $\lambda''_{\mu}$  entspricht der ungefähren Mitte des Absorptionsstreifens. Dieser letzteren Grösse mögen noch zur Ergänzung die beiden weiteren  $\lambda'_{\mu}$  und  $\lambda_m$  hinzugefügt werden. Man hat dann die Definitionen:

1) Für Mittel mit mehr als Einem Absorptionsstreifen vgl. Wied. Ann. I, p. 340.

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda''_g - \lambda'_g}{L} &= \sqrt{G^2 + 4D'}, & \frac{\lambda''_g + \lambda'_g}{L} &= \sqrt{G^2 + 4n_\infty^2} \\
 \frac{\lambda''_{\mu^2}}{L^2} &= n_\infty^2 + D' \\
 41) \quad \frac{\lambda'_{\mu^2}}{L^2} &= \frac{\lambda'_g \lambda''_g}{L^2} = n_\infty^2 - D' = n_0^2 \\
 \frac{\lambda_m^2}{L^2} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda'_{\mu^2} + \lambda''_{\mu^2}}{L^2} = n_\infty^2,
 \end{aligned}$$

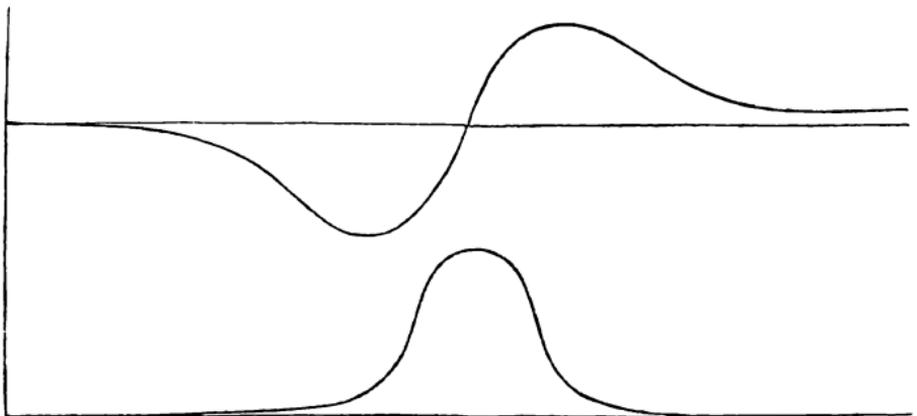
so dass die Lage der drei letztgenannten Punkte von  $G$  unabhängig bleibt. Andererseits sind  $D'$  und  $G^2$  bestimmt durch:

$$\begin{aligned}
 42) \quad D'L^2 &= \lambda''_{\mu^2} - \lambda_m^2 = \lambda_m^2 - \lambda'_{\mu^2} = 1/2 (\lambda''_{\mu^2} - \lambda'_{\mu^2}) \\
 G^2 L^2 &= \lambda'_g{}^2 + \lambda''_g{}^2 - 2\lambda''_{\mu^2}.
 \end{aligned}$$

Was schliesslich die Vorzeichen der Wurzeln betrifft, so gilt in dem ersten der Ausdrücke 40 das positive Zeichen für die kürzeren Wellen von  $\lambda = 0$  bis  $\lambda = \lambda''_{\mu}$ , das negative für die längeren von  $\lambda = \lambda''_{\mu}$  bis  $\lambda = \infty$ , in dem zweiten dagegen stets das positive Zeichen. Für die Mitte  $\lambda''_{\mu}$  erhält man:

$$\begin{aligned}
 a_{\mu}^2 - b_{\mu}^2 &= n_{\infty}^2 \\
 43) \quad 2a_{\mu} b_{\mu} &= \frac{1}{2} \left( -G \frac{\lambda''_{\mu}}{L} + \sqrt{G^2 \frac{\lambda''_{\mu}^2}{L^2} + 4D' n_{\infty}^2} \right);
 \end{aligned}$$

die bezügliche Ordinate  $b_{\mu}$  gibt das Maximum der Absorptionscurve.



In vorstehender Zeichnung soll Fig. 1 den Lauf der Refractionscurve, Fig. 2 den der Absorptionscurve veranschaulichen. Vergleicht man dieselbe mit meinen früheren

Darstellungen, die unter der Annahme  $G = 0$  construirt waren, so sind erstens die bisherigen Spitzen, welche an den Grenzen des Absorptionsstreifens die beiden Zweige mit negativem Differentialquotienten  $\frac{da}{d\lambda}$  durch einen solchen mit positivem Differentialquotienten verbunden, in continuirliche Krümmungen übergegangen. Zweitens beginnt die Absorptioncurve nicht mehr in diesen Grenzpunkten plötzlich mit gegebener Neigung, sondern es hat jetzt nicht bloss die Ordinate  $b$ , sondern auch der Differentialquotient  $\frac{db}{d\lambda}$  derselben einen continuirlichen Verfluss.

