Ueber die Anwendung des electrodynamischen Potentials zur Bestimmung der ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte.

Von

R. Clausius.

(Vorgetragen in der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde am 12. Juli 1880.)

§. 1.

Um die electrodynamischen Kräfte zwischen bewegten Electricitätstheilchen und die von ihnen gethane mechanische Arbeit auf bequeme Weise darzustellen, kann man bekanntlich das electrodynamische Potential anwenden, welches für diese Kräfte eine ähnliche Erleichterung der Rechnungen gewährt, wie das electrostatische Potential für die electrostatischen Kräfte. Seine Bedeutung ist dieselbe, wie die des electrostatischen Potentials. Wie nämlich das letztere dadurch definirt wird, dass die während einer Bewegung der Electricitätstheilchen von den electrostatischen Kräften gethane Arbeit gleich der dabei eingetretenen Abnahme des electrostatischen Potentials ist, so wird auch das electrodynamische Potential dadurch definirt, dass die von den electrodynamischen Kräften gethane Arbeit gleich der Abnahme des electrodynamischen Potentials ist. In der Form unterscheidet sich aber das electrodynamische Po-

tential dadurch wesentlich von dem electrostatischen, dass es nicht nur die Coordinaten, sondern auch die Geschwindigkeitscomponenten der Electricitätstheilchen enthält, und hiermit hängt zugleich ein Unterschied in dem Verfahren, mittelst dessen aus ihm die Kraftcomponenten abzuleiten sind, zusammen.

Will man nun diejenige Kraft, welche ein galvanischer Strom (der in Bewegung begriffen und veränderlich sein kann), auf ein bewegtes Electricitätstheilchen ausübt, mit Hülfe des electrodynamischen Potentials bestimmen, so darf man das letztere im Allgemeinen nicht so bilden, dass man für jedes Stromelement die beiden Potentialausdrücke, welche sich auf die in dem betreffenden Leiterelemente befindliche positive und negative Electricität beziehen, einfach zu einer algebraischen Summe vereinigt, und dann das Stromelement als ein Ganzes behandelt, sondern man muss vielmehr die beiden einzelnen Electricitätsmengen besonders betrachten, da es sich nicht bloß darum handelt, welchen Bewegungszustand sie in dem betreffenden Leiterelemente haben, sondern auch darum, wie ihr Bewegungszustand sich beim Uebergange aus diesem Leiterelemente in die anliegenden ändert, was für die beiden Electricitäten in verschiedener Weise stattfindet. Dadurch werden natürlich die Formeln etwas complicirt. In gewissen Fällen aber, insbesondere in dem Falle, wo der Strom, dessen Einwirkung auf ein bewegtes Electricitätstheilchen man bestimmen will, geschlossen ist, vereinfacht sich die Sache in der Weise, dass man ausser der Stromintensität nur die Lage und Richtung der Stromelemente zu betrachten hat, ohne auf die in ihnen befindlichen beiden Electricitäten besondere Rücksicht zu nehmen. Dadurch gelangt man dann zu Formeln von ausserordentlicher Einfachheit, die für die Bestimmung der ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte grosse Erleichterungen gewähren und das ganze darauf bezügliche Gebiet von mathematischen Entwicklungen sehr übersichtlich machen.

Diese Formeln will ich mir erlauben, nachstehend zu entwickeln, und zwar nicht nur aus dem von mir aufge-

stellten electrodynamischen Grundgesetze, sondern auch aus dem Riemann'schen und Weber'schen Grundgesetze. Man wird sehen, dass die den drei Grundgesetzen entsprechenden Resultate bei dieser Formulirung nur durch einzelne, leicht bestimmbare Glieder von einander abweichen, und sich daher sehr bequem unter einander vergleichen lassen.

§. 2.

Eine bewegte Electricitätsmenge, auf deren Grösse es nicht ankommt, und die wir daher als eine Electricitätseinheit annehmen wollen, befinde sich zur Zeit t im Punkte x, y, z und habe die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Ferner sei ein galvanischer Strom s' gegeben, welcher ebenfalls in Bewegung sein kann. Den Strom wollen wir vorläufig der Einfachheit wegen als einen linearen annehmen, da hierin keine wesentliche Beschränkung liegt, indem man sich einen nicht linearen Strom immer in eine unendliche Anzahl von unendlich dünnen Stromfäden, die sich als lineare Ströme ansehen lassen, zerlegt denken kann.

Betrachten wir nun in dem Leiter des Stromes zunächst ein einzelnes Theilchen der strömenden Electricität, so hat dieses eine doppelte Bewegung, erstens die Strömungsbewegung in dem Leiter und zweitens die Bewegung des Leiters selbst. Um die durch diese beiden Bewegungen verursachten Veränderungen der in Betracht kommenden Grössen von einander zu unterscheiden, wollen wir, ähnlich wie ich es schon in einer früheren Untersuchung¹⁾ gethan habe, folgende Bezeichnungsweise einführen. Die Coordinaten eines im Leiter festen Punktes betrachten wir einfach als Functionen der Zeit t . Zur Bestimmung der

1) Ueber die Behandlung der zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindenden ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte nach dem electrodynamischen Grundgesetze, Verhandl. des naturhist. Vereins der preuss. Rheinl. u. Westf. Bd. XXXIII 1876, Wied. Ann. Bd. 1 und Clausius, Mechan. Wärmetheorie Bd. II, Abschn. X.

Coordinaten des im Leiter strömenden Electricitätstheilchens aber nehmen wir noch eine zweite veränderliche zu Hülfe, welche die Lage des Theilchens in dem Leiter bestimmt, nämlich den auf der Leitercurve gemessenen Abstand s' des Theilchens von irgend einem Anfangspunkte. Demnach ist jede Coordinate des Theilchens als Function von t und s' zu betrachten, wobei s' selbst wieder als Function von t angesehen werden kann. Seien also x' , y' , z' die Coordinaten des Electricitätstheilchens zur Zeit t , so zerfällt der vollständige Differentialcoefficient jeder dieser Coordinaten nach t in zwei Glieder, welche die partiellen Differentialcoefficienten nach t und s' enthalten, so dass man für jede Coordinate eine Gleichung von folgender Form erhält:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial x'}{\partial s'} \frac{ds'}{dt}.$$

Für den Differentialcoefficienten $\frac{ds'}{dt}$, welcher die Strömungsgeschwindigkeit darstellt, wollen wir ein einfaches Zeichen einführen, und zwar wollen wir die Strömungsgeschwindigkeit der positiven Electricität mit c' und die der negativen Electricität mit $-c'_1$ bezeichnen, wobei es uns dann unbenommen bleibt, je nach der speciellen Annahme, welche wir über das Verhalten der beiden Electricitäten machen, die Grössen c' und c'_1 als untereinander gleich zu betrachten, oder eine derselben gleich Null zu setzen, oder ihnen irgend welche von einander verschiedene Werthe zuzuschreiben. Mit Hülfe dieser Bezeichnung erhält man statt der vorigen Gleichung folgende zwei auf die positive und negative Electricität bezügliche Gleichungen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \\ \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} - c'_1 \frac{\partial x'}{\partial s'}. \end{array} \right.$$

Bei etwaiger zweiter Differentiation nach t ist zu berücksichtigen, dass auch die Grössen c' und c'_1 wieder als Functionen von t und s' zu behandeln sind, indem sowohl an einem bestimmten Punkte des Leiters die Strö-

mungsgeschwindigkeit sich mit der Zeit ändern kann, wenn die Stromintensität veränderlich ist, als auch zu einer bestimmten Zeit die Strömungsgeschwindigkeit an verschiedenen Punkten des Leiters verschieden sein kann, wenn der Leiter nicht überall gleichen Querschnitt und gleiche Beschaffenheit hat.

