Ueber die günstigsten physikalischen Bedingungen bei der Beobachtung der Netzhaut im umgekehrten Bilde.

Von

Dr. Fr. Fuchs,

Docenten der Jatrophysik in Bonn.

I. Augenspiegel mit Glasplatte.

1. Unter den Augenärzten ist die Ansicht verbreitet, dass der Augenspiegel mit Glasplatte eine bei Weitem geringere Lichtmenge liefere als der durchbohrte Metallspiegel. Im Laufe der folgenden Darstellung wird sich jedoch zeigen, dass der Vorzug umgekehrt dem ersteren Apparate gebührt, wenn die Anordnung so getroffen wird, dass erstens die von der Netzhaut her durch die Glasplatte hindurchgehende Lichtmenge ein Maximum wird und dass zweitens die sämmtlichen die Platte durchsetzenden Strahlen auch wirklich zum Auge des Beobachters gelangen. Die erstere dieser Forderungen, welche bereits von Helmholtz discutirt worden ist, bezieht sich auf die Stellung der Glasplatte, die letztere auf die Disposition der Linsen. Wir werden beiden genügen können, wenn wir dem Apparate die folgende Einrichtung geben.

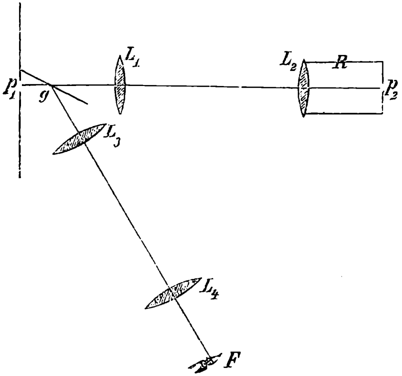

Fig. 1.

2. In der Hauptaxe $p_1 p_2$ des Instrumentes folgen auf einander die Mittelpunkte eines Schirmes, welcher mit einer

Oeffnung p_1 für die beobachtete Pupille versehen ist, der Glasplatte g, der feststehenden Linse L_1 und der mitsammt dem Rohre R verschiebbaren Linse L_2. Das Rohr R hat eine Ocularöffnung p_2 für die Pupille des Beobachters. In der Nebenaxe gF liegen die Mittelpunkte der Glasplatte g, der Linsen L_3, L_4, und der Flamme F. Die für die beobachtende Pupille bestimmte Ocularöffnung p_2 des Rohres R liegt in der Brennebene von L_2, die beobachtete Pupille p_1 in der Brennebene sowohl von L_1 wie von L_3; die Flamme F steht in der Brennebene von L_4.

3. Das Verhältniss der Brennweiten f_1 und f_2 der Linsen L_1, L_2 wird folgendermassen bestimmt. Die Linsen L_1, L_2 entwerfen von der selbstleuchtend gedachten Pupille p_1 des Beobachteten in der Ocularöffnung des Rohres R ein reelles Bild, dessen Durchmesser δ sich zu dem Durchmesser D der beobachteten Pupille verhält wie die Brennweite f_2 der Linse L_2 zu der Brennweite f_1 der Linse L_1. Es ist also

$$\delta = \frac{f_2}{f_1} D.$$

Wenn nun alle Strahlen, welche von der beobachteten Pupille p_1 aus durch die Glasplatte hindurchgehen, in die Pupille p_2 des Beobachters gelangen sollen, so muss der Durchmesser δ des Bildes der Pupille p_1 ebenso gross oder kleiner wie der Durchmesser ∂ der beobachtenden Pupille p_2 sein. Es wird also

$$\delta \leqq \partial$$

und folglich

$$\frac{f_2}{f_1} D \leqq \partial$$

sein müssen. Die Brennweite f_1 und f_2 der Linsen L_1, L_2 haben mithin der Bedingung zu genügen

$$\frac{f_1}{f_2} \geqq \frac{D}{\partial} \tag{1}$$

worin D und ∂, wie angeführt, die Durchmesser der beobachteten und der beobachtenden Pupille bedeuten. Nimmt man beide Pupillen als gleich gross an, so kann man f_2 gleich f_1 machen. Wenn die Beobachtung jedoch an dem atropinisirten Auge erfolgen soll, so muss f_2 kleiner als f_1 sein.

4. Das zu beobachtende Netzhautbild, welches mit der Linse L_2 als Loupe betrachtet wird, liegt in der Nähe der zweiten Brennebene der Linse L_1. Durch eine kleine Verschiebung des die Linse L_2 enthaltenden Rohres kann also das Bild der Netzhaut in den Accommodationsbereich eines jeden Auges gerückt werden, ohne dass dieses mit einer Brille bewaffnet zu sein brauchte. Bei dieser Verschiebung bleibt die Concentration der von der beobachteten Pupille ausgehenden Strahlen in der Pupille des Beobachters dauernd bestehen, weil die Grösse des in der Brennebene von L_2 liegenden Pupillenbildes von dem Abstande der beiden Linsen L_1, L_2 unabhängig ist.

5. Die Glasplatte g und die in der Nebenaxe gF liegenden Theile werden so angeordnet, dass der Beobachtete das von der Glasplatte entworfene virtuelle Bild der Linse L_3 mit der Linse L_1 coincidirend sieht.

Die Flamme steht in Bezug auf die Linsen L_3, L_4 conjugirt zu der Pupille des Beobachteten.

6. Wenn wir nun mittelst einer Linse oder eines Linsensystemes das reelle Bild einer Flamme auf die Pupille werfen, so ist die Intensität der Netzhautbeleuchtung, d. h. die Lichtmenge (μ), welche in der Zeiteinheit auf Flächeneinheit der Netzhaut fällt,

$$(2) \qquad \mu = \frac{F\,J}{k^2}$$

worin F den Flächeninhalt der Pupille, k den Abstand der Netzhaut von dem Knotenpunkte des Auges, J die objective Helligkeit der Flamme bedeutet, d. h. diejenige Lichtmenge, welche die Flächeneinheit der Lichtquelle auf eine beleuchtete Flächeneinheit wirft, wenn beide Flächen in dem Abstande eins senkrecht zu der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte stehen.