Verfolgt man die Abhängigkeit der Grössen  $D'$ ,  $L$  und  $G$  von der Dichtigkeit, so wird zunächst für den Gaszustand die dispergirende Kraft  $D'$  nahezu der Gasdichte proportional sein, die innere Wellenlänge  $L$ , deren Quadrat das Verhältniss der Deformationskraft und der Repulsionskraft der Moleküle misst, wird constant sein und der Reibungscoefficient  $G$  nur einen unwesentlichen Betrag haben, so dass die Absorptionsstreifen der Gase wenig breit sind. Dagegen kann die Schwärze und Schärfe dieser Streifen, die von dem Verhältniss  $D':G$  abhängt, mannigfach variiren. Alle diese Folgerungen werden von der Erfahrung bestätigt.

Mit zunehmender Dichte scheint dann  $D'$  rascher zu wachsen als diese selbst, so dass die Differenz:

$$\frac{\kappa}{\kappa'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$$

ansteigt. Es werden daher die Absorptionsstreifen fortwährend breiter. Aus der geringen anscheinend erfahrungsmässigen Abnahme von  $L$  schliesst man, dass  $\kappa'$  etwas rascher wächst als  $\varepsilon'$ .

Aehnlich langsam werden dann auch die Kräfte  $\gamma'$  und  $\kappa'$  sich gegen einander verschieben. Im grossen Ganzen also bieten einfache Substanzen im flüssigen und festen Zustand, abgesehen von der Verbreiterung der Streifen, die gleiche Erscheinung wie im gasförmigen.

Ist das Mittel schliesslich aus heterogenen Molekülen zusammengesetzt, so wird die gegenseitige Einwirkung derselben zwar schwerlich neue Glieder in die Dispersions-

formel hineinbringen, wohl aber die Werthe ihrer Constanten zum Theil beträchtlich abändern können.

Ein derartiges Beispiel bieten besonders Lösungen von Farbstoffen in wenig absorbirenden Lösungsmitteln. Ich will daher die einschlägigen Verhältnisse, welche sich zumal für die experimentelle Prüfung der Theorie verwerthen lassen, mittelst passender Näherungsformeln anschaulicher machen.

2. Sofern man nämlich  $D'$  als kleine Grösse betrachtet, so lassen sich die vollständigen Ausdrücke 39 oder 40 nach Potenzen derselben in Reihen entwickeln, welche je nach dem Werthe von  $\lambda$  mehr oder minder rasch convergiren. In der Praxis wird es oft gestattet sein, schon  $D'^2$  ausser Acht zu lassen. In diesem Fall kommt man für einfache Mittel am raschesten zum Ziel, wenn man im Zähler und Nenner des Ausdrucks  $X$  für  $n^2 = n_\infty^2 + (n^2 - n_\infty^2)$  wiederum den Ausdruck selber substituirt und bei Ausführung der Rechnung nur die  $D'$  enthaltenden Glieder beibehält, d. h. wenn man auf der rechten Seite desselben einfach  $n^2$  durch  $n_0^2$  ersetzt.

Für dioptrisch einfache Mittel erhält man daher sofort:

$$44) \quad a^2 - b^2 = n_\infty^2 + \frac{n_0^2 D' \left( \frac{\lambda^2}{L^2} - n_0^2 \right)}{\left( \frac{\lambda^2}{L^2} - n_0^2 \right)^2 + G^2 \frac{\lambda^2}{L^2}}$$

$$2ab = \frac{n_0^2 D' G \frac{\lambda}{L}}{\left( \frac{\lambda^2}{L^2} - n_0^2 \right)^2 + G^2 \frac{\lambda^2}{L^2}}$$

Mittelst Differentiation des ersten dieser Ausdrücke ergeben sich für die Wellenlängen des Maximums und Minimums von  $(a^2 - b^2)$  die Beziehungen:

$$45) \quad \frac{\lambda''_g{}^2 - \lambda'_g{}^2}{L^2} = 2Gn_0, \quad \frac{\lambda''_g{}^2 + \lambda'_g{}^2}{L^2} = 2n_0^2.$$