Der Abstand r zwischen dem betrachteten im Leiter s' strömenden Electricitätstheilchen und der im Punkte x, y, z befindlichen Electricitätseinheit ist ebenfalls als Function von t und s' anzusehen, und der vollständige Differentialcoefficient von r nach t ist also für positive und negative strömende Electricität in folgenden Weisen zu bilden:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + c' \frac{\partial r}{\partial s'} \\ \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} - c' \frac{\partial r}{\partial s'}. \end{array} \right.$$

Hierin umfasst der partielle Differentialcoefficient $\frac{\partial r}{\partial t}$ die beiden Veränderungen, welche r einerseits durch die Bewegung der Electricitätseinheit und andererseits durch die Bewegung des das strömende Electricitätstheilchen enthaltenden Leiterelementes ds' erleidet, während $\frac{\partial r}{\partial s'}$ sich auf die Veränderung bezieht, welche r durch die in dem Leiter stattfindende Strömungsbewegung des Electricitätstheilchens erleidet.

Unter Anwendung dieser Bezeichnungsweise möge nun die x -Componente der Kraft bestimmt werden, welche ein Stromelement ds' auf die bewegte Electricitätseinheit ausübt, und zwar zunächst nach dem von mir aufgestellten electrodynamischen Grundgesetze, weil dieses für die Behandlung am bequemsten ist, und die einfachsten Ausdrücke liefert, zu denen man dann, um die den beiden anderen Grundgesetzen entsprechenden Ausdrücke zu erhalten, noch gewisse Glieder hinzufügen muss.

§. 3.

Nach meinem Grundgesetze wird die x -Componente der Kraft, welche ein bewegtes Electricitätstheilchen e von

einem anderen bewegten Electricitätstheilchen e' erleidet, durch folgende Formel dargestellt:

$$ee' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[-1 + k \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right) \right] - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right\},$$

welche sich, wenn wir eine Summe von drei der Form nach gleichen Gliedern, welche sich auf die drei Coordinatenrichtungen beziehen, dadurch andeuten, dass wir nur das auf die x -Richtung bezügliche Glied hinschreiben und davor das Summenzeichen setzen, etwas kürzer so schreiben lässt:

$$ee' \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-1 + k \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right].$$

Wir nehmen nun im Punkte x', y', z' ein Stromelement ds' an, in welchem die positive Electricitätsmenge $h'ds'$ mit der Geschwindigkeit c' und die negative Electricitätsmenge $-h'ds'$ mit der Geschwindigkeit $-c'_1$ strömt, und wollen zunächst von derjenigen Kraft, welche die positive Electricitätsmenge $h'ds'$ auf die im Punkte x, y, z gedachte bewegte Electricitätseinheit ausübt, die x -Componenten bestimmen. Dazu haben wir in dem vorigen Ausdrucke e und e' durch 1 und $h'ds'$ zu ersetzen, wodurch wir erhalten:

$$ds' \left[h' \frac{\partial}{\partial x} \left(-1 + k \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - kh' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right].$$

Das hierin vorkommende Product

$$h' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right)$$

können wir in eine andere Form bringen, und da die entsprechende Umformung auch sonst häufig anzuwenden ist, so wollen wir sie gleich etwas allgemeiner durchführen. Sei F irgend eine Grösse, welche in der Weise, wie es im vorigen § von den auf die positive strömende Electricität bezüglichen Grössen gesagt wurde, von t und s' abhängt, dann kann man, gemäss (1) und (2) schreiben:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + c' \frac{\partial F}{\partial s'}$$

oder nach Multiplication mit h' :

$$h' \frac{dF}{dt} = h' \frac{\partial F}{\partial t} + h' c' \frac{\partial F}{\partial s'}$$

und dieses kann man umändern in:

$$h' \frac{dF}{dt} = h' \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (h' c' F)}{\partial s'} - F \frac{\partial (h' c')}{\partial s'}$$

Hierin lässt sich der Differentialcoefficient $\frac{\partial (h' c')}{\partial s'}$ durch einen

anderen ersetzen. Das Leiterelement ds' ist von zwei Querschnitten begrenzt, welche den Bogenlängen s' und $s' + ds'$ entsprechen. Die beiden Electricitätsmengen, welche während der Zeit dt durch diese beiden Querschnitte strömen, und von denen die erste in das Element ds' hinein und die andere aus ihm herausströmt, werden dargestellt durch

$$h' c' dt \text{ und } \left(h' c' + \frac{\partial (h' c')}{\partial s'} ds' \right) dt,$$

und daraus folgt, dass die während der Zeit dt stattfindende Zunahme der in ds' befindlichen positiven Electricitätsmenge durch

$$- \frac{\partial (h' c')}{\partial s'} ds' dt$$

dargestellt wird. Dieselbe Zunahme kann aber andererseits auch durch

$$\frac{\partial h'}{\partial t} ds' dt$$

bezeichnet werden, und wir erhalten somit die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial h'}{\partial t} = - \frac{\partial (h' c')}{\partial s'}$$

Dadurch geht die obige Gleichung über in

$$h' \frac{dF}{dt} = h' \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (h' c' F)}{\partial s'} + F \frac{\partial h'}{\partial t},$$

oder, nach Zusammenziehung des ersten und letzten Gliedes an der rechten Seite, in:

$$(4) \quad h' \frac{dF}{dt} = \frac{\partial (h' F)}{\partial t} + \frac{\partial (h' c' F)}{\partial s'}$$

Kehren wir nun zu dem Ausdrucke der x -Componen-
te der von der positiven Electricitätsmenge $h'ds'$ auf
die Electricitätseinheit ausgeübten Kraft zurück und wenden
die vorige Umformungsweise auf das Glied $h' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right)$
an, worin $\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt}$ die Grösse ist, welche vorher allgemein mit F
bezeichnet wurde, so geht der Ausdruck über in:

$$ds' \left[h' \frac{\partial}{\partial x} \left(-1 + k \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h' dx'}{r dt} \right) - k \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c' dx'}{r dt} \right) \right].$$

Hierin möge endlich noch der Differentialcoefficient $\frac{dx'}{dt}$
gemäss (1) in seine beiden Theile zerlegt werden, dann
nimmt der Ausdruck folgende Form an:

$$ds' \left\{ h' \frac{\partial}{\partial x} \left[-1 + k \sum \frac{dx}{dt} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right] - k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h' \partial x'}{r \partial t} + \frac{h' c'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ \left. - k \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' c'^2}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right\}.$$

In entsprechender Weise können wir nun auch die
 x -Componenten derjenigen Kraft ausdrücken, welche die
in dem Elemente ds' enthaltene negative Electricitätsmenge
 $-h'ds'$, deren Strömungsgeschwindigkeit $-c'_1$ ist, auf die
Electricitätseinheit ausübt. Dazu haben wir in dem vorigen
Ausdrucke h' durch $-h'$ und c' durch $-c'_1$ zu ersetzen,
wodurch wir erhalten:

$$ds' \left\{ -h' \frac{\partial}{\partial x} \left[-1 + k \sum \frac{dx}{dt} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} - c'_1 \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right] - k \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{h' \partial x'}{r \partial t} + \frac{h' c'_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ \left. - k \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{h' c'^2_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right\}.$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke stellt die x -Com-
ponente der Kraft dar, welche das Stromelement
 ds' im Ganzen auf die Electricitätseinheit ausübt.