So lange sich die Pupille stets an dem Orte des Bildes befindet und dieses grösser oder ebenso gross wie jene ist, hat weder die Brennweite der Linsen, noch ihre Apertur, noch die Entfernung der Flamme einen Einfluss auf die Intensität der Netzhautbeleuchtung, da sich die auf die

Pupille fallende Lichtmenge, wie sich leicht zeigen lässt, stets in demselben Verhältnisse ändert wie der Flächeninhalt des Zerstreuungsbildes der Lichtquelle auf der Netzhaut. Auch die Grösse der Flamme hat nur insofern einen Einfluss, als sich ihre objective Helligkeit mit ihrer Grösse ändert. Dieselbe Lichtmenge

$$\mu = \frac{F\,J}{k^2}$$

würde auch auf die Flächeneinheit der Netzhaut kommen, wenn das Auge die Lichtquelle unter richtiger Accommodationseinstellung direct betrachtete. Das scharf gezeichnete Bild der Flamme auf der Netzhaut würde jedoch im Allgemeinen beträchtlich kleiner sein als das durch die Linsen entworfene Zerstreuungsbild derselben. Wir erhalten daher, indem wir mittelst einer Linse oder einer Linsencombination ein Bild der Flamme auf die Pupille werfen, unter Vergrösserung des Gesichtsfeldes dieselbe Intensität der Netzhautbeleuchtung, als wenn das Auge die Flamme direct betrachtete [1]. Einen grösseren Werth kann die Beleuchtungsintensität der Netzhaut bei gegebener Helligkeit der Flamme unter keinen Umständen erlangen.

7. Wenn die Glasplatte mithin die ganze auffallende Lichtmenge reflectirte, so würde die Intensität der Netzhautbeleuchtung die grösstmögliche bei gegebener Helligkeit J der Flamme und gegebener Pupillengrösse F

$$\mu = \frac{F\,J}{k^2}$$

sein. Nun geht aber ein von der Grösse des Einfallswinkels abhängiger Bruchtheil α des Lichtes durch die Platte hindurch, und der Bruchtheil $1-\alpha$ wird zur Pupille reflectirt. Die wirkliche Intensität i der Netzhautbeleuchtung ist also in unserem Falle gleich

$$i = \frac{F\,J\,(1-\alpha)}{k^2}. \tag{3}$$

8. Dieses ist also die Lichtmenge, welche in der

---

1) Von dem Lichtverluste durch Reflexion an den Linsen kann hier und in der Folge füglich abgesehen werden, da die anzustellende Vergleichung eine Berücksichtigung desselben nicht erfordert.

Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der beobachteten Retina fällt. Die Netzhaut wirft ihrerseits als diffus reflectirende Fläche einen Theil des auffallenden Lichtes durch die Pupille zurück. Die aus der Pupille austretende Lichtmenge ist aber erstens der Intensität i der Netzhautbeleuchtung und zweitens dem Flächeninhalte der Pupille proportional.

Nennen wir also l die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit der Retina in der Zeiteinheit durch die Pupille zurückwirft, so ist

$$l = CFi = \frac{CF^2 J(1-\alpha)}{k^2} \tag{4}$$

worin C eine von dem Reflexionsvermögen der Retina abhängige Constante bedeutet.

9. Die Lichtmenge l wird an der Glasplatte in zwei Theile zerlegt; der Bruchtheil $1-\alpha$ wird gegen die Flamme zurückreflectirt, und der Bruchtheil α geht durch die Platte hindurch. Dieser letztere Bruchtheil gelangt aber bei der erwähnten Anordnung der Linsen ungeschwächt in das Auge des Beobachters. Nennen wir also λ die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit der beobachteten Retina in der Zeiteinheit in die Pupille des Beobachters sendet, so ist

$$\lambda = l\alpha = \frac{CF^2 J\alpha(1-\alpha)}{k^2}. \tag{5}$$

10. In dieser Gleichung stellt α den Bruchtheil vor, welchen die Glasplatte von der auffallenden Lichtmenge durchlässt. Die Grösse α ist nun abhängig von dem Winkel, den der von der Flamme ausgehende mittlere Strahl Fg mit dem auf der Platte errichteten Einfallslothe bildet.

Denken wir also in der vorstehenden Gleichung α als die unabhängige, λ als die abhängige Variable, so ergibt sich der Werth von α, für welchen λ ein Maximum wird, aus der Gleichung

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{CF^2 J(1-2\alpha)}{k^2} = 0.$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Die Lichtmenge λ wird also ein Maximum, wenn die Flamme und die Platte so disponirt werden, dass die Hälfte des Lichtes reflectirt und die Hälfte durchgelassen wird.

Bezeichnen wir diesen maximalen Werth von λ mit dem Buchstaben M, so ergibt die Gl. 5, indem $\alpha = \frac{1}{2}$ gesetzt wird

$$(6) \qquad M = \frac{C F^2 J}{4 k^2}.$$

M ist also die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit der Netzhaut unter den günstigsten Bedingungen der Beobachtung in die Pupille des Beobachters wirft.

11. Der vorstehenden Gl. 6 zu Folge ist

$$\frac{C F^2 J}{k^2} = 4\ M.$$

Substituirt man den Ausdruck der rechten für den der linken Seite in Gl. 5, so nimmt diese die Form an

$$(7) \qquad \lambda = 4\,\alpha\,(1-\alpha)\,M.$$

Die folgende Tabelle zeigt den Gang der Function λ, wenn α successive die Werthe 0,1, 0,2 u. s. w. annimmt. Der Maximalwerth M der Lichtmenge ist gleich 100 gesetzt worden.

α	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
λ	0	36	64	84	96	100	96	84	64	36	0

Wenn also der Neigungswinkel der Platte so gewählt wird, dass drei Zehntel des auffallenden Lichtes durchgelassen (und sieben Zehntel reflectirt) werden, so beträgt die in das Auge des Beobachters gelangende Lichtmenge 84 Procent des grösstmöglichen Lichtquantums. Der gleiche Procentsatz ergibt sich, wenn umgekehrt sieben Zehntel durchgelassen (und 3 Zehntel reflectirt) werden.