Ihnen entsprechen die Gränzwerte:

$$46) \quad a_g^2 - b_g^2 = n_\infty^2 \pm \frac{n_0^2 D'}{G(2n_0^2 \pm G)}.$$

Die zweite Curve gibt das Maximum der Absorption für die Wellenlänge:

$$45b) \quad \lambda = \lambda_{\mu} = n_0 L$$

und die zusammengehörigen Ordinaten werden:

$$47) \quad a_{\mu}^2 - b_{\mu}^2 = n_{\infty}^2, \quad 2a_{\mu} b_{\mu} = n_0 \frac{D'}{G}.$$

Zieht man die Constanten der Gleichungen 44 unter Einführung von  $\lambda_{\mu}$  in kürzere Bezeichnungen zusammen, so wandeln sich dieselben insbesondere für Mittel, für welche bereits  $b^2$  vernachlässigt werden darf, in sehr übersichtliche und zugleich elegante Beziehungen um.

3. Rükte ferner der Absorptionstreifen soweit in das ultraviolette Strahlungsgebiet, dass man im Nenner des Ausdruckes  $X$  die Grösse  $nL$  gegen die Wellenlängen des optischen Spectrums vernachlässigen dürfte, so erhalte man die Form:

$$n^2 = \frac{n_{\infty}^2 (\lambda^2 - \sqrt{-1 GL\lambda})}{(\lambda^2 - D'L^2) - \sqrt{-1 GL\lambda}}$$

aus welcher man ableitet:

$$48) \quad a^2 - b^2 = \frac{n_{\infty}^2}{1 - \frac{D'L^2}{\lambda^2}}, \quad 2ab = \frac{n_{\infty}^2 D' G \frac{L^3}{\lambda^3}}{\left(1 - D' \frac{L^2}{\lambda^2}\right)^2}$$

oder für kleine  $b$  nahezu:

$$48b) \quad a = n_{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} D' \frac{L^2}{\lambda^2}\right), \quad b = \frac{1}{2} n_{\infty} D' G \frac{L^3}{\lambda^3}.$$

Diese Formeln, von denen die erstere mit der abgekürzten Cauchy'schen zusammenfällt, genügen im allgemeinen für die schwächer dispergirenden sogenannten durchsichtigen Mittel. In denselben nimmt also die Stärke der Absorption im Verhältniss der dritten Potenz der Wellenlänge ab und ist für die gleiche Farbe nahezu der Dichtigkeit proportional.

4. Wird nun ein einfacher Farbstoff in einem derartigen Mittel gelöst, so werden für die Darstellung der resultirenden Dispersion die folgenden Glieder genügen:

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{D'_1 L_1^2 n^2}{\lambda^2 - \sqrt{-1} G_1 L_1 \lambda} + \frac{D'_2 L_2^2 n^2}{\lambda^2 - \sqrt{-1} G_2 L_2 \lambda - n^2},$$

von denen sich das erste rechter Hand auf das Lösungsmittel beziehen möge. Durch eine Rechnung, die ganz den beiden vorstehenden analog ist, gelangt man dann bei gleichen Vernachlässigungen zu folgenden Endresultaten:

$$49) \quad a^2 - b^2 = \alpha_\infty^2 + \frac{\alpha_0^2 \mathfrak{D}'_2 \left( \frac{\lambda^2}{L_2^2} - \alpha_0^2 \right)}{\left( \frac{\lambda^2}{L_2^2} - \alpha_0^2 \right)^2 + G_2^2 \frac{\lambda^2}{L_2^2}}$$

$$2ab = 2ab + \frac{\alpha_0^2 \mathfrak{D}'_2 G_2 \frac{\lambda}{L_2}}{\left( \frac{\lambda^2}{L_2^2} - \alpha_0^2 \right)^2 + G_2^2 \frac{\lambda^2}{L_2^2}}$$

Darin steht zur Abkürzung:

$$\alpha_\infty^2 = \frac{n_\infty^2}{1 - D'_1 \frac{L_1^2}{\lambda^2}}, \quad \alpha_0^2 = \frac{n_\infty^2 - D'_2}{1 - D'_1 \frac{L_1^2}{\lambda^2}}, \quad \mathfrak{D}'_2 = \frac{D'_2}{1 - D'_1 \frac{L_1^2}{\lambda^2}}$$