Bei der Bildung dieser Summe heben sich mehrere Glieder auf und andere gestatten dadurch eine Vereinfachung, dass das Product $h'(c'+c'_1)$ durch das Zeichen i' , welches die Stromintensität in ds' bedeutet, ersetzt werden kann, woraus zugleich folgt, dass das Product $h'(c'^2 - c'_1^2)$, welches man auch in der Form $h'(c'+c'_1)(c'-c'_1)$ schreiben kann, sich durch $i'(c'-c'_1)$ ersetzen lässt. Man erhält daher, wenn man die x -Komponente der Kraft, welche das Stromelement ds' auf die Electricitätseinheit ausübt, mit $\mathfrak{x}ds'$ bezeichnet, die Gleichung:

$$(5) \quad \mathfrak{x} = k \left[i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \frac{dx \partial x'}{dt \partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{i'(c'-c'_1)}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].$$

§. 4.

Es möge nun in derselben Weise das Riemann'sche Grundgesetz behandelt werden, was im Anschlusse an das Vorige sehr leicht ist.

Die x -Komponente der Kraft, welche ein bewegtes Electricitätstheilchen e von einem bewegten Electricitätstheilchen e' erleidet, wird nach Riemann durch folgende Formel ausgedrückt:

$$ee' \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[-1 - \frac{k}{2} \sum \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)^2 \right] + k \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right) \right] \right\}.$$

Diese Formel lässt sich auch folgendermaassen schreiben:

$$ee' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left(-1 + k \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right] + ee' k \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) \right\}.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes stimmt vollständig mit dem Ausdrucke überein, welcher nach meinem Grundgesetze die betreffende Kraftcomponente darstellt, und wir können somit für dieses Glied die schon im vorigen § ausgeführten Entwicklungen benutzen, und brauchen nur noch für das zweite Glied die Entwicklungen auszuführen.

Zur Bestimmung der von einem Stromelement ds' auf eine bewegte Electricitätseinheit ausgeübten Kraft betrachten wir in dem Elemente zuerst wieder die positive Electricitätsmenge $h'ds'$, welche mit der Geschwindigkeit c' strömt. Um für diese Electricitätsmenge den Theil der Kraftcomponente auszudrücken, welcher dem zweiten Gliede des vorigen Ausdruckes entspricht, haben wir in demselben e und e' durch 1 und $h'ds'$ zu ersetzen, wodurch wir erhalten:

$$k ds' \left\{ -\frac{h' \partial}{2 \partial x} \frac{1}{r} \Sigma \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 \right] + h' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) \right\}.$$

Hierin setzen wir gemäss (1) und (2):

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) + c' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right),$$

wodurch der Ausdruck übergeht in

$$k ds' \left\{ -\frac{h' \partial}{2 \partial x} \frac{1}{r} \Sigma \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 + 2c' \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} + c'^2 \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right)^2 \right] + h' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) + h' c' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) \right\}.$$

Der entsprechende Ausdruck für die negative Electricitätsmenge $-h'ds'$, welche mit der Geschwindigkeit $-c_1$ strömt, lautet:

$$k ds' \left\{ \frac{h' \partial}{2 \partial x} \frac{1}{r} \Sigma \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 - 2c_1 \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} + c_1^2 \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right)^2 \right] - h' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) + h' c_1 \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) \right\}.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhält man:

$$k ds' \left\{ -i' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \Sigma \left[\frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{c' - c_1}{2} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right)^2 \right] + i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) \right\},$$

wofür man, wegen der selbstverständlichen Gleichung

$$\Sigma \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right)^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial s'} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial s'} \right)^2 = 1,$$

und weil i' von s' unabhängig ist, und daher im letzten Gliede mit unter das Differentiationszeichen gesetzt werden darf, auch schreiben kann:

$$k ds' \left[-i' \frac{\partial}{\partial x} \left(\Sigma \frac{\partial x'}{\partial t'} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{c' - c'_1}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{i'}{r} \frac{dx}{dt} \right) \right].$$

Dieses ist der aus dem zweiten Gliede des obigen Ausdruckes hervorgehende Bestandtheil der x -Componente der Kraft, welche das Stromelement ds' auf eine bewegte Electricitätseinheit nach dem Riemann'schen Grundgesetze ausübt. Der aus dem ersten Gliede hervorgehende Bestandtheil stimmt, wie schon gesagt, mit dem nach meinem Grundgesetze geltenden Werthe der Kraftcomponente überein, welchen wir mit $\gamma ds'$ bezeichnet und im vorigen §. bestimmt haben. Bezeichnen wir daher den ganzen nach dem Riemann'schen Grundgesetze geltenden Werth der Kraftcomponente mit $\gamma_1 ds'$, so erhalten wir:

$$(6) \quad \gamma_1 = \gamma + k \left[-i' \frac{\partial}{\partial x} \left(\Sigma \frac{\partial x'}{\partial t'} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{c' - c'_1}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{i'}{r} \frac{dx}{dt} \right) \right].$$

§. 5.

Es muss nun drittens noch das Weber'sche Grundgesetz in gleicher Weise behandelt werden.

Nach diesem Grundgesetze findet zwischen zwei bewegten Electricitätstheilchen e und e' eine Abstossung von der Stärke

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{k}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + kr \frac{d^2 r}{dt^2} \right]$$

statt, und hieraus erhält man die x -Componente der Kraft, welche das Theilchen e erleidet, durch Multiplication mit $\frac{x-x'}{r}$, also:

$$ee' \frac{x-x'}{r^3} \left[1 - \frac{k}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + kr \frac{d^2 r}{dt^2} \right].$$

Indem wir diesen Ausdruck auf die im Stromelemente ds' mit der Geschwindigkeit c' strömende Electricitätsmenge $h'ds'$ und auf die bewegte Electricitätseinheit anwenden, haben wir zunächst wieder e und e' durch 1 und $h'ds'$ zu ersetzen. Alsdann wollen wir, gemäss (4) folgende Umformung vornehmen:

$$h' \frac{d^2 r}{dt^2} = h' \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(h' \frac{dr}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(h' c' \frac{dr}{dt} \right),$$

und ausserdem durchweg setzen:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + c' \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Dann kommt:

$$ds' \frac{x-x'}{r^3} \left\{ h' - \frac{k}{2} \left[h' \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + 2h' c' \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} + h' c'^2 \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + kr \frac{\partial}{\partial t} \left(h' \frac{\partial r}{\partial t} + h' c' \frac{\partial r}{\partial s'} \right) + kr \frac{\partial}{\partial s'} \left(h' c' \frac{\partial r}{\partial t} + h' c'^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \right) \right\}.$$