12. Die vorstehenden Formeln sind auch gültig, wenn zur Abschwächung des Hornhautreflexes statt einer, mehrere Glasplatten angewendet werden. Platten von einem mittleren Brechungsexponenten reflectiren die Hälfte des Lichtes, wenn der Einfallswinkel beträgt für

eine Platte 70^0
drei Platten 60^0
vier Platten 56^0 [1]).

1) Vgl. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, Leipzig 1867, S. 183.

13. Nehmen wir jetzt an, die Platte sei so gestellt, dass die in das Auge des Beobachters gelangende Lichtmenge ihren maximalen Werth

$$(6) \qquad M = \frac{C\,F^2\,J}{4k^2}$$

erreiche. Diese Lichtmenge M vertheilt sich auf der Netzhaut des Beobachters auf eine gewisse Fläche x. Nennen wir nun m die Lichtmenge, welche in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der beobachtenden Netzhaut kommt, so ist

$$(a) \qquad m = \frac{M}{x} = \frac{C\,F^2\,J}{4\,k^2\,x}.$$

Die Grösse x ist unter zwei die Aufgabe vereinfachenden Voraussetzungen leicht zu bestimmen. Es werde erstens angenommen, dass das beobachtete Auge für die unendliche Ferne accommodirt sei, wobei dann die Linse L_1 in ihrer zweiten Brennebene ein reelles Bild der Netzhaut entwirft. Die Längeneinheit der beobachteten Netzhaut stellt sich in diesem Bilde mit einer Länge y dar, welche der Relation genügt

$$\frac{y}{1} = \frac{f_1}{k}$$

worin f_1, wie erwähnt, die Brennweite der Linse L_1, k den Abstand der beobachteten Netzhaut von dem Knotenpunkte des Auges bedeutet.

Der Beobachter betrachtet das in der Brennebene von L_1 liegende Bild der Netzhaut mit der Linse L_2 als Loupe.

Die Pupille desselben liegt in der Brennebene von L_2. Es werde jetzt zweitens angenommen, dass die Entfernung der Linse L_2 von der beobachtenden Pupille ohne merklichen Fehler gleich gesetzt werden könne ihrer Entfernung von dem Knotenpunkte des Auges.

Wenn man nun eine Länge y durch eine Linse betrachtet, in deren Brennpunkt der Knotenpunkt des Auges liegt, so stellt sie sich auf der Netzhaut mit einer Länge z dar, welche der Relation genügt

$$\frac{z}{k'} = \frac{y}{f_2}$$

worin f_2 die Brennweite der Linse, k' den Abstand der beobachtenden Netzhaut von dem Knotenpunkte des Auges bezeichnet. Es ist also

$$z = \frac{k'}{f_2}\, y = \frac{k' f_1}{k f_2}.$$

Da man nun ohne merklichen Fehler $k = k'$ setzen kann, so ist

$$z = \frac{f_1}{f_2}. \tag{8}$$

Die Längeneinheit der bobachteten Netzhaut bildet sich also auf der beobachtenden mit einer Länge z ab, welche numerisch dem Verhältnisse der Brennweiten der Linsen L_1, L_2 gleich ist. Wenn $f_1 = f_2$ ist, so ist $z = 1$. In diesem Falle stellt sich also die beobachtete Netzhaut auf der beobachtenden in ihrer natürlichen Grösse dar.

14. Das Quadrat von z ist nun die Grösse, welche in der Gl. a des vorigen Paragraphen mit x bezeichnet wurde. Es ist also

$$x = \frac{f_1^{\,2}}{f_2^{\,2}}.$$

Setzt man diesen Werth von x in die Gl. a ein, so ergibt sich

$$m = M\frac{f_2^{\,2}}{f_1^{\,2}} = \frac{C\, F^2 J}{4k^2} \cdot \frac{f_2^{\,2}}{f_1^{\,2}}. \tag{9}$$

Dieser Ausdruck stellt also die Intensität der Beleuchtung in dem Auge des Beobachters dar, d. h. diejenige Lichtmenge, welche in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der beobachtenden Netzhaut fällt.

In dem speciellen Falle, wo $f_1 = f_2$ ist, wird die Beleuchtungsintensität auf der beobachtenden Netzhaut gleich

$$m' = M = \frac{C\, F^2 J}{4k^2}. \tag{10}$$

Diese Lichtmenge m' ist, wie die Vergleichung der vorstehenden Formel mit Gl. 4, worin $\alpha = \frac{1}{2}$ zu setzen ist, zeigt, halb so gross wie die Lichtmenge l, welche die Flächeneinheit der beobachteten Netzhaut aus der Pupille austreten lässt, was auch unmittelbar aus der Erwägung folgt, dass sich bei Gleichheit der Brennweiten f_1 und f_2 die beobachtete Netzhaut auf der beobachtenden in ihrer natürlichen Grösse abbildet und dass die Glasplatte bei

Einhaltung der Maximumbedingung die Hälfte des aus der Pupille austretenden Lichtes durchlässt.

15. Denkt man die beobachtete Netzhaut aus dem Auge herausgenommen und in die bequeme deutliche Sehweite s verlegt, so stellt sich die Längeneinheit derselben auf der beobachtenden Netzhaut mit einer Länge q

$$q = \frac{k}{s}$$

dar. Die Vergrösserungszahl v des Apparates ist also

$$v = \frac{z}{q} = \frac{f_1 s}{f_2 k}.$$

Der Abstand k des Knotenpunktes von der Netzhaut ist bei einem normalen Auge gleich 15 Millimeter. Nimmt man die bequeme deutliche Sehweite zu 200 Millimeter an, so ist

$$(11) \qquad v = 13{,}3 \frac{f_1}{f_2}.$$

Sind die Brennweiten der Linsen L_1, L_2 einander gleich, so wird $v = 13{,}3$ d. h. die linearen Dimensionen des Bildes auf der beobachtenden Retina sind alsdann 13,3 mal grösser als wenn die aus dem Auge herausgenommene Netzhaut bei einem Abstande von 200 Millimeter betrachtet würde. In derselben Vergrösserung stellt sich auch die Netzhaut bei ihrer Beobachtung im aufrechten virtuellen Bilde dar.