$$2ab = n_\infty^2 D'_1 G_1 \frac{L_1^3}{\lambda^3}.$$

Es verlaufen folglich die hyperbolischen Krümmungen der anomalen Dispersion nunmehr in ähnlicher Weise zu beiden Seiten der Curve des Lösungsmittels wie früher um eine horizontale Gerade<sup>1)</sup>. Dabei ist jedoch die Mitte des Absorptionsstreifens gegen das Roth hin verschoben, sofern jetzt:

$$50) \quad \lambda'_\mu = \alpha_0 L$$

$$\lambda_{\mu'}^2 - D'_1 L_1^2 = n_0^2 L_2^2. \quad 2)$$

Die Grenzwellenlängen und Grenzbrechungsexponenten ergeben sich näherungsweise mittelst Gl. 45 und 46, wenn man darin die constanten  $n_0$ ,  $n_\infty$  durch die variablen  $\alpha_0$ ,  $\alpha_\infty$  ersetzt. Bezüglich der Breite des Streifens gilt indess richtiger der erste der Ausdrücke 41, nämlich:

$$\frac{\lambda''_g - \lambda'_g}{L_2} = \sqrt{G_2^2 + 4D'_2}.$$

1) Vgl. die Berechnung der Kundt'schen Messungen (Pogg. Ann. CLX p. 460) sowie meine Mittheilung über eine Arbeit des Hrn. Sieben. (Wied. Ann. Beiblätter Bd. II. p. 79.)

2) Vgl. Kundt (Pogg. Ann. Jubelbd. p. 615 u. Ber. d. Münch. Akad. 1877) und Claes (Wied. Ann. III. p. 389).

Da nun der Erfahrung zufolge stark tingirende Substanzen wie Cyanin selbst in der äussersten Verdünnung, d. h. bei unendlich kleinem  $D'$ , Absorptionsbänder von beträchtlicher Ausdehnung zeigen, so hat für dieselben die Reibungsconstante  $G$  (oder  $\delta = \frac{\gamma'}{\alpha'}$ ) verhältnissmässig grosse Werthe. Wird dann die Concentration ( $C$ ) erhöht, so wird die Breite ( $B$ ) dieser Bänder nach dem parabolischen Gesetze:

$$B^2 = \alpha + \beta C$$

zunehmen. Die Differenz zwischen Minimum und Maximum der Brechung ist der Schwärze der Streifen proportional, und diese selbst steigt, so lange wenigstens die Extinction des Lösungsmittels gering ist, im gleichen Verhältniss mit der Concentration an. Es ist das in Uebereinstimmung mit den Messungen Vierordt's sowie mit dem von Bunsen und Melde aufgestellten Satz, dass die Absorptionsspectren von Lösungen das gleiche Aussehen behalten, wenn die Concentration der absorbirenden Schicht  $m$ -fach vergrössert und zugleich ihre Dicke  $m$ -fach verkleinert wird.

Ist endlich das absorbirende Mittel eine irgendwie zusammengesetzte anisotrope Krystallplatte, so sind in den Gleichungen X, resp. 39 und 44 L und  $G$  constant, dagegen  $n_0$ ,  $n_\infty$  und  $D'$  von der Orientirung der einfallenden Schwingung abhängig. Während folglich die Breite des Absorptionsstreifens nahezu ungeändert bleibt, wird sich seine Mitte je nach der Polarisationsrichtung verschieben. Ist dabei die Absorption beträchtlich, so bedingt diese verschiedene Lage desselben zugleich die sogenannte dichroitische oder pleochroitische Färbung, welche die Platte im directen weissen Lichte zeigt.

\* \* \*

Ich schliesse diese Arbeit mit drei Sätzen, die ich in die Form von Thesen kleide:

1) Es wäre einseitig, die Theorie der doppelten Brechung nur mittelst der Normalcylinder construiren zu wollen.

2) Das Studium der bewegten Mittel giebt auch für die katoptrischen und dioptrischen Verhältnisse der ruhenden Mittel so viele und so werthvolle Gesichtspunkte an die Hand, dass das fernere Ignoriren derselben nur Schaden bringt.

3) Keine dioptrische Theorie ist haltbar, welche nicht die (corrigirte Sellmeier'sche) Beziehung:  $n^2 - 1 = \frac{\sum m' A'^2}{m \mathcal{A}^2}$  zum Ausgang nimmt.

Bonn, im April 1878.

---

# ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande](#)

Jahr/Year: 1879

Band/Volume: [36](#)

Autor(en)/Author(s): Ketteler E.

Artikel/Article: [Ueber den Uebergang des Lichtes zwischen absorbirenden isotropen nnd anisotropen](#)

Mitteln und über die Mechanik der Schwingungen in  
denselben 14-56