Ebenso erhalten wir für die mit der Geschwindigkeit $-c'_1$ strömende negative Electricitätsmenge $-h'ds'$:

$$ds' \frac{x-x'}{r^3} \left\{ -h' - \frac{k}{2} \left[-h' \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + 2h' c'_1 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} - h' c'_1{}^2 \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + k \frac{\partial}{\partial t} \left(-h' \frac{\partial r}{\partial t} + h' c'_1 \frac{\partial r}{\partial s'} \right) + kr \frac{\partial}{\partial s'} \left(h' c'_1 \frac{\partial r}{\partial t} - h' c'_1{}^2 \frac{\partial r}{\partial s'} \right) \right\}.$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke stellt die x -Componente der Kraft dar, welche das ganze Stromelement ds' auf die Electricitätseinheit nach dem Weber'schen Grundgesetze ausüben muss. Wird diese mit $\mathfrak{x}_2 ds'$ bezeichnet, so kommt:

$$(7) \mathfrak{x}_2 = k \frac{x-x'}{r^3} \left\{ -i' \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} + r \frac{\partial}{\partial t} \left(i' \frac{\partial r}{\partial s'} \right) - \frac{1}{2} i' (c' - c'_1) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right. \\ \left. + r \frac{\partial}{\partial s'} \left[i' \frac{\partial r}{\partial t} + i' (c' - c'_1) \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \right\}.$$

Dieser Ausdruck von $\mathfrak{x}_2$ lässt sich, ähnlich wie der obige Ausdruck von $\mathfrak{x}_1$, in eine solche Form bringen, dass er als Summe von $\mathfrak{x}$ und einigen hinzugefügten Gliedern erscheint. Wir wollen dazu die vorige Gleichung mit k dividiren, dann an der rechten Seite die angedeutete Mul-

tiplication mit $\frac{x-x'}{r^3}$ ausführen und zugleich mit einigen Gliedern noch eine Zerlegung vornehmen. Die so entstehenden Glieder wollen wir durch darüber geschriebene Zahlen numeriren, um sie nachher durch die Nummern einfach bezeichnen zu können:

$$\frac{\mathfrak{z}}{k} = -i' \frac{x-x'}{r^3} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{x-x'}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(i' \frac{\partial r}{\partial s'} \right) - \frac{i'(c'-c'_1)}{2} \frac{x-x'}{r^3} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \\ + i' \frac{x-x'}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s'} + \frac{x-x'}{r^2} \frac{\partial}{\partial s'} \left[i' (c' - c'_1) \frac{\partial r}{\partial s'} \right].$$

In ähnlicher Weise wollen wir den Ausdruck von $\mathfrak{z}$, welcher in Gleichung (5) gegeben ist, behandeln, dabei aber das erste Glied noch besonders umformen. Man kann nämlich setzen:

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial t \partial s'} = 2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s'}$$

und zugleich erhält man aus $r^2 = \sum (x-x')^2$:

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial t \partial s'} = -2 \sum \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} - 2 \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x-x') \frac{\partial x'}{\partial t}.$$

Aus der Vereinigung dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\sum \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} = -\frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} - r \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s'} - \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x-x') \frac{\partial x'}{\partial t}.$$

Die hier an der rechten Seite stehende algebraische Summe wollen wir in der Gleichung (5) für $\sum \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'}$ einsetzen. Zugleich wollen wir die sämtlichen Vorzeichen dieser Gleichung umkehren, so dass sie nach der Division durch k

die Grösse $-\frac{\mathfrak{z}}{k}$ bestimmt, und zwar in folgender Weise:

$$-\frac{\mathfrak{z}}{k} = -i' \frac{x-x'}{r^3} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} - i' \frac{x-x'}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s'} - i' \frac{x-x'}{r^3} \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x-x') \frac{\partial x'}{\partial t} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left(i' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + \frac{i'}{r} \frac{\partial^2 x'}{\partial t \partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \left(i' \frac{\partial x'}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{i'(c'-c'_1)}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right).$$

Die in diesen beiden Ausdrücken vorkommenden zwölf Glieder bilden zusammen den Ausdruck von $\frac{\xi_2 - \xi}{k}$, und es kommt nun darauf an, denselben in eine möglichst einfache und für die weiteren Rechnungen zweckmässige Form zu bringen, was durch geeignete Gruppierung der Glieder geschehen kann. Man erhält nämlich, wenn man die Glieder kurz durch ihre Nummern andeutet:

$$4 + 7 = 0$$

$$1 + 6 + 2 + 9 = - \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x - x') \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \right) \right]$$

$$8 + 10 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i'}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} \right]$$

$$3 + 5 + 12 = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i'(c' - c'_1)}{2r} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial s'} \left[i'(c' - c'_1) \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial s'} \right].$$

Hiermit sind ausser dem 11ten Gliede, welches noch besonders zu berücksichtigen ist, alle Glieder in Rechnung gebracht, und es kommt daher im Ganzen:

$$\begin{aligned} \frac{\xi_2 - \xi}{k} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i'}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i'(c' - c'_1)}{2r} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] \\ &- \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x - x') \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{i' \partial x'}{r \partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial s'} \left[i'(c' - c'_1) \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial s'} \right], \end{aligned}$$

und da alle hierin vorkommenden Glieder Differentialcoefficienten nach x oder s' sind, so lassen sie sich in zwei Differentialcoefficienten zusammenfassen. Aus dieser Gleichung erhalten wir den gesuchten Ausdruck von ξ_2 , nämlich:

$$\begin{aligned} (8) \quad \xi_2 &= \xi + k \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i'}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{i'(c' - c'_1)}{2r} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] \\ &- k \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x - x') \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \right) - \frac{i' \partial x'}{r \partial t} + i'(c' - c'_1) \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial s'} \right]. \end{aligned}$$

§. 6.

In den drei vorstehenden Paragraphen ist die x -Komponente der Kraft, welche ein Stromelement ds' auf eine bewegte Electricitätseinheit ausübt, aus den drei Grundgesetzen abgeleitet. In jedem der drei unter (5), (6) und (8) gegebenen Ausdrücke findet sich ein Glied, welches

ein Differentialcoefficient nach s' ist, und welches daher bei der Integration über einen geschlossenen Strom s' verschwindet. Die von einem geschlossenen Strome oder auch von einem Systeme geschlossener Ströme ausgeübte Kraft wird daher durch Ausdrücke von vereinfachter Form dargestellt, welche wir jetzt näher betrachten wollen.

Wir gehen zunächst von dem in Gleichung (5) gegebenen Ausdrücke aus. Indem wir diesen mit ds' multipliciren, und dann über einen geschlossenen Strom oder ein System von geschlossenen Strömen integriren, erhalten wir die x -Componente derjenigen Kraft, welche der Strom oder das Stromsystem nach meinem Grundgesetze auf eine bewegte Electricitätseinheit ausüben muss. Bezeichnen wir diese x -Componenten mit $\mathfrak{X}$, so kommt:

$$(9) \quad \mathfrak{X} = k \int i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds' - k \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds'.$$

In dieser Gleichung ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die Länge des geschlossenen Leiters s' unverändert bleibe, so dass diejenigen Elemente ds' , welche zu einer gegebenen Zeit den geschlossenen Leiter bilden, ihn auch für die folgende Zeit bilden, und kein Element ein- oder austrete. In der Wirklichkeit können aber auch solche Fälle vorkommen, wo die Länge des Leiters sich ändert, z. B. wenn an einer Stelle ein Gleiten zweier Theile des Leiters auf einander stattfindet und bewirkt, dass Leiterstücke, welche vorher ausserhalb der Schliessung lagen, nachher innerhalb derselben liegen, oder umgekehrt. In den bei diesem Vorgange hinzukommenden Leitertheilen beginnt der Strom und in den ausscheidenden hört er auf, und durch diese Aenderung der Stromintensität in einzelnen Leitertheilen wird eine Kraft bedingt, welche mit in Rechnung gebracht werden muss. Freilich sind wegen der grossen Geschwindigkeit, mit welcher das Anfangen und Aufhören des Stromes sich vollzieht, die Leitertheile, in welchen es in jedem Augenblicke stattfindet, sehr klein, dafür ist aber auch in ihnen der Differentialcoefficient $\frac{\partial i'}{\partial t}$

sehr gross, und dadurch kann der betreffende Theil der Kraft doch einen beträchtlichen Werth annehmen. Es fragt sich nun, wie man diesen Theil der Kraft in der Formel mit ausdrücken kann.