16. Das Gesichtsfeld, d. h. der Theil der Netzhaut, den der Beobachter gleichzeitig übersehen kann, ist gleich dem Zerstreuungsbilde der Linse L_1 im Auge des Beobachteten. Bezeichnen wir den Durchmesser des Gesichtsfeldes mit t, den der Linse L_1 mit t_1, so ist angenähert

$$(12) \qquad t = \frac{k t_1}{f_1}.$$

Da der Beobachtete die Linse L_3 mit L_1 coincidirend sieht, so ist t zugleich der Durchmesser des Kreises, welcher durch die Flamme beleuchtet wird. Die Retina wird also mit möglichster Schonung für das beobachtete Auge nur in dem Bezirke beleuchtet, welchen der Beobachter wirklich übersehen kann.

17. Denken wir den Apparat mit vier Linsen von gleicher Apertur und gleicher Brennweite construirt, so

zeigen die Theile in der Hauptaxe p_1 p_2 und in der Nebenaxe g F eine vollkommen symmetrische Anordnung. Die Flamme und die Pupille des Beobachters können dann ihre Stellung vertauschen und zwar, bei einer beliebigen Stellung der Glasplatte, unbeschadet sowohl der Vergrösserung wie der in das beobachtende Auge eintretenden Lichtmenge.

18. Eine zwischen den Linsen L_3 und L_4 beweglich eingeschaltete, mit Zahlen oder anderen Merkzeichen versehene Glasplatte, welche von dem Beobachteten durch die Linse L_3 als Loupe gesehen wird, gewährt ein bequemes Mittel, die Gesichtslinie des Beobachteten nach Willkür zu dirigiren. Die Lage der deutlich gesehenen Platte gibt dann zugleich Aufschluss über die Accommodationseinstellung des Auges.

19. Die Beleuchtungsintensität auf der beobachteten sowohl wie auf der beobachtenden Netzhaut wird nahezu verdoppelt, wenn die Flamme F in den Mittelpunkt eines Hohlspiegels gesetzt wird, dessen Radius gleich der Brennweite der Linse L_4 und dessen Apertur ebensogross oder grösser wie die Apertur dieser Linse ist.

20. Um die aus der beobachteten Pupille austretenden Strahlen in der beobachtenden zu vereinigen, sind, wie angegeben, in der Axe p_1 p_2 zwei Linsen angebracht, in deren Brennebenen die beiden Pupillen liegen. Denselben Zweck kann man allenfalls auch mit einer Linse erreichen. Die beiden Pupillen müssen dann erstens in conjugirten Ebenen liegen und zweitens muss das Bild, welches die Linse von der beobachteten Pupille entwirft, ebensogross oder kleiner wie die Pupille des Beobachters sein. Haben die Pupillen gleiche Grösse, so können beide in den Abstand $2f$ von der Linse verlegt werden. Ist die beobachtete Pupille jedoch, wie es bei dem durch Atropin erweiterten Auge der Fall ist, grösser als die beobachtende, so wird der Abstand der ersteren grösser und der der letzteren kleiner als $2f$ sein müssen. Diese Beobachtungsmethode empfiehlt sich weniger als die vorhin beschriebene, weil die Brennweite der Linse individuell verschieden je nach der Nahpunktsweite des Beobachters gewählt werden

muss und namentlich weil das Gesichtsfeld um so kleiner wird, je weiter die Linse von dem beobachteten Auge entfernt wird.

II. Durchbohrter Augenspiegel.

1. Die Anordnung der Theile sei die in Fig. 2 dargestellte, welche der der Fig. 1 durchaus analog ist.

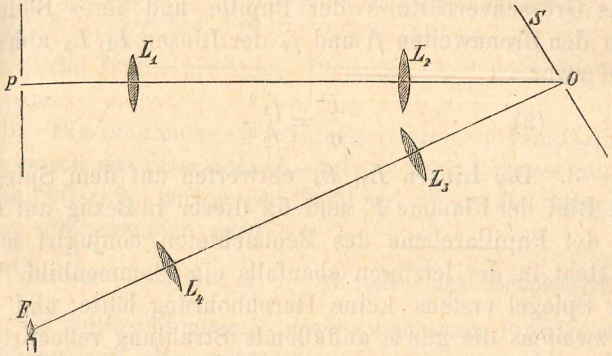

Fig 2.

Die beobachtete Pupille p liegt in der Brennebene der Linse L_1, die Flamme F in der Brennebene von L_4, der mit der Oeffnung o versehene ebene Metallspiegel S steht, von der schiefen Stellung des Spiegels abgesehen, in der Brennebene sowohl von L_2 wie von L_3. Die vier Linsen haben dieselbe Apertur; die Brennweiten von L_2, L_3, L_4 sind ebenfalls die gleichen. Das Verhältniss der Brennweiten von L_1 und L_2 wird durch eine Maximumbedingung bestimmt werden.

Der durch die Spiegelöffnung o blickende Beobachter betrachtet das nahe bei der zweiten Brennebene der Linse L_1 liegende Bild der Netzhaut mit der Linse L_2 als Loupe.

2. Der durchbohrte Spiegel S steht in Bezug auf die Linsen L_1, L_2 conjugirt zu der beobachteten Pupille p, welche, selbstleuchtend gedacht, ihr Bild auf der Spiegelfläche in Gestalt eines mit der Spiegelöffnung concentrischen Kreises entwirft. Der letztere, seinerseits selbstleuchtend

gedacht, bildet sich umgekehrt auf der Pupille p ab. Inmitten der Pupille p liegt das Bild der Spiegelöffnung o.

Nennen wir F den Flächeninhalt der beobachteten Pupille, φ den Flächeninhalt ihres Bildes auf dem Spiegel, g den Flächeninhalt der Spiegelöffnung, χ den Flächeninhalt ihres Bildes auf der beobachteten Pupille, so besteht die Relation

$$\frac{g}{\varphi} = \frac{\chi}{F}. \tag{1}$$

Das Grössenverhältniss der Pupille und ihres Bildes ist von den Brennweiten f_1 und f_2 der Linsen L_1, L_2 abhängig, und zwar ist

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{f_1^{\,2}}{f_2^{\,2}}. \tag{2}$$

3. Die Linsen L_3, L_4 entwerfen auf dem Spiegel S ein Bild der Flamme F, und da dieser in Bezug auf L_1, L_2 zu der Pupillarebene des Beobachteten conjugirt ist, so entsteht in der letzteren ebenfalls ein Flammenbild. Wenn der Spiegel erstens keine Durchbohrung hätte und wenn er zweitens die ganze auffallende Strahlung reflectirte, so würde die Beleuchtungsintensität auf der beobachteten Netzhaut, (vgl. I, 6. Gl. 2)

$$\mu = \frac{F\ J}{k^2}$$

sein [1]).