Wir wollen die Stelle, an welcher das Eintreten (resp. Austreten) von Leiterstücken stattfindet, als Anfangs- und Endpunkt des geschlossenen Leiters s' wählen, so dass ein neu eintretendes Leiterstück sich gerade am Ende des Leiters anfügt. Wenn wir die Länge des Leiters zur Zeit t mit s'_1 bezeichnen, so stellt sich das während des Zeitelementes hinzukommende Leiterelement durch $\frac{ds'_1}{dt} dt$ dar.

Bezeichnen wir ferner die sehr kurze Zeit, welche zur Entstehung des Stromes in einem in die Schliessung eingetretenen Leiterstücke erforderlich ist, mit τ , so ist während der Verlängerung des Leiters ein am Ende desselben befindliches Stück von der Länge $\frac{ds'_1}{dt} \tau$ dasjenige, in welchem das Entstehen des Stromes stattfindet. Dieses Entstehen ist ein während der Zeit τ stattfindendes Anwachsen von Null bis zu dem für die übrige Leitung geltenden Werthe i' .

Der Mittelwerth des Differentialcoefficienten $\frac{\partial i'}{\partial t}$ in diesem Stücke während der Zeit τ ist somit gleich $\frac{i'}{\tau}$, und ebenso können wir den entsprechenden Mittelwerth des Differentialcoefficienten $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)$ durch $\frac{1}{\tau} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)_1$ darstellen, worin der an die Klammer gesetzte Index 1 andeuten soll, dass die in der Klammer stehenden Grössen r und $\frac{\partial x'}{\partial s'}$ die zu s'_1 gehörigen Werthe haben.

Um nun in unserer Formel das Entstehen des Stromes in diesem kleinen Leiterstücke ebenfalls in Rechnung zu bringen, haben wir zu dem in der Formel vorkommenden zweiten Integrale, welches, wenn wir die Grenzen auch mit hinschreiben, die Form

$$\int_0^{s'_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds'$$

hat, eine Grösse hinzuzufügen, welche das Product aus dem eben bestimmten mittleren Differentialcoefficienten und aus der Länge des betreffenden Leiterstückes ist, also

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)_1 \frac{ds'_1}{dt} \tau = \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)_1 \frac{ds'_1}{dt}.$$

Es ist somit an die Stelle des vorstehenden Integrales folgende Summe zu setzen:

$$\int_0^{s'_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds' + \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right)_1 \frac{ds'_1}{dt}.$$

Diese Summe ist aber nichts anderes, als der nach t genommene Differentialcoefficient des Integrales

$$\int_0^{s'_1} \frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds',$$

wenn darin nicht nur die unter dem Integralzeichen stehende Grösse, sondern auch die obere Grenze s'_1 als Function von t betrachtet wird. Die mit dem obigen Integrale vorzunehmende Aenderung besteht also nur darin, dass die dort unter dem Integralzeichen angedeutete Differentiation vor dem Integralzeichen anzudeuten ist. Dabei ist noch zu bemerken, dass das über die ganze geschlossene Leitung ausgedehnte Integral nicht, wie ein auf ein einzelnes Leiterelement bezüglicher Ausdruck, als Function von t und s' , sondern nur als Function von t anzusehen ist, und dass daher bei der Andeutung der Differentiation statt des runden ∂ in diesem Falle das aufrechte d angewandt werden kann, so dass der Ausdruck lautet:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s'_1} \frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'.$$

Demnach geht die Gleichung (9) unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Länge des Leiters sich ändern kann, in folgende Gleichung über, in welcher wir die Grenzen des Integrales, deren Hinschreibung für die vorstehende Betrachtung zweckmässig war, jetzt der Einfachheit wegen wieder fortlassen wollen, weil sie sich, nachdem einmal gesagt ist, dass alle Integrale über den ganzen geschlossenen Leiter s' auszudehnen sind, von selbst verstehen:

$$(10) \quad \mathfrak{X} = k \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{i'}{r} \Sigma \frac{dx \partial x'}{dt \partial s'} ds' - k \frac{d}{dt} \int \frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'.$$

Ebenso erhält man, wenn man diejenigen Werthe, welche dieselbe Kraftcomponente nach dem Riemann'schen und dem Werber'schen Grundgesetze annehmen müsste, mit $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ bezeichnet, aus den Gleichungen (6) und (8) folgende Gleichungen:

$$(11) \quad \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} - k \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{i'}{r} \left(\Sigma \frac{\partial x' \partial x'}{\partial t \partial s'} + \frac{c' - c'_1}{2} \right) ds'$$

$$(12) \quad \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X} + k \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{i'}{r} \left[\frac{\partial}{\partial s'} \Sigma (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{c' - c'_1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] ds'.$$

Ganz entsprechende Ausdrücke, wie sie hier für die x -Componente der Kraft abgeleitet sind, gelten natürlich auch für die y - und z -Componente.

§. 7.

Die auf die drei Coordinatenrichtungen bezüglichen drei Kraftcomponenten lassen sich nun in der schon in §. 1 besprochenen Weise auf Eine Grösse zurückführen, aus der sie durch Differentiation abgeleitet werden können. Es ist dieses das electrodynamische Potential des geschlossenen Stromes oder Stromsystemes auf die im Punkte x, y, z befindliche bewegte Electricitätseinheit. Da nun bei den von der Bewegung unabhängigen Kräften dasjenige Potential eines gegebenen Agens, welches sich auf eine in einem Punkte concentrirt gedachte Einheit desselben Agens bezieht, nach Green die Potentialfunction genannt wird, so wollen wir dieselbe Unterschei-

dung auch hier einführen, und das electrodynamische Potential eines geschlossenen Stromes oder Stromsystemes, sofern es sich auf eine in einem Punkte concentrirt gedachte Einheit von Electricität bezieht, die electrodynamische Potentialfunction nennen.

Diese electrodynamische Potentialfunction unterscheidet sich, wie in §. 1 erwähnt wurde, schon äusserlich von jener Green'schen Potentialfunction, welche sich auf solche Kräfte bezieht, die von der Bewegung unabhängig sind, Sie enthält nämlich nicht nur den Coordinaten x, y, z der Electricitätseinheit, sondern auch ihre Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Was ferner die Operation anbetrifft, mittelst deren aus der electrodynamischen Potentialfunction die Kraftcomponenten abzuleiten sind, so ist dieses dieselbe Operation, wie die, welcher nach Lagrange die in allgemeinen Coordinaten ausgedrückte lebendige Kraft bei der Ableitung der Kraftcomponenten zu unterwerfen ist. Sei nämlich die electrodynamische Potentialfunction mit Π und die x -Componente der Kraft mit $\mathfrak{X}$ bezeichnet, so ist folgende Gleichung zu bilden:

$$(13) \quad \mathfrak{X} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{dx}{dt}} \right).$$

Es kommt nun darauf an, die den drei Grundgesetzen entsprechenden Formen der Potentialfunction eines geschlossenen Stromes zu bilden.