Der Spiegel reflectirt aber nur einen Bruchtheil Q des auffallenden Lichtes. Dadurch wird die Beleuchtungsintensität auf den Werth

$$\frac{Q\ F\ J}{k^2}$$

reducirt. Da nun ferner im Spiegel eine Oeffnung vorhanden ist, deren Bild ein Stück der beobachteten Pupille

---

1) Dieselbe Beleuchtungsintensität würde die Netzhaut erhalten, wenn die Flamme selber an den Ort des Spiegels gebracht würde. Der Spiegel verhält sich also bei der beschriebenen Anordnung so, als wenn er mit der objectiven Helligkeit J selbstleuchtend wäre.

von der Grösse χ bedeckt, so ist die wirkliche Beleuchtungsintensität i

$$(3) \qquad i = \frac{Q\,(F-\chi)\,J}{k^2}.$$

4. Dieses wäre also die Lichtmenge, welche in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der beobachteten Retina fällt.

Die Lichtmenge l, welche die Flächeneinheit der Netzhaut durch die Pupille zurückstrahlt, ist gleich

$$(4) \qquad l = C\,F\,i = \frac{Q\,C\,F\,(F-\chi)\,J}{k^2}$$

worin C die früher erwähnte Constante bedeutet (vgl. I, 8 Gl. 4).

5. Die Lichtmenge l verbreitet sich nach dem Durchgange durch die Linsen L_1, L_2 auf ein kreisförmiges Stück (φ) des Spiegels, wovon ein Theil (g) durch die Spiegelöffnung eingenommen wird.

Von der Lichtmenge l tritt also der Bruchtheil $\frac{g}{\varphi}$ durch die Spiegelöffnung in die beobachtende Pupille ein. Bezeichnen wir also mit λ die Lichtmenge, welche die Flächenheit der Netzhaut in der Zeiteinheit der Pupille des Beobachters zusendet, so ist

$$\lambda = \frac{g}{\varphi}\,l = \frac{g}{\varphi} \cdot \frac{Q\,C\,F\,(F-\chi)\,J}{k^2}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\lambda = \frac{Q\,C\,F^2\,J}{k^2} \cdot \frac{g}{\varphi}\left(1 - \frac{\chi}{F}\right).$$

Nun ist der Gl. 1 zu Folge

$$\frac{g}{\varphi} = \frac{\chi}{F}.$$

Mithin ist

$$(5) \qquad \lambda = \frac{Q\,C\,F^2\,J}{k^2} \cdot \frac{g}{\varphi}\left(1 - \frac{g}{\varphi}\right).$$

Die Gleichung zeigt, dass bei gegebener objectiver Helligkeit J der Flamme und bei gegebener Grösse F der beobachteten Pupille, die Lichtmenge λ abhängig ist von dem Verhältnisse des Flächeninhaltes g der Spiegelöffnung zu dem Flächeninhalte φ des Bildes, welches die Linsen L_1, L_2

von der beobachteten Pupille auf dem Spiegel entwerfen. Die Bildgrösse φ kann nach Massgabe der den Linsen ertheilten Brennweiten beliebig verändert werden. Die Spiegelöffnung g können wir ebenfalls von Null bis zur Pupillengrösse des beobachtenden Auges variabel denken. Lässt man g und φ sich gleichzeitig ändern, und zwar so, dass der Quotient $\frac{g}{\varphi}$ einen bestimmten Werth behält, so bleibt auch die Lichtmenge λ dieselbe.

Setzen wir

$$\frac{g}{\varphi} = x$$

und denken wir in der Gleichung

$$(5') \qquad \lambda = \frac{Q\,C\,F^2\,J}{k^2}\,x\,(1-x)$$

x als die unabhängige, λ als die abhängige Variable, so ergibt sich der Werth von x, für welchen λ ein Maximum wird, aus der Gleichung

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{Q\,C F^2\,J}{k^2}(1-2\,x) = 0$$

$$x = \tfrac{1}{2}.$$

6. Setzen wir diesen speciellen Werth von x in die Gl. 5′ ein, so erhalten wir die grösstmögliche Lichtmenge M, welche die Flächeneinheit der Netzhaut der beobachtenden Pupille zuschickt[1]).

$$(6) \qquad M = \frac{Q\,C\,F^2\,J}{4\,k^2}.$$

7. In der Gleichung

$$(5') \qquad \lambda = \frac{Q\,C\,F^2\,J}{k^2}\,x(1-x)$$

hat die Grösse x eine analoge Bedeutung wie die Grösse

1) Der Spiegel ist der Einfachheit wegen als senkrecht zu der Linie $p\,o$ stehend angenommen worden. Dieselbe Formel ergibt sich jedoch auch, wenn die Neigung des Spiegels gegen die Axe $p\,o$ mit berücksichtigt wird.

α in der auf den Augenspiegel mit Glasplatte bezüglichen Gleichung (vgl. I, 9. Gl. 5)

$$\lambda = \frac{C F^2 J}{k^2} \alpha (1 - \alpha).$$

α ist nämlich der Bruchtheil der von der Netzhaut herkommenden Lichtmenge, welche durch die Glasplatte hindurch, und entsprechend ist $x = \frac{g}{\varphi}$ der Bruchtheil des Lichtes, welcher durch die Oeffnung des Spiegels in das beobachtende Auge eintritt.

Denkt man die erste Columne der Tabelle (vgl. I, 11) mit x statt mit α überschrieben, so stellt dieselbe auch in Bezug auf die Gl. 5′ den Gang der Function λ bei wachsenden Werthen von x vor.

8. Die Lichtmenge λ wird ein Maximum, wenn

$$\frac{g}{\varphi} = \tfrac{1}{2}$$

wird. Nun ist der Gl. 2 (II, 2) zu Folge

$$\varphi = \frac{f_2{}^2}{f_1{}^2} F.$$

Damit also die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit der beobachteten Retina in das Auge des Beobachters sendet, ihren in der Gl. 6 ausgedrückten maximalen Werth erlange, müssen die Brennweiten der Linsen L_1, L_2 der Bedingung genügen

$$\text{(7)} \qquad \frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{F}{g}} = 0{,}71 \sqrt{\frac{F}{g}}$$

oder, wenn man den Durchmesser der beobachteten Pupille mit D, den der Spiegelöffnung mit T bezeichnet,

$$\text{(7')} \qquad \frac{f_1}{f_2} = 0{,}7 \frac{D}{T}.$$

9. In Bezug auf die Grösse des Netzhautbildes gilt dasselbe, was oben, (vgl. I, 13) hinsichtlich der durch die Fig. 1 vorgestellten Anordnung gesagt wurde. Es ist, wenn das beobachtete Auge auf die unendliche Ferne eingestellt ist,

$$\text{(8)} \qquad z = \frac{f_1}{f_2}$$

worin z wieder die Länge bezeichnet, in der sich die Längeneinheit der beobachteten Netzhaut auf der beobachtenden abbildet. Wenn die Brennweiten also der durch Gl. 7′ ausgedrückten Bedingung genügen, so ist

$$z = 0{,}7\,\frac{D}{T}.$$

Den kleinsten unter Einhaltung der Maximumbedingung der Lichtmenge zulässigen Werth nimmt z an, wenn T gleich dem Durchmesser der beobachtenden Pupille ist. Werden beide Pupillen ausserdem als gleich gross angenommen, so ist

$$z = 0{,}7.$$

Dieser kleinste Werth von z ist also ein anderer wie bei dem Augenspiegel mit Glasplatte, Fig. 1, wo z bei gleicher Grösse der beiden Pupillen unter Einhaltung der durch Gl. 1 (I, 3) ausgedrückten Bedingung nicht kleiner als eins werden kann.

10. Die Lichtmenge m, welche in dem Falle, wo λ ein Maximum wird, in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der beobachtenden Netzhaut fällt, ist gleich (vgl. Gl. 6 und Gl. 8)

$$(9) \qquad m = \frac{M}{z^2} = \frac{Q\;C\;F^2\;J}{4\,k^2} \cdot \frac{f_2{}^2}{f_1{}^2}$$

oder in Rücksicht auf Gl. 7

$$(9') \qquad m = \frac{Q\;C\;F\;J}{2\,k^2}\,g.$$

Wenn man bei einer gegebenen Pupillengrösse F des beobachteten Auges die Spiegelöffnung g verkleinert und zugleich die Brennweiten der Linsen L_1, L_2 der Gleichung 7 entsprechend abändert, so bleibt zwar die von der Flächeneinheit der beobachteten Retina in das beobachtende Auge eintretende Lichtmenge M (Gl. 6) ungeändert. Allein die auf die Flächeneinheit der beobachtenden Retina kommende Lichtmenge m (Gl. 9′) verkleinert sich, weil sich zugleich das Netzhautbild in dem Auge des Beobachters vergrössert.

Werden beide Pupillen als gleich gross angenommen, so kann $g = F$ werden. Die auf die Flächeneinheit der beobachtenden Retina fallende Lichtmenge m' ist alsdann

$$(9'') \qquad m' = \frac{Q\;C\;F^2\;J}{2\,k^2}.$$

Das Verhältniss der Brennweiten ist in diesem Falle (Gl. 7')

$$\frac{f_1}{f_2} = 0{,}7.$$

11. Das Gesichtsfeld bei der Anordnung Fig. 2 ist das gleiche wie bei der Anordnung Fig. 1. Vgl. I, 16. Gl. 12.

12. Es werde jetzt noch in Kürze angedeutet, wie die Anordnung zu treffen ist, wenn der Maximumbedingung der Lichtmenge mit Anwendung von nur zwei Linsen genügt werden soll, wovon die eine (A) zwischen den Spiegel und die beobachtete Pupille, die andere (B) zwischen den Spiegel und die Flamme gestellt wird.

Die Linse A muss auch in diesem Falle auf dem Spiegel von der beobachteten Pupille ein Bild entwerfen, dessen Flächeninhalt doppelt so gross ist wie der Flächeninhalt der Oeffnung im Spiegel.

Bezeichnen wir mit a und b die Abstände der Linse vom Spiegel und von der Pupille, mit f die Brennweite der Linse, mit q das Verhältniss des Durchmessers der Spiegelöffnung zu dem Durchmesser der beobachteten Pupille, so ist

$$a = (1 + 1{,}4\,q)\,f,$$

$$b = \frac{1 + 1{,}4\,q}{1{,}4\,q} f.$$

Hat die zweite Linse (B) die gleiche Apertur und Brennweite wie die Linse A, so ist ihre Entfernung von dem Spiegel gleich a, ihre Entfernung von der Flamme gleich b zu machen.

13. Wenn wir jetzt schliesslich die besprochenen Arten des Augenspiegels (Fig. 1 u. 2) hinsichtlich der Lichtmenge, welche sie bei gegebener Pupillengrösse des beobachteten Auges und gegebener objectiver Helligkeit der Flamme liefern, mit einander vergleichen, so ergibt sich Folgendes. Die maximale Lichtmenge M, welche die Flächeneinheit der beobachteten Netzhaut in der Zeiteinheit der beobachtenden Pupille zusendet, ist beim Augenspiegel mit Glasplatte (vgl. I, 10. Gl. 6)

$$M = \frac{C F^2 J}{4 k^2}$$

und beim durchbohrten Augenspiegel (vgl. II, 6. Gl. 6)

$$M = \frac{Q C F^2 J}{4 k^2}.$$

Diese beiden Formeln sind bis auf die in der letzteren Gl. vorkommende Grösse Q mit einander identisch. Die maximalen Lichtmengen verhalten sich also zu einander wie 1 zu Q, wobei Q den Bruchtheil des auffallenden Lichtes bezeichnet, welcher von dem Metallspiegel reflectirt wird. Der Vorzug gebührt also unter den günstigsten Bedingungen der Beobachtung dem Augenspiegel mit Glasplatte.