Nach meinem Grundgesetze wird das electrodynamische Potential zweier in Punkten concentrirt gedachter Electricitätsmengen e und e' auf einander dargestellt durch

$$k \frac{ee'}{r} \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt}.$$

Wendet man diese Formel in der Weise an, dass man für e die Electricitätseinheit und für e' nach einander die beiden in einem Stromelemente ds' enthaltenen Electricitätsmengen $h'ds'$ und $-h'ds'$ setzt, und in Bezug auf die Geschwindigkeitscomponenten der letzteren den Unterschied

berücksichtigt, dass sie mit den Geschwindigkeiten c' und c'_1 in dem Leiter nach entgegengesetzten Richtungen strömen, während sie die etwaige Bewegung des Leiters gemeinsam haben, bildet man sodann die Summe dieser beiden Ausdrücke und setzt dabei $h'(c' + c'_1) = i'$, und integrirt man endlich diese Summe über den geschlossenen Strom, so erhält man:

$$(14) \quad \Pi = k \int \frac{i'}{r} \sum \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'.$$

Setzt man nun diesen Ausdruck von Π in die Gleichung (13) ein, so ergibt sich aus derselben für $\mathcal{X}$ in der That der durch die Gleichung (10) bestimmte Werth.

Da die in dem Ausdrücke von Π vorkommenden Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ von der Grösse s' , nach welcher zu integriren ist, unabhängig sind, so kann man sie auch aus dem Integralzeichen herausnehmen und dann dem Ausdrücke folgende Gestalt geben:

$$(15) \quad \Pi = k \sum \frac{dx}{dt} \int \frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'.$$

Die hier angedeutete Summe enthält drei Integrale, die sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass in ihnen entweder $\frac{\partial x'}{\partial s'}$ oder $\frac{\partial y'}{\partial s'}$ oder $\frac{\partial z'}{\partial s'}$ vorkommt. Diese drei Integrale, mit Einschluss des Faktors k , wollen wir der Abkürzung wegen durch einfache Zeichen darstellen, indem wir setzen:

$$(16) \quad H_x = k \int \frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'; \quad H_y = k \int \frac{i'}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} ds'; \quad H_z = k \int \frac{i'}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} ds'.$$

Dann kommt:

$$(17) \quad \Pi = H_x \frac{dx}{dt} + H_y \frac{dy}{dt} + H_z \frac{dz}{dt},$$

oder unter Anwendung des Summenzeichens:

$$(17a) \quad \Pi = \sum H_x \frac{dx}{dt}.$$

Dadurch geht die Gleichung (13) über in:

$$(18) \quad \mathfrak{X} = \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{dz}{dt} - \frac{dH_x}{dt},$$

oder mit Hülfe des Summenzeichens:

$$(18a) \quad \mathfrak{X} = \frac{\partial}{\partial x} \sum H_x \frac{dx}{dt} - \frac{dH_x}{dt}.$$

Nach den Grundgesetzen von Riemann und Weber wird das electrodynamische Potential zweier in Punkten concentrirt gedachter, bewegter Electricitätsmengen e und e' auf einander durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} & - \frac{k}{2} \frac{ee'}{r} \sum \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)^2 \\ & - \frac{k}{2} \frac{ee'}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

dargestellt. Hieraus erhält man für das Potential eines geschlossenen Stromes s' auf eine Electricitätseinheit, also für die Potentialfunction des geschlossenen Stromes, welche nach diesen Grundgesetzen mit Π_1 und Π_2 bezeichnet werden möge, die Ausdrücke:

$$(19) \quad \Pi_1 = k \int \frac{i'}{r} \left[\sum \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\partial x'}{\partial t} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{c' - c'_1}{2} \right] ds'$$

$$(20) \quad \Pi_2 = -k \int \frac{i'}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{c' - c'_1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] ds'$$

Den letzteren Ausdruck kann man in folgender Weise umgestalten. Aus

$$r^2 = \sum (x - x')^2$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial r}{\partial t} &= \sum (x - x') \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\partial x'}{\partial t} \right) \\ &= \sum (x - x') \frac{dx}{dt} - \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t}, \end{aligned}$$

und hieraus erhält man weiter durch Differentiation nach s' :

$$\frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} + r \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s'} = - \sum \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t}$$

und somit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} = -\frac{1}{r} \Sigma \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \Sigma (x-x') \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial s'}.$$

Setzt man nun in die Gleichung (20) für $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'}$ den hier gefundenen Ausdruck ein, dessen letztes Glied bei der Integration Null giebt, so erhält man:

$$(21) \quad \Pi_2 = k \int \frac{i'}{r} \left[\Sigma \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \Sigma (x-x') \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{c'-c'_1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] ds'.$$

In den beiden unter (19) und (21) gegebenen Ausdrücken von Π_1 und Π_2 stimmt das erste bei Auflösung der Klammern entstehende Glied mit dem unter (14) gegebenen Ausdrücke von Π überein, und man kann daher schreiben:

$$(22) \quad \Pi_1 = \Pi - k \int \frac{i'}{r} \left(\Sigma \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{c'-c'_1}{2} \right) ds'$$

$$(23) \quad \Pi_2 = \Pi + k \int \frac{i'}{r} \left[\frac{\partial}{\partial s'} \Sigma (x-x') \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{c'-c'_1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] ds'.$$

Bildet man nun der Gleichung (13) entsprechend die Gleichungen:

$$(24) \quad \mathfrak{X}_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial \frac{dx}{dt}} \right)$$

$$(25) \quad \mathfrak{X}_2 = \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial \frac{dx}{dt}} \right),$$

und wendet man hierin für Π_1 und Π_2 die vorher gegebenen Ausdrücke an, in welchen die zu Π hinzugefügten Glieder die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ nicht enthalten und daher bei der Differentiation nach diesen Grössen Null geben, so erhält man für $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ die unter (11) und (12) gegebenen Ausdrücke.

Zur Abkürzung mögen für jene von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ unabhängigen Zusatzglieder einfache Zeichen eingeführt werden, indem gesetzt wird:

$$(26) \quad G_1 = -k \int \frac{i'}{r} \left(\Sigma \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{c' - c'_1}{2} \right) ds'$$

$$(27) \quad G_2 = k \int \frac{i'}{r} \left[\frac{\partial}{\partial s'} \Sigma (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{c' - c'_1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] ds'.$$

Dann kommt:

$$(28) \quad \Pi_1 = \Pi + G_1$$

$$(29) \quad \Pi_2 = \Pi + G_2$$

wodurch die Gleichungen (24) und (25) übergehen in folgende:

$$(30) \quad \mathfrak{X}_1 = \frac{\partial(\Pi + G_1)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{dx}{dt}} \right).$$

$$(31) \quad \mathfrak{X}_2 = \frac{\partial(\Pi + G_2)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{dx}{dt}} \right),$$

welche im Vereine mit (13) zur Vergleichung der Resultate der drei Grundgesetze sehr bequem sind.