14. Die Vergleichung würde dagegen scheinbar zu Gunsten des durchbohrten Augenspiegels ausfallen, wenn man diese auf die maximale Lichtmenge beziehen wollte, welche die Flächeneinheit der beobachtenden Retina bei der kleinsten zulässigen Vergrössserung empfängt. Setzen wir beide Pupillen als gleich gross voraus, so gibt der Augenspiegel mit Glasplatte die kleinste mit der Bedingung I, Gl. (1) verträgliche Vergrösserung, wenn $f_1 = f_2$ und folglich

(I Gl. (8)) $$z = \frac{f_1}{f_2} = 1$$

$$z^2 = 1$$

ist. Die auf die Flächeneinheit der beobachtenden Netzhaut fallende Lichtmenge m' ist alsdann

(I, Gl. (10)) $$m' = \frac{C F^2 J}{4 k^2}.$$

Der durchbohrte Augenspiegel gibt bei Gleichheit der Pupillen die kleinste mit der Bedingung II Gl. (7) vereinbare Vergrösserung, wenn $g = F$ und mithin

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7$$

$$z = \frac{f_1}{f_2} = 0,7$$

$$z^2 = \frac{1}{2}$$

ist. Die Lichtmenge m' ist alsdann nach Gl. 9″

$$m' = \frac{Q C F^2 J}{2 k^2}.$$

Die Lichtmengen m' verhalten sich also zu einander wie $1 : 2\,Q$. Da nun ein guter Metallspiegel mehr als die

Hälfte des Lichtes reflectirt, so liegt der Werth von $2Q$ zwischen 1 und 2.

Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass die kleinste zulässige Vergrösserung in beiden Fällen eine verschiedene ist. In dem ersteren Falle ($z^2 = 1$) bildet sich die beobachtete Netzhaut auf der beobachtenden in ihrer natürlichen, in dem letzteren ($z^2 = \frac{1}{2}$) dagegen bloss in halber (flächenhafter) Grösse ab.

Bei der Anwendung des Augenspiegels mit Glasplatte wird also also unter den gedachten Umständen hinsichtlich der Vergrösserung mehr gewonnen als in Bezug auf die Beleuchtungsintensität auf der beobachtenden Netzhaut verloren geht.

15. Dazu kommt, dass die günstigsten Bedingungen der Beobachtung für den Augenspiegel mit Glasplatte bei Weitem leichter zu realisiren sind wie für den durchbohrten Metallspiegel.

Hat man die Glasplatte so aufgestellt, dass sie die Hälfte des Lichtes reflectirt (vgl. I, 12), so haben die Brennweiten der Linsen L_1, L_2 nur noch der Bedingung zu genügen (I, 3. Gl. 1)

$$\frac{f_1}{f_2} \geqq \frac{D}{\delta}$$

worin D und δ die Durchmesser der beobachteten und der beobachtenden Pupille bezeichnen.

Eine genaue Kenntniss des Grössenverhältnisses der beiden Pupillen ist hier also nicht erforderlich. Hat man z. B. zwei Linsen gewählt, bei denen das Verhältniss der Brennweiten

$$\frac{f_1}{f_2} = 2$$

ist, so kann sich der Durchmesser der beobachteten Pupille von Null bis zum doppelten Durchmesser der beobachtenden verändern, ohne dass deshalb die der Maximumbedingung entsprechende Lichtmenge aufhörte, in das Auge des Beobachters zu gelangen.

Anders aber verhält es sich bei dem durchbohrten

Augenspiegel. Hier haben die Brennweiten der ganz bestimmten Forderung zu genügen (II, 8. Gl. 7′)

$$\frac{f_1}{f_2} = 0{,}7\,\frac{D}{T}.$$

Hat man den Durchmesser T der Spiegelöffnung gleich dem der beobachtenden Pupille gemacht, und hat man unter der Annahme, dass beide Pupillen gleiche Grösse haben, zwei Linsen gewählt, bei denen das Verhältniss der Brennweiten gleich 0,7 ist, so wird im concreten Falle bei einer jeden Abweichung der beobachteten Pupille von jener schematisch angenommenen Normalgrösse eine geringere als die grösstmögliche Lichtmenge in das beobachtende Auge eindringen. Wenn hier der Fall einträte, dass die beobachtete Pupille sich auf die Hälfte der angenommenen flächenhaften Grösse verengte, so würde ihr Bild mit der Oeffnung des Spiegels coincidiren, und der Beobachter würde alsdann statt des erwarteten Maximums überhaupt gar kein Licht erhalten.

III. Augenspiegel mit polarisirender Reflexionsvorrichtung.

Ein weiterer Vorzug des Augenspiegels mit Glasplatte besteht darin, dass das Licht der Flamme von der Platte direct in das Auge des Beobachteten gelangt, ohne die Linsen, welche das Netzhautbild liefern, zu passiren. Von den störenden Reflexen bleibt also in diesem Falle nur noch der Hornhautreflex übrig. Auch dieser kann noch erheblich reducirt werden, wenn man statt einer einzelnen mehrere Glasplatten anwendet[1]).

Noch vollständiger dürfte sich dieser Zweck mittelst der polarisirenden Reflexionsvorrichtung erreichen lassen, welche ich — in einer etwas anderen Form, — in der Zeitschrift für Instrumentenkunde (Septemberheft 1882)

Helmholtz, Handbuch der physiol. Optik, S. 183.

vorgeschlagen habe. An die Stelle der Glasplatte *g* Fig. 1 treten, dicht bei dem beobachteten Auge, zwei gleichschenklige Kalkspathprismen, *a b c*, *d b c* Fig. 3, deren

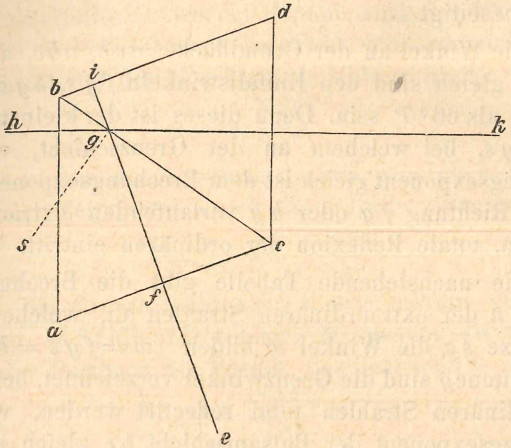

Fig. 3.

Grundflächen *b c*, wie bei einem Nicol, durch eine Balsamschicht getrennt sind. Die Krystallaxe *s g* steht senkrecht auf den Grundflächen *b c*; sie ist also zugleich das Einfallsloth.

Das von der Flamme herkommende Licht *e f* fällt senkrecht auf die Prismenfläche *a c*; bei dem Eintritte in den Kalkspath wird es in zwei Strahlensysteme zerlegt, welche sich nahezu in derselben Richtung fortpflanzen. Die extraordinären Strahlen *f g i* gehen durch die Grenzschicht hindurch und werden an der gegenüberstehenden geschwärzten Prismenfläche *b d* absorbirt; die ordinären *f g h* werden dagegen total zu der Pupille des Beobachteten reflectirt.

Das von der Netzhaut zurückkommende Licht ist depolarisirt. Bei dem Eintritt in den Kalkspath wird es ebenfalls in zwei Strahlensysteme zerlegt, die ordinären Strahlen *h g f e* werden total zur Flamme zurückgeworfen, die extraordinären *h g k* gehen hingegen durch die Grenzschicht hindurch und gelangen in das Auge des Beobachters.

Die von der Hornhaut gespiegelten Strahlen, welche ihre ursprüngliche Polarisationsrichtung beibehalten und daher nur als ordinäre in den Kalkspath eintreten, werden an der Grenzschicht total reflectirt, wodurch der Hornhautreflex beseitigt ist.

Die Winkel an der Grundfläche, *a c b*, *a b c*, *d c b*, *d b c*, welche gleich sind den Einfallswinkeln *f g s*, *h g s*, müssen grösser als 66° 7′ sein. Denn dieses ist der kleinste Winkel *f g s*, *h g s*, bei welchem an der Grenzschicht, wenn ihr Brechungsexponent gleich ist dem Brechungsexponenten der in der Richtung *f g* oder *h g* verlaufenden extraordinären Strahlen, totale Reflexion der ordinären eintritt.

Die nachstehende Tabelle gibt die Brechungsexponenten *n* der extraordinären Strahlen an, welche mit der Hauptaxe *s g* die Winkel *w* bilden ($w = f g s = h g s$). In der Columne *g* sind die Grenzwinkel verzeichnet, bei welchen die ordinären Strahlen total reflectirt werden, wenn der Brechungsexponent der Balsamschicht *b c* gleich *n* ist.

n	1,515	1,512	1,510	1,508	1,506	1,504	1,502	1,500
w	65°	66°7′	67	68	69	70	71	72
g	66°20′	66°7′	65°56′	65°44′	65°34′	65°24′	65°13′	65°5′
n	1,498	1,497	1,495	1,493	1,492	1,491	1,489	1,488
w	73	74	75	76	77	78	79	80
g	64°56′	64°48′	64°40′	64°32′	64°25′	64°19′	64°13′	64°8′

Der Winkel *w* ist, wie bemerkt, gleich den Winkeln an der Grundfläche, *a b c*, *a c b*, *d b c*, *d c b*. Sind also die letzteren Winkel beispielsweise gleich 72 Grad, so ist der Brechungsexponent der extraordinären Strahlen *h g*, *f g* gleich 1,500; hat nun die Grenzschicht *b c* denselben Brechungsexponenten, so werden die ausserordentlichen Strahlen vollständig durchgelassen, die ordentlichen aber werden total reflectirt, da der Grenzwinkel bei dem angegebenen Brechungsexponenten der Schicht $b\ c$ gleich $65^{0}5'$ ist.

Da die Hälfte des von der Flamme ausgehenden Lichtes gegen das zu beobachtende Auge hin reflectirt wird, so ist die Intensität (i) der Netzhautbeleuchtung gleich

$$i = \frac{F\,J}{2k^2}.$$

Die Lichtmenge l, welche die Flächeneinheit der Netzhaut in der Zeiteinheit durch die Pupille zurückwirft, ist

$$l = C\,F\,i = \frac{C\,F^2\,J}{2\;\mathrm{k}^2}.$$

Da die Grenzschicht von diesem Lichte die Hälfte durchlässt, so ist die Lichtmenge M, welche die Flächeneinheit der Netzhaut der Pupille des Beobachters zusendet,

$$M = \frac{C\,F^2\,J}{4k^2}.$$

Diese Lichtmenge M ist ebenso gross wie diejenige, welche der Augenspiegel mit Glasplatte unter Einhaltung der Maximumbedingung liefert (vgl. I, 10, Gl. 6).

IV. Augenspiegel ohne reflectirende Vorrichtung.

Der Augenspiegel kann auch ohne Anwendung einer lichtreflectirenden Vorrichtung construirt werden. Das Licht einer Flamme gehe zuerst durch ein doppelbrechendes Prisma und alsdann durch eine Sammellinse. Der Abstand der Linse von der Flamme sei beispielsweise gleich der doppelten Brennweite. Die Linse entwirft nun von der Flamme zwei Bilder. An den Ort des einen derselben, z. B. des ordinären, werde die Pupille des Beobachteten gebracht. Diese selbstleuchtend gedacht, giebt ihrerseits ebenfalls zwei Bilder; das ordinäre fällt in die Flamme selber, das extraordinäre dagegen zur Seite derselben. Befindet sich nun an dem Orte dieses letzteren Bildes die Pupille des Beobachters, so wird dieser das Bild der zu beobachtenden Netzhaut deutlich wahrnehmen, wenn die Brennweite der Linse etwas grösser als seine Nahpunktsweite ist. Der Hornhautreflex ist auch in diesem Falle beseitigt, da die regelmässig gespiegelten Strahlen die Polarisationsrichtung des ordinären Lichtes beibehalten und daher durch die Brechung im Prisma der Flamme zugelenkt werden. Das Gesichtsfeld wird jedoch, da Kalkspathprismen von genügender Grösse schwer zu beschaffen sind, ein verhältnissmässig kleines werden.

Bonn 21. 12. 1882.