Die im Vorstehenden eingeführte und in ihren drei, den drei Grundgesetzen entsprechenden Formen mit Π , Π_1 und Π_2 bezeichnete electrodynamische Potentialfunction eines geschlossenen Stromes (resp. Stromsystemes) ist, wie man leicht erkennt, sehr verschieden von derjenigen Potentialfunction, deren Differentialcoefficienten schon in der Ampère'schen Theorie der ponderomotorischen Kräfte vorkommen, und welche ich in einer früher veröffentlichten Auseinandersetzung¹⁾ die magnetische Potentialfunction des geschlossenen Stromes genannt und mit P bezeichnet habe. Diese letztere erhält man, wenn man sich den geschlossenen Strom in der bekannten Weise durch zwei magnetische Flächen ersetzt denkt und dann für die auf diesen Flächen befindlichen Magnetismusk mengen die Green'sche Potentialfunction bildet, und demgemäss liegt ihre unmittelbar gegebene Bedeutung darin, dass sie durch ihre

1) Die mechanische Behandlung der Electricität Abschnitt VIII, S. 211.

negativ genommenen Differentialcoefficienten nach x , y und z die in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten derjenigen Kraft darstellt, welche der geschlossene Strom auf eine im Punkte x , y , z gedachte Einheit von Magnetismus ausübt. Zur Bestimmung der auf ein Stromelement ausgeübten ponderomotorischen Kraft und der in ihm inducirten electromotorischen Kraft kann sie nur mittelbar und unter Zuhülfenahme besonderer theoretischer Betrachtungen dienen. Die electrodynamische Potentialfunction dagegen, welche in directer Weise zur Bestimmung der auf eine bewegte Electricitätseinheit ausgeübten Kraft dient, braucht nur auf die in dem Leiter befindliche Electricität angewandt zu werden, um ohne Weiteres die ponderomotorische und electromotorische Kraft zu bestimmen.

§. 8.

Um nun aus den vorstehenden Formeln die ponderomotorische Kraft abzuleiten, welche ein Stromelement von einem geschlossenen Strome erleidet, bilden wir zunächst aus der Potentialfunction die Potentiale des geschlossenen Stromes auf die beiden in dem Stromelemente fließenden Electricitätsmengen. Aus diesen ergeben sich durch die oben angegebene Operation die in irgend eine Richtung, z. B. die x -Richtung, fallenden Componenten der Kräfte, welche die beiden Electricitätsmengen erleiden, und die Summe dieser beiden Componenten ist dann die betreffende, auf das ganze Stromelement bezügliche Kraftcomponente.

Es sei also im Punkte x , y , z ein Stromelement ds gegeben, in welchem die Electricitätsmengen hds und $-hds$ mit den Geschwindigkeiten c und c_1 nach entgegengesetzten Seiten strömen. Indem wir nun zuerst nach meinem Grundgesetze für die Potentialfunction den in Gleichung (17a) gegebenen Werth

$$\Pi = \sum H_x \frac{dx}{dt}$$

in Anwendung bringen, erhalten wir für die positive Electricitätsmenge hds :

$$\text{Potential} = h ds \sum H_x \frac{dx}{dt}$$

$$\text{Kraftcomp.} = h ds \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum H_x \frac{dx}{dt} - \frac{dH_x}{dt} \right).$$

Hierin haben wir zu setzen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\frac{dH_x}{dt} = \frac{\partial H_x}{\partial t} + c \frac{\partial H_x}{\partial s},$$

wodurch die Ausdrücke übergehen in:

$$\text{Potential} = h ds \sum H_x \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right)$$

$$\text{Kraftcomp.} = h ds \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum H_x \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \frac{\partial H_x}{\partial t} - c \frac{\partial H_x}{\partial s} \right].$$

Ebenso erhalten wir für die negative Electricitätsmenge $-h ds$, für welche wir die Strömungsgeschwindigkeit $-c$, in Anwendung bringen müssen:

$$\text{Potential} = -h ds \sum H_x \left(\frac{\partial x}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x}{\partial s} \right)$$

$$\text{Kraftcomp.} = -h ds \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum H_x \left(\frac{\partial x}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \frac{\partial H_x}{\partial t} + c_1 \frac{\partial H_x}{\partial s} \right].$$

Addiren wir nun die auf die beiden Electricitäten bezüglichen Ausdrücke, so erhalten wir für das ganze Stromelement ds :

$$\text{Potential} = h ds (c + c_1) \sum H_x \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\text{Kraftcomp.} = h ds (c + c_1) \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum H_x \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial H_x}{\partial s} \right),$$

oder, wenn wir das Product $h(c + c_1)$, welches die Stromintensität in ds bedeutet, mit i bezeichnen:

$$\text{Potential} = i ds \sum H_x \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\text{Kraftcomp.} = i ds \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum H_x \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial H_x}{\partial s} \right).$$

Wir wollen nun das Potential des geschlossenen Stromes auf das Stromelement ds mit Uds und die x -Componente der Kraft, welche das Stromelement erleidet, mit Ξds bezeichnen; dann haben wir zur Bestimmung von U , wenn wir noch die Gleichungen (16) berücksichtigen, zu setzen:

$$(32) \quad U = i \sum H_x \frac{\partial x}{\partial s} = ki \int \frac{i'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds',$$

und indem wir diese Grösse U als Function von $x, y, z, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$ betrachten, können wir dem Ausdrucke von Ξ folgende Form geben:

$$(33) \quad \Xi = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial U}{\partial \frac{\partial x}{\partial s}} \right).$$

Bringt man statt der meinem Grundgesetze entsprechenden Potentialfunction Π die dem Riemann'schen oder Weber'schen Grundgesetze entsprechende Potentialfunction $\Pi_1 = \Pi + G_1$ oder $\Pi_2 = \Pi + G_2$ in Anwendung, so hat man darin nur das Zusatzglied G_1 oder G_2 noch besonders zu berücksichtigen. Dieses ist aber, da es von den Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ unabhängig ist, für die beiden in ds strömenden Electricitäten gleich, und hebt sich daher nach der Multiplication mit hds und $-hds$ bei der Addition auf. Demnach besteht in Bezug auf das Potential eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement und in Bezug auf die von einem geschlossenen Strome auf ein Stromelement ausgeübte ponderomotorische Kraft zwischen den drei Grundgesetzen kein Unterschied. In allen drei Fällen sind die Gleichungen (32) und (33) gültig¹⁾.

1) Ich will hier gelegentlich bemerken, dass, wenn es sich nur um die ponderomotorische Kraft und nicht zugleich auch um die electromotorische Kraft gehandelt hätte, die Betrachtung hätte vereinfacht werden können. Für die ponderomotorische Kraft erhält man nämlich schon bei einzelnen auf einander wirkenden Stromelementen

§. 9.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung der electromotorischen Kraft, welche von einem geschlossenen Strome oder Stromsysteme in einem Leiterelemente inducirt wird.

Ausdrücke, die nicht die Geschwindigkeiten der positiven und negativen Electricität als besonders zu behandelnde Grössen, sondern nur die Stromintensität im Ganzen enthalten. Nach meinem Grundgesetze haben die Ausdrücke für diesen Fall sogar dieselbe Form, wie für den Fall, wo der die Kraft ausübende Strom geschlossen ist. Wird das Potential der beiden Stromelemente ds und ds' auf einander mit $uds ds'$ und die x -Componente der Kraft, welche ds von ds' erleidet, mit $\xi ds ds'$ bezeichnet, so ist zu setzen:

$$u = k \frac{ii'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'}$$

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial \frac{\partial x}{\partial s}} \right).$$

Nach dem Riemann'schen Grundgesetze gilt für das Potential derselbe Ausdruck, aber die zur Ableitung der Kraftcomponente anzuwendende Operation ist etwas complicirter, nämlich:

$$\xi_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial \frac{\partial x}{\partial s}} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial u}{\partial \frac{\partial x'}{\partial s'}} \right).$$

Nach dem Weber'schen Grundgesetze endlich gilt für das Potential, welches in diesem Falle mit $u_2 ds ds'$ bezeichnet werden möge, die Gleichung:

$$u_2 = -k \frac{ii'}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} = kii' \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right),$$

und zur Ableitung der Kraftcomponente ist dieselbe Operation anzuwenden, wie beim Riemann'schen Grundgesetze, nämlich:

$$\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \frac{\partial x}{\partial s}} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \frac{\partial x'}{\partial s'}} \right).$$

Man kann hiernach die ponderomotorische Kraft aus dem Potential je zweier Stromelemente auf einander ableiten; dieses Potential ist aber, trotz der theilweise übereinstimmenden Form, wohl zu unterscheiden von der Grösse, welche man erhält, wenn man von dem

Dazu haben wir nur die in die Richtung des Leiter-elementes fallende Componente der Kraft zu bestimmen, welche eine in dem Leiterelemente gedachte Electricitätseinheit, der wir eine beliebige Strömungsgeschwindigkeit c zuschreiben können, von dem Strome oder Stromsysteme erleidet. Die in die Coordinatenrichtungen fallenden Kraftcomponenten sind nach unserer früheren Bezeichnungsweise durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ darzustellen, und dem entsprechend wollen wir die in die Richtung des Elementes ds , also in die s -Richtung fallende Kraftcomponente mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Dann haben wir zu setzen:

$$(34) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \frac{\partial x}{\partial s} + \mathfrak{Y} \frac{\partial y}{\partial s} + \mathfrak{Z} \frac{\partial z}{\partial s} = \sum \mathfrak{X} \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Hierin müssen wir nun für die Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ihre aus den drei Grundgesetzen hervorgehenden Werthe einsetzen.

Nach meinem Grundgesetze ist gemäss (13) zu setzen:

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{dx}{dt}} \right)$$

und somit:

$$\mathfrak{S} = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} - \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{dx}{dt}} \right).$$

Bringen wir hierin für Π den unter (17) gegebenen Ausdruck, nämlich

$$\Pi = H_x \frac{dx}{dt} + H_y \frac{dy}{dt} + H_z \frac{dz}{dt},$$

in Anwendung, so haben wir, wenn wir alle Glieder einzeln hinschreiben wollen, zu setzen:

Neumann'schen Potential zweier geschlossener Ströme auf einander den zwei einzelnen Stromelementen ds und ds' entsprechenden Theil nimmt. Das Neumann'sche Potential ist nämlich das magnetische Potential und somit ein Potential von der Green'schen Art, während es sich hier um das electrodynamische Potential handelt, weshalb auch zur Ableitung der Kraftcomponenten eine ganz andere Operation, als bei einem Green'schen Potential, erforderlich ist.

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{dx}{dt} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{dy}{dt} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{dz}{dt} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right). \end{aligned}$$

Da nun die Grösse H_x , H_y und H_z nur insofern von s abhängen, als die in ihnen vorkommenden Coordinaten x , y , z der Electricitätseinheit von s abhängig sind, so stellen die drei in Klammern stehenden Summen die Differentialcoefficienten der drei Grössen nach s dar, und man kann daher schreiben:

$$\Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial H_x}{\partial s} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial H_y}{\partial s} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial H_z}{\partial s},$$

oder, wenn man jetzt auch an der rechten Seite wieder das Summenzeichen einführt:

$$\Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \Sigma \frac{\partial H_x}{\partial s} \frac{dx}{dt}.$$

Demnach geht die obige Gleichung für $\mathcal{E}$ über in:

$$(35) \quad \mathcal{E} = \Sigma \frac{\partial H_x}{\partial s} \frac{dx}{dt} - \Sigma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{dH_x}{dt}.$$

Da nun die Electricitätseinheit eine doppelte Bewegung hat, nämlich die Bewegung des Leiterelementes und die mit der Geschwindigkeit c stattfindende Strömungsbewegung im Leiterelemente, so wollen wir, entsprechend der früher von uns angewandten Bezeichnungsweise, setzen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{dH_x}{dt} &= \frac{\partial H_x}{\partial t} + c \frac{\partial H_x}{\partial s}, \end{aligned}$$

worin die durch $\frac{\partial}{\partial t}$ angedeutete Differentiation sich auf die Veränderungen beziehen soll, die von der Strömungsbewegung der Electricitätseinheit unabhängig sind. Dadurch erhalten wir

$$\mathfrak{S} = \sum \frac{\partial H_x}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \sum \frac{\partial x}{\partial s} \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} + c \frac{\partial H_x}{\partial s} \right).$$

Hierin heben sich die Glieder, welche den Factor c enthalten gegenseitig auf und es bleibt:

$$(36) \quad \mathfrak{S} = \sum \frac{\partial H_x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \sum \frac{\partial H_x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Diesem Ausdrucke von $\mathfrak{S}$ können wir noch eine etwas andere Form geben, indem wir die Grösse

$$\sum H_x \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s}$$

zum ersten Gliede positiv und zum zweiten negativ hinzufügen. Dann werden die beiden Glieder Differentialcoefficienten nach s und t und es kommt:

$$(37) \quad \mathfrak{S} = \frac{\partial}{\partial s} \sum H_x \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \sum H_x \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Setzen wir hierin endlich noch für H_x und die beiden anderen in den Summen enthaltenen Grössen H_y und H_z ihre durch die Gleichungen (16) bestimmten Werthe, so erhalten wir:

$$(38) \quad \mathfrak{S} = k \frac{\partial}{\partial s} \int \frac{i'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds' - k \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'.$$

Dieses ist die bequemste Form des aus meinem Grundgesetze hervorgehenden Ausdruckes von $\mathfrak{S}$, und das Product $\mathfrak{S} ds$ ist die von einem geschlossenen Strome oder Stromsysteme in einem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft.

Um die entsprechenden Ausdrücke für das Riemann'sche und Weber'sche Grundgesetz zu erhalten, braucht man in den die Potentialfunction darstellenden Formeln (28) und (29) nur die Zusatzglieder G_1 und G_2 besonders in Betracht zu ziehen, welche die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ nicht enthalten, und daher nur nach x , y , z

zu differentiiren sind. Da man nun wieder für G_1 die Gleichung

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial G_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial G_1}{\partial s}$$

und für G_2 die entsprechende Gleichung bilden kann, so erhält man, wenn man die electromotorische Kraft nach dem Riemann'schen und Weber'schen Grundgesetze mit $\mathfrak{S}_1 ds$ und $\mathfrak{S}_2 ds$ bezeichnet:

$$(39) \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} + \frac{\partial G_1}{\partial s}$$

$$(40) \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S} + \frac{\partial G_2}{\partial s}.$$

Diese Ausdrücke stellen den Unterschied zwischen den aus den drei Grundgesetzen sich ergebenden electromotorischen Kräften sehr übersichtlich dar.

Aus den in den beiden letzten Paragraphen ausgeführten Entwicklungen wird, wie ich glaube, genügend ersichtlich sein, wie sehr die Einführung der electrodynamischen Potentialfunction geschlossener Ströme dazu beiträgt, dem ganzen betreffenden Gebiete der Electrodynamik einen einheitlichen Character zu geben, indem die Kenntniss jener Einen Grösse genügt, um alles Weitere, ohne Anwendung irgend einer Nebenannahme, durch einfache analytische Operationen abzuleiten.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande](#)

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: [37](#)

Autor(en)/Author(s): Clausius R.

Artikel/Article: [Ueber die Anwendung des electrodynamischen Potentials zur Bestimmung der](#)

ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte 184-214